arXiv:2603.12049v1 [math.RT] 12 Mar 2026

多参数持久模的度量完备的克鲁尔–施密特空间

ULRICH BAUER、CAMERON GUSEL 和 LUIS SCOCCOLA

Abstract. 我们证明，可观测范畴中的 q-驯服多参数持久模具有良好的度量性质和代数性质：相对于交错距离，它构成一个完备度量空间；并且它是克鲁尔-施密特的，即每个对象都存在本质上唯一的不可分解对象分解。此外，我们证明这些度量结构与代数结构彼此相容：两个对象的距离为零，当且仅当它们同构。我们通过证明文献中已经研究的许多范畴都是该范畴的全子范畴，说明 q-驯服多参数持久模的可观测范畴是研究多参数持久性的合适框架。我们还根据某些离散化的有限表示型刻画预紧集，并证明多参数持久性中的若干主要构造的像是预紧的。

Contents

1. 引言 2 1.1. 动机与背景 2 单参数持久性 2 q-温和模的可观测范畴 2 多参数持久性 3 温和性假设 3 度量性质 4 1.2. 主要贡献 4 1.3. 相关工作 5 2. 预备知识 5 2.1. 构造可观测范畴 7 2.2. 半连续性 8 2.3. 三重等价 9 3. 代数构造：分解结果 12 3.1. 下半连续模的加性分解 12 3.2. 上半连续模的乘法分解 15 4. 度量构造 17 4.1. 完备性 17 4.2. 交错持久集的上半连续性 19 4.3. 实现度量的交错的存在性 20 4.4. 可分性与紧致性结果 24 5. 应用 27 5.1. 下水平集持久性 27 5.2. 一般不可分解性 28 5.3. Degree-Rips 构造的紧致性 29 参考文献 30 附录 A. 近乎不可分解性的开性 33

1. Introduction

1.1. 动机与背景。 拓扑推断和拓扑数据分析中的一个核心概念是持久同调，它通过对按一个或多个参数索引的拓扑空间滤过应用同调而产生。其结果是一个持久模，即从指标偏序集 $\mathbb{R}^n$ 到向量空间范畴的函子；或者用表示论的语言来说，是偏序集 $\mathbb{R}^n$的一个表示。持久理论 不同于偏序集的表示论，因为它既研究持久模的代数性质，也研究其度量性质；这得益于持久模之间存在一种性质良好的距离，即交错距离 [Cha+09；Les15]。持久理论的应用遍及神经科学和生物学等多个科学领域 [Ben+24；Gar+22；Riz+17；SLM23], ，也包括纯数学领域，具体而言是几何与分析 [BCZ a; Buh+24a; Buh +24b; PS16; Pol+20; She22; UZ16]。

单参数持久性。 单参数持久性 理论（即 $n = 1$ 的情形）发展得相当成熟。通常将滤过的参数解释为几何尺度，并利用由此得到的单参数持久模，识别数据中在一定尺度范围内持续存在的拓扑特征。单参数持久性在科学与纯数学领域的应用，都依赖于两个基本结果：

(R1) 分解定理（又称结构定理）指出，单参数持久模可唯一分解为区间模 [CB15]。这些区间构成该模的条形码。(R2) 稳定性定理（又称等距定理）指出，单参数持久模之间的交错距离，等于其条形码之间某种最优匹配距离（即瓶颈距离） [BL15; CCBS16]。

这两项结果都不适用于任意单参数持久模；它们需要某些良驯性假设，因此后来出现了适用范围越来越广的版本（有限表示 [Cha+09; CSEH07;ZC05], 逐点有限维 [BL15; CB15], q-驯服 [CCBS16]）。

q-驯服模的可观测范畴。 *q*-驯服模的可观测范畴 [CCBS16]提供了一个最一般的框架，在此框架中，人们发展出了强大的代数理论和度量理论。简言之，一个*q*-驯服（可能是多参数的）持久模，是指其所有分量均严格递增的指标之间的结构映射都具有有限秩；拓扑数据分析中几乎所有相关的持久模实例都是 q-驯服的。“q-驯服”中的字母“q”代表“象限”；关于这一术语在单参数情形下的解释，见 [CCBS 16] 。通过对瞬逝模取商可得可观测范畴；瞬逝模是指所有分量均严格递增的指标之间的结构映射都为零的那些模，等价地说，它们与零模之间的交错距离为零 [HH24]。

q-温和单参数持久模的可观测范畴具有以下关键性质：

(P1) 该范畴是阿贝尔范畴，并且是克鲁尔-施密特范畴，即每个对象都以本质上唯一的方式分解为不可分解对象的直和。(P2) 两个持久模同构，当且仅当它们的交错距离为零。(P3) 由交错距离诱导的扩展度量是完备的，即持久模的每个柯西序列都有极限。

有关参考文献，见 [CCBS16，定理3.9和4.5] 关于(P1)和(P2)，以及 [BV18，定理 7] 关于(P3)。综合起来，这些性质提供了一种持久模理论，其中代数技巧(P1)与几何技巧(P3)可以以相容的方式(P2)加以应用。

起初，可能不容易看出为什么必须要求 q-温和性并转到可观测范畴。我们给出一些例子来说明这一点。若不转到可观测范畴，性质（P2）显然不成立；例如，与区间 (0，1) 和 $[0, 1]$ 对应的区间模的交错距离为零，但它们并不同构。即使在可观测情形下，若不假设 q-温和性，性质（P1）和（P2）也都不成立；参见例 3.13 和

[CCBS16，例 4.6], 。在所有（可能是多参数的）持久模构成的集合中，逐点有限维模构成的集合的闭包就是 q-温和模构成的集合，这也进一步说明了 q-温和性这一概念的意义：它还能使性质（P3）得以满足。

重要的是，上文所述 (P1) 与 (P2) 的证明依赖于结果 (R1) 与 (R2)，而这些结果不能推广到多参数持久模，我们现在对此进行讨论。

多参数持久性。面向拓扑推断的单参数持久性方法对由采样和有界噪声引起的数据小扰动是稳健的；然而，它对离群值等无界噪声并不稳健。为解决这一问题，已有研究提出使用多参数持久性 ($n \geq 2$) [CZ07], ，其中额外参数可用于控制离群值的影响 [BL24] ，或用于编码有关数据的额外信息 [CZ07]; 介绍参见 [BL23]。

从代数观点来看，多参数持久性在理论与实践两方面都显著更为复杂。在理论方面，结果 (R1) 不能推广，因为非线性偏序集 $\mathbb{R}^n$ 在 $n \geq 2$ 下具有野表示型 [Naz75] （即其不可分解表示无法被有效分类），并且 (R2) 同样不成立 [BS25], ，因为不可分解对象在交错距离下构成稠密集。在实践方面，交错距离的计算是 NP 困难的 [BBK20], ，而不可分解对象分解迄今尚不知是否可在三次时间内计算。尽管如此，近期若干工作已在多参数持久性的结构 [BL23; BOO24; Br25], 、稳定性 [BL24; Bot+24]以及可计算性方面取得实质性进展 [DJK25; LW22; MS25]。

温和性假设。仿照单参数持久性的发展历程，上述多参数持久性领域的奠基性研究通常假设所考虑的模是有限表示的，或以其他方式由离散偏序集参数化。

尽管有限表示的多参数持久模满足性质（P1）和（P2），但它们不满足性质（P3），且构成的模类相当受限，甚至比单参数情形下的限制更严格：例如，紧流形上的经典莫尔斯函数具有有限表示的下水平集单参数持久同调，而双变量莫尔斯函数的下水平集二参数持久同调通常并非有限表示（参见例如 [BK23] 中的例子）。

Miller [Mil25], 提出了一种更一般的多参数持久性良驯性概念，我们称之为*m*-温和，以避免与其他良驯性概念（例如 [CGL21；CJT24]）混淆。一个*m*-温和 n-参数持久模是一个函子 $M\colon \mathbb{R}^n \to \mathbf{Vect}$，它具有有限上集表示（也就是说，$M \cong \mathrm{cok}(Q \to P)$，其中 P 和 Q 可分解为上集的示性模）；参见 [Mil25, Theorem 6.12(4)]。m-温和模的概念比有限表示模更一般，例如，它涵盖了二维莫尔斯函数的下水平集持久性[BK23, Corollary 2.11], ，以及次解析可构造层 [Mil23, Theorem 4.5′]。然而，m-温和模不满足性质（P2）和（P3），且这一概念仍有局限：例如，m-温和模限制到任意一维切片后，必然得到一个在该切片上只有有限多个条带的单参数持久模。此外，m-温和模不满足性质（P1），因为它们并不构成所有多参数持久模范畴的阿贝尔子范畴[Mil25；Waa24]。

更一般的概念是逐点有限维模。这些模满足性质（P1） [BCB20], ，而性质（P2）并非严格成立，但可以通过转到可观测范畴来实现。即便如此，性质（P3）仍不成立，因为任何 q-驯服模都可以由逐点有限维模逼近 [CCBS16]。

由此，q-温和性成为良驯性条件的一个候选者，可用于建立良好的多参数持久性理论。值得指出的是，本文提出的将 q-温和性推广到多参数情形的做法，此前文献中尚未探讨过；但它自然地补足了瞬时多参数持久性模的概念 [BP21; HH24]。本文的一项主要贡献是证明了 q-驯服多参数持久模满足性质 (P1) 至 (P3)。这并非对单参数情形的简单推广，因为如上所述，

单参数情形中 (P1) 和 (P2) 的证明依赖于结果 (R1) 和 (R2)，而这些结果无法推广到多参数持久性。

度量性质。除了度量完备性之外，其他度量性质在处理持久模时也很便利；度量完备性意味着存在具有良好定义代数性质的极限对象。在单参数持久性的情形下，已有多项工作研究了此类性质[Blu+14; BSN17; BV18; Che+24; Cho19; PMK23]。这包括对可分性 [BV18, Theorem 4.18], 的研究；可分性与完备性共同意味着，q-温和单参数持久模的可观测范畴是波兰空间，这对于在持久模上定义概率测度具有重要意义。此外，还包括对预紧集 [PMK23, The-orem 3.7], 的刻画，这对于逼近持久模空间上的连续函数具有重要意义。这一分析尚未在多参数情形下展开。

正如我们在本文中所展示的，一旦确定了一个合适的多参数持久模空间，预紧集便可通过如下事实加以刻画：它们的所有离散化都具有有限表示型。从这个意义上说，度量条件（在此情形下为预紧性）使我们能够控制表示型。

1.2. **贡献**。

定理 1.1. 设 $n \geq 1$。*q*-驯服的 n 参数持久模的可观测范畴满足以下性质：

(P1) 该范畴是阿贝尔范畴且具有克鲁尔-施密特性质，也就是说，每个对象都能以本质唯一的方式分解为不可分解对象的直和。(P2) 两个持久模同构，当且仅当它们的交错距离为零。(P3) 由交错距离诱导的扩展度量是完备的，也就是说，每个持久模的柯西序列都有一个极限。

我们认为，q-驯服的 n 参数持久模的可观测范畴为多参数持久性提供了一个足够一般的框架，原因如下：许多重要的标准持久模范畴都作为满子范畴等距包含于其中。

注 1.2。q-驯服的 n 参数持久模的可观测范畴在等价意义下包含以下满子范畴：

- n 参数有限表示持久模的范畴。
- 可由某个连续函数 $f : X \to \mathbb{R}^n$ 作用于一个有限可三角剖分空间 X 所得到的下水平集持久性的 n 参数持久模范畴。
- 通过对某个有限伪度量空间应用 Degree-Rips 同调或 Subdivision-Rips 同调而得到的 2 参数持久模范畴。

这些包含映射将持久模映射到其在可观测范畴中的代表元；特别地，这些包含映射保交错距离。

特别地，可以考虑备注 1.2 中任一范畴的对象（同构类集合）的度量闭包，从而得到一个满足性质 (P1) 至 (P3) 的持久模范畴。对于有限表示持久模范畴，这一闭包被用于 [BS25] 中，以证明不可分解性是有限表示多参数持久模空间闭包中的一个泛性质（见 [BS25，备注 1.5]）。我们在推论 4.24 中给出了有限表示持久模对象（同构类集合）的度量闭包的显式刻画，并将其记为 $\mathbf{bg}_n$。

为方便起见，我们将由可观测的 q-驯服 n-参数持久模的同构类构成、并赋予交错距离的扩展度量空间记为 $\mathcal{M}_n^{\mathbb{k}}$。

我们陈述下一个命题所需的一个重要工具，是对持久模 $S_\varepsilon V$ 进行平滑化 V。对于 $\varepsilon \geq 0$，我们定义 $S_\varepsilon V = \mathrm{im}(\eta_\varepsilon \colon V \to V[\varepsilon])$。我们注意到，当 $\varepsilon \to 0$时， $S_\varepsilon V \to V$在交错距离下。由于我们在 q-驯服的框架下工作，通过$\varepsilon > 0$ 对模进行平滑化总会得到一个逐点有限维模，从而简化一个可能相当复杂的模。

下一个结果刻画了 $\mathcal{M}_n^{\Bbbk}$ 中的预紧集，并说明了 $\mathbf{bg}_n$ 的可分性。特别地，一个集合 $A \subseteq \mathcal{M}_n^{\Bbbk}$ 的预紧性等价于 A 的某些离散化具有有限表示型。

命题1.3。设 $n \geq 1 \in \mathbb{N}$。

- 集合 $A \subseteq \mathcal{M}_n^{\Bbbk}$ 是相对紧的，当且仅当集合 $\{S_\varepsilon V|_{\varepsilon\mathbb{Z}^n} : V \in A\}$ 对于每个 $\varepsilon > 0$都只有有限个同构类。
- 空间 $\mathbf{bg}_n$ 是可分的，当且仅当域 $\Bbbk$ 是可数的，或者 $n = 1$。

接下来的结果指出了两种常见情形，在这些情形下，所关注的多参数持久模集合自动是相对紧的。

定理1.4。设 $n \geq 1 \in \mathbb{N}$ 并设 $k \geq 0 \in \mathbb{N}$。

- 设 X 是一个有限可三角剖分的空间。若 $F \subseteq C(X; \mathbb{R}^n)$ 一致有界且等度连续，则 $H_k(F) \subseteq \mathcal{M}_n^{\Bbbk}$ 相对紧。
- 设 Y 是一个紧致度量空间，令 S 为 Y的有限样本集合，每个样本都赋予归一化计数测度。令 G表示与 H_k复合后的 *Degree-Rips* 或 *Subdivision-Rips* 构造。则 $G(S) \subseteq \mathcal{M}_n^{\Bbbk}$ 相对紧。

定理 1.4 的一个重要示例包括任意一组光滑映射 $f : X \to \mathbb{R}^n$ 从紧黎曼流形 X 到 $\mathbb{R}^n$，且具有一致有界的 $W^{2,\infty}$ 范数。

1.3. **相关工作**。 定理 1.1 中 (P1) 的证明关键依赖于一种新颖构造（定义 3.1），它将一个范畴中的 q-tame 表示与另一个范畴中的逐点有限维表示联系起来（见推论 3.8 的证明）。这使我们能够利用 pdf 模 [BCB20] 的分解结果，即使在 q-tame 情形下也如此（只要我们在可观测范畴中工作）。

与 (P2) 类似的结果由 Petit、Schapira 和 Waas 独立得出 [PSW25]，他们证明，对于一类可构造层，交错距离能够反映同构。他们的方法利用了 γ-层与满足特定微支撑条件的标准拓扑下的层之间的导出等价（见 [BP21]）。然而，他们的设定要求满足 可构造性（即存在一个有限分层，使得层在其上局部常值），这比 q-驯服性严格得多。Guillermou 和 Viterbo 的另一项相关结果 [GV24]表明，微局部层论中一种值得关注的度量能够反映同构（在满足某些可构造性假设的条件下）。为证明 (P2)，我们采用了一种更直接的方法，不依赖微局部层论和导出范畴，同时允许条件更为一般。正如 [CCBS16], 所示，若不失去 (P2)，就不可能以任何合理的方式放宽这些条件。我们的证明策略是独立发展出来的，并在最后一位作者的博士论文 [Sco20 第 4.5 节中概述。该论文在 [GV24 之前公开；PSW25]。

（P3）的证明遵循一种依赖范畴极限的一般论证，该论证在单参数持久模的情形下见于 [BV18], 并在一个不同的背景下见于 [Cru19] ，而在那里（P1）和（P2）并不成立。本文的新意在于找到一种合适的设定，使该论证得以实施，同时仍满足（P1）和（P2）。

关于命题1.3，Cruz 曾在一次报告中宣布了一个类似但不同的结果 [Cru20]。我们的结果与 Cruz 的结果不同之处在于，Cruz 的结果适用于一个不等价于 q-温和模的可观测范畴的范畴；例如，该范畴不满足定理 1.1 中的性质（P1）和（P2）。

2. Preliminaries

我们用 $\mathbb{R}^n$ 表示被视为拓扑空间或向量空间的实 n-空间，而在将其视为偏序时则记为$\mathbf{R}^n$ ，该偏序由（$\mathbf{R}$ $\leq$）的 n重积得到。我们用 $\leq$ 表示该积上通常的序关系，用 $\ll$ 表示在每个分量上都严格小于的关系。全文中我们固定一个基域 $\Bbbk$以及相应的（有限维）向量空间范畴$\mathbf{Vect}$ （分别为$\mathbf{vect}$）。一个 n-参数持久模 是一个函子

$$V : \mathbf{R}^n \to \mathbf{Vect}.$$

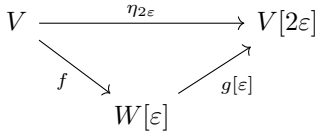
换言之， V 是偏序集$\mathbf{R}^n$的一个 $\Bbbk$-表示。更一般地，持久模可以在任意偏序集上定义。对于$\mathbf{R}^n$ 中的 $s \leq t$ ，我们将映射 $V_s \to V_t$ 记为 V_{st}。一个 n-参数持久集是函子 $S : \mathbf{R}^n \to \mathbf{Set}$。

我们称一个持久模是逐点有限维 的，如果每个 V_t 都是有限维的。一个 n参数持久模 V 是q-驯服的，如果所有映射$V_{s-\varepsilon,\ s}$ 都具有有限秩。于是，由对角线的余终性可知，所有满足 $s \ll t$ 的 V_{st} 都具有有限秩。如果$\mathbf{C}$ 是持久模的一个范畴，那么我们用$\mathbf{pfdC}$ 或$\mathbf{qtC}$ 分别表示逐点有限维模或$\mathbf{q}$-驯服模构成的全子范畴。

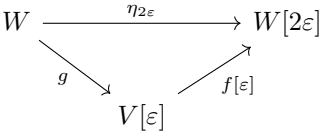
如果 $s \in \mathbb{R}^n$， $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ，那么 $s + \varepsilon$ 表示通过将 ε 加到 s的每个分量上得到的向量。如果 V是一个 n参数持久模，那么由 $V[\varepsilon]_s = V_{s+\varepsilon}$ 定义的 $V[\varepsilon]$ （其结构映射也相应平移）称为 V 平移 ε所得的模。固定 $\varepsilon > 0$。则结构映射 $V_s \to V_{s+\varepsilon}$ 定义了一个持久模态射 η_ε^V。如果上下文已清楚表明 V，我们便省略它。设 V， W为 n参数持久模，并设 $\varepsilon \geq 0$。 V 与 W 之间的一个 ε-交错 由态射组成

$$f : V \to W[\varepsilon] \text{ and } g : W \to V[\varepsilon]$$

使得这些图表



and



可交换。我们称 V, W 是 ε-交错的。注意，0-交错即为同构。接下来令

$$d_I(V, W) = \inf\{\varepsilon \geq 0 : V, W \text{ are } \varepsilon\text{-interleaved}\}$$

我们称之为 V 和 W 之间的交错距离。注意， $d_I(V, W) = \varepsilon$并不一定意味着 V 和 W 是 ε-交错的。特别是， $d_I(V, W) = 0$并不能得出同构$V \cong W$。不难证明， d_I 具有对称性且满足三角不等式。因此， d_I 是一个取值于 $[0, \infty]$ 的伪度量。

设$\mathbf{P}$ 为一个偏序集，且令 $s \in \mathbf{P}$。我们将模 P_s 定义为：在 s 的上集上取值为 $\Bbbk$，其他位置取值为 0。作为态射，我们尽可能插入恒等映射，其余结构映射均取零。若一个$\mathbf{P}$ 上的模 V可以写成如下形式，则称其为有限可表：

$$\operatorname{cok}\left(\bigoplus_{j \in J} \mathsf{P}_j \to \bigoplus_{i \in I} \mathsf{P}_i\right)$$

其中 I, J 是$\mathbf{P}$中元素的有限多重集。

若 $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P}$ 是子偏序集的包含映射，且 V是 $\mathbf{P}$ 上的模，则通过与 $\mathbf{Q}$ 到 $\mathbf{P}$的包含映射进行预复合，我们得到限制模$V|_{\mathbf{Q}}$ 。

$\mathbf{R}^n$ 中的有限网格是积 $\{\varepsilon_1 < \cdots < \varepsilon_k\}^n$，其中 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \in \mathbf{R}$。可数网格是无聚点的序列 $\varepsilon_k \in \mathbf{R}$ $k \in \mathbb{Z}$ 的 n 重积。若可数网格形如 $(\varepsilon\mathbf{Z})^n$ （对某个 $\varepsilon > 0$），则称其为正则的。

设$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{R}^n$ 为可数或有限网格，并设 V为$\mathbf{P}$上的模。我们如下定义延拓$\sim V : \mathbf{R}^n \to \mathbf{Vect}$

$$\widetilde{V}_s = \begin{cases} V(\sup\{p \in \mathbf{P} : p \leq s\}) & \text{there is some } p \in \mathbf{P} \text{ with } p \leq s \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中结构映射来自 V 的结构映射，这里我们利用如下事实：每当 $s \le t$ 且存在某个 $p \in \mathbf{P}$ 使得 $p \le s$ 时，有$\sup\{p \in \mathbf{P} : p \le s\} \le \sup\{p \in \mathbf{P} : p \le t\}$。我们将这种形式的模称为$\mathbf{P}$-延拓；我们进而也说它定义在$\mathbf{P}$上。设 V为一个 n参数模，并设$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{R}^n$ 为可数或有限网格。我们用 $V_{\mathbf{P}}$ 表示先限制到 $\mathbf{P}$ 再进行延拓所得到的模。我们将这一过程称为限制-扩张。该构造是函子性的。我们陈述关于网格延拓的两条引理。

引理 2.1. 设 V 为一个逐点有限维的 n-参数模。当且仅当存在有限网格 $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{R}^n$ 使得 $V \cong V_{\mathbf{P}}$时， V 是有限可表示的。

引理 2.2. 设$\mathbf{P}$ 是$\mathbf{R}^n$ 中的有限或可数网格，且 V定义在$\mathbf{P}$上。设 $s < t$，使得每个满足 $p \le t$ 的网格点 p 也满足 $p \le s$。则 $V_{s,t}$ 是一个同构。

第一条引理的证明见 [BS25]。

2.1. **构造可观测范畴。** 我们需要的最重要工具是 n-参数持久模的可观测范畴。它由所有持久模组成，但将交错距离无法检测到的特征视为零。为此，我们对瞬逝模进行局部化；这些模恰好是与零模距离为零的模。我们紧密遵循并推广了 [CCBS16], 的方法，该方法处理单参数模的情形。以下结果的更一般论述见 [HH24], ，其中使用了 Scott 层的语言。相比之下，我们在$\mathbf{R}^n$上的模这一背景下，明确地进行所有构造。

我们先介绍局部化的概念，以便定义多参数持久模的可观测范畴：

定义 2.3. 设 $\mathbf{A}$ 是一个阿贝尔范畴。全子范畴 $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{A}$ 是一个*Serre* 子范畴，若对每个短正合列

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0$$

在$\mathbf{A}$ 中，下列命题等价：

(1) V'，$V'' \in \mathbf{E}$。

（2） $V \in \mathbf{E}$。

态射 $\varphi : V \to W$ 在$\mathbf{A}$ 中是弱等价，当且仅当 $\ker\varphi$ 和 $\operatorname{cok}\varphi$ 属于$\mathbf{E}$。上述条件保证弱等价的复合仍是弱等价：若 $\varphi : U \to V$，$\psi : V \to W$是弱等价，则有正合列

$$0 \longrightarrow \ker\varphi \longrightarrow \ker\psi\circ\varphi \longrightarrow \ker\psi \longrightarrow \operatorname{cok}\varphi \longrightarrow \operatorname{cok}\psi\circ\varphi \longrightarrow \operatorname{cok}\psi \longrightarrow 0$$

这表明 $\psi \circ \varphi$ 也是弱等价。

映射 *Serre* 局部化 $\pi : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/\mathbf{E}$ 是一个将弱等价映为同构的函子，并具有如下泛性质：任何其他具有此性质的函子都可经由 π 分解。

定义 2.4. 若一个 n-参数模 V 是短暂的，则对所有 $s \in \mathbf{R}^n$ 和所有 $\varepsilon > 0$，映射$V_{s-\varepsilon,s}$ 均为零。我们用$\mathbf{Eph}_n$ 表示短暂模范畴。

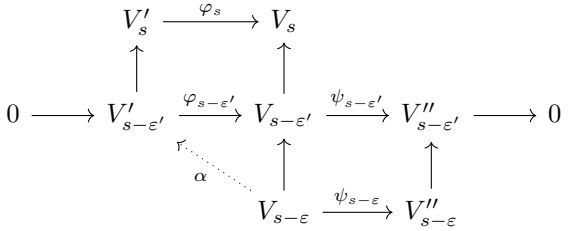
引理 2.5. $\mathbf{Eph}_n \subseteq \mathbf{Pers}_n$ 是一个 *Serre* 子范畴。

证明。 我们考虑一个短正合列

$$0 \longrightarrow V' \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} V'' \longrightarrow 0$$

在$\mathbf{Pers}_n$中。若 V是瞬逝的，那么 V'和 V''也必定如此，因为它们分别是子模和商。反过来，设 V'和 V''是瞬逝的。设 $\varepsilon > 0$。选取某个 $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ 并考虑

图表



由于 $\psi_{s-\varepsilon'} \circ V_{s-\varepsilon',s-\varepsilon} = V''_{s-\varepsilon',s-\varepsilon} \circ \psi_{s-\varepsilon} = 0 \circ \psi_s = 0$ 虚线箭头存在，且使得所有图表交换。因此 $V_{s-\varepsilon,s}$ 可经由 $V'_{s-\varepsilon',s} = 0$ 分解，证毕。□

现在我们的目标是将 $\mathbf{Pers}_n$ 关于 $\mathbf{Eph}_n$ 局部化。我们首先给出可观测范畴的明确构造，并将在本章末证明它满足 $\mathbf{Pers}_n/\mathbf{Eph}_n$ 的泛性质。

定义 2.6. 我们如下定义 可观测范畴 $\mathbf{Ob}_n$ ： 其对象为 n-参数持久模。$\mathbf{Ob}_n$ 中的一个态射 φ : $V \to W$ 由一族映射 $\varphi_{s,s+\varepsilon}$: $V_s \to W_{s+\varepsilon}$（对 $s \in \mathbf{R}^n, \varepsilon > 0$ ）构成，使得

$$\begin{array}{ccc} V_s & \xrightarrow{\varphi_{s,s+\varepsilon}} & W_{s+\varepsilon} \\ \downarrow & & \uparrow \\ V_{s+\varepsilon''} & \xrightarrow{\varphi_{s+\varepsilon'',s+\varepsilon'}} & W_{s+\varepsilon'} \end{array}$$

对所有 $0 \le \varepsilon'' < \varepsilon' \le \varepsilon$ 都成立。我们也称这些为可观测态射。对于 φ: $U \to V$ 和ψ : $V \to W$，其中属于 $\mathbf{Ob}_n$ ，我们定义

$$(\psi \circ \varphi)_{s,s+\varepsilon} = \psi_{s+\varepsilon',s+\varepsilon} \circ \varphi_{s,s+\varepsilon'}$$

对于某个 $0 < \varepsilon' < \varepsilon$。根据上文，这与所选的中间标量无关。模 V 上的恒等映射由结构映射给出: $\mathsf{id}_V = (V_{s,s+\varepsilon})_{s \in \mathbf{R}^n, \varepsilon > 0}$。结合律显然成立。

注意，若 φ: $V \to W$ 是通常意义下持久模之间的态射，那么我们可以通过 $\varphi_{s,s+\varepsilon} = W_{s,s+\varepsilon} \circ \varphi_s$ 将其解释为可观测态射。这定义了一个函子

$$\pi : \mathbf{Pers}_n \to \mathbf{Ob}_n.$$

稍后我们将看到，$(\mathbf{Ob}_n, \pi)$ 满足 Serre 局部化的泛性质。

注 2.7。 在以下意义下，q-驯服是一种可观测性质：若 V, W 是模，且$V \cong W$ 属于可观测范畴，并且 V 是 q-驯服的，那么 W 也同样是 q-驯服的。事实上，若我们有一个可观测同构 φ : $W \to V$，那么可以将结构映射 $W_{s-\delta,s}$ 写作

$$W_{s-\delta} \xrightarrow{\varphi_{s-\delta,s-\delta'}} V_{s-\delta'} \longrightarrow V_{s-\delta''} \xrightarrow{\varphi^{-1}_{s-\delta',s}} W_s$$

其中间项具有有限像。另一方面，逐点有限维并不是可观测性质：若 E 是非零的短暂模，那么 $\bigoplus_{i=1}^{\infty} E$ 就不再是逐点有限维的。尽管如此，它在可观测范畴中仍与 0 同构。

2.2. **半连续性**。 本章中的定义是从 [Sch22] 中的定义推广而来的。

定义 2.8。 一个 n-参数模 V 若典范映射下半连续 （相应地，上半连续），则称其为下半连续（相应地，上半连续）。

$$\operatorname*{colim}_{s-\varepsilon} V_{s-\varepsilon} \to V_s$$

相应地

$$V_s \to \lim_{s+\varepsilon} V_{s+\varepsilon}$$

对所有 $s \in \mathbf{R}^n$ 都是一个同构。我们将下半连续模的范畴记作 $\mathbf{Lsc}_n$ ，将上半连续模的范畴记作 $\mathbf{Usc}_n$ 。

注 2.9。 下半连续条件的一种等价写法是

$$V_s = \bigcup_{\varepsilon>0} \operatorname{im} V_{s-\varepsilon,s}$$

对所有 $s \in \mathbf{R}^n$。

推论 2.10。 模 V 是下半连续的，当且仅当 $V \cong$ 余极限$_{\varepsilon>0}\ V[-\varepsilon]$。对偶地， V 是上半连续的，当且仅当 $V \cong$ 极限$_{\varepsilon>0} V[\varepsilon]$。

定义 2。 **11.** 设 V 为一个 n-参数持久模。我们通过取 V 构造一个模，

$$\overline{V}_s = \operatorname*{colim}_{\varepsilon>0} V_{s-\varepsilon}$$

其结构映射由相应的余极限定义。由余极限的函子性，这确实定义了一个持久模，也称为 V 的下包络 。对偶地，取

$$\underline{V}_s = \lim_{\varepsilon>0} V_{s+\varepsilon}$$

定义了一个模 V, 称为 V 的 上包络 。由余极限的泛性质，我们得到一个映射 $\xi^V\colon V \to V$，它由结构映射组装而成。存在一个对偶映射 $\zeta^V\colon V \to V$。

设 $\varphi : V \to W$ 是 n-参数持久模之间的一个可观测态射。固定某个 $\delta > 0, s \in \mathbf{R}^n$ ，并令 $\varepsilon > \delta > 0$。于是我们有映射

$$V_{s-\varepsilon} \to W_{s-\delta} \to \overline{W}_s$$

这些映射与 δ 的选取无关。令 $\varphi_s\colon V_s \to W_s$ 为将余极限的泛性质应用于上述数据所得的映射。同样，由余极限的函子性，我们得到一个函子

$$\bar{\cdot} : \mathbf{Ob}_n \to \mathbf{Pers}_n$$

对偶构造则给出一个函子

$$\underline{\cdot} : \mathbf{Ob}_n \to \mathbf{Pers}_n.$$

我们分别将它们称为下 包络函子和上包络函子。

引理 2.12。 设 V 是 q-驯服的。那么 $\bar{V}$ 也是 q-驯服的。

证明。 设 $s \ll t$ 并选择 $\delta > 0$ 使得 $s \ll t - \delta$。于是我们可以将其分解为

$$\overline{V}_{s,t} = \overline{V}_s \to V_s \to V_{t-\delta} \to \overline{V}_t$$

这表明了所述结论，因为 $V_s \to V_{t-\delta}$ 具有有限像。 □

2.3. 三**重等价**。 本节的目标是建立以下等价

$$\mathbf{qtLsc}_n \simeq \mathbf{qtOb}_n \simeq \mathbf{qtUsc}_n.$$

为此，我们证明存在伴随

$$\bar{\cdot} \dashv \pi \dashv \underline{\cdot}$$

并且将它们限制到相应的子范畴后，这些伴随就是伴随等价。这些等价以及我们所用伴随的存在性，已在 [CCBS16]中提及。这条等价链将使我们能够灵活地针对不同目的，总是选择一个合适的可观测范畴实现形式。

命题 2.13. 我们有一条伴随链

$$\bar{\cdot} \dashv \pi \dashv \underline{\cdot}.$$

证明。 我们证明伴随 $\cdot \dashv \pi$，另一部分完全对偶。我们需要建立自然双射

$$\mathrm{Hom}(\overline{V}, W) \cong \mathrm{Hom}(V, \pi(W))$$

对于 $V \in \mathbf{Ob}_n$ 和 $W \in \mathbf{Pers}_n$。我们首先构造映射

$$(\cdot)^\flat : \mathrm{Hom}(\overline{V}, W) \to \mathrm{Hom}(V, \pi(W)).$$

若 $\varphi : \overline{V} \to W$，我们定义 $\varphi^\flat : V \to \pi(W)$ 为 $\varphi^\flat_{s-\varepsilon,\, s} = \varphi_s \circ \mathsf{inc}_{s-\varepsilon,\, s}$ 其中 $\mathsf{inc}_{s-\varepsilon} : V_{s-\varepsilon,\, s} \to \overline{V}_s$ 是到余极限中的包含映射。令 $\varepsilon \geq \varepsilon' > \varepsilon'' \geq 0$，并考虑图表

$$\begin{array}{ccccc} V_{s-\varepsilon} & \xrightarrow{\mathrm{inc}_{s-\varepsilon,s}} & \overline{V}_s & \xrightarrow{\varphi_s} & W_s \\ \downarrow & & \uparrow & & \uparrow \\ V_{s-\varepsilon'} & \xrightarrow[\mathrm{inc}_{s-\varepsilon',s-\varepsilon''}]{} & \overline{V}_{s-\varepsilon''} & \xrightarrow[\varphi_{s-\varepsilon''}]{} & W_{s-\varepsilon''} \end{array}$$

左侧方块由构造可交换，右侧方块可交换，因为 φ 已经是持久模之间的态射。因此， $\varphi^\flat$ 确实是一个可观测态射。现在我们构造映射

$$\mathrm{Hom}(\overline{V}, W) \leftarrow \mathrm{Hom}(V, \pi(W)) : (\cdot)^\sharp.$$

设 $\psi : V \to \pi(W)$ 是一个可观测态射。对于所有 $s \leq t$ 和所有 $\varepsilon > 0$，图表

$$\begin{array}{ccc} V[-\varepsilon]_s & \xrightarrow{\psi_{s-\varepsilon,s}} & W_s \\ \downarrow & \searrow^{\psi_{s-\varepsilon,t}} & \downarrow \\ V[-\varepsilon]_t & \xrightarrow[\psi_{t-\varepsilon,t}]{} & W_t \end{array}$$

可交换。因此我们有态射

$$\psi^\varepsilon : V[-\varepsilon] \to W$$

并且由于

$$\overline{V} = \operatorname*{colim}_{\varepsilon > 0} V[-\varepsilon]$$

我们可以取

$$\psi^\sharp = \operatorname*{colim}_{\varepsilon > 0} \psi^\varepsilon$$

根据构造，这是一个持久模的态射。现在验证这些构造确实互为逆。设 $\varphi : V \to W$ 是一个持久模的态射。那么

$$\varphi^{\flat\sharp}_s = \operatorname*{colim}_{\varepsilon > 0} \varphi^\sharp_{s-\varepsilon,s} = \operatorname*{colim}_{\varepsilon > 0} (\varphi_s \circ \mathrm{inc}_{s-\varepsilon,s}) = \varphi_s$$

因为从 V_s 出发的映射完全由它在余极限各组成部分上的取值确定。反过来，设 $\psi : V \to \pi(W)$ 是一个可观测态射。于是我们可以计算

$$\psi^{\sharp\flat}_{s-\varepsilon,s} = \psi^\sharp_s \circ \mathrm{inc}_{s-\varepsilon,s} = \operatorname*{colim}_{\delta > 0} (\psi_{s-\delta,s}) \circ \mathrm{inc}_{s-\varepsilon,s} = \psi_{s-\varepsilon,s}$$

这表明 $\sharp$ 和 $\flat$ 互为逆。由于所有构造都是典范的，自然性随之成立。 □

命题 2.14. 上述伴随成为伴随等价

$$\mathbf{Lsc}_n \simeq \mathbf{Ob}_n \simeq \mathbf{Usc}_n$$

在适当限制后。

证明。 我们再次关注 $\cdot \dashv \pi$ 情形。要证明这是一个伴随等价，只需证明单位

$$\eta_V : V \to \pi(\overline{V})$$

以及余单位

$$\varepsilon_W : \overline{\pi(W)} \to W$$

对于所有 $V \in \mathbf{Ob}_n$ 和 $W \in \mathbf{Lsc}_n$，它们都是同构。单位由此产生：

$$(\cdot)^\sharp : \mathrm{Hom}(\overline{V}, \overline{V}) \to \mathrm{Hom}(V, \pi(\overline{V}))$$

$$\mathrm{id}_{\overline{V}} \mapsto \eta_V$$

而余单位由以下方式得到

$$(\cdot)^\sharp : \mathrm{Hom}(\pi(W), \pi(W)) \to \mathrm{Hom}(\overline{\pi(W)}, W)$$

$$\mathrm{id}_{\pi(W)} \mapsto \varepsilon_W$$

设 $\varepsilon,\ \delta > 0$。注意，我们有 $\eta_{V,\ s-\varepsilon,\ s} = \mathsf{inc}_{s-\varepsilon,\ s}$，并回想我们有一个典范映射 $\xi^V\colon\ V \to V$，方向相反。映射 $\xi^V_{s,\ s+\delta}$ 由结构映射 $V_{s-\delta'} \to V_s \to V_{s+\delta}$ 粘合而成。因此，复合

$$V_{s-\varepsilon} \xrightarrow{\mathrm{inc}_{s-\varepsilon,s}} \overline{V}_s \xrightarrow{\xi^V_{s,s+\delta}} V_{s+\delta}$$

就是结构映射 $V_{s-\varepsilon} \to V_{s+\delta}$。反过来，考虑复合

$$\overline{V}_{s-\varepsilon} \xrightarrow{\xi^V_{s-\varepsilon,s}} V_s \xrightarrow{\mathrm{inc}_{s,s+\delta}} \overline{V}_{s+\delta}$$

这是限制映射 $V_{s-\varepsilon} \to V_{s+\delta}$ 的一个分解。因此，$\overline{\eta_V}$ 是一个可观测同构，其逆为 ξ^V。对于余单位，我们注意到

$$\varepsilon_{W,s} = \operatorname*{colim}_{\varepsilon>0} W_{s-\varepsilon,s}$$

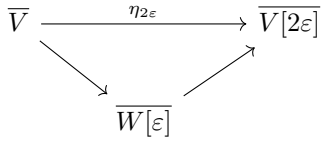
根据下半连续性，这定义了一个同构。 □

推论 2.15. 我们有一条等价链

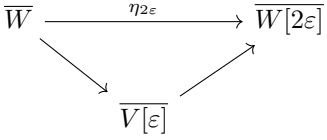
$$\mathbf{qtLsc}_n \simeq \mathbf{qtOb}_n \simeq \mathbf{qtUsc}_n.$$

证明. 我们已经证明，$\overline{\cdot}$（对偶地，$\underline{\cdot}$）保留 q-驯服性，且 q-驯服性是一种可观测性质。因此，这些等价立即由命题 2.14 得出。□

注 2.16. 在这些范畴之间转换时，交错保持不变。显然，π-函子保留交错关系。对偶地，我们证明 $\overline{\cdot}$ 也保留交错。设 $V, W \in \mathbf{Ob}_n$，并考虑一个 ε-交错 $f\colon\ V \to W[\varepsilon], g\colon\ W \to V[\varepsilon]$。由函子性，我们得到交换图



and



因此，接下来只需注意到函子 $\overline{\cdot}$ 与平移可交换。事实上，

$$\overline{V[\varepsilon]}_s = \operatorname*{colim}_{\delta>0} V[\varepsilon]_{s-\delta} = \operatorname*{colim}_{\delta>0} V_{s+\varepsilon-\delta} = \overline{V}[\varepsilon]_s$$

这就证明了该断言。因此，这些范畴之间的所有度量性质都可以相互传递。

注记 2.17。 上述任一 q-温和模范畴的同构类都构成一个集合，因此，将同构类视为空间中的点时，不会遇到任何大小问题。我们以 q-温和模和下半连续模为例来证明这一点。设 V 是这样的一个模。那么，在每个指标 $s \in \mathbf{R}^n$ 处，我们都可以写成

$$V_s = \bigcup_{\varepsilon>0} \operatorname{im}(V_{s-\varepsilon} \to V_s)$$

其中，我们将 V_s 中的像视为相同。根据 q-驯服性，每个像都是有限维的，因此 V_s 具有可数维数。由此可知，每个结构映射$V_{s,\ t}$ 都是可数维向量空间之间的态射。因此， V 由每个 $s \in \mathbb{R}^n$ 对应的一个可数维向量空间，以及 $\mathbb{R}^n$ 中每对 $s \le t$ 对应的此类向量空间之间的一个态射唯一确定。现在显然，所有此类数据的可能选取——即使其中有些并不构成持久模——构成一个集合。

定义 2.18。 我们用 $\mathcal{M}_n^{\Bbbk}$ 表示范畴 $\mathbf{qtOb}_n$ 的同构类所构成的扩展伪度量空间。根据上述评注，这确实是一个集合。

下一个命题指出，$\mathbf{Ob}_n$ 确实是$\mathbf{Pers}_n$ 在$\mathbf{Eph}_n$处的 Serre 局部化。 [CCBS16] 中关于单参数情形的证明可以原样推广到 n-参数情形。

命题 2.19。有序对 $(\mathbf{Ob}_n, \pi)$ 满足 $\mathbf{Pers}_n/\mathbf{Eph}_n$ 的泛性质。更明确地说，任何将弱等价映为同构的函子 $F\colon \mathbf{Pers}_n \to \mathbf{C}$ 都唯一地通过 π 分解。

推论 2.20。可观测范畴是一个阿贝尔范畴。

推论 2.21。*q*-驯服模的可观测范畴是阿贝尔范畴。

证明。我们首先注意到，$\mathbf{qtOb}_n$ 是 q-驯服模的全子范畴对短暂模的 Serre 子范畴进行 Serre 局部化所得的范畴。因此，只需证明 q-温和持久模的全子范畴构成一个阿贝尔范畴；这只需验证它在有限直和、核和余核下封闭即可轻易得出。□

3. Algebraic Constructions: Decomposition Results

我们现在考察 [Sch22] 中针对单参数情形得到的 q-驯服模和连续模的分解定理，并将其推广到 n 个参数。我们首先证明，下半连续模范畴中存在加性分解；对偶地，这给出了上半连续范畴中的积式分解。这些结果共同构成主定理的第一部分，该部分断言，q-驯服持久模的可观测范畴中存在本质唯一的双积分解。

3.1. 下半连续模的加性分解。

本节研究半连续模的加性分解，这将使我们能够建立 Krull–Schmidt 性质。我们的总体策略是通过范畴等价，将一个下半连续的 q-驯服模转换为另一个偏序集上的逐点有限维模。随后，我们便可以利用 [BCB20]中关于逐点有限维模的著名分解结果对该模进行分解，并将分解传回$\mathbf{R}^n$。

定义 3.1。 我们考虑集合

$$\mathbf{S}^n = \{(s-\varepsilon, s) : s \in \mathbf{R}^n, \varepsilon > 0\}$$

and

$$\overline{\mathbf{S}^n} = \{(s-\varepsilon, s) : s \in \mathbf{R}^n, \varepsilon \ge 0\}$$

其偏序由作为$\mathbf{R}^{2n}$的子集所继承。

我们有一个函子

$$\operatorname{im} : \mathbf{Pers}_n \to \mathbf{Pers}(\overline{\mathbf{S}^n})$$

在对象上由

$$\operatorname{im}(V)_{(s-\varepsilon,s)} = \operatorname{im}(V_{s-\varepsilon,s} : V_{s-\varepsilon} \to V_s)$$

并在态射上由到像的限制给出。在另一个方向上，存在一个函子

$$\mathrm{dg} : \mathbf{Pers}(\overline{\mathbf{S}^n}) \to \mathbf{Pers}_n$$

它将 通过与包含映射 $\mathbf{S}^n$ 到对角线的映射作前复合，将 $\mathbf{R}^n \to \mathbf{S}^n$ 上的模限制为对角线 .

定义 3.2。 我们称 $\mathbf{S}^n$ （分别为 $\mathbf{S}^n$）上的模 V 具有 单满 性质，如果对于所有 $\varepsilon > \delta > 0$ （分别为 $\varepsilon > \delta \geq 0$），所有水平映射

$$V_{(s-\varepsilon,s),(s-\delta,s)} : V_{(s-\varepsilon,s)} \to V_{(s-\delta,s)}$$

都是单态射，且所有垂直映射

$$V_{(s,s+\delta),(s,s+\varepsilon)} : V_{(s,s+\delta)} \to V_{(s,s+\varepsilon)}$$

都是满态射。

引理 3.3. 范畴 $\mathbf{Pers}_n$ 等价于具有单满性质的$\mathbf{S}^n$ 上的模范畴，二者由上述函子关联。

证明。 我们可以立即验证，$\mathrm{dg} \circ \mathrm{im}$ 与 $\mathbf{Pers}_n$上的恒等函子同构。反过来，要验证 $\mathrm{im} \circ \mathrm{dg}$ 与具有单满性质的$\mathbf{S}^n$ 上的模范畴的恒等函子同构，考虑如下分解:

$$\begin{array}{ccc} W_{(s-\delta,s)} & \hookrightarrow & W_{(s,s)} \\ \uparrow\!\!\uparrow & & \\ W_{(s-\delta,s-\delta)} & & \end{array}$$

的 结构映射 $W_{(s-\delta,s-\delta)} \to W_{(s,s)}$ 对于 $\delta > 0$ 给出 $W_{s-\delta,\ s} \cong \mathrm{im}(W_{(s-\delta,s-\delta)} \to W_{(s,s)})$。 □

此外，我们有一个限制函子

$$\mathrm{res} : \mathbf{Pers}(\overline{\mathbf{S}^n}) \to \mathbf{Pers}(\mathbf{S}^n)$$

它会遗忘持久模在对角线上的取值。

在另一个方向上，我们定义一个函子

$$\mathrm{ext}^L : \mathbf{Pers}(\mathbf{S}^n) \to \mathbf{Pers}(\overline{\mathbf{S}^n})$$

它通过从下方取余极限，将模 V 延拓到对角线，如下

$$\mathrm{ext}^L(V)_{(s,s)} = \operatorname*{colim}_{\varepsilon>0} V_{(s-\varepsilon,s)},$$

并通过余极限的泛性质定义结构映射与态射：若 $\varphi : V \to W$ 是$\mathbf{S}^n$上模的态射，则$\varphi_{(s-\varepsilon,s)}$: $V_{(s-\varepsilon,s)} \to W_{(s-\varepsilon,s)}$ 定义了余极限数据的一个自然变换，从而余极限的泛性质给出一个态射 $\mathrm{ext}^L(V)_{(s,s)} \to \mathrm{ext}^L(W)_{(s,s)}$。

注记 3.4. 若改为从上方取极限，我们可以定义到对角线的另一个函子性延拓

$$\mathrm{ext}^R : \mathbf{Pers}(\mathbf{S}^n) \to \mathbf{Pers}(\overline{\mathbf{S}^n}).$$

事实上，我们有伴随

$$\mathrm{ext}^L \dashv \mathrm{res} \dashv \mathrm{ext}^R.$$

不过，我们将不会用到这一事实。

定义 3.5 节。 我们称 $\mathbf{S}$ 上的模 V^n 是 左连续 的，如果对于所有有 $(r, s) \in \mathbf{S}^n$ ，我们有 ve

$$V_{r,s} = \operatorname*{colim}_{\delta>0} V_{r-\delta,s}.$$

引理 3.6。 对于 $\mathbf{S}$ 上的模 V^n，以下条件等价:

(1) V 是左连续的，并具有单满性质。(2) $\mathrm{ext}^L(V)$ 具有单满性质。

证明。设 $\mathsf{ext}^L(V)$具有单满性质。则 V 也具有单满性质。此外，设 $s \in \mathbf{R}^n, \varepsilon > 0$ 和 $t = s + \varepsilon$。于是我们有一个满射

$$\operatorname*{colim}_{\delta>0} V_{(s-\delta,s)} \twoheadrightarrow V_{s,t}$$

它可分解为

$$\operatorname*{colim}_{\delta>0} V_{(s-\delta,s)} \longrightarrow \operatorname*{colim}_{\delta>0} V_{(s-\delta,t)} \twoheadrightarrow V_{(s,t)}$$

根据余极限的泛性质。这也意味着左侧的映射是同构。反过来，该推论由余极限函子保持满态射这一事实得出。□

命题 3.7. 下半连续模的全子范畴 $\mathbf{Lsc}_n$ 等价于 $\mathbf{S}^n$ 上左连续单满模的全子范畴。

证明. 根据引理 3.3，范畴 $\mathbf{Lsc}_n$ 显然等价于 $\mathbf{S}^n$ 上具有单满性质且限制到对角线上后为下半连续模的模所构成的范畴。我们将证明，后者通过扩张与限制函子等价于$\mathbf{S}^n$ 上左连续且具有单满性质的模所构成的范畴，从而证明结论。

设 W 是 $\mathbf{S}^n$ 上左连续且具有单满性质的模。我们首先证明， $V = \mathsf{ext}^L(W)$ 在对角线上具有一个下半连续模 $s \mapsto V_{(s,s)}$。令 $s \in \mathbf{R}^n$。由于余极限与余极限可交换，我们可以计算

$$\operatorname*{colim}_{\varepsilon>0} V_{(s-\varepsilon,s-\varepsilon)} = \operatorname*{colim}_{\varepsilon>0} \operatorname*{colim}_{\delta>0} W_{(s-\varepsilon-\delta,s-\varepsilon)} = \operatorname*{colim}_{\delta>0} \operatorname*{colim}_{\varepsilon>0} W_{(s-\varepsilon-\delta,s-\varepsilon)} \cong \operatorname*{colim}_{\delta>0} W_{(s-\delta,s)} \cong V_{(s,s)}$$

这证明了下半连续性。这表明延拓函子映入了所需的范畴。先应用 ext^L ，再取限制，显然同构于恒等映射。反过来，设 V 是一个单满模，其对角线上是一个下半连续模。对偶地，由单满性质可知，模 $V_{(s-\delta,s)}$ 是 $V_{(s-\delta,s-\delta)}$ 在 $V_{(s,s)}$ 中的像。由下半连续性，我们有

$$V_{(s,s)} \cong \operatorname*{colim}_{\varepsilon>0} V_{(s-\varepsilon,s-\varepsilon)} \cong \operatorname*{colim}_{\varepsilon>0} V_{(s-\varepsilon,s)},$$

这意味着 $\mathsf{ext}^L(\mathsf{res})(V)$ 通过余极限的泛性质同构于 V。这显然关于 V 是自然的。□

推论 3.8. 范畴 $\mathbf{qtLsc}_n$ 具有本质唯一的、分解为自同态环为局部环的不可分解对象的加性分解。

证明。由前一个命题，范畴 $\mathbf{qtLsc}_n$ 等价于偏序集 $\mathbf{S}^n$ 上逐点有限维左连续单满模的范畴。任意偏序集上的逐点有限维模范畴都具有本质唯一的、分解为自同态环为局部环的不可分解对象的加性分解。因此我们立即得到，偏序集 $\mathbf{S}^n$ 上左连续单满模范畴中所有不可分解对象的自同态环都是局部环。这意味着任何分解为不可分解对象的分解都是本质唯一的。

为了得到一个分解，令 $V \in \mathbf{qtLsc}$，并令 $W = (\mathsf{res} \circ \mathsf{im})(V)$。根据 [BCB20],，我们可以将其分解为

$$W \cong \bigoplus_{i \in I} W_i,$$

其中 W_i 在 $\mathbf{S}^n$ 上逐点有限维，且具有局部自同态环。还需验证 W_i 是左连续的并具有单满性质。函子 ext^L 在对角线上由余极限定义，在其他位置则为恒等映射。根据命题 3.7，我们知道 $\mathsf{ext}^L(W)$ 具有单满性质，并且

$$\operatorname{ext}^L(W) \cong \operatorname{ext}^L\left(\bigoplus_{i \in I} W_i\right) \cong \bigoplus_{i \in I} \operatorname{ext}^L(W_i)$$

因为余极限与余极限可交换。由于它们的和是一个单满模，因此 $\mathrm{ext}^L(W_i)$ 具有单满性质。根据引理 3.6，分解的各个组成部分仍然是左连续的，并具有单满性质。□

3.2. 上半连续模的乘法分解。 在上半连续情形中，我们以对偶方式研究作为直积的分解，并将其称为乘法分解。先前引用的 [Sch22] 在单参数情形中处理了这一点。为推广到 n-参数情形，我们从一个引理出发；该引理在 [Sch22] 中针对单参数情形的证明几乎可以逐字照搬到多参数情形：

引理 3.9. 设 V_i、 $i \in I$ 为一组持久模，使得 $\prod_{i\in I} V_i$ 是q-驯服的。则典范映射

$$\varphi : \bigoplus_{i\in I} V_i \to \prod_{i\in I} V_i$$

是一个弱等价。

证明。 显然， φ 的核是平凡的。剩下只需证明余核是瞬逝的。设 $\varepsilon > 0$。我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_{i\in I} V_{i,s} & \xrightarrow{\varphi_s} & \prod_{i\in I} V_{i,s} & \xrightarrow{p_s} & \operatorname{cok}\varphi_s \\ {\scriptstyle \sigma_{s-\varepsilon,s}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \pi_{s-\varepsilon,s}} & & \uparrow{\scriptstyle \gamma_{s-\varepsilon,s}} \\ \bigoplus_{i\in I} & \xrightarrow[\varphi_{s-\varepsilon}]{} & \prod_{i\in I} V_{i,s-\varepsilon} & \xrightarrow[p_{s-\varepsilon}]{} & \operatorname{cok}\varphi_{s-\varepsilon} \end{array}$$

其中，竖直箭头由结构映射给出。现在， $p_{s-\varepsilon}$ 是满射，因此只需证明

$$p_s \circ \pi_{s,s-\varepsilon} = \gamma_{s-\varepsilon,s} \circ p_{s-\varepsilon} = 0.$$

但 $p_s \circ \varphi_s$ 为零，因此只需证明 $\pi_{s-\varepsilon,\ s}$ 经由 φ_s分解。我们可以在上面的图表中加入相应的像，从而得到图表

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i\in I} V_{i,s} & \xrightarrow{\varphi_s} & \prod_{i\in I} V_{i,s} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \bigoplus_{i\in I} \operatorname{im} V_{i,s-\varepsilon,s} & \xrightarrow{\psi} & \prod_{i\in I} \operatorname{im} V_{i,s-\varepsilon,s} \\ {\scriptstyle \sigma_{s-\varepsilon,s}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \pi_{s-\varepsilon,s}} \\ \bigoplus_{i\in I} & \xrightarrow[\varphi_{s-\varepsilon}]{} & \prod_{i\in I} V_{i,s-\varepsilon} \end{array}$$

其中 ψ 是从直和到积的包含映射。我们假设 $\prod_{i\in I} V_i$ 是 q-驯服的，因此 $\pi_{s-\varepsilon,\ s}$ 的像是有限的。这意味着 ψ 是同构，因此我们可以将结构映射分解为

$$\prod_{i\in I} V_{i,s-\varepsilon} \longrightarrow \operatorname{im}\pi_{s-\varepsilon,s} \xrightarrow{\psi^{-1}} \operatorname{im}\sigma_{s-\varepsilon,s} \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} V_{i,s} \xrightarrow{\varphi_s} \prod_{i\in I} V_{i,s}$$

如所需。 □

引理 3.10。 设 φ： $V \to W$ 是弱等价。那么 φ 是同构。 _

证明。 这由等价关系 $\mathbf{Ob}_n \simeq \mathbf{Usc}_n$得出。 □

现在，我们以类似的证明得到 Sch22]，的主定理的推广版本 [，并将证明附上以确保完备性。

命题 3.11。设 $V \in \mathbf{qtUsc}_n$。那么存在一个分解

$$V \cong \prod_{i\in I} V_i$$

其中 $V_i \in \mathbf{qtUsc}_n$ 是不可分解的，且在重新排序的意义下唯一。

证明。 我们计算

$$V \cong \underline{V} \cong \overline{\underline{V}} \cong \underline{\bigoplus_{i\in I} V_i}$$

这里我们用到了等价关系 $\mathbf{qtLsc}_n \simeq \mathbf{qtUsc}_n$ 以及本章加性分解的存在性。现在我们注意到 $\prod_{i\in I} V_i$ 是 q-驯服的。这是因为，如果

$$\prod_{i\in I} \operatorname{im} V_{i,s-\varepsilon,s}$$

具有无限维数，那么直和也具有无限维数。因此

$$\varphi : \bigoplus_{i\in I} V_i \to \prod_{i\in I} V_i$$

是一个弱等价，因此

$$\underline{\bigoplus_{i\in I} V_i} \cong \underline{\prod_{i\in I} V_i}$$

根据引理 3.10。极限与极限可交换，因此

$$\underline{\prod_{i\in I} V_i} \cong \prod_{i\in I} \underline{V_i},$$

综上，我们得到

$$V \cong \prod_{i\in I} \underline{V_i}.$$

V_i 的不可分解性源于双积与极限可交换这一事实。唯一性源于等价$\mathbf{qtLsc}_n \simeq \mathbf{qtUsc}_n$ 以及加性分解的唯一性。□

由上文所示的范畴等价，我们现在得到主定理的第一部分：

推论 3.12. 在 q-温和模的可观测范畴中，每个对象本质上唯一地分解为具有局部自同态环的不可分解对象的双积。

证明。在 命题 3.11 的证明中，我们已证明，对于 $V \in \mathbf{qtUsc}_n$ ，存在一个分解

$$V \cong \prod_{i\in I} \underline{V_i}$$

其中 V_i 是不可分解的，并且在重新排序意义下是唯一的，而且它来自加性分解

$$V \cong \bigoplus_{i\in I} V_i.$$

但在可观测范畴中，我们有 $V_i \cong V_i$，这表明 $\underline{V}$ 可分解为不可分解对象的双积。□

例 3.13. 现在我们来说明，若不再假设 q-温和性，这类分解并非总是存在。以下例子 [Cha+16，即备注 2.9], ，最初由 Lesnick 提出，不存在区间分解。事实上，其中给出的论证可以推广，从而说明它不存在任何不可分解对象分解。令

$$L_0 = \Bbbk$$

and

$$L_{-s} = \bigoplus_{k=s}^{\infty} \Bbbk$$

当 $s \geq 1$ 时，我们将其解释为几乎处处为零的序列，且第 s 个分量之前的分量均为零。对于 $s \leq t < 0$，我们取包含映射作为结构映射；对于映射 $L_s \to L_0$，我们取求和映射。现在考虑任意一个分解

$$L = \bigoplus_{i \in I} M_i$$

分解为不可分解对象。其中恰有一个模在 $s = 0$ 处非零，记作 M。现在证明 M 是一个区间模。首先假设 M 在某个最早的指标 $t < 0$ 处包含一个非零且和为零的序列。那么这个序列在指标 $s = 0$ 处映射为 0。因此，我们可以写成 $M = [t, 0) \oplus M'$；由 M 的不可分解性可知，必有 $M' = 0$。如果 M 不包含这样的序列，那么它在任何指标处的维数至多为一，因为和为零的序列构成余维为一的子空间。由不可分解性可知，M 必定是一个区间。然而，由于所有 L_s 与 $s \leq -1$ 的交集为 0，因此 M 不可能是 $(-\infty, 0]$。此外，我们还可以得出 $M \neq [s, 0]$，因为否则结构映射 $L_{s-1,\,0}$ 就会消失，从而导致矛盾。

4. Metric Constructions

本节讨论定理 1.1 的度量方面；具体而言，我们证明，在由 q-驯服持久模构成的可观测范畴中，交错距离在该空间上定义了一个完备度量，并且能够反映同构。

4.1. 完备性。

本节旨在证明，q-驯服下半连续空间 $\mathbf{qtLsc}_n$ 是完备的，从而确立主定理中的 (P3)。

引理 4.1。 设 $V^{(k)}$ 是一个关于交错距离为柯西序列的 n-参数模序列。那么，在 d_I下，$V^{(k)}$ 存在一个度量极限，该极限由 $V^{(k)}$及交错态射取余极限构造而成。

证明。 由于 $V^{(k)}$ 是柯西序列，任何聚点都已经是一个极限，因此我们可以将 $V^{(k)}$ 替换为距离可求和的子序列：对每个 k，存在最小的 N_k，使得索引大于等于 N_k 的所有元素两两之间的距离都小于 $\frac{1}{2^k}$，而由 N_k索引的子序列此时具有可求和的距离。因此不失一般性，我们可以假设 $V^{(k)}$ 和 $V^{(k+1)}$ 是ε_k-交错的，且

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \infty.$$

记

$$\delta_k = \sum_{m \geq k} \varepsilon_m$$

表示尾和。现在固定 ε_k-交错 $(f_k,\ g_k)$，其中 $f_k\colon V^{(k)} \to V^{(k+1)}[\varepsilon_k]$，以及 $g_k\colon V^{(k+1)} \to V^{(k)}[\varepsilon_k]$。于是我们可以构造余极限

$$V = \operatorname*{colim}_{k \geq 1} V^{(k)}[-\delta_k]$$

沿着态射 $f_k[-\delta_k]$。由于 $-\delta_k + \varepsilon_k = -\delta_{k+1}$ 移位映射 $f_k[-\delta_k]$ 定义了一个映射$V^{(k)}[-\delta_k] \to V^{(k+1)}[-\delta_{k+1}]$。现在固定 $k \geq 1$。我们证明 V和 $V^{(k)}$ 是 δ_k-交错的。由于 $(\delta_k)_k \to 0$ 作为 $k \to \infty$，这就得到了该引理。首先注意到，由于 $\{m \geq k\} \subset \mathbb{N}$ 的余终性，V 是该图表的余极限

$$V^{(k)}[-\delta_k] \xrightarrow{f_k[-\delta_k]} V^{(k+1)}[-\delta_{k+1}] \xrightarrow{f_{k+1}[-\delta_{k+1}]} V^{(k+2)}[-\delta_{k+2}] \longrightarrow \cdots$$

该图表

$$\begin{array}{ccccccc}
V^{(k)}[-\delta_k] & \xrightarrow{f_k[-\delta_k]} & V^{(k+1)}[-\delta_{k+1}] & \xrightarrow{f_{k+1}[-\delta_{k+1}]} & V^{(k+2)}[-\delta_{k+2}] & \longrightarrow & \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle \eta_{2\delta_k}} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{2\delta_{k+1}}} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{2\delta_{k+2}}} & & \\
V^{(k)}[\delta_k] & \xleftarrow[g_k[\delta_{k+1}]]{} & V^{(k+1)}[\delta_{k+1}] & \xleftarrow[g_{k+1}[\delta_{k+2}]]{} & V^{(k+2)}[\delta_{k+2}] & \longleftarrow & \cdots
\end{array}$$

根据交错关系 $g_m[\varepsilon_m] \circ f_m = \eta_{2\varepsilon_m}$，对 $m \geq k$ 成立交换。将底行中的垂直映射与水平映射复合，得到从顶行到 $V^{(k)}[\delta_k]$ 的余锥；而 V 作为顶行余极限的泛性质给出映射 $f\colon V \to V^{(k)}[\delta_k]$。图表

$$\begin{array}{ccccccc}
V^{(k)} & \xleftarrow{g_k[\delta_{k+1}-\delta_k]} & V^{(k+1)}[\delta_{k+1}-\delta_k] & \xleftarrow{g_{k+1}[\delta_{k+2}-\delta_k]} & V^{(k+2)}[\delta_{k+2}-\delta_k] & \longleftarrow & \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{2(\delta_k-\delta_{k+1})}} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{2(\delta_k-\delta_{k+2})}} & & \\
V^{(k)} & \xrightarrow[f_k]{} & V^{(k+1)}[\delta_k-\delta_{k+1}] & \xrightarrow[f_{k+1}[\delta_k-\delta_{k+1}]]{} & V^{(k+2)}[\delta_k-\delta_{k+2}] & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

交换；这由交错关系 $f_m[\varepsilon_m] \circ g_m = \eta_{2\varepsilon_m}$ 对 $m \geq k$ 成立推出。注意，底行的余极限为 $V[\delta_k]$。同样，这个图表给出一个态射 $g\colon V_{(k)} \to V[\delta_k]$。将第二个图表平移 δ_k 后，我们可以把两个图表垂直叠放：

$$\begin{array}{ccccccc}
V^{(k)}[-\delta_k] & \xrightarrow{f_k[-\delta_k]} & V^{(k+1)}[-\delta_{k+1}] & \xrightarrow{f_{k+1}[-\delta_{k+1}]} & V^{(k+2)}[-\delta_{k+2}] & \longrightarrow & \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle \eta_{2\delta_k}} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{2\delta_{k+1}}} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{2\delta_{k+2}}} & & \\
V^{(k)}[\delta_k] & \xleftarrow[g_k[\delta_{k+1}]]{} & V^{(k+1)}[\delta_{k+1}] & \xleftarrow[g_{k+1}[\delta_{k+2}]]{} & V^{(k+2)}[\delta_{k+2}] & \longleftarrow & \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{2(\delta_k-\delta_{k+1})}} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{2(\delta_k-\delta_{k+2})}} & & \\
V^{(k)}[2\delta_k] & \xrightarrow[f_k[2\delta_k]]{} & V^{(k+1)}[2\delta_k-\delta_{k+1}] & \xrightarrow[f_{k+1}[2\delta_k-\delta_{k+1}]]{} & V^{(k+2)}[2\delta_k-\delta_{k+2}] & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

每个垂直列复合后都得到相应的平移映射 $\eta_{2\delta_k}$。映射 f 和 g 是通过万有构造得到的，因此 $g[\delta_k] \circ f$ 也可由这个叠放后的图表以同样方式得到。平移的余极限仍是一个平移，因此总而言之，我们得到 $g[\delta_k] \circ f = \eta_{2\delta_k}$。将第一个图表平移后按相反顺序叠放，可得 $f[\delta_k] \circ g = \eta_{2\delta_k}$，进而得到 V 与 $V^{(k)}$ 之间所需的 δ_k-交错。□

注记 4.2。此构造也可以通过极限而非余极限来实现，只需互换 f_k 和 g_k的角色。

现在只需验证我们构造的极限仍属于 $\mathcal{M}_n^{\Bbbk}$，即可得到所需结果。我们将使用以下引理：

引理 4.3。若对任意 $\varepsilon > 0$，都存在某个 q-驯服模 W，使得平移η_ε 可经由 W分解，则模 V是 q-驯服的。

证明。令 $\varepsilon > 0$。我们证明 $V_{s-\varepsilon,\ s}$ 具有有限秩。根据假设，我们有一个分解 n

$$\begin{array}{ccc}
V & \xrightarrow{\eta_{\frac{\varepsilon}{2}}} & V[\frac{\varepsilon}{2}] \\
& \searrow \quad \nearrow & \\
& W &
\end{array}$$

其中 W 是 q-驯服的。我们得到交换图

$$\begin{array}{ccccc} V_{s-\varepsilon} & \longrightarrow & W_{s-\varepsilon} & \longrightarrow & V_{s-\frac{\varepsilon}{2}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ V_{s-\frac{\varepsilon}{2}} & \longrightarrow & W_{s-\frac{\varepsilon}{2}} & \longrightarrow & V_s \end{array}$$

现在，由于 W 是 q-驯服的，结构映射 $W_{s-\varepsilon} \to W_{s-\frac{\varepsilon}{2}}$ 的秩有限，并且 $V_{s-\varepsilon} \to V_s$ 可通过它分解。由于 ε 是任意的，这就得到了该引理。□

命题 4.4. 空间 $\mathcal{M}_n^{\mathrm{k}}$ 在交错距离下是完备的。

证明。由于余极限与余极限可交换，我们立即得知，上文构造的极限仍然是下半连续的。此外，根据引理 4.3 可知，V 是 q-驯服的，因为 $V^{(k)}$ 都是 q-驯服的，而 δ_k-交错为任意小的平移提供了分解。□

4.2. **交错持久集的上半连续性**。接下来两节的目标是证明存在一个交错能够实现交错距离：如果在 q-驯服下半连续模空间中，$d_I(V, W) = \delta$，那么我们希望构造出一个 δ-交错，使 V 与 W 交错。由此我们将立即得到定理 1.1 的第二部分作为推论。本节将证明，下半连续持久模之间的交错构成一个上半连续的持久集，采用的策略概述于 [Sco20，第 4 节。5]。

记号 4.5. 设 V, W 为固定的持久模。设 $r \geq 0$。我们记

$$\mathbb{I}(V, W)(r) = \{r\text{-interleavings of } V \text{ and } W\}.$$

对于 $r < r'$，我们有一个映射 $\mathbb{I}(V, W)(r) \to \mathbb{I}(V, W)(r')$，其定义为 $(f, g) \mapsto (\eta_{r'-r} \circ f, \eta_{r'-r} \circ g)$。这使得$\mathbb{I}(V, W)$具有 $\mathbf{R}_{\geq 0}$上的持久集结构。

设 V, W 为固定的持久模。我们考虑如下赋值

$$\varepsilon \mapsto \mathrm{Hom}(V, W[\varepsilon]).$$

每当 $\varepsilon < \varepsilon'$时，我们都可以通过与 $\eta_{\varepsilon'-\varepsilon}$作后复合，将任意态射 $V \to W[\varepsilon]$ 变换为态射 $V \to W[\varepsilon']$。因此 $\mathrm{Hom}(V, W[\cdot])$ 是 $\mathbf{R}_{\geq 0}$上的持久集。

命题 4.6. 若 V 是下半连续的，或 W 是上半连续的，则持久集$\mathbb{I}(V, W)$ 是上半连续的。

证明。考虑这些态射

$$\xi_\varepsilon : \mathrm{Hom}(V, W[\varepsilon]) \times \mathrm{Hom}(W, V[\varepsilon]) \to \mathrm{Hom}(V, V[2\varepsilon]) \times \mathrm{Hom}(W, W[2\varepsilon])$$
$$(f, g) \mapsto (g[\varepsilon] \circ f, f[\varepsilon] \circ g)$$

从而定义了相应持久集的一个态射 ξ。我们用 pt 表示持久集范畴中的终对象；它在每个指标处都有唯一元素 $*$。我们定义态射 $\mathrm{pt} \to \mathrm{Hom}(V, V[2\varepsilon]) \times \mathrm{Hom}(W, W[2\varepsilon])$，即在 $\varepsilon \geq 0$ 处将 $* \mapsto$ 映为$(\eta_{2\varepsilon}^V, \eta_{2\varepsilon}^W)$。由于函子的极限是逐点计算的，我们得到一个拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{I}(V, W) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(V, W[\cdot]) \times \mathrm{Hom}(W, V[\cdot]) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{pt} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(V, V[2\cdot]) \times \mathrm{Hom}(W, W[2\cdot]) \end{array}$$

由于极限与极限可交换，现在只需证明拉回图表中涉及的持久集是上半连续的。为此，我们只需证明 $\mathrm{Hom}(V, W[\cdot])$（对偶地，$\mathrm{Hom}(W, V[\cdot])$ 在任意 $\delta \geq 0$ 处都是上半连续的。若 V是下半连续的，则有

$$V[\delta] \cong \operatorname*{colim}_{\varepsilon > \delta} V[-\varepsilon],$$

又由于 Hom 函子将第一变量中的极限映为余极限，我们得到

$$\lim_{\varepsilon>\delta} \mathrm{Hom}(V, W[\varepsilon]) = \lim_{\varepsilon>\delta} \mathrm{Hom}(V[-\varepsilon], W) \cong \mathrm{Hom}(\operatorname*{colim}_{\varepsilon>\delta} V[-\varepsilon], W).$$

当 W 是上半连续时，我们对偶地利用 Hom 函子在第二个变量上保极限这一事实，通过类似的论证得到 Hom 持续集的上半连续性。□

因此，我们有

$$\mathbb{I}(V, W)(\delta) \cong \lim_{\varepsilon>\delta} \mathbb{I}(V, W)(\varepsilon)$$

因此，由余终性论证可得

$$\mathbb{I}(V, W)(\delta) \cong \lim_{n\geq 1} \mathbb{I}(V, W)\left(\delta + \tfrac{1}{n}\right)$$

（或任何其他可数余终集）。一般而言，无限非空集合的极限可能为空，因此仅凭这一点还不足以让我们得出：只要 $d_I(V, W) = \delta$，就有 $\mathbb{I}(V, W)(\delta) \neq \varnothing$。在下一节中，我们将把 $\mathbb{I}(V, W)$ 转化为一个持续拓扑空间，以解决这个问题。

4.3. 实现度量的交错的存在性。本节将证明，在 q-驯服情形和可观测情形中，交错距离确实反映同构。更一般地，我们将证明，若 $d_I(V, W) = \delta$，则 V与 W之间存在一个 δ-交错。回顾一下，命题 4.6 说明，任意一个 δ-交错都是 $\varepsilon > \delta$的 ε-交错的极限。反过来，然而， ε-交错的极限是否存在，并非先验显然，因为一个塔的极限

$$\cdots \to X_3 \to X_2 \to X_1$$

无限非空集合的交集可能为空，如下面这个简单例子所示。

例 4.7. 令 $X_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$ 配备包含映射

$$\cdots \to X_3 \to X_2 \to X_1.$$

于是我们有

$$\lim_{k\geq 1} X_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} X_k = \varnothing,$$

尽管每个单独的 X_n 都非空。

因此，我们需要一些额外性质来保证极限非空。本节的策略是应用下面的定理来获得合适的交错：

定理 4.8 (Stone [Sto79])**.** 考虑偏序集 $\mathbf{N}^{\mathrm{op}} = (\mathbb{N}, \geq)$。令 $X : \mathbf{N}^{\mathrm{op}} \to$ **拓扑空间范畴** 为一个拓扑空间塔，使得

(1) 每个 X_s 都是紧且 T_0的，并且(2)
每个 X_{st} 都是闭的。
那么$\lim X_\bullet \neq \varnothing$.

我们首先证明以下推论，它使我们能够用结构映射的像的紧致性来替代空间的紧致性条件。

推论 4.9。 如果 X： $\mathbf{N}^{\mathrm{op}} \to$ **拓扑空间范畴** 是一个拓扑空间图，且

(1) X 是q-驯服的，也就是说，所有非平凡结构映射的像都是紧且 T_0 的，并且
(2) 所有结构映射都是闭的。

Then

$$\lim X_\bullet \neq \varnothing.$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$证明。令 $X_s = \mathrm{im} X_{s+1,\ s} \subseteq X_s$ 并通过限制 $X_{s+1,\ s}$: $X_{s+1} \to X_s$ 到$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }\mathrm{im}(X_{s+2,\ s+1})$ 来定义 $X_{s+1,\ s}$ 。根据构造，该映射的值域包含于 X_s 中。根据构造，该图表满足 Stone 定理的条件。因此

$$\varnothing \neq \lim \widehat{X}_\bullet = \lim X_\bullet$$

这就证明了该推论。 □

目标是将推论 4.9 应用于交错塔 $\mathbb{I}(V,\ W)(\delta + \frac{1}{n})$，并将其视为 Hom 集 $\mathrm{Hom}(V,\ W[\delta + \frac{1}{n}]) \times \mathrm{Hom}(W,\ V[\delta + \frac{1}{n}])$ 的积的子空间，并赋予相应的拓扑。–在 [Sco20 的定理 4.5.14], 中，证明了如果这些 Hom 集具有合适的拓扑，那么由交错持久集的上半连续性和 Stone 定理，可推出度量实现交错的存在性。我们的方法类似；然而，正如稍后在注 4.16 中解释的那样，我们必须稍微偏离这一方法，并在 Hom 集的积上赋予不同于乘积拓扑的拓扑。

命题 4.10. 假设所有集合

$$\mathrm{Hom}(V, W) \times \mathrm{Hom}(V', W')$$

赋予了拓扑，使得

(1) 所有空间都是 T_1，(2) 映射 ξ_ε 连续，并且(3) 由一对平移进行后复合

$$S_\varepsilon = (\eta_\varepsilon \circ -, \eta_\varepsilon \circ -) : \mathrm{Hom}(V, W) \times \mathrm{Hom}(V', W') \to \mathrm{Hom}(V, W[\varepsilon]) \times \mathrm{Hom}(V', W'[\varepsilon])$$

是连续的、闭的，且具有紧像。

若 $V, W \in \mathbf{qtLsc}_n$ 满足 $d_I(V, W) = \delta$，则 $\mathbb{I}(V, W)(\delta) \neq \varnothing$。

证明。 目标是能够将 Stone 定理应用于 $\mathbb{I}(V, W)$。对于 $\varepsilon > 0$，我们再次考虑

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{I}(V,W)(\varepsilon) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(V, W[\varepsilon]) \times \mathrm{Hom}(W, V[\varepsilon]) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{pt} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(V, V[2\varepsilon]) \times \mathrm{Hom}(W, W[2\varepsilon]) \end{array}$$

这是一个拉回方块。映射 ξ_ε 是连续的，因此我们可以在 $\mathbb{I}(V, W)(\varepsilon)$ 上赋予极限拓扑。根据 T_1-性质，$\mathbb{I}(V, W)(\varepsilon)$ 是 $\mathrm{Hom}(V, W[\varepsilon]) \times \mathrm{Hom}(W, V[\varepsilon])$ 中的闭子集，因为它是一对平移在 2ε 下的原像。一对平移 $(\eta_\varepsilon^W, \eta_\varepsilon^V)$ 的后复合是连续的、闭的，且具有紧像。由于 $\mathbb{I}(V, W)(\varepsilon)$ 是闭的，同样的结论也适用于此处。由此可知，它满足推论 4.9 的条件，因此我们可以得出 $\mathbb{I}(V, W)(\delta) \neq \varnothing$。□

现在我们证明，可以在 Hom 集上找到满足命题 4.10 条件的拓扑。我们首先将问题化约为有界支撑的模的情形，然后通过极限构造得到一般情形。

记号 4.11。 令 $k \geq 1$，并令 V，W 为 n-参数持久模。我们令

$$\mathrm{Hom}(V, W)|_k = \mathrm{Hom}(V|_{\mathbf{C}^k}, W|_{\mathbf{C}^k})$$

其中 $\mathbf{C}^k = [-k, k]^n \subseteq \mathbf{R}^n$。作为集合，我们有

$$\mathrm{Hom}(V, W) \cong \lim_{k \geq 1} \mathrm{Hom}(V, W)|_k$$

其中极限沿限制映射取。

引理 4.12。 假设对每个 $k \in \mathbb{N}$，*Hom* 集 $\mathrm{Hom}(V,W)|_k \times \mathrm{Hom}(V',W')|_k$ 都赋予了拓扑，使得命题 *4.10* 的条件成立，并且限制映射

$$\mathrm{Hom}(V,W)|_{k+1} \times \mathrm{Hom}(V',W')|_{k+1} \to \mathrm{Hom}(V,W)|_k \times \mathrm{Hom}(V',W')|_k$$

是连续且闭的。因此，存在 $\mathrm{Hom}(V,W) \times \mathrm{Hom}(V',W')$ 上的拓扑，使其满足命题 *4.10* 的条件。

证明。如记号 4.11 所述，我们有

$$\mathrm{Hom}(V,W) \times \mathrm{Hom}(V',W') = \lim_{k\geq 1}(\mathrm{Hom}(V,W)|_k \times \mathrm{Hom}(V',W')|_k)$$

作为集合成立。因此，我们可以赋予其通常的极限拓扑。T_1-空间的积仍是 T_1。这意味着，作为 T_1-空间子空间的极限也同样是 T_1 。

为了验证 ξ_ε 的连续性，注意到

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(V,W[\varepsilon]) \times \mathrm{Hom}(W,V[\varepsilon]) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(V,W[\varepsilon])|_k \times \mathrm{Hom}(W,V[\varepsilon])|_k \\ \downarrow{\scriptstyle \xi_\varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle \xi_\varepsilon^k} \\ \mathrm{Hom}(V,V[2\varepsilon]) \times \mathrm{Hom}(W,W[2\varepsilon]) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(V,V[2\varepsilon])|_k \times \mathrm{Hom}(W,W[2\varepsilon])|_k \end{array}$$

图表可交换。因此，ξ_ε 是由连续极限数据构造出的映射，故它是连续的。

For 与平移后复合（即来自命题 4.10 的映射 S_ε ）后，我们观察到 t

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(V,W) \times \mathrm{Hom}(V',W') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(V,W)|_k \times \mathrm{Hom}(V',W')|_k \\ \downarrow{\scriptstyle S_\varepsilon} & & {\scriptstyle S_\varepsilon^k}\downarrow \\ \mathrm{Hom}(V,W[\varepsilon]) \times \mathrm{Hom}(V',W'[\varepsilon]) & \xrightarrow{\mathrm{res}_k} & \mathrm{Hom}(V,W[\varepsilon])|_k \times \mathrm{Hom}(V',W'[\varepsilon])|_k \end{array}$$

是可交换的，因此同样的推理表明，以这种方式得到的映射也连续。该图表还表明

$$\mathrm{im}\, S_\varepsilon \cong \lim_{k\geq 1} \mathrm{im}\, S_\varepsilon^k$$

更具体地说

$$\mathrm{im}\, S_\varepsilon \cong \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathrm{res}_k^{-1}(\mathrm{im}\, S_\varepsilon^k)$$

这意味着 S_ε 的像是闭集，因为它是闭集的交。因此

$$\prod_{k=1}^{\infty} \mathrm{res}_k : \mathrm{im}\, S_\varepsilon \to \prod_{k=1}^{\infty} \mathrm{im}\, S_\varepsilon^k$$

是一个闭嵌入，并且右侧是紧空间的积，因而是紧的。因此，像的紧致性得以成立。□

接下来需要为受限的 Hom 集 $\mathrm{Hom}(V,\ W)|_k \times \mathrm{Hom}(V',\ W')|_k$ 构造这样的拓扑。为此，我们回顾扎里斯基拓扑 [Har77，第 1] 章。

定义 4.13。 设 $V \cong \Bbbk^d$ 是一个有限维 $\Bbbk$-向量空间。我们赋予 $\Bbbk$ 余有限拓扑，进而赋予 $\Bbbk^d$ 使 $\Bbbk[x_1,\ldots,x_d]$ 中的所有多项式均连续的最粗拓扑。我们称其为 扎里斯基拓扑。

我们现在将上述定义推广到无限维空间（例如参见 [Kum02]).

定义 4。 14。 设 V 是一个（不一定是有限维的） $\Bbbk$-向量空间。作为集合，我们可以写 e

$$V \cong \operatorname*{colim}_{W\subseteq V \text{ finite-dimensional}} W,$$

这使我们能够为 V 赋予拓扑。我们称之为归纳扎里斯基拓扑。

设 V 和 W 是赋有归纳扎里斯基拓扑的向量空间，并设 $\varphi\colon V \to W$ 是线性的。若 $U \subseteq V$ 是有限维的，则 $\varphi|_U\colon U \to \varphi(U)$ 是连续的。由余极限的函子性可知， φ 是连续的。

定义 4.15. 若映射 $\varphi\colon \Bbbk^d \to \Bbbk^{d'}$ 在每个分量 $j \in \{1,\dots,d'\}$中都由一个多项式定义，我们就称它为多项式映射。对于有限维向量空间，若存在合适的基使映射为多项式映射，我们就称该映射为多项式映射。最后，对于任意向量空间，若一个映射可表示为有限维子空间上的多项式映射的余极限，我们就称其为多项式映射。多项式映射在归纳扎里斯基拓扑下是连续的。

注记 4.16. 就我们的目的而言，扎里斯基拓扑的主要问题，也是我们直接对积赋予拓扑的原因，是当底层的域为无限域时，双线性映射在乘积拓扑下并不连续。为说明这一点，考虑乘法

$$\mu : \Bbbk \times \Bbbk \to \Bbbk.$$

那么左侧是余有限拓扑的积。但原像 $\mu^{-1}(0) = \{xy = 0\}$ 在 $\Bbbk$为无限集时并非有限集，因此不是闭集。不幸的是，这表明除非基域有限，否则很难找到满足 [Sco20] 中条件的简单方法。

下述引理是证明我们在 Hom 集上所定义的拓扑满足移位映射具有紧像这一要求的关键，因为有限维子空间在归纳扎里斯基拓扑中既紧又闭。

引理 4.17. 的像

$$\mathrm{Hom}(V,W)|_k \to \mathrm{Hom}(V,W[\varepsilon])|_k$$

是有限维的。

证明。 该像恰好由那些具有一个分解的 $\psi\colon\ V \to W[\varepsilon]$ 组成

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & W \\ & \searrow^{\psi} & \downarrow{\scriptstyle \eta_\varepsilon^W} \\ & & W[\varepsilon] \end{array}$$

经由一个 ε-平移。令 $s \in \mathbf{C}_k$。对任意 $s \ll t \ll s+\varepsilon$ ，我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} V_s & \longrightarrow & \operatorname{im} V_{st} & \longrightarrow & V_{s+\varepsilon} \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_s} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_t} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{s+\varepsilon}} \\ W_s & \longrightarrow & \operatorname{im} W_{st} & \longrightarrow & W_{s+\varepsilon} \end{array}$$

其中 α_t 是经适当限制的线性映射 φ_t。注意到 α_t 是有限维向量空间之间的映射。由交换性，我们得到一个分解

$$\psi_s = W_{t,s+\varepsilon} \circ \alpha_t \circ V_{st}.$$

现在固定任意一个宽度为 $\leq \frac{\varepsilon}{2}$ 的均匀网格 $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{C}_{k\,\sigma}$ 由于 k-立方体是紧的，该网格是有限的。对于任意 s ，存在某个 $t \in \mathbf{Q}$ ，使得 $s \ll t \ll s+\varepsilon$，从而可以用 α_t 以及 V和 W的结构映射表示 ψ_s。因此， ψ 完全由族 $(\alpha_t)_{t\in\mathbf{Q}}$ 确定，并且每个 ψ_s 都具有有限秩，从而证明了该断言。□

现在我们可以继续证明本节的主要结果，即 Hom 集上的归纳扎里斯基拓扑满足引理 4.12 的条件。

引理 4.18. 为$\mathrm{Hom}(V,W)|_k \times \mathrm{Hom}(V',W')|_k$赋予归纳扎里斯基拓扑，得到的拓扑满足引理 *4.12* 的条件。

证明。 归纳扎里斯基拓扑是 T_1 ，因为有限维子空间中的点是闭的，而这些有限维子空间在环境空间中是闭的。

注意到映射 ξ_ε 是双线性的，这意味着在局部选取坐标时，它会成为一个二次多项式表达式。这足以保证其在归纳扎里斯基拓扑下的连续性。

平移对的连续性源于其线性。现在，引理 4.17 意味着一对平移

$$S_\varepsilon : \mathrm{Hom}(V,W)|_k \times \mathrm{Hom}(V',W')|_k \to \mathrm{Hom}(V,W[\varepsilon])|_k \times \mathrm{Hom}(V',W'[\varepsilon])|_k$$

也具有有限维像，因为它是两个有限维空间的积。因此，该像在归纳扎里斯基拓扑下必然是闭且紧的。□

由此我们得到主定理的第二部分：

推论 4.19。 q-温和下半连续模的空间是一个完备扩展度量空间。特别地， d_I 反映同构。

结合第 3 节的分解结果，我们证明了主定理：

定理 4.20. 设 $n \geq 1$。q-驯服 n-参数持久模的可观测范畴满足以下性质：

(P1) 该范畴是阿贝尔范畴和克鲁尔-施密特范畴，即每个对象都能以本质唯一的方式分解为不可分解对象的直和。(P2) 两个持久模同构，当且仅当它们的交错距离为零。(P3) 由交错距离诱导的扩展度量是完备的，也就是说，每个持久模的柯西序列都有极限。

4.4. 关于可分性和紧致性的结果。 我们刚刚看到，q-驯服持久模的可观测同构类构成一个完备的（扩展）度量空间。现在我们研究该空间及其重要子空间的度量性质和拓扑性质。首先，我们给出一个稠密性结果，从而可以通过将任意 q-驯服模限制-扩张到离散规则网格上来对其进行逼近。

定义 4.21。 设 $V \in \mathbf{qtUsc}_n$。如果 V 是逐点有限维的，并且存在某个可数网格$\mathbf{Q}$ 使得 $V \cong V_{\mathbf{Q}}$，则称其为局部有限可表示。此外，如果$\mathbf{Q}$ 可以选为正则的，则称 V 为正则局部有限可表示。

引理 4.22。 正则局部有限可表示模在$\mathbf{qtUsc}_n$中稠密。

证明。 设 V 为 q-驯服且上半连续。令

$$S_\varepsilon V = \mathrm{im}(\eta_\varepsilon : V \to V[\varepsilon])$$

对所有 $\varepsilon > 0$均成立。注意，该模与 V是 ε-交错的；交错态射由子模包含 $S_\varepsilon V \hookrightarrow V[\varepsilon]$ 以及商映射 $V \to S_\varepsilon V$与平移映射 $S_\varepsilon V \to S_\varepsilon V[\varepsilon]$的复合给出。此外，由于 V是 q-驯服的， $S_\varepsilon V$是逐点有限维的。因此，逐点有限维的上半连续模在$\mathbf{qtUsc}_n$中稠密。

因此，我们可以假设 V是逐点有限维的。令 $\varepsilon > 0$ ，并考虑正则网格$\mathbf{Q} = (\varepsilon\mathbb{Z})^n$。注意，模 $V_{\mathbf{Q}}$ 是正则有限可表的，因为限制-扩张是幂等的。将自然映射 $V_{\mathbf{Q}} \to V$与平移映射 $V \to V[\varepsilon]$复合，可得映射

$$g : V_{\mathbf{Q}} \to V[\varepsilon].$$

对偶地，我们得到映射

$$f : V \to V_{\mathbf{Q}}[\varepsilon]$$

如下：对于任意 s ，存在唯一的网格点 p ，使得 $s \leq p < s + \varepsilon$。根据 $V_{\mathbf{Q}}$ 的定义，这给出了映射 $V_s \to V_p = (V_{\mathbf{Q}})_{s+\varepsilon}$ ，它由 V 的结构映射组合而成。这些映射定义了 V 与 $V_{\mathbf{Q}}$ 之间的交错，因为它们完全由V的结构映射定义。因此我们可以得出结论： $d_I(V, V_{\mathbf{Q}}) \leq \varepsilon$，所以 V可以在交错距离下由一个正则有限可表模逼近。□

拓扑数据分析应用中出现的所有持久性模都是有限呈示的。然而，有限呈示模的空间并不完备，因此，为了研究使用这些模的方法的稳定性，刻画其闭包是很自然的问题。

命题 4.23。 $\mathbf{fp}_n$ 在交错距离下的闭包，恰好由满足 $d_I(V, V_{\mathbf{C}_k}) \to 0 as\ k \to \infty$ 的模 $V \in \mathbf{qtUsc}_n$ 组成。

证明。 设 $V\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{Vect}$ 属于有限可表模的闭包。由于 $\mathbf{fp}_n$ 属于完备的 $\mathbf{qtUsc}_n$，可知 $V \in \mathbf{qtUsc}_n$。记作 $V_k = V_{\mathbf{C}_k}$。存在一个由有限可表模构成的序列 W_n，使得 $W_k \to V$ as $n \to \infty$。假设 W_k 定义在某个有限网格 $\mathbf{P}_k$上，并且不妨设该网格包含于盒子 $[-k,k]^n$ 中。由三角不等式可得

$$d_I(V_k, V) \leq d_I(W_k, V) + d_I(V_k, W_k)$$

因此，只需证明 $d_I(V_k, W_k) \to 0$ as $k \to \infty$。设 $f\colon V \to W_k[\varepsilon]$ 和 $g\colon W_k \to V[\varepsilon]$ 是一个 ε-交错。由于 W_k 定义在 $[-k,k]^n$ 内的网格上，我们可以得到如下分解

$$f : V \to V_k \to W_k[\varepsilon]$$

and

$$g : W_k \to V_k[\varepsilon] \to V[\varepsilon]$$

它们合起来构成了 W_k 与 V_k 之间的 ε交错。这就证明了该结论。反过来，考虑一个具有如下性质的$V \in \mathbf{qtUsc}_n$

$$d_I(V, V_k) \to 0$$

如 $k \to \infty$。这立即推出 $V_k \to V$，因此只需证明 $V_k \in \mathbf{fp}_n$。如上所述， V_k 可以由如下形式的模逼近

$$\mathrm{im}(\eta_\varepsilon : V_k \to V_k[\varepsilon])$$

它们定义在盒子 $[-k,k]^n$ 上，且逐点有限维。此外，它们还可以由定义在正则网格上的模进一步逼近。然而，正则网格与紧集的交集是有限的，因此它们可以由定义在有限网格上的逐点有限维模逼近。根据第一章中的引理，这些模都是有限可表的。因此，$V_k \in \mathbf{fp}_n$。□

——

推论 4.24。在交错距离下，有限可表模的闭包$\mathbf{fp}_n$ 恰好是满足以下条件的 q-驯服、上半连续模 V：存在某个有界子集$\mathbf{B} \subseteq \mathbf{R}^n$，使得 $V_{\mathbf{B}} \cong V$。

定义 4.25. 我们称这类模为有界生成的，并用$\mathbf{bg}_n$ 表示有界生成模的全子范畴。

推论 4.26. 作为一个范畴，$\mathbf{bg}_n$ 是阿贝尔的。

证明. 由于它是$\mathbf{qtUsc}_n$的全子范畴，我们只需验证它在有限直和、核和余核下封闭。以直和为例。设 $V_{\mathbf{B}} \cong V$和$W_{\mathbf{C}} \cong W$，其中$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$ 有界。设$\mathbf{D} = \mathbf{B} \cup \mathbf{C}$。那么

$$(V \oplus W)_{\mathbf{D}} \cong V_{\mathbf{D}} \oplus W_{\mathbf{D}} \cong V \oplus W$$

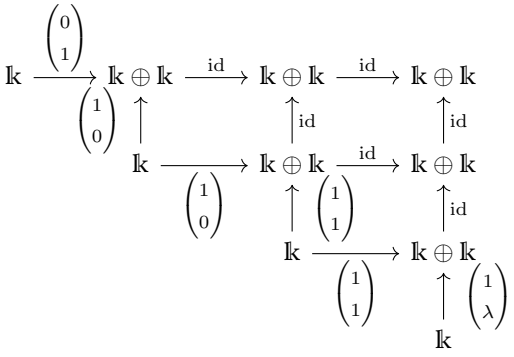
这意味着$\mathbf{bg}_n$ 在直和下封闭。 □

命题 4.27. 空间$\mathbf{bg}_n$ 是可分的，当且仅当基域 $\Bbbk$ 可数或 $n = 1$.

证明。 首先令 $n = 1$。在这种情况下，有限呈示模都可分解为有限多个区间模。这已经推出了可分性，且与基域的基数无关。

现在令 $\Bbbk$ 为可数集。只需证明有限可表模空间具有一个可数稠密子集。任意此类模都是逐点有限维的，并定义在有限网格上。如果基域是可数的，那么对于每个结构映射，可供选择的线性映射只有可数多个。因此，将范围限制在网格长度可数的模上，即可得到一个可数稠密子集。反过来，假设 $\Bbbk$ 是不可数的，并且 $n \geq 2$。为了证明

所得空间不可分，我们构造一个不可数的模族，使其中任意两个模之间的距离都下界于某个 $\varepsilon > 0$。为此，我们考虑以下来自 [BL23 第 8] 章的众所周知的例子：



对于 $\lambda \neq \mu \in \Bbbk$，所得的模并不同构。在给定网格大小的情况下，它们的交错距离有一个下界。□

注 4.28。特别地，对于有限域 $\mathbb{F}_q$、数域 $K \mid \mathbb{Q}$ 和函数域 $F \mid \mathbb{F}_q(t)$，即整体域上的情形，有界生成模构成的空间是可分的。

回顾一下，拓扑空间的子集若其闭包是紧的，则称为相对紧 。在上述命题中，我们使用了模 $\mathrm{im}(\eta_\varepsilon : V \to V[\varepsilon])$。对于 $V \in \mathbf{qtOb}_n$，此模不是可观测不变量（即在可观测范畴的同构类上定义不良），但模

$$S_\varepsilon V = \mathrm{im}(\underline{V} \to \underline{V}[\varepsilon])$$

是，因为下包络 $\underline{\cdot}$ 是从可观测范畴出发的一个函子。我们也可以使用上包络函子 $\overline{\cdot}$，或者将两者混合使用。所得结果在可观测同构意义下总是相同的。

Pr命题 4.29。子集 $A \subseteq \mathbf{qtOb}_n$ 相对紧，当且仅当对所有 $\delta > 0$，该集 t

$$A|_\delta = \{S_\delta V|_{\delta\mathbb{Z}^n} : V \in A\}$$

具有有限多个同构类。

证明。我们使用以下众所周知的结果：

引理 4.30。设 X 为完备度量空间。集合 $A \subseteq X$ 相对紧，当且仅当它是全有界的。

我们注意到，从引理 4.22 的证明可得

$$d_I(V, S_\varepsilon V|_{\varepsilon\mathbf{Z}^n}) \leq 2\varepsilon$$

对任意 V均成立。首先假设每个 $A|_\delta$ 都有有限多个同构类。固定 $\varepsilon > 0$，并令$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$。设 $V_1, \ldots, V_m$为 A_δ中扩展到 $\mathbb{R}^n$的同构类。对所有 $V \in A$，存在某个 V_k，使得 $d_I(V, V_k) \leq 2\delta < \varepsilon$。因此我们得到

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} B_\varepsilon(V_k).$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，因此 A 是全有界的。

反之，设 A 是全有界的，并固定 $\delta > 0$。于是我们可以找到一个覆盖

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} B_{\frac{\delta}{2}}(V_k)$$

其中有 V_1、.....、$V_m \in A$。这意味着，对于任意 $V \in A$，我们都有某个 V_k，使得 $d_I(V、V_k) < \frac{\delta}{2}$。特别地，存在一个 $\frac{\delta}{2}$-交错，从而得到一个图表

$$\begin{array}{ccc} V|_{\delta\mathbf{Z}^n} & \longrightarrow & V[\delta]|_{\delta\mathbf{Z}^n} \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & V_k[\frac{\delta}{2}]|_{\delta\mathbf{Z}^n} & \end{array}$$

这意味着 $S_\delta V|_{\delta\mathbf{Z}^n}$ 仅取决于 V_k。由此可知， $A|_\delta$ 至多有 m 个同构类，从而证明了这一断言。□

定义 4.31。令 $V \in \mathbf{qtOb}_n$。我们将映射称为

$$c^V : [0,\infty) \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

定义为

$$c^V(\varepsilon) = \sup_s \operatorname{rk}\left(\underline{V}_s \to \overline{V}[\varepsilon]_s\right)$$

的 持久秩 V。

推论 4.32。假设 $\Bbbk$ 是有限的。那么，关于 $A \subseteq \mathbf{qtOb}_n$ 的以下条件意味着 A是相对紧的：

(1) 这些模具有一致有界支撑。(2) 这些模具有一致有界的持久秩。

5. Applications

5.1. 下水平集持久性。设 X 是一个拓扑空间，且 $f : X \to \mathbb{R}^n$ 是一个连续函数。那么

$$X_s = \{x \in X : f(x) \ll s\}$$

定义了 X 的开子空间的一个滤过。由 f 的连续性可得

$$X_s \cong \operatorname*{colim}_{\varepsilon>0} X_{s-\varepsilon} \cong \bigcup_{\varepsilon>0} X_{s-\varepsilon}.$$

赋值

$$s \mapsto H_k(X_s, \Bbbk)$$

对固定的 $k \geq 0$ 定义了一个 n-参数持久模。奇异同调保持滤余极限（例如参见 [May99]，第 14 章），因此

$$H_k(X_s, \Bbbk) \cong H_k(\operatorname*{colim}_{\varepsilon>0} X_{s-\varepsilon}, \Bbbk) \cong \operatorname*{colim}_{\varepsilon>0} H_k(X_{s-\varepsilon}, \Bbbk)$$

因此模 $H_k(X_\bullet, \Bbbk)$ 是下半连续的。下一个命题的思路与 [CL11，定理 2] 以及 [Cha+16，定理 3.33] 类似。

命题 5.1. 若 X 是有限可三角剖分的，则模 $H_k(f) = H_k(X_\bullet, \Bbbk)$ 属于 $\mathbf{bg}_n$。

证明. 我们首先考虑 q-温和性。设 $s \ll t$。我们要证明 $H_k(X_s, \Bbbk) \to H_k(X_t, \Bbbk)$ 具有有限像。我们对 X 进行三角剖分，并细化该三角剖分，直到没有单形同时与 $f^{-1}(s)$ 和 $f^{-1}(t)$ 相交。设 K 为与 X_s 相交的单形之并。于是 $X_s \subseteq K \subseteq X_t$ 给出一个分解

$$H_k(X_s, \Bbbk) \to H_k(K, \Bbbk) \to H_k(X_t, \Bbbk)$$

由此可知该断言成立，因为 K 是一个有限单纯复形的几何实现。根据上述讨论，我们已经知道 $V = H_k(f)$ 是下半连续的。因此，接下来只需证明它是某个有界集上的限制-扩张，且该集合包含于 $\mathbf{R}^n$。为此，我们注意到 $\mathbf{B} = f(X)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中是紧集，因而有界。我们断言 $V = V_{\mathbf{B}}$。为此，我们注意到 $X_s = f^{-1}(\{p : p \ll s\} \cap \mathbf{B}) = X_t$，其中 $t = \sup\{p : p \in \mathbf{B}\ p \ll s\}$，而后者由闭性可知属于 $\mathbf{B}$。因此，作为一个持久集，滤过 $X_\bullet$ 是其自身在 $\mathbf{B}$ 上的限制-扩张，所以 V 也同样如此。□

第 3 节的结果随即给出以下推论：

推论5.2。 设 X 是一个有限可三角剖分空间，且 $X_\bullet$ 是取值于开子空间的任意连续 n-参数滤过。那么，模 $H^k(X_\bullet; \Bbbk)$ 可本质唯一地分解为不可分解模。

设 X 是一个有限可三角剖分空间。那么，对于任意两个连续函数 $f, g\colon X \to \mathbb{R}^n$ ，有

$$d_I(H_k(f), H_k(g)) \leq \|f - g\|_\infty,$$

这意味着映射

$$C(X, \mathbb{R}^n) \to \mathbf{qtOb}_n$$

是连续的。

命题5.3。 设 X 是一个有限可三角剖分空间，且 $A \subseteq C(X, [0,1]^n)$ 是一个一致利普希茨且闭的连续函数族。那么， A 在$\mathbf{qtOb}_n$ 中的像是紧的。

证明。 我们使用阿泽拉-阿斯科利定理：

定理5.4。 设 X 为紧豪斯多夫空间。子集 $A \subseteq C(X, \mathbb{R}^n)$ 相对紧，当且仅当它等度连续且逐点有界。

这一版本的证明见 [KN76]。分别考察每个分量，可将其推广到取值于 $\mathbb{R}^n$的函数。结论随后由紧集的像仍为紧集这一事实得出。□

注 5.5。 由命题4.29可知，对于一致利普希茨且闭的族$A \subseteq C(X, \mathbb{R}^n)$，对所有 $\delta > 0$，集合 $A|_\delta$ 都只有有限多个同构类。

命题5.6。 设 X 为有限可三角剖分空间。则 $C(X, \mathbb{R}^n)$ 在$\mathbf{bg}_n$ 中的像是可分的。

证明。 设 $\mathbb{l}$ 为 $\Bbbk$的素域，特别地， $\mathbb{l}$ 是可数的。设 $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ 连续。于是根据同调的普遍系数定理（例如参见 [Hat02]），我们有

$$H_k(X_s, \Bbbk) \cong H_k(X_s, \mathbb{l}) \otimes_{\mathbb{l}} \Bbbk$$

因此 $H_k(f, \Bbbk) \cong H_k(f, \mathbb{l}) \otimes_{\mathbb{l}} \Bbbk$。由此我们得到一个分解

$$H_k(\cdot, \Bbbk) : C(X, \mathbb{R}^n) \to \mathbf{bg}_n^{\mathbb{l}} \to \mathbf{bg}_n^{\Bbbk}$$

其中最后一个映射由 $V \mapsto V \otimes_{\mathbb{l}} \Bbbk$ 给出。我们有

$$d_I(V \otimes_{\mathbb{l}} \Bbbk, W \otimes_{\mathbb{l}} \Bbbk) \leq d_I(V, W)$$

对于系数取自 $\mathbb{l}$ 的模，因为张量化保留交错图表，这意味着张量运算具有连续性。由命题 4.27 可知，**背景**$_n^{\mathbb{l}}$ 是可分的。由连续性可得， $C(X, \mathbb{R}^n)$ 在 **背景**$_n^{\Bbbk}$ 中的像也是可分的。□

5.2. **一般不可分解性**。 这项工作的主要动机之一，是关于不可分解多参数持久模在 [BS25]中稠密的结果。对于由 q-驯服且上半连续的模构成的空间，我们现在确实得到了一个用于多参数持久性的贝尔空间。然而，关于不可分解对象稠密性的定理并不能直接推广到这一类模：

命题5.7。 不可分解对象在$\mathbf{qtUsc}_n$中不稠密。

证明。 记 L 为处处等于 $\Bbbk$ 且结构映射全为恒等映射的模。容易验证，模 L 是内射的。我们证明 $L \oplus L$ 不存在不可分解

在交错距离下任何 ε-邻域中。现在考虑一个 ε-交错 $f\colon\ L\oplus L\to V[\varepsilon], g\colon\ V\to (L\oplus L)[\varepsilon]$。特别地，我们得到如下交换图

$$\begin{array}{ccc} L\oplus L & \xrightarrow{\ \cong\ } & (L\oplus L)[2\varepsilon] \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle g[\varepsilon]} & \\ & V[\varepsilon] & \end{array}$$

这意味着 $f\colon\ L\oplus L\to V[\varepsilon]$ 是内射的。将其与包含映射 $L\to L\oplus L$之一复合，我们得到一个短正合列

$$0\longrightarrow L\longrightarrow V\longrightarrow V/L\longrightarrow 0$$

由于 L 是内射的，该序列分裂，特别是 $V=L\oplus V/L$。我们还有 $V/L\neq 0$，否则就可以将恒等映射 $\Bbbk\oplus\Bbbk\to\Bbbk\oplus\Bbbk$ 分解经过一个一维空间。因此，对于任意 $\varepsilon>0$，任何与 $L\oplus L$ 以ε交错的 V都不可能是不可分解对象。□

鉴于这一结果，我们将研究范围限制在更小的有界生成模空间。回想一下，$\mathbf{fp}_n=\mathbf{bg}_n$，因此由 [BS25，定理 A]可立即得知，不可分解对象是稠密的。回想一下，剩余集是开集与稠密集的可数交，贝尔空间是指任何剩余集都稠密的拓扑空间（每个完备度量空间都具有这一性质）；而贝尔空间中的泛性质是指在一个剩余集上成立的性质。现在，要证明泛性质，尚缺少的关键步骤是构造一族开且稠密的集合，使其交集恰为不可分解对象的集合。为此，我们给出以下命题：

命题 5.8. 设 V 是一个正则局部有限可表示且不可分解的持久模。那么存在常数 $\mu>0$，使得每个 $W\in\mathbf{qtUsc}_n$只要满足 $d_I(V,W)<\mu$，就都是 $c\mu$-不可分解的，其中 $c>0$ 固定。

由于该证明只是对 [BS25, Theorem B]，中证明的直接推广，我们将其留到附录 A 中。由此可知，不可分解对象不仅稠密，而且构成$\mathbf{bg}_n$中的一个剩余子集。

Prop命题 5.9. 设 $n\geq 2$。在空间 $\mathbf{bg}_n$中，不可分解性是一种泛性质。

证明。 注意到，命题 5.8 表明， $\mathcal{M}_n^{\Bbbk}$ 中存在一个开集，包含所有不可分解对象，并且对于某个 $\varepsilon>0$，该开集中的对象全都是 ε-不可分解的。与$\mathbf{bg}_n$ 的交集在$\mathbf{bg}_n$ 中变得稠密，并且在子空间拓扑下仍是开集。通过缩小不可分解对象周围的球，我们得到一个由开稠密集构成的可数序列，其交集恰好就是不可分解对象的集合。□

5.3. **Degree-Rips 构造的紧致性**。 密度敏感双过滤的典型例子包括 Degree-Rips 和 Subdivision-Rips 滤过。本节将证明，以这种方式得到的某些持久模族是相对紧的。这些双过滤的构造见 [BL24]。

命题 5.10。 设 X 为紧致度量空间。 X 的有限样本集（赋予归一化计数测度）在 d_{GHP}下是相对紧的。

证明。 在 [Mie09 的命题 8] 中，证明了一个紧致度量概率空间集合在 d_{GHP} 下相对紧，当且仅当忘掉概率测度后，该集合在 d_{GH} 下相对紧。现在，由 Gromov 的相对紧致性定理 [BBI01；Gro81], 可知， X 的有限样本集在 d_{GH} 下相对紧，因为这些有限样本的直径一致有界且全有界。□

命题 5.11。 *Degree-Rips* 和 *Subdivision-Rips* 双滤过具有稳定性，即与同调复合后，它们定义了从赋有归一化计数测度的有限度量概率空间到持久模空间的利普希茨映射。

证明。 Degree-Rips 的情形由 [Sco20, 推论 6.5.2] 得出。Blumberg 和 Lesnik 在 [BL24] 的定理 1.6.(iii) 中证明了 Subdivision-Rips 双滤过的稳定性。□

因此我们得到以下推论：

推论 5.12。 设 X 为一个紧致度量空间，设 S 为 X 的有限样本集合，并赋予归一化计数测度。设 F 表示 *Degree-Rips* 或 *Subdivision-Rips* 构造与域系数同调复合所得的构造。则 $F(S) \subseteq \mathbf{qtUsc}_n$ 是相对紧的。

证明。 根据命题 5.11，映射 F 是 Lipschitz 的，因而是连续的。根据命题 5.10，集合 S 是相对紧的，因此其像 $F(S)$ 也是相对紧的。还需证明 $F(S)$ 的确落在 $\mathbf{qtUsc}_n$ 中，即如果 Y 是赋有归一化计数测度的有限度量空间，那么 $F(Y)$ 是 q-驯服且上半连续的。它是 q-驯服的这一事实是显然的，因为构造 F 中使用的所有单纯复形都是有限的。它是上半连续的这一事实，则直接源于构造 F 使用了非严格不等式 [BL24]。□

References

[BL15] U. Bauer 和 M. Lesnick. “诱导匹配与持久条形码的代数稳定性”。载于：J. Comput. Geom. 6.2 (2015)，第 162–191 页。 ISSN：1920-180X。 URL：https: //doi.org/10.20382/jocg.v6i2a9.[BS25] U. Bauer 和 L. Scoccola. “多参数持久模通常不可分解”。载于：International Mathematics Research Notices 2025.5 (2025 年 2 月)，rnaf034。ISSN：1073-7928。电子预印本：https:/ / academic.oup . com/imrn/ article - pdf/2025/ 5/ rnaf034/62170563/rnaf034.pdf。 URL：https://doi.org/10.1093/imrn/rnaf034。[Ben+24] K. Benjamin 等。“多尺度拓扑对亚细胞空间转录组学中的细胞进行分类”。载于：《自然》(2024)，第 1–7 页。[BP21] N. Berkouk 和 F. Petit. “瞬时持久模与距离比较”。载于：Algebr. Geom. Topol. 21.1 (2021)，第 247–277 页。 ISSN：1472-2747。 URL：https://doi.org/ 10.2140/agt.2021.21.247。[BCZ a] P. Biran、O. Cornea 和 J. Zhang. 三角剖分、持久性与 Fukaya 范畴。（即将发表于）Memoirs of the European Mathematical Society。arXiv: 2304 . 01785[math.SG]。 URL：https://arxiv.org/abs/2304.01785。[BBK20] H. v. B. Bjerkevik、M. B. Botnan 和 M. Kerber. “计算交错距离是 NP 困难的”。载于：Found. Comput. Math. 20.5 (2020)，第 1237–1271 页。 ISSN：1615-3375,1615- 3383。 URL：https://doi.org/10.1007/s10208-019-09442-y。[BL24] A. J. Blumberg 和 M. Lesnick. “双参数持久同调的稳定性”。载于：Found. Comput. Math. 24.2 (2024)，第 385–427 页。 ISSN：1615-3375,1615-3383。 URL：https: // doi.org/10.1007/s10208-022-09576-6。[Blu+14] A. J. Blumberg 等。“度量测度空间上持久同调的稳健统计、假设检验与置信区间”。载于：Found. Comput. Math. 14.4 (2014)，第 745–789 页。 ISSN：1615-3375,1615-3383。 URL：https://doi.org/10.1007/s10208-014- 9201-4。[BCB20] M. B. Botnan 和 W. Crawley-Boevey. “持久模的分解”。载于：Proc. Amer. Math. Soc. 148.11 (2020)，第 4581–4596 页。 ISSN：0002-9939,1088-6826。 URL：https://doi.org/10.1090/proc/14790。[BL23] M. B. Botnan 和 M. Lesnick. “多参数持久性的介绍”。载于：EMS Series of Congress Reports。EMS Press. 2023，第 77–150 页。[BOO24] M. B. Botnan、S. Oppermann 和 S. Oudot. “通过秩分解与秩精确分解得到的多参数持久性有符号条形码”。载于：Foundations of Computational Mathematics (2024)，第 1–60 页。[Bot+24] M. B. Botnan 等。“多参数持久模秩分解的瓶颈稳定性”。载于：Adv. Math. 451 (2024)，论文编号 109780，共 53 页。 ISSN：0001-8708,1090-2082。 URL：https://doi.org/10.1016/j.aim.2024.109780。

[Br25] T. Br¨ustle 等。二参数持久性中的计数与端曲线。2025。arXiv: 2505.13412 [math.RT]。 URL: https://arxiv.org/abs/2505.13412。[BSN17] P. Bubenik、V. de Silva 和 V. Nanda. “持久模的高阶插值与延拓”。载于：SIAM J. Appl. Algebra Geom. 1.1 (2017)，第 272–284 页。 ISSN：2470-6566。 URL：https://doi.org/10.1137/16M1100472。[BV18] P. Bubenik 和 T. Vergili. “持久模的拓扑空间及其性质”。载于：J. Appl. Comput. Topol. 2.3-4 (2018)，第 233–269 页。 ISSN：2367-1726,2367-1734。URL：https://doi.org/10.1007/s41468-018-0022-4。[BK23] R. Budney 和 T. Kaczynski. “二莫尔斯函数的双过滤与持久路径”。载于：Algebr. Geom. Topol. 23.6 (2023)，第 2895–2924 页。 ISSN：1472-2747,1472-2739。 URL：https://doi.org/10.2140/agt.2023.23.2895。[Buh+24a] L. Buhovsky 等。“粗节点计数与拓扑持久性”。载于：Journal of the European Mathematical Society (2024)。[Buh+24b] L. Buhovsky 等。“超越的 Bézout 定理”。载于：Forum Math. Sigma 12 (2024)，论文编号 e72，共 28 页。 ISSN：2050-5094。 URL：https://doi.org/10.1017/fms. 2024.49。[BBI01] D. Burago、Y. Burago 和 S. Ivanov. 度量几何教程。英文版。第 33 卷。Grad. Stud. Math. 普罗维登斯，罗德岛州：美国数学会 (AMS)，2001。 ISBN：0-8218-2129-6。[CL11] F. Cagliari 和 C. Landi. “多维持久同调群秩不变量的有限性”。载于：Appl. Math. Lett. 24.4 (2011)，第 516–518 页。 ISSN：0893-9659,1873- 5452。 URL：https://doi.org/10.1016/j.aml.2010.11.004。[CZ07] G. Carlsson 和 A. Zomorodian. “多维持久性的理论”。载于：计算几何 (SCG’07)。ACM，纽约，2007，第 184–193 页。 ISBN：978-1-59593- 705-6。 URL：https://doi.org/10.1145/1247069.1247105。[CGL21] W. Chach´olski、B. Giunti 和 C. Landi. “良驯参数化链复形的不变量”。载于：Homology Homotopy Appl. 23.2 (2021)，第 183–213 页。 ISSN：1532-0073,1532- 0081。 URL：https://doi.org/10.4310/hha.2021.v23.n2.a11。[CJT24] W. Chacholski、A. Jin 和 F. Tombari. 偏序集的实现与良驯性。2024。arXiv: 2112.12209 [math.AT]。 URL：https://arxiv.org/abs/2112.12209。[CCBS16] F. Chazal、W. Crawley-Boevey 和 V. de Silva. “持久模的可观测结构”。载于：Homology Homotopy Appl. 18.2 (2016)，第 247–265 页。 ISSN：1532-0073,1532- 0081。 URL：https://doi.org/10.4310/HHA.2016.v18.n2.a14。[Cha+09] F. Chazal 等。“持久模及其图表的邻近性”。载于：第二十五届计算几何年度研讨会论文集。2009，第 237–246 页。[Cha+16] F. Chazal 等。持久模的结构与稳定性。数学 SpringerBriefs 系列。施普林格， [Cham], 2016, 第 x+120 页。 ISBN：978-3-319-42543-6; 978-3-319- 42545-0。 URL：https://doi.org/10.1007/978-3-319-42545-0。[Che+24] M. Che 等。“持久图空间的度量几何”。载于：J. Appl. Comput. Topol. 8.8 (2024)，第 2197–2246 页。 ISSN：2367-1726,2367-1734。 URL：https://doi.org/ 10.1007/s41468-024-00189-2。[Cho19] S. Chowdhury. “持久图空间中的测地线”。载于：arXiv 预印本 arXiv:1905.108 (2019)。[CSEH07] D. Cohen-Steiner、H. Edelsbrunner 和 J. Harer. “持久图的稳定性”。载于：Discrete Comput. Geom. 37.1 (2007)，第 103–120 页。 ISSN：0179-5376,1432-0444。 URL：https://doi.org/10.1007/s00454-006-1276-5。[CB15] W. Crawley-Boevey. “逐点有限维持久模的分解”。载于：J. Algebra Appl. 14.5 (2015)，第 1550066 页，共 8 页。 ISSN：0219-4988,1793-6829。 URL：https://doi.org/10.1142/S0219498815500668。[Cru20] J. Cruz. 多参数持久模的波兰空间。发表于 2020 年菲尔兹研究所拓扑数据分析工作坊。2020。 URL：https :// www . fields .

utoronto.ca/talks/Polish-Space-Multiparameter-Persistence-Modules（访问日期：2025 年 4 月 24 日）。[Cru19] J. Cruz。《带流范畴中的度量极限》。2019 年。arXiv：1901.04828 [math.CT].URL：https://arxiv.org/abs/1901.04828。[DJK25] T. K. Dey、J. Jendrysiak 和 M. Kerber。《多参数持久性模的分解》。2025 年。arXiv：2504.08119 [math.RT]。URL：https://arxiv.org/abs/2504.08119。[Gar+22] R. J. Gardner 等人。《网格细胞群体活动的环面拓扑》。载于：《自然》602.7895（2022 年），第 123–128 页。[Gro81] M. Gromov。《多项式增长群与扩张映射（附 Jacques Tits 的附录）》。英文版。载于：Publications Math´ematiques de l'IH´ES 53（1981 年），第 53–78 页。URL：https://www.numdam.org/item/PMIHES_1981__53__53_0/。[GV24] S. Guillermou 和 C. Viterbo。《层的奇异支撑是 γ-余各向同性的》。载于：Geom. Funct. Anal. 34.4（2024 年），第 1052–1113 页。ISSN：1016-443X,1420-8970。URL：https: //doi.org/10.1007/s00039-024-00682-x。[HH24] M. Harsu 和 E. Hyry。《连续偏序集上的瞬逝模与 Scott 层》。2024 年。arXiv：2411.16235 [math.AT].URL：https://arxiv.org/abs/2411.16235。[Har77] R. Hartshorne。《代数几何》。数学研究生教材。施普林格，1977 年。[Hat02] A. Hatcher。《代数拓扑》。剑桥大学出版社，剑桥，2002 年，第 xii +544 页。ISBN：0-521-79160-X；0-521-79540-0。[KN76] J. Kelley 和 I. Namioka。《线性拓扑空间》。E.W.Gehring P.R.Halmos 和 C.C.Moore

施普林格，1976。ISBN：9780387901695。URL：https : / / books. google . de / books ? id = DGUPAQAAMAAJ.[Kum02] S. Kumar。《ind-簇与 pro-群导论》。载于：《Kac-Moody 群、其旗簇与表示论》。波士顿，马萨诸塞州：Birkh¨auser Boston，2002，第 109–148 页。ISBN：978-1-4612-0105-2。URL：https://doi.org/10.1007/978-1-4612- 0105-2_4.[Les15] M. Lesnick。《多维持久模交错距离理论》。载于：Found. Comput. Math. 15.3（2015），第 613–650 页。ISSN：1615-3375,1615- 3383。URL：https://doi.org/10.1007/s10208-015-9255-y。[LW22] M. Lesnick 和 M. Wright。《计算双参数持久同调的极小表示与双分次贝蒂数》。载于：SIAM J. Appl. Algebra Geom. 6.2（2022），第 267–298 页。ISSN：2470-6566。URL：https://doi.org/10.1137/20M1388425。[May99] J. P. May。《代数拓扑简明课程》。芝加哥数学讲座。芝加哥大学出版社，芝加哥，伊利诺伊州，1999，第 x+243 页。ISBN：0-226-51182-0；0-226- 51183-9。[Mie09] G. Miermont。《任意亏格随机映射的镶嵌》。2009。URL：https://doi.org/10.24033/asens.2108。[Mil25] E. Miller。《偏序集上的模的同调代数》。载于：SIAM 应用代数与几何杂志 9.3（2025），第 483–524 页。电子预印本：https://doi.org/10.1137/ 22M1516361。URL：https://doi.org/10.1137/22M1516361。[Mil23] E. Miller。《由具有锥形微支撑的可构造层诱导的实向量空间分层》。载于：J. Appl. Comput. Topol. 7.3（2023），第 473–489 页。ISSN：2367-1726,2367- 1734。URL：https://doi.org/10.1007/s41468-023-00112-1。[MS25] D. Morozov 和 L. Scoccola。《计算零维持久同调的贝蒂表与极小表示》。载于：第 41 届国际计算几何研讨会。第 332 卷。LIPIcs。Leibniz Int. Proc. Inform. 达格施图尔城堡。Leibniz-Zent. Inform.，瓦登，2025，论文编号 69，共 15 页。ISBN：978-3-95977-370-6。URL：https://doi.org/10.4230/lipics.socg.2025.69。[Naz75] L. A. Nazarova。《无限型偏序集》。载于：Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 39.5（1975），第 963–991、1219 页。ISSN：0373-2436。[PMK23] J. A. Perea、E. Munch 和 F. A. Khasawneh。《利用模板函数逼近持久图上的连续函数》。载于：Found. Comput. Math. 23.4（2023），

第 1215–1272 页。 ISSN：1615-3375,1615-3383。 URL：https://doi.org/10.1007/s10208-022-09567-7。[PSW25] F. Petit、P. Schapira 和 L. Waas。《层的交错距离的一种性质》。载于：Bull. Lond. Math. Soc. 57.1（2025），第 137–149 页。 ISSN：0024-6093,1469-2120。 URL：https://doi.org/10.1112/blms.13187。[PS16] L. Polterovich 和 E. Shelukhin。《自治哈密顿流、Hofer 几何与持久模》。载于：Selecta Math. (N.S.) 22.1（2016），第 227–296 页。 ISSN：1022- 1824,1420-9020。 URL：https://doi.org/10.1007/s00029-015-0201-2。[Pol+20] L. Polterovich 等。《几何与分析中的拓扑持久性》。第 74 卷。美国数学会，2020。[Riz+17] A. H. Rizvi 等。《单细胞拓扑 RNA-seq 分析揭示细胞分化与发育的新见解》。载于：《自然·生物技术》35.6（2017），第 551–560 页。[Sch22] M. Schmahl。《半连续 q-驯服持久模的结构》。载于：Homology, Homotopy and Applications 24.1（2022），第 117–128 页。 ISSN：1532-0081。 URL：http://dx. doi.org/10.4310/HHA.2022.v24.n1.a6。[SLM23] S. Schneider、J. H. Lee 和 M. W. Mathis。《用于联合行为分析与神经分析的可学习潜在嵌入》。载于：《自然》617.7960（2023），第 360–368 页。[Sco20] L. Scoccola。《局部持久范畴与交错距离的度量性质》。2020。 URL：https://ir.lib.uwo.ca/etd/7119。[She22] E. Shelukhin。《关于 Hofer-Zehnder 猜想》。载于：Ann. of Math. (2) 195.3（2022），第 775–839 页。 ISSN：0003-486X,1939-8980。 URL：https :// / doi. org / 10 . 4007/ annals. 2022.195.3.1。[Sto79] A. Stone。《紧空间的逆极限》。载于：General Topology and its Applications 10.2（1979），第 203–211 页。 ISSN：0016-660X。 URL：https://www.sciencedirect.com/ science/article/pii/0016660X79900084。[UZ16] M. Usher 和 J. Zhang。《持久同调与 Floer-Novikov 理论》。载于：Geom. Topol. 20.6（2016），第 3333–3430 页。 ISSN：1465-3060,1364-0380。 URL：https://doi.org/ 10.2140/gt.2016.20.3333。[Waa 24] L. Waas。《有限编码持久模范畴的阿贝尔性札记》。2024。arXiv：2407.08666 [math.AT]. URL：https://arxiv.org/abs/2407.08666。[ZC05] A. Zomorodian 和 G. Carlsson。《计算持久同调》。载于：Discrete Comput. Geom. 33.2（2005），第 249–274 页。 ISSN：0179-5376,1432-0444。 URL：https://doi.org/10. 1007/s00454-004-1146-y。

Appendix A. Openness of Nearly Indecomposables

为方便读者，我们给出命题 4.12 的证明。它与 [BS25, Theorem B]的证明完全类似。我们使用的两个引理也取自该文。

命题 A.1. 设 V 是一个正则局部有限可表示且不可分解的模。那么存在常数 $\mu > 0$，使得每个 $W \in \mathbf{qtUsc}_n$ 满足 $d_I(V, W) < \mu$ 时都是 $c\mu$-不可分解的，其中$c > 0$ 为固定值。

证明。设 V定义在网格 $\mathbf{P} = \varepsilon\mathbf{Z}^n$上。设 $d_I(V,\ W) < \frac{\varepsilon}{2}$。设 $f\colon\ V \to W[\delta],\ g\colon\ W \to V[\delta]$为一个$\delta$-交错，且具有 $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$。于是我们得到交换图

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\eta^V_{2\delta}} & V[2\delta] \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle g[\delta]} & \\ & W[\delta] & \end{array}$$

根据限制-扩张的函子性

$$\begin{array}{ccc} V_{\mathbf{P}} & \xrightarrow{(\eta_{2\delta}^{V})_{\mathbf{P}}} & V[2\delta]_{\mathbf{P}} \\ & {\scriptstyle f_{\mathbf{P}}} \searrow \quad \nearrow {\scriptstyle g[\delta]_{\mathbf{P}}} & \\ & W[\delta]_{\mathbf{P}} & \end{array}$$

因为平移成为一个同构。短正合列

$$0 \longrightarrow \ker g[\delta]_{\mathbf{P}} \longrightarrow W[\delta]_{\mathbf{P}} \xrightarrow{g[\delta]} V[2\delta]_{\mathbf{P}} \longrightarrow 0$$

通过 $f \circ (\eta_{2\delta}^{V})_{\mathbf{P}}^{-1}$ 分裂，因此我们有

$$W[\delta]_{\mathbf{P}} \cong V_{\mathbf{P}} \oplus X \cong V \oplus X$$

其中 $X = \ker g[\delta]_{\mathbf{P}}$。存在一个分解

$$W \cong \bigoplus_{i \in I} W_i$$

根据第三章的结果，可将其分解为不可分解对象。于是我们有

$$W[\delta]_{\mathbf{P}} \cong \bigoplus_{i \in I} W_i[\delta]_{\mathbf{P}}$$

并且由于 V不可分解，存在某个 W_i 使得$(W_i[\delta])_{\mathbf{P}} \cong V \oplus Y$。若令 $A = W_i$ 与$B = \bigoplus_{j \in I \setminus \{i\}} W_j$，则我们得到分解 $W = A \oplus B$，剩下只需证明 B 对某个适当的常数是严格平凡的。我们首先证明，对 $\sigma > \varepsilon$， $B_{\mathbf{P}}$ 是 σ-平凡的。为此注意到 $B_{\mathbf{P}}$是 X 的直和项，因此只需考虑 X。首先由自然性可见

$$\begin{array}{ccc} V \oplus X & \xrightarrow{(\eta_{\sigma}^{V}, \eta_{\sigma}^{X})} & V[\sigma] \oplus X[\sigma] \\ {\scriptstyle \cong}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\ W[\delta]_{\mathbf{P}} & \xrightarrow[\eta_{\sigma}^{W[\delta]_{\mathbf{P}}}]{} & W[\delta]_{\mathbf{P}}[\sigma] \end{array}$$

对所有 $\sigma > 0$都交换。由交错可知

$$\begin{array}{ccc} W[\delta]_{\mathbf{P}} & \xrightarrow{(\eta_{2\delta}^{W[\delta]})_{\mathbf{P}}} & W[3\delta]_{\mathbf{P}} \\ & {\scriptstyle g[\delta]_{\mathbf{P}}} \searrow \quad \nearrow & \\ & V[2\delta]_{\mathbf{P}} & \end{array}$$

交换，因此$(\eta_{2\delta}^{W[\delta]})_{\mathbf{P}}$ 在 X上为零。我们需要一个引理:

引理 A.2. 设 $0 < \alpha < \beta$，并考虑一个宽度属于 $[\alpha, \beta]$的可数网格$\mathbf{Q}$。设 L 为一个模。对 $r \leq \alpha$，存在一个态射使得

$$\begin{array}{ccc} L_{\mathbf{Q}} & \xrightarrow{\eta_{\beta}^{L_{\mathbf{Q}}}} & L_{\mathbf{Q}}[\beta] \\ {\scriptstyle (\eta_{r}^{L})_{\mathbf{Q}}}\downarrow & \nearrow & \\ L[r]_{\mathbf{Q}} = L_{\mathbf{Q}+r}[r] & & \end{array}$$

可交换。

证明。 我们首先定义所需的态射，也可以等价地写成

$$m : L_{\mathbf{Q}+r} \to L_{\mathbf{Q}}[\beta - r].$$

对于 $s \in \mathbf{R}^n$，我们有

$$L_{\mathbf{Q}+r}(s) = L(\sup\{t + r : t \in \mathbf{Q}, t + r \leq s\})$$

and

$$L_{\mathbf{Q}}[\beta - r](s) = L_{\mathbf{Q}}(s + \beta - r) = L(\sup\{t : t \in \mathbf{Q}, t \leq s + \beta - r\}).$$

现在令 s_0，使得 $t_0 + r = \sup\{t + r : \ t \in \mathbf{Q} \ t + r \leq s\}$，从而 $L_{\mathbf{Q}+r}(s) = L(t_0 + r)$。写作$\mathbf{Q} = (\{t_i\}_{i\in\mathbf{Z}})^n$，我们有 $t_0 = (t_{i_1}, \ldots, i_{i_n})$，其中指标 $i_\bullet$适当。写作 $s_1 = (s_{i_1+1}, \ldots, s_{i_n+1})$。那么，由于我们的网格在 $[\alpha, \beta]$ 中的网格宽度为，我们得到 $t_1 - \beta \leq t_0$，因此 $t_1 - \beta + r \leq t_0 + r \leq s$，这反过来又意味着 $t_1 \leq s + \beta - r$。此外，

$$t_1 \leq \sup\{t : t \in \mathbf{Q}, t \leq s + \beta - r\}$$

并且由 $r \leq \alpha$ 我们得到 $t_0 + r \leq t_1$。这使得我们可以考虑该复合

$$m_s : L_{\mathbf{Q}+r}(s) = L(t_0 + r) \to L(t_1) \to L(\sup\{t : t \in \mathbf{Q}, t \leq s + \beta - r\}) = L[\beta - r](s)$$

由 L的结构态射给出。由于这些仅由结构映射构造而成，我们立即得到该图表的自然性与交换性。□

We 将引理应用于带有 $r = 2\delta < \varepsilon$ 与 $L = W[\delta]$ 的 ε网格，以得到一个分解

$$\begin{array}{ccc} W[\delta]_{\mathbf{P}} & \longrightarrow & W[\delta]_{\mathbf{P}}[\sigma] \\ \downarrow & \nearrow & \\ W[3\delta]_{\mathbf{P}} & & \end{array}$$

for 任意 $\sigma > \varepsilon$。因此 η_σ^X消失，且 X 是严格 σ-平凡的。我们现在需要另一个引理 :

引理 A.3. 设 α、$\beta > 0$，并设$\mathbf{Q}$ 为宽度为 $\leq \beta$的可数网格。设 L 为一个模。若 $L_{\mathbf{Q}}$是（严格） α-平凡的，则 L 是（严格）$(\alpha + \beta)$-平凡的。

证明。我们证明非严格情形；严格情形可用类似方法证明。我们要证明 th at

$$L(s) \to L(s + (\alpha + \beta))$$

对所有 $s \in \mathbf{R}^n$ 都为零。我们可以找到一个极小的 t，使得 $s \leq t$。根据我们对网格宽度的假设，有 $t \leq s + \beta$。因此

$$t + \alpha \leq s + (\alpha + \beta).$$

令 $u = \sup\{v \in \mathbf{Q} : \ v \leq t + \alpha\}$，则 $L(t) = L_{\mathbf{Q}}(t) \to L_{\mathbf{Q}}(t + \alpha) = L(u)$ 为零，因为 $L_{\mathbf{Q}}$ 是 α-平凡的。我们必有

$$t \leq u \leq t + \alpha$$

因为 t 位于$\mathbf{Q}$上。因此我们可以得出，复合

$$L(s) \to L(t) \to L(u) \to L(t + \alpha) \to L(s + (\alpha + \beta))$$

为零，证毕。 □

这表明，对于每个 $\sigma > \varepsilon$， B 都是 $\sigma + \varepsilon > 2\varepsilon$-平凡的。我们得出结论：对于 $\mu = \frac{\varepsilon}{2}$，模 W 是严格 $6\mu = 3\varepsilon$-平凡的，因为我们可以选择 $\sigma < 2\varepsilon$。□