arXiv:2603.12093v1 [math.MG] 12 Mar 2026

刚接三维框架的完整图解静力学。第二部分：环的同调

Allan McRobie，fam20@cam.ac.uk 工程系，剑桥大学，CB2 1PZ https://orcid.org/0000-0002-6610-5927

2026年3月13日

摘要

本文是一个系列的第二部分，旨在借助代数拓扑的同调理论，以胞腔复形的形式描述任意三维刚接框架结构中的力和力矩，从而拓展图解静力学的适用范围。图解静力学提供了一种高度几何化的方法来表示杆系结构中的平衡。传统的基于矩阵的线性结构分析将结构表示为由杆件连接的一组节点，而图解静力学则将杆件网络视为定义了各种高维对象（多边形面、多面体胞腔、多胞体、……）。这些对象与分段线性应力函数相关，即麦克斯韦、Rankine 或 Cremona 的提升。此类应力函数必须由平面面片构成，这一要求极大地限制了可分析的结构范围，因为在许多结构中，杆件之间的空间并不对应平面多边形区域。

胞腔同调中的 CW复形对多边形、多面体和多胞体等几何概念作出了影响深远的推广；在此处采用它们，便不再要求杆件之间的空间必须是平面。本文将说明，任何由杆状构件组成的框架结构都可以分解为若干闭环的并集，每个闭环均由一条闭合的杆件回路构成。对于一般结构，这些回路是一般的闭合空间曲线，无法由平面多边形张成。借助 CW复形构成的链，这一新理论便可应用于种类更加丰富的结构几何。

与大多数图解静力学的描述不同，这种方法并不局限于纯轴力。正如这一系列论文第1部分所述，剪力、弯矩和扭矩都能自然地纳入其中。该系列后续论文将把这种方法推广至位移、转动和虚功，并将进一步详述如何将回路形式体系“提升”至涉及更高维 CW复形的情形。

1 引言

图解静力学 [1, 2, 9, 10] 有其局限性，本文的主要目的是推广这一方法，使其能够处理范围更广的结构问题。实现这一目标的主要方式，是用代数拓扑中使用的更一般概念——CW复形，取代人们熟悉的多边形、多面体和多胞形等几何概念。在新的描述中，关键对象是四维空间中的回路。我们用回路集合来表示结构框架，并用一组对偶回路来表示框架杆件中的力和力矩。能够表示力矩，是这一新方法的一项重要优势。后续论文将展示，其他回路还可以表示位移和转动等运动学变量。

麦克斯韦在其1864年发表的经典论文 [9] 中讨论互易图，并提出了一个意义深远的观察：如果二维桁架的形式图是一个平面多面体的二维投影，那么该桁架就能够承受一种轴向自应力状态。麦克斯韦在篇幅长得多的1870年论文 [10], 中进一步阐明了这一联系，指出该多面体是一个离散的Airy应力函数，所有曲率（因而所有应力）都集中在多面体的尖锐边缘上。麦克斯韦提出了多种应力函数来处理三维应力。本文聚焦于他在“应力图”构造中隐含使用的应力函数，该函数是物体空间与应力空间之间的勒让德变换 [17, 18, 19], ，适用于任意维度。本系列论文的第1部分 [17] 展示了如何用一个对偶回路表示简单结构中的力和力矩；该结构由一条封闭杆件回路构成。这个对偶回路存在于四维空间中——也就是增加一个应力函数维度后的通常三维空间。其六个投影中有三个投影的面积给出轴向力和两个剪力，另外三个投影则给出关于原点的总力矩分量。更一般的结构则可以表示为这类回路的组合。

运用初等同调理论，任何框架结构都可以分解为回路的并集，力和力矩则可以由对偶回路的并集来表示。本文第2节所给出的这一描述是完备的：它可以表示任何框架结构中的任何自应力状态。为使该理论与图解静力学更为贴近，本系列后续论文包含“提升”。它们是与麦克斯韦应力图的应力函数相关联的高维对象（例如多面体的面和多胞体的胞腔）。正是这些高维对象，使图解静力学有别于结构框架分析的传统线性分析描述。请注意，在结构桁架的自应力与机构的Maxwell-Calladine计数 [4] 中，仅有的结构对象是节点和杆件。其中并未提及面。这与标准的线性矩阵结构分析相一致。相比之下，在图解静力学中起核心作用的多面体Airy应力函数，其欧拉示性数的计数包含了面。请注意，这些面并不存在。它们是构想——分析者在杆件之间的空隙中看到图案，如三角形、四边形等，进而提出要求，例如要求这些空白空间保持为平面。正是这种对杆件之间空间的几何形状与拓扑的关注，才是图解静力学所特有的。这一视角的益处在于，把桁架看作多面体的投影，可以从中获得强大的解释力。给定一个复杂的二维桁架，对其平衡矩阵作奇异值分解，便可揭示可能的自应力状态和可能的不可伸长机构。这些同样的特征往往也可以通过对多面体应力函数的目视检查得到，而无需诉诸矩阵运算。这正是图解静力学之美：分析者往往一眼便能看出结构中的力是如何组织的。在其1864年的论文 [9], 中，麦克斯韦对将这一论证推广至三维结构持谨慎态度，称“空间中互易图形的力学意义会随其复杂性迅速减弱”。尽管这一点常被用作完全不去探究三维互易图形的理由，我们在此却将其用作指引：三维倒易图将会得到研究——并且连同力矩一起——但我们在这样做时将始终力求把复杂性降到最低。

1.1 其他研究

本文中的许多成果此前已由作者发表。作者曾在国际壳体与空间结构协会（IASS）举办的会议上作报告，尤其是在阿姆斯特丹 2015 [11], 波士顿 2018 [15], 巴塞罗那 2019 [16] 和苏黎世 2024 [19]。这一系列论文的第1部分进一步介绍了Karpenkov等人的相关工作。 [8] 以及Baranyai的工作 [3]。Cooperband及其合作者还运用层上同调 [7, 6, 5] 研究桁架和抗弯框架中的自应力与机构。尽管这些研究在数学上——同调与上同调理论——存在显著重叠，但二者有一点不同：除少数二维示例外，余层形式主义不涉及“提升”。其中并不考虑（或设想）面、胞腔或多胞体等高维对象。相反，余层形式主义被用于为节点和杆件赋予力矩与力。其中一项成果 [7] 是将铰接桁架的麦克斯韦-卡利丹计数推广到抗弯框架的情形。

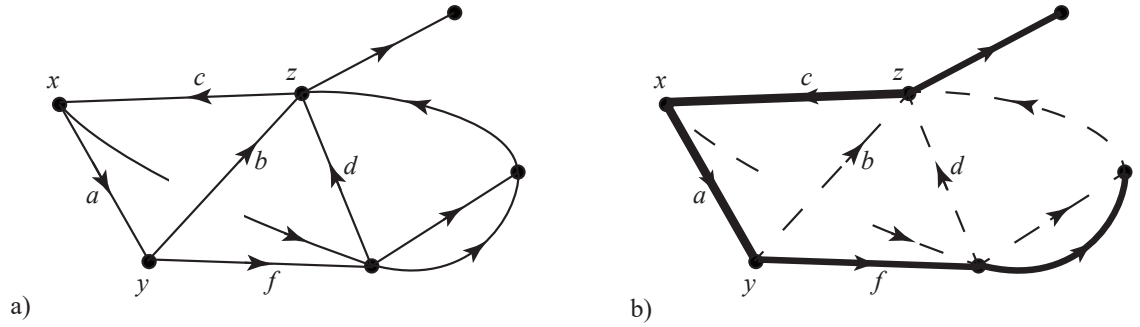


图1：a) 将一个三维结构表示为图，其中节点为 x、y、z、.....，有向边为 a、b、c、.....。b) 该图的一棵生成树。

2 回路同调

我们首先介绍同调理论的一些预备知识。同调理论与同伦理论一起，为描述对象的拓扑性质提供了方法。同调理论的一个优势在于它是一种交换理论，其许多组成部分都适合使用线性代数进行分析。这一性质将把图解静力学高度几何化的构造，与大多数从业结构工程师所采用的、更为熟悉的基于矩阵的线性结构分析方法联系起来。在代数拓扑中，至少有三种研究同调的方法：单纯同调、奇异同调和胞腔同调。前两种方法以单纯形为基础（即三角形、四面体及其更高维推广）。它们要求按照严格的规则将胞腔彼此连接，并以特定顺序对顶点、边、面等进行编号。这些规则在构造对象时很有帮助，但对于本文的目的而言并不够一般，因为此时对象——结构——已经给定。因此，我们将采用胞腔同调，它使用CW复形而不是单纯形。

同调理论属于代数拓扑，通常用于对对象进行拓扑分类。本文的目标与此不同：给定一个三维框架结构，我们要构造有效的对偶对象，以表示其中可能存在的应力合力。尽管目标不同，同调理论的语言和技术仍提供了将图解静力学推广所需的工具。因此，我们将首先介绍这套相当抽象的数学工具。虽然对拓扑学家而言它浅显易懂，但大多数结构工程师可能并不熟悉。

第一步是将三维刚接框架解释为一个有向图 X。也就是说， X 由 v 个节点和连接它们的 e 条边（即结构杆件）组成。任意杆件的方向（即它在有向图中的方向）都可以自由选择。在图 $1a$的示例中，有六个节点 $\{x, y, z, \ldots\}$ 和十根杆件 $\{a, b, c, \ldots\}$，其方向如图所示。

接下来，为节点集合赋予群结构。也就是说，我们定义由顶点 $\{x, y, z, \ldots\}$ 生成的自由阿贝尔群 C_0。顶点的任意整数线性组合，即形如 $\alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots$ 的对象（其中 α、β、$\gamma \ldots \in \mathbb{Z}$ 为整数），都是该群的元素。群运算就是对整数系数进行普通加法。例如，对象 $3x + 4y - 2z$ 是群中的一个元素。群是阿贝尔群，意味着它满足交换律，例如 $x + y = y + x$，也就是说，顶点的列出顺序无关紧要。群的单位元是零元，记作 0，即所有系数 α、β、$\gamma \ldots$ 均为零的对象。注意，标签 x、y、z、$\ldots$ 表示节点本身，而非其坐标。虽然在拓扑学中构造这样的群或许司空见惯，但在结构工程中却并不常见。人们很少会听到诸如“取三个这样的节点，再减去五个那样的节点”之类的说法。尽管如此，以这种方式对对象进行加减的能力将大有用处，尤其是在我们进一步描述有向杆件时。

对于杆件，我们定义由有向边 $\{a, b, c, \ldots\}$ 生成的自由阿贝尔群 C_1。有向边的任意整数线性组合，例如 $5a + 3b - 7c$，都是该群的元素。群运算和单位元与 C_0 类似。重要的是，群的阿贝尔性质意味着路径的列出顺序无关紧要。也就是说，对象 $a + b - d$ 与对象 $a - d + b$ 相同。b 无须接在 a 之后。这与同伦理论不同，在同伦理论中，路径按顺序依次连接，因此顺序至关重要。请注意，$a - d$ 也是一个有效元素，尽管它的两个组成部分并不相连。

现在定义一个映射 ∂，它将边群 C_1 中的元素映射到节点群C_0中的元素。这是一个群同态，即**边界算子**，其定义方式是规定它对 C_1的生成元 $\{a, b, c, \ldots\}$ 的作用。具体而言，∂对任意有向边（例如 a）的作用，等于该边的终点减去起点。在此例中，

$$\partial : C_1 \rightarrow C_0 \tag{1}$$
$$\partial(a) = y - x \tag{2}$$

在 C_1 中，圈定义为满足 $\partial(t) = 0$的任意元素 $t \in C_1$，其中 **0** 是 C_0的单位元。因此，圈是指没有边界的一组有向边（杆件）。这类圈就是回路，将是我们进行图形构造的主要对象。在此例中，很明显，元素 $t = a + b + c$ 是一个圈。或许不那么显而易见的是，诸如$u = a + 2b + c - d - f$ 这样的元素也是一个圈。边界 $\partial(u) = 0$ 是否为零，可以通过将起点和终点节点相加来检验。尽管我们可能倾向于将回路（一个圈）视为按顺序沿一组边行走而形成的闭路径（例如从顶点 **x** 出发，沿着路径 $u = a + b - d - f + b + c$），但由于该群是阿贝尔群，我们同样可以通过以任意顺序列出相关有向边来定义这个回路。

因此，环就是映射 ∂： $C_1 \rightarrow C_0$ 的核。也就是说，它们是边群 C_1 中映射到节点群 $0 \in C_0$ 的零元素的元素。为简单起见，我们假设只有一个结构。为了推进分析，选择一组张成该核的基圈。实现这一点最方便的方法是使用生成树。根据定义，树不含回路，我们选取图 X 的任意连通树子图，并使其遍历每个顶点。图 $1b$ 给出了一个示例。根据定义，树不能包含任何圈，因此很容易看出，不在树中的每条边都定义了一个独立圈。（证明：任何非树边都有一个起始节点和一个终止节点，每个节点都在树中，并且存在一条从终止节点经由树返回起始节点的路径；因此，该路径与原边结合后形成一个圈。）在图 $1b$ 的示例中，杆件 d 不在树中，因此定义了圈 $a + c + d + f$，它是 ∂：$C_1 \rightarrow C_0$ 的核的一个基元素。

显然，生成树有 $v-1$ 条边，因此不在树中的边数为 $e-(v-1) = e - v + 1$。因此，形成所有环的群（即 ∂ 的核：$C_1 \rightarrow C_0$）的基，需要 $e - v + 1$ 个独立圈。在图 $1b$ 的示例中，有五个基圈，生成树之外的每根杆件对应一个。

2.1 对偶回路

正如本系列论文第**1**部分所述 [17], ，结构环中的力和力矩可通过四维扩展应力空间中的对偶回路来定义。这源于麦克斯韦应力图所依据的勒让德变换 [10]。四维扩展应力空间中任一对偶回路的有向（双向量）面积包含六个分量（见图2）。其中三个分量位于通常三维空间的 $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$,$\mathbf{j} \wedge \mathbf{k}$ 和 $\mathbf{k} \wedge \mathbf{i}$ 平面上，可用于定义力的三个分量。另外三个投影面积分别位于 $\mathbf{i} \wedge \mathbf{h}$、$\mathbf{j} \wedge \mathbf{h}$ 和 $\mathbf{k} \wedge \mathbf{h}$ 平面上。这些平面包含 **h**，即四维空间中与应力函数相关的方向。这另外三个投影给出了每个基结构环内总力矩的三个分量。

请回想，力矩分量　总力矩包括内力矩（包含一个扭转分量和两个弯曲分量）以及切口处的力通过力臂产生的力矩，作用于　e

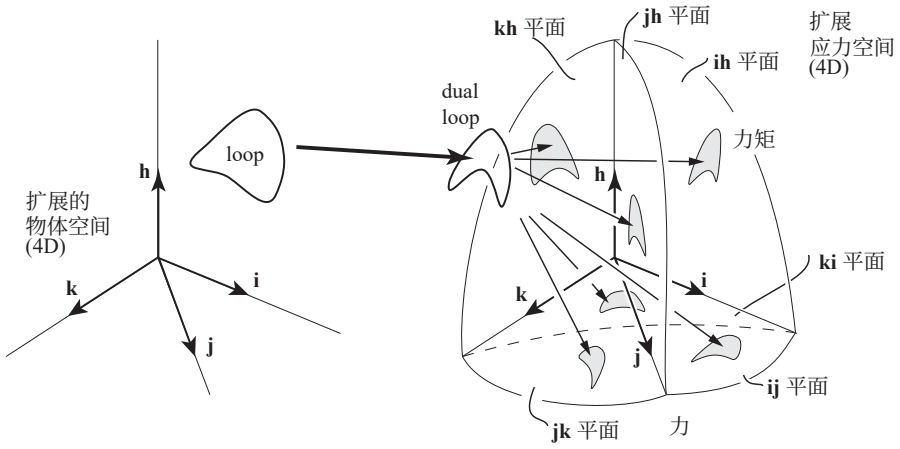


图 2：一个结构环及其对偶回路。扩展后的物体空间和应力空间均为四维：包括通常的三个维度（**i**, **j** 和**k**），以及一个用于应力函数的额外维度**h** 。四维应力空间中有六个基双向量平面。将对偶回路投影到**ij**、**jk** 和**ki** 平面上，可得力分量。投影到**ih**、**jh**和**kh** 平面上，可得力矩分量。

原点 [17]。对于由单个回路构成的结构，由于没有外力，力和总力矩沿回路保持恒定。因此，单个对偶回路可以表示结构环上任意一点处的力和总力矩应力合力。这与科西嘉求和构造 [13]不同，在该构造中，对偶对象沿回路不断变化。如 [17], 所示，该构造对应于局部弯曲力矩和扭矩，它们沿回路从一点到另一点不断变化。

由此可见，这种回路形式体系能够描述任意三维框架结构中的任何自应力状态（自然也包括任意二维框架中的自应力状态）。首先，确定一棵生成树，以定义一组基回路；然后，对于每个这样的回路，都可以在四维应力空间中定义一个对偶回路，从而确定每个结构基回路上切口处总应力合力的六个分量。这样便完整地定义了自应力状态。此外，这种描述方式能够定义该框架中所有可能的自应力状态。

图3提供了一个示意图来说明这一点。一个由六个节点和九根杆件组成的三维框架结构被分解为四个回路。因此，力图由四个对偶回路组成。任意排列的四个对偶回路都可以定义一种自应力状态。每根非树杆件中的应力合力，等于与该非树杆件所定义的基结构环相对偶的单个回路的投影面积。生成树中的结构杆件所受的应力合力，等于与该杆件作为边的各结构环相对偶的回路并集的投影面积。

任意构型的四个力回路都足以定义一种自应力状态。图3中选择的力回路组合成了一个相对规整、统一的力图，但并不需要如此规整。

2.2 结构解释

这一描述已经蕴含了结构工程学的见解。如果将生成树之外的每根杆件都在其长度上的某处切断，框架就会变成不含任何圈的静定树形结构。我们可以在每个切口处施加六个独立的应力合力分量，并使其在相对切面上大小相等、方向相反。每一组这样的自平衡释放力都会在由被切杆件所定义的回路（圈）中产生一个自应力。因此，具有 v 个节点和 e 根杆件的三维框架中有$6(e - v + 1)$个独立自应力状态。这是结构工程学中众所周知的结论。分析超静定结构的力法正是遵循这一原理：正如工程本科阶段所教授的那样，通过切开框架结构（即树）使其成为静定结构

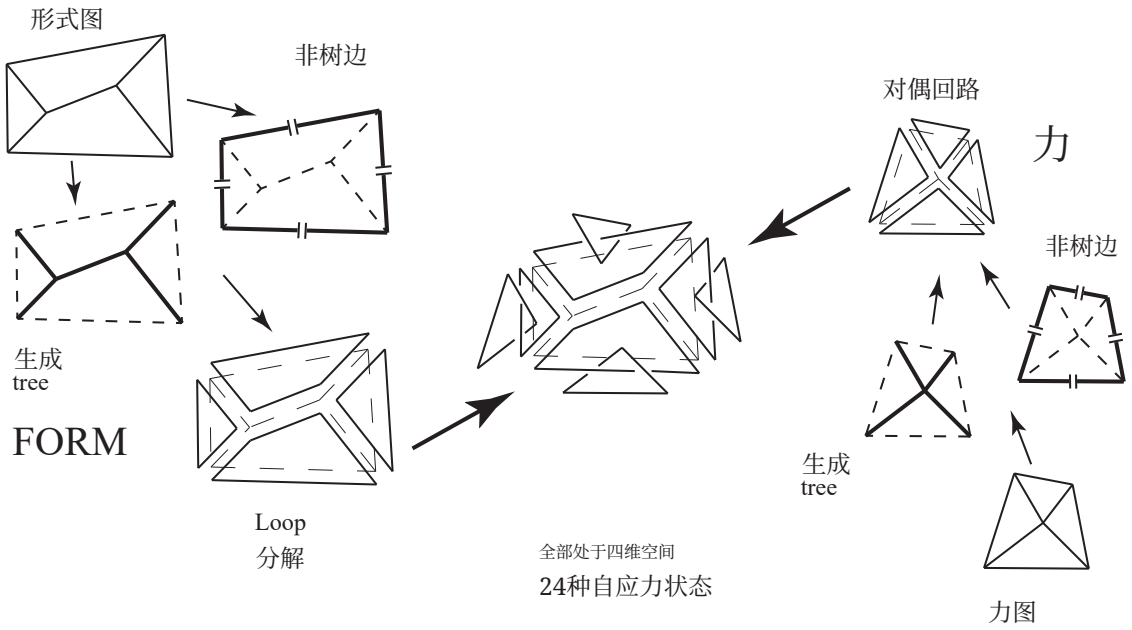


图3：示意图展示了一个由六个节点和九根杆件组成的三维框架结构，该结构被分解为四个基回路。因此，力图由四个对偶回路组成。

，然后施加所需数量的切口，并在每个切口处施加释放力和力矩。框架中的任何应力状态，都是与施加于静定树形结构上的外载荷相平衡的唯一内应力，与各组分别同施加于树上的释放力相平衡的唯一内应力分布的任意组合之和。

传统上，力法接下来会假设材料呈线弹性行为，并求解闭合切口所需的释放力和力矩。这是一项相容性要求，需要了解材料性质。此阶段我们暂不考虑相容性和材料定律。这里关注的是平衡；如第1部分所述，不存在外载荷，只有自应力。（外载荷总可以视为由相邻加载框架中的杆件施加。然后研究结构与加载框架组成的组合系统中的自应力状态。）

这种选择具有很大的自由度：可以选择任意生成树；更重要的是，对于任意结构环，都可以选择任意对偶回路。这种自由度有诸多益处。

- 描述已完整。任何二维或三维框架结构中的任意自应力状态都可以表示。

- 在描述中纳入力矩，大大拓展了图解静力学的适用范围；传统上，图解静力学仅限于只能承受轴力的桁架结构。
- Rankine三维倒易图中的多面体应力函数与多胞体应力函数均被纳入这一描述，但在此已得到相当程度的推广。例如，回路不必是平面多边形面的边界。

本文方法与传统结构分析方法的区别，在于用回路来表示内力和力矩。通过设置足够数量的释放，将框架结构分解为一个底层树结构，其分支由切断杆件连接起来，这是标准做法。不过，通常切面上的应力合力的六个分量会

用三维空间中的一对向量表示，一个表示切面应力产生的力，另一个表示其产生的力矩。通过将汇聚于各节点的不同力向量首尾相接，可以得到力的图解表示——所谓的基于向量的图解静力学 [2]。这体现为力多边形闭合所表达的平衡；在三维情形下，构成多边形各边的向量不必都位于同一平面内。也可以用力矩向量进行类似的构造，因为节点平衡要求汇聚于同一节点的所有杆件端弯矩之和为零，不过这种方法受到的关注要少得多。

关键区别在于“平行”和“垂直”的概念。在传统的二维图解静力学中，杆件力可以绘制为与相应杆件平行（即所谓的克雷莫纳约定），也可以绘制为与杆件垂直（即所谓的麦克斯韦约定）。最终得到的图示相同，但二者相差 90 度旋转。然而，在三维空间中，得到的则是完全不同的对象。“平行”约定对应于基于向量的图解静力学，其中力以向量表示。“垂直”约定则对应于兰金构造，其中力以一个与相关杆件垂直的平面多边形的面积表示。本文对后一种观点进行了推广，以回路组装体取代兰金方法中的多面体和多胞体。

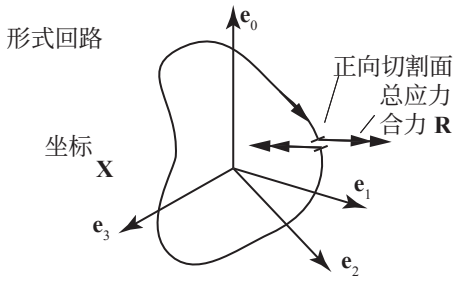


图4：符号约定：每个回路在一根非树杆件上的某一点设有一个切口，并通过任意选取切口处的一个面作为正面，来定义回路的方向。

2.3 符号约定

每个回路都被任意指定一个方向。当一根结构杆被（假想地）切开时，会显露出两个切面。这两个相对的切面对应同一个回路，但方向相反。每个切口处的一个面被任意选为正面，由此确定穿过该切口的回路的正方向。回路的正方向是指回路的环流从正向切割面流出的方向（见图4）。切口设在生成树之外的杆件上，因此每个切口仅有一个回路穿过。

3 示例

3.1 具有K5图的框架

麦克斯韦发表于1864年的经典论文 [9]以轴向自应力结构这一最简单的例子开篇。它具有 K4图（四个节点，每个节点都与其他所有节点相连），其倒易图也具有相同的 K4拓扑。该结构由一个外三角形（K3）和三根连接至中心节点的径向辐杆组成。因此，K4是对K3进行锥化的结果。另一个具有这种拓扑的熟悉例子是交叉支撑四边形——一种四杆机构，带有两根彼此不相连的对角杆，并且

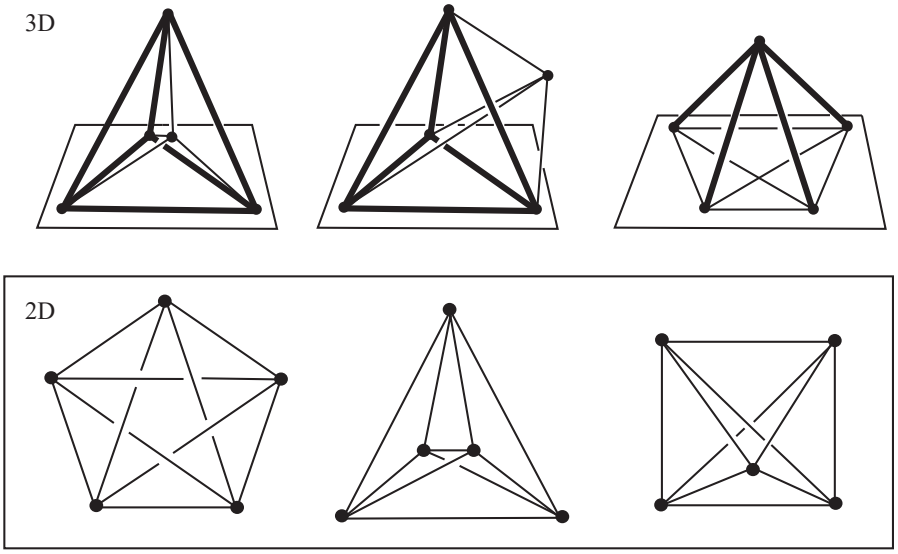


图5：具有 K5 图的各种框架。其中一些是完全三维的，另一些是完全二维的。右上方是二维 K4 的三维锥化。

麦克斯韦互易图同样是一个交叉支撑四边形。每个图都是三维四面体的二维投影。

将所有内容提升一个维度，三维中轴向自应力结构的最简单例子具有 K5 拓扑：共有五个节点，每个节点都与其他所有节点相连（见图5）。当该结构处于一般位置的三维桁架中时，兰金互易图（其中力以面积表示）具有相同的 K5 拓扑。该结构由一个外部四面体（K4）和四根连接至中心枢纽的径向辐杆组成。因此，K5 是 K4 的锥化。同样，也可以采用具有相同拓扑的其他几何形态。例如，可以将中心节点移到原外部四面体之外。更微妙的是，可以将中心节点移至四面体原有的某个外侧面内。这样便形成一个平面 K4 子结构，并将其锥化至一个单独的非平面节点（见图5，右上方）。这类包含二维子结构的三维构型在工程学中十分常见，但此前在图解静力学中一直难以处理。同样，五个节点也可以全部位于同一平面内。需要注意术语：五个节点位于一个平面内，但 K5 图并不是<样式 id='1'>平面</样式>图——它无法在平面上绘制而不产生交叉点。其结果之一是，二维 K5 结构没有二维麦克斯韦互易图形。不过，通过通常的变通方法，即在形式图中的任意交叉点处添加一个节点，仍可得到某种反图。

图 5 中的每个 K5 图形，都是一个四维多胞体——五胞体——在三维或二维空间中的投影。五胞体由五个四面体组成，其中任意两个四面体都共用一个三角形面。不过，在理论发展的这一阶段，还不需要引入四面体等三维体积单元的概念。这里，回路是最高阶的对象。

对偶K5图形为麦克斯韦–兰金三维互易图提供了最简单的示例。倒易图中的每个三角形面都垂直于形式图中相应的杆件，且三角形的面积表示杆件力的大小。在说明K5框架更一般的倒易图（例如可能涉及力矩）之前，我们首先展示传统的麦克斯韦–兰金倒易图如何从这种新的基于同调的描述中自然产生。

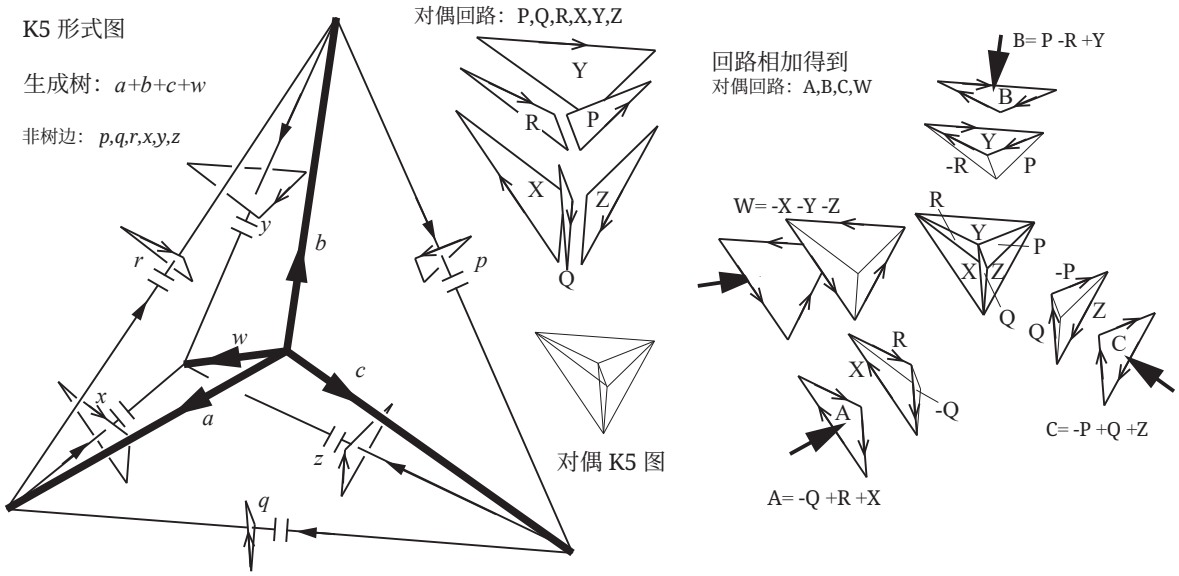


图6：a) 具有 K5 图的框架有十根杆件，其中四根可以构成生成树（此处为杆件a, b, c, w）。六根非树杆件中的每一根（p, q, r, x, y, z）都定义一个回路。纯轴向解可以表示为六个三角形回路（P, Q, R, X, Y, Z），每个回路分别与一个形式回路对偶。b) 这六个对偶三角形可以排列成共用一个中心节点。c) 表示树杆件（例如杆件 a）中力的回路，可以通过将适用于该杆件的三个对偶回路（此处为 $A = -Q + R + X$）相加来确定。求和运用了边群 C_1中的群运算。

3.1.1 K5桁架的标准轴向解再探

图6a展示了一个具有K5拓扑的三维框架。新描述的第一步是为每根杆件指定一个方向。图中的箭头表示了这些方向。对于每根杆件，方向可以任意选择。接下来，选取一棵生成树。生成树有许多种可能的选择，任何一种都可以。在这里，我们选择从中心节点向周围四面体的四个顶点辐射的杆件 a、 b、 c、 w。六根非树杆件 p、 q、 r、 x、 y、 z分别定义了一条通过树连接的回路。例如，在图6中，非树杆件 p 定义了回路 $p - c + b$。

因此，倒易图由六个对偶回路组成： P、 Q、 R、 X、 Y、 Z（见图6b）。由于轴向解中不存在力矩，每个倒易回路都可以是在三维空间中垂直于其对应杆件的简单多边形；为简便起见，我们可以令每个多边形为三角形。每根树杆均属于三个回路，并且要求每个此类力都是轴向力。如果将非树边回路布置成使任意三个相邻三角形的和都具有一个垂直于树杆的三角形边界，就可以很容易地实现这一点（见图6c）。这里，如果两个回路共用一根树杆，则称它们“相邻”。例如，由杆件 p、 y 和 r 定义的回路彼此相邻，因为树杆 b为三者所共有。

每根树杆（例如 b）都是三个结构环（p、 y、 r）的组成部分。于是，每根此类树杆中的力由三个相应对偶力环（P、 Y、 R）之和给出（见图 6c）。这三个力环可以选为三角形，其双向量之和是一个三角形 B，且垂直于 b。所有加法均依据同调代数进行。因此，在此例中，杆件 b 切口的正面必须承载一个力 $B = P + Y - R$，并且这些力均选取为使 B 垂直于 b。如果需要，可以通过取霍奇对偶，将三维中的任意力双向量转换为三维中的力矢量；也就是说，杆件 b 中的力可以表示为一个垂直于三角形 B 的矢量，其大小等于三角形面积，而杆件 b 正向切割面上的力的方向，则由对偶回路 B 的方向按照右手螺旋定则确定。

以这种方式汇集所有三角形力环后，我们得到一个几何对象，其几何形状实质上与传统的三维 K5 桁架的麦克斯韦-兰金解相同。然而，与由 5 个相邻四面体和 10 个三角形面（即一个五胞体）组成的对象不同，该互易对象仅由六个三角形回路 P、Q、R、X、Y、Z组成，它们共同拥有图中心的一个顶点。外侧的四个三角形 A、B、C、W按照上述描述隐式定义。此外，目前还没有“面”“胞”或“多胞形”的概念。下一个例子将展示，如何在回路形式体系中表示简单张拉整体中的轴向自应力状态。

3.2 简单张拉整体中的轴力

简单张拉整体结构具有纯轴向自应力状态，用传统的麦克斯韦-兰金互易图表示这些状态可能比较困难。在许多情况下，张拉整体具有球面多面体的拓扑；因此，对于通常的三维形力对偶（其中胞腔与点对偶），其互易对象似乎只由一个点构成（或者更严格地说，若将形态拓扑视为结构多面体的双重覆盖多胞形，则由两个点构成）。仅有一两个点的互易对象不足以充分表示众多内部杆件力。另一个问题是，有些张拉整体（例如后文讨论的具有立方体拓扑的结构）具有并非平面的多边形“面”，而在大多数其他图解静力学方法中，这些面都难以处理。

此前已对这类问题进行过深入探讨（例如，参见 [12, 15]）。一种解决方法是将多面体锥化，使所有结构节点都通过所谓的零杆 [14] 与一个内部极点相连。（零杆是指其互易力多边形的定向面积为零的杆件。）锥化会形成一组内部棱锥胞，每个棱锥的顶点都位于锥化极点处，而其底面与周围多面体的一个面重合。另一种构造方法是在多面体的每个面上增设一个“面垫”胞腔 [12]。面垫是只有两个面的胞腔，这两个面共用同一个外围边界边环。可以为每个面垫关联一个应力函数，以此定义额外的互易节点；互易节点数量的增加使得构造出足够丰富、能够表示内部.....的互易对象成为可能。

力。该构造将在后文一节中加以描述。不过，此处我们给出一个简单张拉整体的示例，其自应力状态仅借助回路、按本文方法加以描述。

3.2.1 八面体三棱柱张拉整体

具有八面体拓扑的三棱柱张拉整体如图 7 所示，图中还展示了根据 McRobie [12] 的方法，将零杆锥化至中心节点后得到的兰金互易图。图 8 将该倒易图分解为其组成多边形。

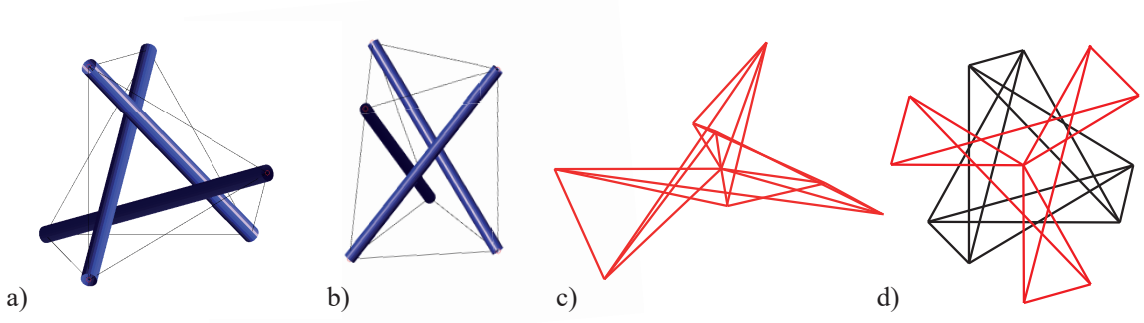


图7：具有八面体拓扑的三棱柱张拉整体。a) 平面图。b) 总体视图。c) 兰金互易图。d) 结构与倒易图的平面图。

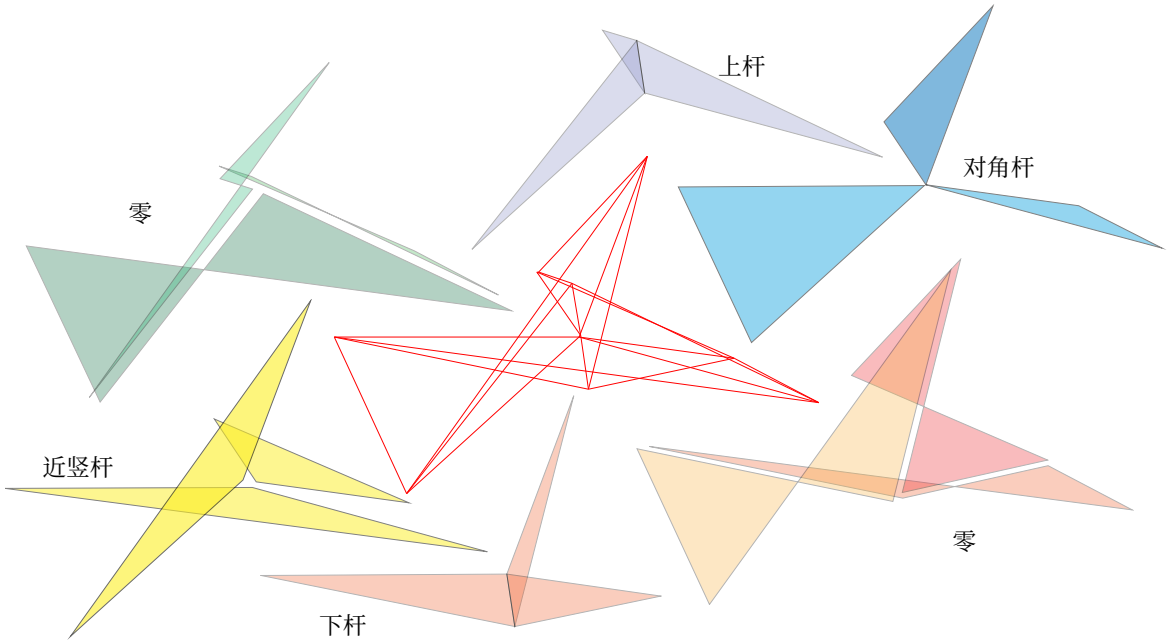


图 8：图 7b）中三棱柱张拉整体的兰金互易图分解为与各结构杆对应的多边形。主要受压构件中的力以蓝色三角形表示（右上）。上、下受拉构件三角形中的力分别以紫色（上方）和粉色（下方）表示。近竖直受拉构件中的力以黄色三角形表示。三个绿色（左侧）和三个橙色（右侧）四边形的面积均为零，这对应于零杆中没有力；这些零杆将结构锥接至一个中心节点。

这里我们说明这类对象如何符合环对环描述。图 9a 展示了所谓的三棱柱张拉整体（黑色）及其兰金互易图（红色）。该结构具有八面体的拓扑；如 [12], 所述，通过锥化至一个中心节点，并用连接该节点的零杆对周围八面体的内部进行三角剖分，即可得到兰金互易图。

图 9b 展示了环对环描述，无需添加零杆。该结构有六个节点，其中展示了一种由 5 根杆件组成的生成树，包括杆件 BE、BA、BC、ED 和 EF。

有七根非树杆件，每根都定义一个结构环。每根非树杆件都可以切开，并在每个切口两侧施加自平衡力和力矩。若该结构是全焊接刚架，则会有 $7 \times 6 = 42$ 种可能的自应力状态（每个切口六种）。鉴于每个节点的节点价为四，且连接于同一节点的杆件中不存在三根共面杆，根据基础结构分析可知，纯轴向自应力状态至多只有一种。（如果我们知道任意节点上的一个力，那么根据平衡，其他三个力就可以唯一确定。随后可以移至相邻节点，确定该处的未知力。如果这一过程最终闭合，则存在一个自应力状态；若不能闭合，则不存在自应力状态。）

为定义切口处的力和力矩，可为每个结构环指定一个对偶的互易力环。此处，这些对偶回路被选为简单的三角形（图 9b）。由于纯轴向解中不涉及弯矩或扭转力矩，我们重点关注这些互易三角形在三维空间中的位置。在三维空间中，每个互易三角形都必须垂直于其所代表的杆件。

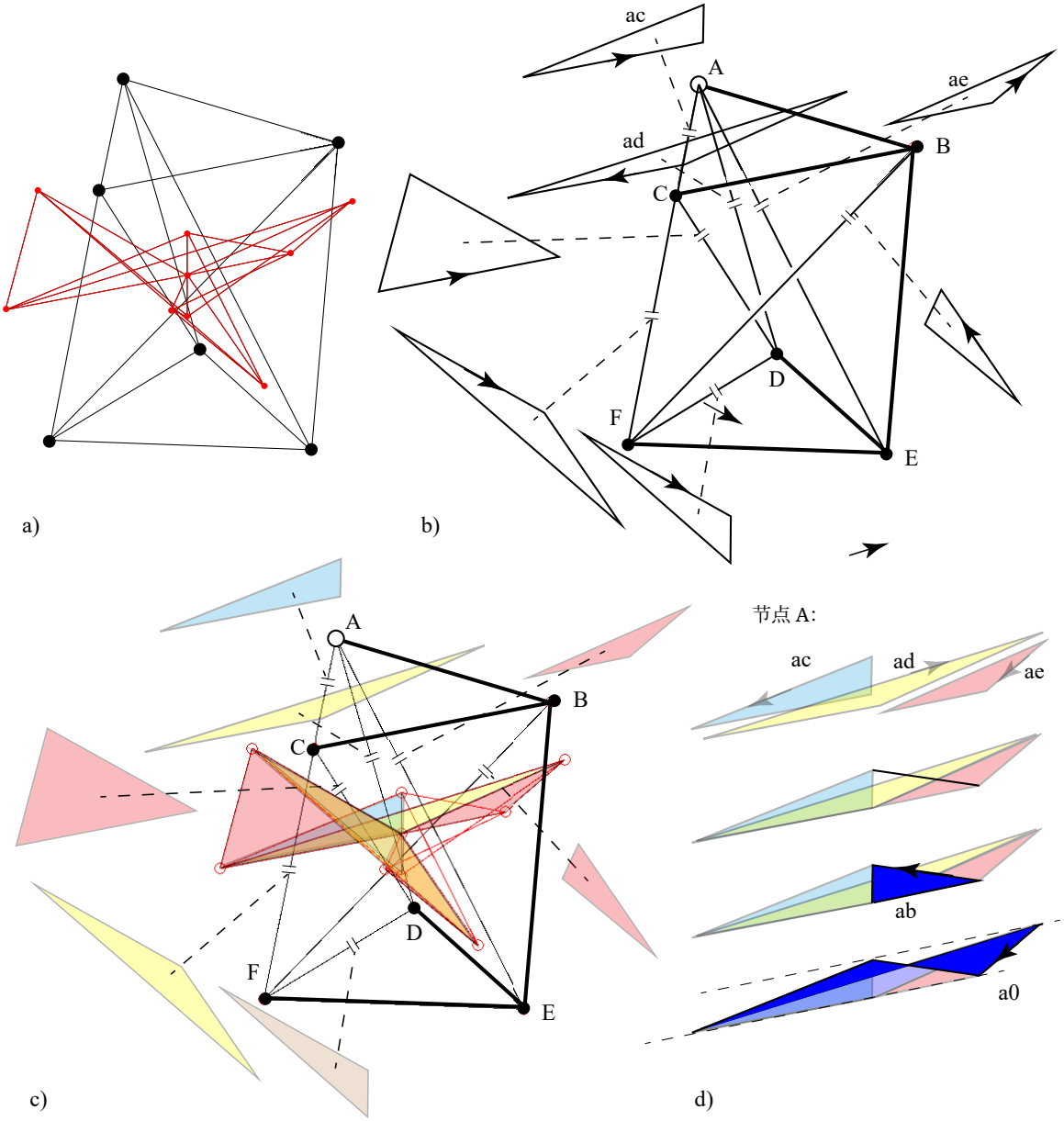
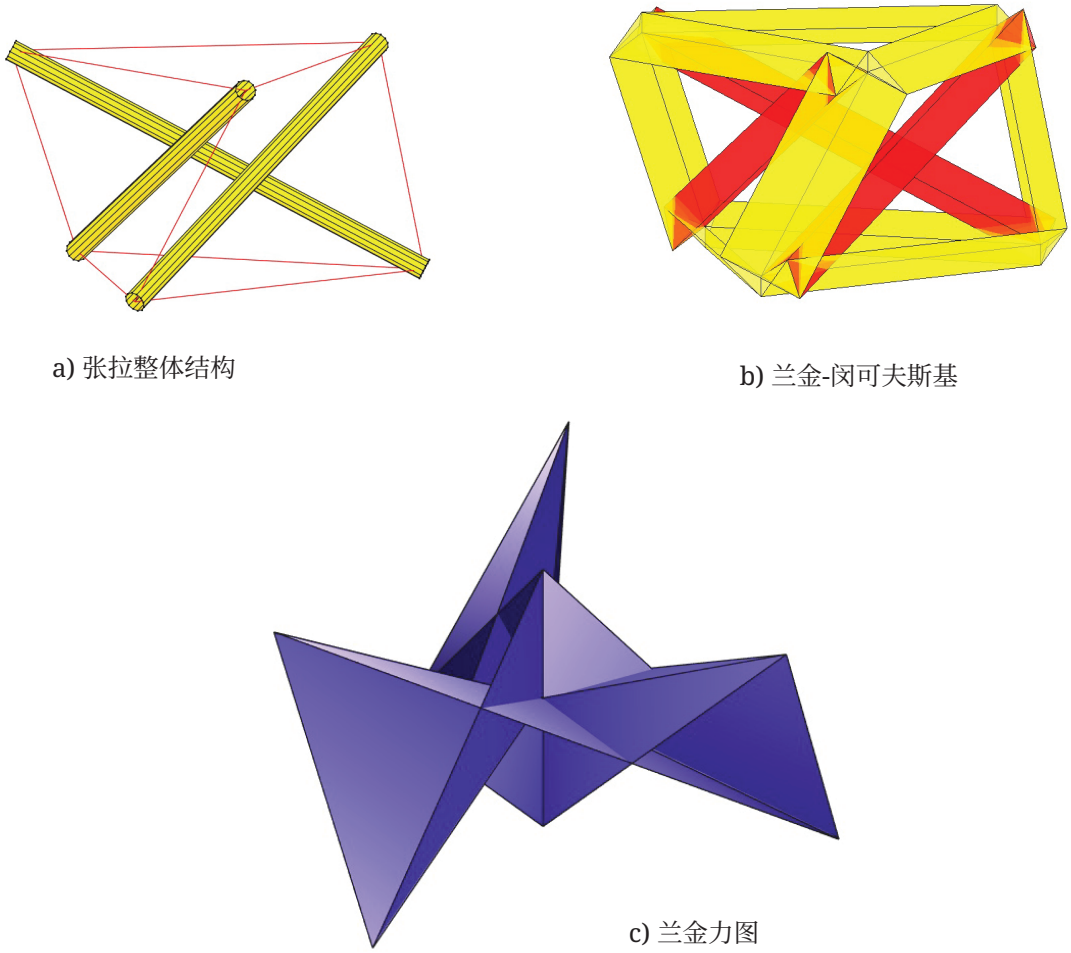


图 9：a）三棱柱张拉整体（黑色）及其兰金互易图（红色）。b）一棵包含七条非树杆件的生成树，每条非树杆件都对应一个简单的三角对偶回路。以及七个回路。这六个对偶三角形可以排列成共用一个中心节点。c）七个对偶回路是对偶多面体的面。d）树杆件中的力以适当的有向回路之和表示。平衡要求节点 A 处形成一个闭合多面体，该多面体是一个棱锥，其底面为零面 **a0** ，三角形面为 **ab**、**ad**、**ae** 和 **ab**。

在此，我们将使用前述采用零杆的分析结果（图 7c）。因此，我们把论述限定为展示轴向自应力状态如何用回路来表示，而不去处理更一般的问题——即仅给定结构几何就求出纯轴向互易。

（旁注：该构形的一种优美几何是将六个节点置于单位半径的圆柱上。圆柱沿 z 轴定向，顶面与底面位于 $z = \pm 0.5$。麦克斯韦-兰金应力函数在所有节点处取 $f = 0.25$，结构锥化至原点处的极点，其中$f = 0$。锥化生成一个多胞形，由整体八面体外壳内的 8 个四面体组成。经由勒让德变换，应力函数梯度定义了对偶对象，它有 9 个节点，其中六个位于单位圆柱上，三个位于 z轴上。对偶应力函数在所有节点处取 $\phi = 0$，原点处的节点除外，该处为 $\phi = -1$。）



a) 张拉整体结构

b) 兰金-闵可夫斯基

c) 兰金力图

图10：具有八面体拓扑的三棱柱张拉整体。a) 结构。b) 兰金-闵可夫斯基。c) 轴向自应力状态的兰金力图。

回到回路形式体系，任意树杆中的力都可以通过将所有形式回路包含该树杆的有向力回路相加而得到。例如，图 9d 展示了如何求得杆件 ab 中的力。节点 A 处的平衡要求该处四根杆件中的力处于

平衡状态。平衡可以用一个闭合多面体表示；在本例中，我们没有采用简单的四面体，而是选择了一个具有五个面的棱锥，由四个围绕零面积底面 a0 的三角形侧面组成。该零面积底面位于一个平面内，此平面垂直于连接角点 A 与结构中心点的直线。这个零面积底面是早期分析中零杆的幽灵般回声；当时，该零杆将角点 A 与虚拟中心节点连接起来。不过需要注意的是，在当前分析中并不需要零杆。明确地说，在 A 处相交的各杆件的三角形力多边形的有向面积之和为零，这对应于平衡，但它们并不构成一个闭合多面体。若要闭合该多面体，还需要第五个多边形，但该多边形的有向面积为零。

（附注：由于我们只关注三维空间（x，y，z）中对偶回路的投影，因此忽略了它们在包含应力函数维度的平面上的投影。尽管有所忽略，我们仍然得到了合理的一组轴力。然而，这些回路并未完全位于（x，y，z）中。若它们确实位于其中，则意味着任意切面上的总力矩均为零。然而，总力矩是内部弯矩和扭矩，以及杆件力绕原点产生的力矩之和。由于杆件并不经过原点，因此，仅位于三维空间中的回路将要求一组弯矩和扭矩来平衡杆件力所产生的力矩。由此可知，与纯轴力解对应的互易对象不可能完全处于三维空间（x，y，z）中。正如前文附注所述，一种可能的情况是，除原点外，所有互易节点处的对偶应力函数ϕ 均为零。）

许多替代性构造都是允许的。在七根非树杆件的每个切口处，都可以指定一个具有正确有向面积的任意多边形；这里“正确”意味着，有向面积垂直于全部十二根杆件，并且在每个节点处有向面积之和为零。

三棱柱张拉整体的图解分析结果汇总于图10，其中展示了结构、轴向自应力状态的类兰金对偶图，以及将这两幅图结合而成的兰金-闵可夫斯基图。（之所以称为“类兰金”，是因为严格来说，并不存在传统的兰金互易图，而零面积的蝴蝶结形“面”只是在三角形回路的组合中被隐含地定义出来的

。）关键在于，这是一种高度图解化的方法。

与八面体三棱柱张拉整体密切相关的是立方体张拉整体，其中上、下三角形被“奔驰”星形构型取代，每个构型在 z 轴上都有一个中心节点。这里存在一些有趣的对偶关系。显然，立方体是八面体的柏拉图多面体对偶。更有意思的是，在基于向量的图解静力学中，八面体三棱柱张拉整体的倒易图是立方体张拉整体。不过，在这里类似 Rankine 的回路形式体系中，立方体张拉整体和八面体张拉整体并非彼此对偶，而是各自与一个更复杂的对象对偶（图 8）。这些力图共享一组节点和线，但两种情况下的回路分解各不相同。八面体上、下三角形面的每条边都对应一个三角环

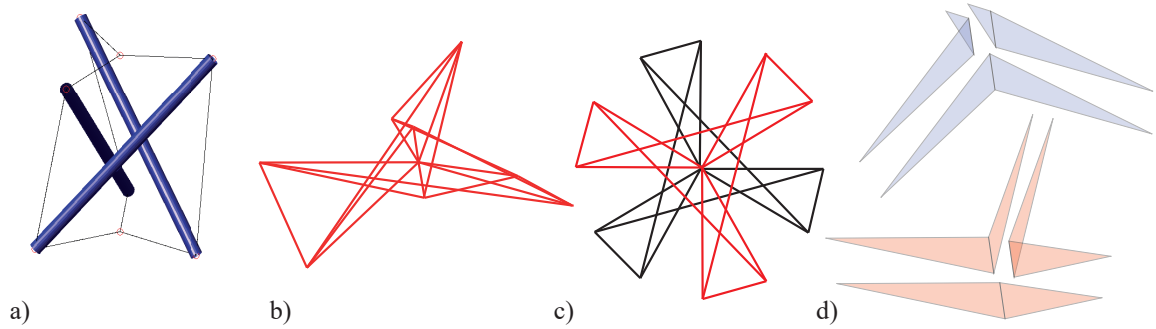


图11：具有立方拓扑的三棱柱张拉整体。a）总体视图。b）如前所述的兰金互易图。c）结构及其倒易图的平面图。d）与径向星形构件互易的对象。

（图 8）。然而，立方体构型中，奔驰符号的每条辐条都对应两个这样的三角环，它们在同调代数中的和是一个弯曲四边形（图 11d）。

4 总结

本文展示了如何将任意框架结构分解为一组回路，以及如何用四维力空间中的一组对偶回路来表示结构中的任意自应力状态。对偶回路的投影面积给出了结构环上任意切面处的力和关于原点的总力矩的六个分量。本系列论文的第1部分着重探讨如何表示力矩，并通过通常只涉及单个回路的简单示例加以说明；而本文则着重探讨如何对包含多个回路的框架进行建模。

尽管形式体系包含了对力矩进行建模所需的全部工具，本文为简化说明，仅讨论自应力状态纯粹为轴向力的示例。K5图结构和棱柱张拉整体这两个示例，是三维图解静力学各种方法中典型的初步案例；本文展示了如何用回路形式体系处理它们。对于通常的三维兰金方法而言，张拉整体示例颇具挑战性，因为它不具有标准的Rankine倒易图。

本文所介绍的形式体系中，维度最高的对象是回路。目前尚未提出回路可能是多边形面的边界或更一般的曲面的边界，也未提出多边形面可能是胞腔的边界。（不过，严格来说，在离线寻找兰金互易图形时，确实用到了曲面和胞腔的概念；随后，这些兰金互易图形以回路的形式呈现。回路方法会产生无穷多个可能的倒易图，但对于所选示例，兰金互易图形的几何形状十分简洁优美。）在后续论文中，同调代数将扩展至包含曲面、胞腔和高维对象。关键要素将是CW复形，它们为多边形、多面体和多胞体提供了方便的推广。该形式体系也将扩展至描述运动学。不过，本文的主要观点是：尽管所展示的示例很简单，这种方法仍能处理任意三维框架中的力和力矩；并且，正如文中的图示所体现的那样，这种方法毫不掩饰其图形化特征。

参考文献

[1] E. Allen 和 W. Zalewski。《形式与力：设计高效且富有表现力的结构》。John Wiley & Sons, 2010年。[2] W. F. Baker 和 A. McRobie（编）。《平衡几何：詹姆斯·克拉克·麦克斯韦与21世纪结构力学》。剑桥大学出版社，2024年。[3] T. Baranyai。连续与不连续的几何应力函数。《Meccanica》，59：503–515，2024年。doi：https://doi.org/10.1007/s11012-024-01770-w。[4] C. R. Calladine。巴克敏斯特·富勒的张拉整体结构与克拉克·麦克斯韦的刚性框架构造规则。《国际固体与结构杂志》，14：161–172，1978年。[5] Z. Cooperband。《胞腔余层、图解静力学与力学》。博士论文，宾夕法尼亚大学，2024年。[6] Z. Cooperband 和 R. Ghrist。迈向图解静力学中的同调方法，2023年。网址：https://arxiv.org/abs/2307.16097。[7] Z. Cooperband、A. McRobie、C. Millar 和 B. Schulze。力矩框架的同调，2024年。网址：https://arxiv.org/abs/2404.07184。

[8] O. Karpenkov、F. Mohammadi、C. M¨uller 和 B. Schulze。麦克斯韦–Cremona 提升的微分方法。《arXiv:2312.09891v》*1 [*《math.MG》*]*, 2023。[9] J. C. Maxwell。论互易图形与力图。《伦敦、爱丁堡和都柏林哲学杂志与科学期刊》，XXVII：250–261，1864年。[10] J. C. Maxwell。论互易图形、框架与力图。《爱丁堡皇家学会汇刊》，XXVI，第1部分：1–40，1870。[11] A. McRobie、W. F. Baker、T. Mitchell 和 M. Konstantatou。运用图解静力学研究平面桁架的机构与自应力状态，第三部分：应用与扩展。载于《国际壳体与空间结构协会（IASS）研讨会论文集》，阿姆斯特丹，2015年。[12] A. McRobie。三维框架的图解分析：克利福德代数与兰金不完备性。载于 A. Bogle 和 M. Grohmann 编，《国际壳体与空间结构协会（IASS）研讨会论文集》，汉堡，2017年。[13] A. McRobie。结构平衡几何。《皇家学会开放科学》，4，160759，2017年。[14] A. McRobie。含零杆的兰金互易图形。《https://www.researchgate.net/publication/ 315027343》，2017年。[15] A. McRobie。自应力三维框架的完备图解静力学。《IASS 苏黎世研讨会》，2018年。[16] A. McRobie。三维框架的图解运动学。《IASS 巴塞罗那研讨会》，2019年。[17] A. McRobie。刚接三维框架的完整图解静力学。第1部分：力矩的勒让德变换。《ArXiv:2411.05719v》*1 [*《math.MG》*]*, 2024。[18] A. McRobie 和 M. Konstantatou。勒让德变换与极性。载于 W. F. Baker 和 A. McRobie 编，《平衡几何》。剑桥大学出版社，2025年。[19] A. McRobie、M. Konstantatou 和 W. F. Baker。用于含力矩图解静力学的勒让德变换。《IASS 苏黎世研讨会》，2024年。