arXiv:2603.12175v1 [math.LO] 12 Mar 2026

德摩根双半格簇

F. PAOLI、D. SZMUC、A. BORZI、M. ZIRATTU

摘要。德摩根双半格是在满足德摩根性质的对合作用下，对分配双半格进行扩展而得到的结构。它们既作为分析包含逻辑的代数模型受到关注，也作为某种对普翁卡和构造（德摩根- 普翁卡和）的推广的案例研究而受到关注。本文完整描述了德摩根双半格簇的子簇格 $\mathcal{DMBL}$ 。对于该格中的每个子簇，我们确定了一组有限的有限生成元，刻画了其成员的德摩根-Płonka 表示，并对其有效恒等式给出了句法描述。在许多情况下，我们还给出了相对于 $\mathcal{DMBL}$的公理化。

关键词：德摩根双半格；德摩根格；Płonka 和；德摩根-Płonka 和；对合半格；正则簇。
*2020*年数学主题分类：06A12, 06D30, 08B15。

1. 引言

设 $\mathcal{L}$ 是一个无常数且至少含有一个元数2或更高的运算符号的类型。若 $\mathcal{L}$-恒等式 $\varphi \approx \psi$ 满足正则 条件 φ 和 ψ 恰好包含相同的变量，则称之为正则；若类型为 $\mathcal{V}$ 的簇 $\mathcal{L}$仅满足正则恒等式，则称其为正则簇。尽管关于正则簇的文献相当丰富（例如，参见 [32, 33]），但从泛代数的角度来看，唯一得到深入理解的正则簇类别，是所谓的强非正则簇的正则化；这类簇可通过经典的*Płonka* 和 [2, 25, 27, 28, 32, 33]获得令人满意的表示。对该类别之外的正则簇的研究，需要推广 Płonka 构造——这些推广有时也能有效用于研究某些非正则簇。其中包括 Lallement 和 [33], 函子性或 Agassiz 和 [14, 33], 对合 Płonka 和 [8], 富化 Płonka 和 [13]。

Thomas Randriamahazaka 最近提出了一项有趣的方案，旨在拓展 Płonka 构造的适用范围，并将其命名为德摩根-*Płonka* 和 [30]。与 Dolinka 和 Vinčic 的对合 Płonka 和一样，该构造采用代数的对合半格直系统，而非 Płonka 原始半格直系统。不过，Dolinka 和 Vinčic 的方法经过了关键性修改，使其更适用于研究建立在对偶化语言上的代数：这类语言的运算符号成对出现，以体现相对于指定否定一元运算的（广义）德摩根对偶。Randriamahazaka 在本文稍后将明确说明的若干前提条件下，证明了 Płonka 定理的一个推广版本：他的构造所保持的恒等式是平衡正则恒等式。这类正则恒等式满足以下条件：某个变量在 $\varphi \approx \psi$ 中出现在偶数（分别为奇数）个否定的作用范围内，当且仅当它在 φ 中也出现在偶数（分别为奇数）个否定的作用范围内。他还证明，由其方法可表示的代数

恰好是带相容运算的a-对合左正规带——其特点是，a-对合带满足恒等式 $\neg(x \cdot y) \approx \neg x \cdot \neg y$，而非$\neg(x \cdot y) \approx \neg y \cdot \neg x$，因此不同于对合带。

作为一项应用，Randriamahazaka 给出了德摩根双半格（在其论文中称为“Angellic代数”）的表示，也就是说，它们是通过满足德摩根性质的对合扩张分配双半格所得的结构。除了其本身在泛代数方面的研究价值外，$\mathcal{DMBL}$ 德摩根双半格的簇——它是正则的，但不能使任何强非正则簇正则化——在逻辑学中也很重要，因为它是分析包含逻辑的一种代数语义 [1, 11, 12]。关于德摩根双半格的研究见 [23], ，其中得出了关于 $\mathcal{DMBL}$的簇生成元和拟簇生成元及其次直不可约代数的结果，并对其子簇格的结构给出了部分结果。然而，这种子簇格的完整描述仍未解决。本文旨在填补这一空白。

本文结构如下。第2节介绍一些必要的预备概念，涉及德摩根格、带与半格、Płonka 和与正则簇，以及德摩根-Płonka 和。第3节给出若干关于带有对合的带与半格的辅助结果，这些结果将在主要结构定理的证明中用到。此外，对于给定的对偶化类型簇 $\mathcal{V}$，除其正则化 $R(\mathcal{V})$ 和其平衡正则化 $B(\mathcal{V})$ 外，我们还引入两种文献中此前未曾讨论过的正则化类型：双极平衡正则化 $Bip(\mathcal{V})$ 和正则双极平衡正则化 $R(Bip(\mathcal{V}))$。第4节引入德摩根双半格簇 $\mathcal{DMBL}$，并回顾 Randriamahazaka定理：$\mathcal{DMBL}$ 是德摩根格簇 $\mathcal{DML}$ 的平衡正则化。接着，我们研究簇 $B(\mathcal{DML})$ $R(\mathcal{DML})$ $Bip(\mathcal{DML})$ 和 $R(Bip(\mathcal{DML}))$，分别为其给出等式基、有限个有限生成元，以及其成员的德摩根-Płonka 表示。随后，我们还考察德摩根格的真子簇，即克莱尼格、布尔代数和平凡簇所对应的相同类型的正则化。在一个总结性小节中，我们指出，存在一些德摩根双半格，它们既不是对合半格，也不是生成扩张布尔代数簇的生成元。由这些代数生成的簇与上述任何正则化都不相同，因此需要单独研究。第5节最后完整描述 $\mathcal{DMBL}$ 的子簇格。[1]

关于泛代数中所有未加解释的记号或术语，读者可参阅 [3]。

[1]本文对近期引入的一些术语进行了重新命名，例如文献 [23] 中的术语。首先，该文将双极平衡正则化称为条件平衡，而将正则的双极平衡正则化称为严格条件平衡；类似地，将正则吸收的情形称为半吸收。我们认为，目前的命名或许能更清楚地体现一个事实：这些簇各自的特征在于满足相应描述的吸收律变体。

2. 预备知识

2.1. 德摩根格。德摩根格 [18, 21, 31] 是代数$\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee, \neg \rangle$，类型为 $\langle 2, 2, 1 \rangle$，使得 $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ 为分配格，且满足恒等式 $\neg\neg x \approx x$, $\neg(x \wedge y) \approx \neg x \vee \neg y$ 与 $\neg(x \vee y) \approx \neg x \wedge \neg y$。因此，德摩根格构成一个簇，下文记为 $\mathcal{DML}$。德摩根格的典型例子是四元代数$\mathbf{DM}_4$，其哈斯图见图1。

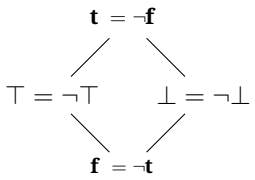

图1. 4 元德摩根格 $\mathbf{DM}_4$

注意，2 元布尔代数 $\mathbf{B}_2$ 与$\mathbf{DM}_4$的子代数同构，其论域为 $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$。$\mathbf{DM}_4$ 中另一个非平凡真子代数（在同构意义下）是 3 元代数 $\mathbf{K}_3$,，其论域为 $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\ \top\}$（或等价地，$\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\ \bot\}$）。事实上，我们有：

定理 2.1. *[18]* 以下结论成立：
(1) $\mathcal{DML}$ 的非平凡次直不可约成员只有$\mathbf{DM}_4$, $\mathbf{K}_3$和 $\mathbf{B}_2$。*(2)* $\mathcal{DML}$ 唯一的非平凡真子簇是克莱尼格簇 $\mathcal{KL} = V(\mathbf{K}_3)$ 和布尔代数簇 $\mathcal{BA} = V(\mathbf{B}_2)$。*(3)* $\mathbf{DM}_4$ 作为准簇生成 $\mathcal{DML}$。

2.2. **带与半格**。回顾一下，带 [24, 第 2] 章是幂等半群 $\langle A, \cdot \rangle$。在不影响理解的情况下，$\cdot$ 将以简单并置的形式代替。若带满足恒等式 $xyz \approx xzy$，则称其为左正规 带；若满足镜像恒等式$xyz \approx yxz$，则称其为右正规 带。容易验证，一个带是交换的，当且仅当它既是左正规带又是右正规带。在这种情况下，它称为半格，其乘积通常用更形象的符号 $\vee$ 表示。若带满足恒等式 $xy \approx x$，则称其为左零 带；若满足镜像恒等式$xy \approx y$，则称其为右零 带。显然，同时为左零带和右零带的任何带都是平凡的。此外，回顾一下，双带 [20] 是一个类型为 $\langle 2, 2 \rangle$ 的代数 $\mathbf{A} = \langle A, \cdot, + \rangle$，其中 $\langle A, \cdot \rangle$ 和 $\langle A, + \rangle$ 都是带。

i-带是一个代数 $\langle A, \cdot, \neg \rangle$，其类型为 $\langle 2, 1 \rangle$，满足 $\langle A, \cdot \rangle$ 是一个带，并且 $\neg$ 是满足 $\neg\neg x \approx x$ 的一元运算。注意，通过令 $x + y := \neg(\neg x \cdot \neg y)$，i-带总是具有一个双带项约化。对合带（或称对合带） [7] 是满足恒等式 $xy \approx y + x$ 的 i-带，而 a-对合带满足恒等式 $xy \approx x + y$。前一个恒等式的主要动机是推广群中的类似性质，而后一个恒等式则更适合研究 Płonka 型分解（见下文第 2.3 节）。显然，底层带为半格的对合带也是 a-对合带，称为对合半格。值得注意的是

所有左正规对合带都是对合半格，而存在非交换的左正规 a-对合带。对合半格的簇记作 $\mathcal{ISL}$。

设 $\langle A, \cdot\rangle$ 是一个带。众所周知，[15, Ch. 2] 我们可以在 A上定义以下二元关系：对任意 $a, b \in A$:

$$\begin{aligned} a \leq_L b &:= ab = a \\ a \leq_R b &:= ba = a \\ a \leq_D b &:= aba = a \\ a \leq_H b &:= ab = a = ba. \end{aligned}$$

这些关系都是 A 上的预序，而 $\leq_H = \leq_L \cap \leq_R$ 是一个偏序。它们统称为带 $\langle A, \cdot\rangle$ 上的 *Green* 预序，依次称为 $\langle A, \cdot\rangle$ 上的左、右和自然预序以及自然偏序。注意，在左正规带中 $\leq_L = \leq_D$，因此我们只需考虑三种 Green 预序。由 $\leq_D$ 诱导的等价关系在任意带中都是同余。通常记作 $\mathcal{D}$，称为 $\langle A, \cdot\rangle$ 的自然 *Green* 关系。以下经典结果称为 Clifford-McLean 定理（例如参见 [17,Thm. 4.4.1]）：

定理 2.2。若 $\mathbf{A}$是一个带，则$\mathbf{A}/\mathcal{D}$ 是$\mathbf{A}$的最大半格商。

在任意左正规双带中，每个约化代数 $\langle A, \cdot\rangle$ 和 $\langle A, +\rangle$ 都有其相应的 Green 预序；我们将它们记作 $\leq_L, \leq_R, \leq_H, \leq_L^+, \leq_R^+, \leq_H^+$，这些记号的含义显而易见。

2.3. **Płonka 和与正则簇**。后续研究的一项关键工具，是由 Jerzy Płonka 在 [25, 27] 中提出的一种著名代数构造（另见 [2, 33]），后来被称为普翁卡和。

此后，设 $\mathcal{L}$ 是一种不含常元的相似型，其中至少包含一个元数大于或等于 2 的运算符号；设 $\mathbf{I} = \langle I, \vee\rangle$ 是一个半格。由 $\mathcal{L}$-代数组成的半格直系是代数范畴 $\mathfrak{A}$ 中由 $\mathcal{L}$-代数组成的一个以$\mathbf{I}$为形状的图表；也就是说，它是从$\mathbf{I}$（视为一个小范畴）到 $\mathfrak{A}$ 的协变函子 F。给定 $i \in I$，$\mathcal{L}$-代数 $F(i)$称为该半格直系的一个纤维；而对于满足 $i \vee j = j$的 $i, j \in I$，同态$F(\langle i, j\rangle) : F(i) \to F(j)$记作 p_{ij}，并称为转移映射。

给定一个由 $\mathcal{L}$-代数构成的半格直系 F，其底半格为$\mathbf{I} = \langle I, \vee\rangle$，则 F上的普翁卡和 是 $\mathcal{L}$-代数$\mathbf{A} = \mathbf{Pł}(F)$，其论域为不交并 $A = \bigsqcup F(i)$，并且一般的 n元项运算 $g^{\mathbf{A}}$ 是$_{i\in I}$按如下方式计算的：

$$g^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) := g^{F(k)}(p_{i_1 k}(a_1), \ldots p_{i_n k}(a_n)),$$

其中 $k = i_1 \vee \cdots \vee i_n$且 $a_1 \in F(i_1) \ldots, a_n \in F(i_n)$。普翁卡和的纤维 即其底半格直系的纤维。若一个纤维的论域为单点集，则称该纤维是平凡 的。

Płonka 和特别适合于研究所谓强非正则簇的正则化。事实上，若 φ 是一个 $\mathcal{L}$-公式，令 $Var(\varphi)$ 表示出现在 φ 中的变量集合。一个 $\mathcal{L}$-恒等式 $\varphi \approx \psi$ 称为正则，如果$Var(\varphi) = Var(\psi)$，否则称为 非正则 。一个 $\mathcal{L}$-代数簇是 强非正则的，如果它满足形如 $x \approx \varphi(x, y)$ 的非正则恒等式，其中

变量 x, y 在 $\varphi(x, y)$ 中实质出现。给定一个强非正则簇 $\mathcal{V}$，其正则化 $R(\mathcal{V})$ 是满足且仅满足在 $\mathcal{V}$ 中成立的全部正则恒等式的簇。在 Płonka 所证明的结果中，以下两个尤为显著：

定理 2.3。 *[25, 定理 I]* 若 F 是以半格 $\mathcal{L}$为底层半格的 $\mathbf{I}$ 的半格直系，且2 元半格 $\mathbf{S}_2$ 是$\mathbf{I}$的子代数，则在 F 的所有纤维中成立的全部正则恒等式，在 $\mathbf{P}\text{ł}(F)$中也成立；而任何其他恒等式在 $\mathbf{P}\text{ł}(F)$中均不成立。

对于下一个结果，我们将带相容运算的左正规带定义为这样的 $\mathcal{L}$-代数 $\mathbf{A}$ ：存在一个二元运算 $\cdot$ ，定义在 A 上（不一定是 $\mathbf{A}$ 的项运算），使得 $\langle A, \cdot \rangle$ 是左正规带，并且对于所有 n元$g \in \mathcal{L}$ 以及任意 $a, b_1, ..., b_n \in A$，条件 $a \cdot g^{\mathbf{A}}(b_1, ..., b_n) = ab_1, ..., b_n$ 和 $g^{\mathbf{A}}(b_1, ..., b_n) \cdot a = g^{\mathbf{A}}(b_1 a, ..., b_n a)$ 均成立。

定理 2.4。 *[25, 定理 II]*； *[28, 定理 7。1]* 设 $\mathbf{A}$ 是一个 $\mathcal{L}$-代数。当且仅当存在一个由 $\mathcal{L}$-代数组成的半格直系F，使得 $\mathbf{A} = \mathbf{P}\text{ł}(F)$，$\mathbf{A}$ 是一个具有相容运算的左正则带。此外，若 $\mathcal{V}$ 是由 $\mathcal{L}$-代数组成的强非正则簇，则对于某个半格直系 F，其纤维属于 $\mathcal{V}$，当且仅当 $\mathbf{A} = \mathbf{P}\text{ł}(F)$，有 $\mathbf{A} \in R(\mathcal{V})$ 。

有趣的是，定理2.4第一条陈述中的从左到右的蕴涵，是通过在代数 $\langle A, \cdot \rangle / \mathcal{D}$ 上构造一个半格直系来证明的，其纤维是 $\mathcal{D}$-等价类，这些等价类是具有相容运算的左零带。

对于下文的讨论， $\mathcal{DML}$ 德摩根格簇的正则化当然尤其值得关注，相关研究和公理化见 [16, 23]。这是本文关注的德摩根双半格的真子簇之一。其成员称为正则化吸收德摩根双半格（在 [23], 中称为半吸收），因为它们满足受限吸收恒等式 $x \wedge (x \vee y) \approx x \wedge (x \vee \neg y)$，参见下文定理4.2 。

2.4. **德摩根-Płonka 和**。 在半格直系中，所有一元运算都将其参数映射到同一纤维中的元素。有一些提议试图放宽这一过于严格的条件，其中包括 Dolinka 和 Vinčić 提出的对合 *Płonka* 和 [8]。在此，我们关注另一种不同的方案，该方案由 T. Randriamahazaka 最近提出，旨在表示具有德摩根否定的代数；这类代数可以通过某种形式的扭积构造，由具有对偶化类型的代数构造得到 [30]。

设 $\mathcal{L}$为一个相似型，设 d 为一个函数，它将 $\mathcal{L}$ 中的每个 n元符号赋予 $\mathcal{L}$中的一个 n元符号。若对于所有 $f^n \in \mathcal{L}$， $\mathcal{L}$ 关于 d 满足对偶化 条件，即 $d(d(f^n)) = f^n$，则称 $\mathcal{L}$ 为对偶化的。如果 $\mathcal{L}$是关于 d的对偶化类型，则每个 $\mathcal{L}$-代数$\mathbf{A} = \langle A, \{f^{\mathbf{A}}\}_{f \in \mathcal{L}} \rangle$都会诱导出一个 $\mathcal{L}$-代数 $\mathbf{A}^d = \langle A, \{d(f)^{\mathbf{A}}\}_{f \in \mathcal{L}} \rangle$。如果一个 $\mathcal{L}$-代数类在包含 $\mathbf{A}$时也包含 对称的 $\mathbf{A}^d$，则称其为对称的。

对于接下来的定义，请回忆，任意对合半格 $\langle I, \vee, \neg \rangle$ 都可以视为 $\mathbf{Z}_2$-集合范畴中的一个内范畴。它由小范畴 $\langle I, \vee \rangle$ 扩充而成，其中 I 上的 $\mathbf{Z}_2$ 作用由 $\neg$ 决定。其轨道同构由 $a \simeq \neg a$ 生成；条件 $a \leq b$ 蕴含 $\neg a \leq \neg b$ ，保证了这些同构下的等变性。

设 $\mathcal{L}$ 是一种对偶化类型（相对于 d）。$\mathcal{L}$-代数的对合半格直系统是一个 $\mathbf{Z}_2$-等变预序函子 F，它从 $\langle I, \vee, \neg\rangle$（视为 $\mathbf{Z}_2$-集合范畴中的内范畴）映到 $\mathcal{L}$-代数的代数范畴，并满足条件 $F(\neg i) = F(i)^d$。与$\mathcal{L}$-代数的半格直系一样，$\mathcal{L}$-代数 $F(i)$ 称为该系统的一个纤维；而对于满足 $i \leq_{\mathbf{I}} j$ 的 $i, j \in I$，同态 $F(\langle i, j\rangle) : F(i) \to F(j)$ 记作 p_{ij}，并称为转移映射。此外，从 $F(i)$ 到 $F(\neg i)$ 的对合同构记作 $n_{i,\neg i}$，并称为对偶化映射。

注意，我们的定义蕴含 $n_{\neg i,\, i} = n_{i\,\neg i,}^{-1}$，且 $\mathbf{Z}_2$-等变性蕴含：对于所有 $i, j \in I$, $n_{j,\, \neg j} \circ p_{ij} = p_{\neg i,\, \neg j} \circ n_{i,\, \neg i}$，只要 $i \leq_{\mathbf{I}} j$ 即可。另请注意，半格直系可以与底层对合半格满足 $\neg x \approx x$ 的那些对合半格直系统相对应。

若 F 是由 $\mathcal{L}$-代数组成的对合半格直系统，则 F 上的 德摩根-普翁卡和是代数 $\mathbf{DP\text{ł}}(F)$，其类型为 $\mathcal{L} \cup \{\neg\}$，论域是不交并 $A = \bigsqcup_{i\in I} F(i)$，并满足：

- for every n-ary $f \in \mathcal{L}$ (with $n \geqslant 1$) and any $a_1, \ldots, a_n \in A$,
$$f^{\mathbf{DP\text{ł}}(F)}(a_1, \ldots, a_n) = f^{F(i)}(p_{i_1 i}(a_1), \ldots, p_{i_n i}(a_n)),$$
where $a_1 \in F(i_1), \ldots, a_n \in F(i_n)$ and $i = i_1 \vee \cdots \vee i_n$;

- $\neg^{\mathbf{DP\text{ł}}(F)} a = n_{i,\neg i}(a)$, where $a \in F(i)$.

为简洁起见，若 $\mathcal{L}$ 如上所述，我们用 $\mathcal{L}^*$ 表示扩张型 $\mathcal{L} \cup \{\neg\}$。若 $\mathcal{V}$ 是一个 $\mathcal{L}$-簇，则 $\mathcal{V}^*$ 表示其等式理论由 $\mathcal{V}$ 的等式理论添加恒等式 $\neg\neg x \approx x$ 和 $\neg f(x_1, \ldots, x_n) \approx d(f)(\neg x_1, \ldots, \neg x_n)$ 后闭包得到的 $\mathcal{L}^*$-簇，其中对所有 n 元 $f \in \mathcal{L}$ 均成立。注意，若 F 是由 $\mathcal{L}$-代数组成、底层对合半格为 $\mathbf{I}$ 的对合半格直系统，并且 $i \in I$ 满足 $\neg^{\mathbf{I}} i = i$，则通过赋予 $F(i)$ 否定运算 $\neg x := n_{ii}(x)$ 而扩张得到的 $\mathcal{L}^*$-代数 $F(i)^{\neg}$ 是 $\mathbf{DP\text{ł}}(F)$ 的子代数，且属于 $\mathcal{V}^*$。

若 φ 是一个 $\mathcal{L}^*$-公式，令 $Var^+(\varphi)$与 $Var^-(\varphi)$分别表示在 φ 中出现于偶数个、奇数个¬作用域内的变量集合。称 $\mathcal{L}^*$-恒等式 $\varphi \approx \psi$ 为平衡正则，如果 $Var^+(\varphi) = Var^+(\psi)$且$Var^-(\varphi) = Var^-(\psi)$。给定类型为 $\mathcal{L}^*$的强非正则簇 $\mathcal{V}$，其平衡正则化 $B(\mathcal{V})$是满足且仅满足在 $\mathcal{V}$中成立的全部平衡正则恒等式的簇。

若$\mathbf{A} = \langle A, \{f^{\mathbf{A}}\}_{f\in\mathcal{L}}\rangle$是一个 $\mathcal{L}$-代数，则$\mathbf{A}$ 的双侧化是代数 $\flat\mathbf{A}$，类型为 $\mathcal{L}^*$，论域为 A^2，并且满足：

- $f^{\flat\mathbf{A}}(\langle a_1, b_1\rangle, \ldots, \langle a_n, b_n\rangle) = \langle f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)\ d(f)^{\mathbf{A}}(b_1, \ldots, b_n)\rangle$，对每一个$n$-元 $f \in \mathcal{L}$（其中 $n \geqslant 1$）以及任意 $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in A$;

- $\neg^{\flat\mathbf{A}}\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle$.

事实证明，德摩根-Płonka 和保留了所有可通过双侧化（可视为扭积构造的一般化版本，参见例如[22]）从纤维中得到的代数所满足的平衡正则恒等式。这给出了定理2.3的以下推广：

定理 2.5. *[30]* 若 $\mathcal{L}$ 是对偶化类型且 F 是对合半格正向系统，由 $\mathcal{L}$-代数组成，底对合半格为 $\mathbf{I}$，则所有平衡

正则恒等式在 F 的所有纤维的双侧化中成立者，在$\mathbf{DP}^{\natural}(F)$中成立；而若4元对合半格$\mathbf{IS_4}$ 是$\mathbf{I}$的子代数，则并非平衡正则的恒等式在$\mathbf{DP}^{\natural}(F)$中不成立。

论文 [30] 还包含定理2.4的一个推广。设 $\mathcal{L}$ 为一个对偶化类型。我们将带相容运算的a-对合左正规带定义为一个代数$\mathbf{A}$，其类型为 $\mathcal{L}^*$，使得 $\neg$-自由约化（取自 $\mathbf{A}$ ）是带相容运算的左正规带，且其底层带为 $\langle A,\ \cdot\rangle$，并且 $\langle A,\ \cdot,\ \neg\rangle$是一个a-对合带。

定理 2.6. 设$\mathbf{A}$ 为一个 $\mathcal{L}^*$-代数。$\mathbf{A}$ 是带相容运算的a-对合左正规带，当且仅当存在一个对合半格直系统 F，由 $\mathcal{L}$-代数构成，使得$\mathbf{A} = \mathbf{DP}^{\natural}(F)$。此外，若 $\mathcal{V}$ 是由 $\mathcal{L}$-代数构成的强非正则对称簇，则$\mathbf{A} \in B(\mathcal{V}^*)$ 当且仅当$\mathbf{A} = \mathbf{DP}^{\natural}(F)$，对某个对合半格直系统 F，其纤维属于 $\mathcal{V}$。

定理2.6 第一个陈述中从左到右的蕴涵，是通过证明在给定假设下，Green 关系 $\mathcal{D}$ 是一个 a-对合带同余来得出的，因此可以在对合半格商 $\langle A,\ \cdot,\ \neg\rangle/\mathcal{D}$上构造对合半格直系统。

定理2.6 的一个特别有趣的情形出现在 $\mathcal{V}$ 是分配格簇 $\mathcal{DL}$时；因此， $\mathcal{V}^*$ 是德摩根格簇 $\mathcal{DML}$ 。根据定理2.6， $B(\mathcal{DML})$恰好由分配格的德摩根-Płonka 和构成（见下文定理4.1 ）。

3. I-带与对合半格

本节将阐述关于 i-带和对合半格的一些事实，这些内容将有助于我们研究德摩根双半格簇。首先，我们刻画每个对合半格簇所满足的、类型为 $\langle 2,\ 1\rangle$ 的恒等式。

在 [5] 中，已经证明 $\mathcal{ISL}$有四个次直不可约成员，我们称它们为$\mathbf{IS_1}$, $\mathbf{IS_2}$, $\mathbf{IS_3}$, $\mathbf{IS_4}$, ，并将它们展示在图2中。

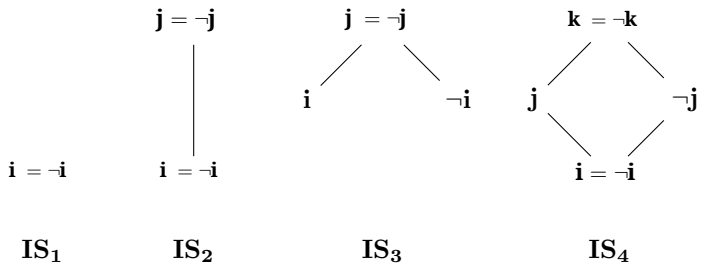

图 2. 次直不可约对合半格

总共有五个 $\mathcal{ISL}$子簇，如图3所示，并给出了它们各自相对于 $\mathcal{ISL}$ [7]的公理化。 $\mathcal{RISL}$ 是由正则对合半格构成的簇，由$\mathbf{IS_2}$生成。 $\mathcal{BISL}$ 是由双极对合半格构成的簇，由$\mathbf{IS_3}$，生成，而 $\mathcal{RBISL}$是由正则双极对合半格构成的簇，由类 $\{\mathbf{IS}_2, \mathbf{IS}_3\}$生成。

整个簇 $\mathcal{ISL}$ 由$\mathbf{IS_4}$生成。最后， $\mathcal{T}$ 是类型为$\langle 2$的$1\rangle$平凡簇，由$\mathbf{IS_1}$生成。

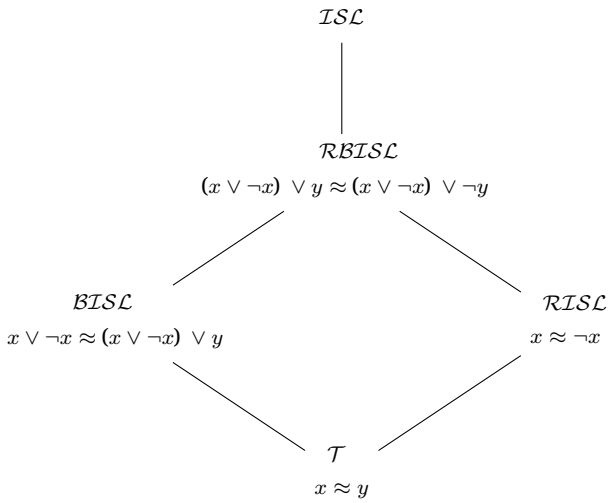

图3. $\mathcal{ISL}$ 及其相对公理化的子簇格

现在我们继续刻画这些子簇各自满足的恒等式。回顾第 2.3 节， $\mathcal{L}$-恒等式 $\varphi \approx \psi$ 称为正则，当且仅当$Var(\varphi) = Var(\psi)$；并回顾第 2.4 节，若 $\mathcal{L}$ 是对偶化类型，则 $\mathcal{L}^*$-恒等式$\varphi \approx \psi$ 称为平衡正则，当且仅当 $Var^+(\varphi) = Var^+(\psi)$ 且 $Var^-(\varphi) = Var^-(\psi)$。首先请注意， $\mathcal{RISL}$ 与半格簇项等价——也就是说，它是类型为 $\langle 2, 1\rangle$的平凡簇的正则化。根据定理 2.4， $\mathcal{RISL}$ 是类型为 $\langle 2, 1\rangle$的平凡代数的 Płonka 和所构成的类。总之：

事实 3.1. 对于任何类型为 $\langle 2$、 $1\rangle$ 的恒等式 $\varphi \approx \psi$ ，以下条件等价：

(1) $\mathbf{IS_2} \vDash \varphi \approx \psi$； *(2)* $\mathcal{RISL} \vDash \varphi \approx \psi$； *(3)* $\varphi \approx \psi$ 是正则的。

这一结果的独立证明也见于 [2, 定理 2.3。2], [4]和 [7]。下一个事实的证明见 [29, 命题 2], ，不过注意到2.5 定理可推出该结果，因为 $\mathbf{IS}_4$ 可以表示为类型为 $\langle 2\rangle$ 的平凡代数的德摩根-Płonka 和。

事实 3.2. 对于任何类型为 $\langle 2$、 $1\rangle$ 的恒等式 $\varphi \approx \psi$ ，以下条件等价：

(1) $\mathbf{IS_4} \vDash \varphi \approx \psi$； *(2)* $\mathcal{ISL} \vDash \varphi \approx \psi$； *(3)* $\varphi \approx \psi$ 是平衡正则的。

对于接下来的结果，我们需要引入一些新概念，涉及对偶化类型中恒等式的句法结构。若 $\mathcal{L}$ 是这样一种类型，则称一个 $\mathcal{L}$-恒等式 $\varphi \approx \psi$

若 $Var^+(\varphi) \cap Var^-(\varphi) \neq \emptyset$ 且 $Var^+(\psi) \cap Var^-(\psi) \neq \emptyset$，则称其为 双极 。若 $\varphi \approx \psi$ 要么是双极的，要么是平衡正则的，则称其为 双极平衡 ；若其要么是双极且正则的，要么是平衡正则的，则称其为 正则双极平衡 。

命题 3.1. 对于任意类型为 $\langle 2, 1\rangle$ 的恒等式 $\varphi \approx \psi$，以下条件等价：

(1) $\mathbf{IS_3} \vDash \varphi \approx \psi$；*(2)* $\mathcal{BISL} \vDash \varphi \approx \psi$；*(3)* $\varphi \approx \psi$ 是双极平衡的。

证明。 鉴于上述内容，只需证明 (1) 与 (3) 等价。(3) 推出 (1)。注意，对于任意公式 δ 及任意 $h \in Hom(\mathbf{Fm}(\langle 2, 1\rangle), \mathbf{IS_3})$，通过对 δ 的复杂度作归纳，可证明：

$$h(\delta) = \left(\bigvee_{x \in Var^+(\delta)} h(x) \right) \vee \left(\bigvee_{y \in Var^-(\delta)} \neg h(y) \right)$$

由此可知，若 $\varphi \approx \psi$ 是双极的，则对所有 $h \in Hom(\mathbf{Fm}(\langle 2, 1\rangle), \mathbf{IS_3})$，$h(\varphi) = \mathbf{j} = h(\psi)$；而若 $\varphi \approx \psi$ 是平衡正则的，则对所有此类 h，$h(\varphi) = h(\psi)$。因此，$\mathbf{IS_3} \vDash \varphi \approx \psi$。

(1) 推出 (3)。假设 $\varphi \approx \psi$ 既非双极也非平衡。不失一般性，设 φ 不是双极的。由于恒等式不平衡，我们知道以下情况至少有一种成立：(i) $Var^+(\psi) \setminus Var^+(\varphi) \neq \emptyset$，或 (ii) $Var^-(\psi) \setminus Var^-(\varphi) \neq \emptyset$，或 (iii) $Var^+(\varphi) \setminus Var^+(\psi) \neq \emptyset$，或 (iv) $Var^-(\varphi) \setminus Var^-(\psi) \neq \emptyset$。在情况 (i) 和 (ii) 中，考虑满足下列条件的 $Hom(\mathbf{Fm}(\langle 2, 1\rangle), \mathbf{IS_3})$：

$$h(x) = \begin{cases} \mathbf{i} & \text{if } x \in Var^+(\varphi) \\ \neg\mathbf{i} & \text{if } x \in Var^-(\varphi) \\ \mathbf{j} & \text{otherwise} \end{cases}$$

注意，由于 φ 不是双极的，h 是良定义的。根据公式的复杂度作归纳，我们可以验证：$h(\varphi) = \mathbf{i}$，而 $h(\psi) = \mathbf{j}$。情况 (iii) 和 (iv) 类似，只需将 φ 替换为 ψ。ψ 不是双极的情况也可类似处理。因此，$\mathbf{IS_3} \nvDash \varphi \approx \psi$。□

推论 3.1. 对于任意类型为 $\langle 2、 1\rangle$ 的恒等式 $\varphi \approx \psi$，以下条件等价：

(1) $\mathbf{IS_2} \times \mathbf{IS_3} \vDash \varphi \approx \psi$; *(2)* $\mathcal{RBISL} \vDash \varphi \approx \psi$;
(3) $\varphi \approx \psi$ 是正则双极平衡的。

证明。 同样，根据定义和上述说明，(1) 与 (2) 等价是显而易见的。若 $\varphi \approx \psi$ 不是正则双极平衡的，那么它要么是非正则的（此时根据事实 **3.1**，它在 $\mathbf{IS_2}$ 中不成立），要么是非双极平衡的（此时根据命题 $\mathbf{IS_3}$ 3.1，它在 $\mathbf{IS_3}$ 中不成立）。因此 (1) 推出 (3)。若 $\varphi \approx \psi$ 在$\mathbf{IS_2} \times \mathbf{IS_3}$, 中有一个反例，那么它在 $\mathbf{IS_2}$ 或 $\mathbf{IS_3}$, 中也有一个反例；利用相同的结果，我们便可得到 (3) 推出 (1)。□

如果代数 **A** 在某个对合半格 **I**上具有德摩根-普翁卡表示，那么 **I** 就属于我们刚刚刻画的 $\mathcal{ISL}$ 一个或多个子簇。另一方面，根据定理 2.6，**A** 是一个带相容运算的 a-对合左正规带，其中 **I**是由其 a-对合带约化模去 $\mathcal{D}$而得到的商。接下来，我们需要掌握该商属于 $\mathcal{ISL}$各个子簇的充要条件。

引理 3.1. 设**A** 是一个 a-对合左正规带。以下条件等价：

(1) $\mathbf{A} \vDash x \cdot y \approx x \cdot \neg y$*;*
(2) $\mathbf{A} \vDash x \cdot \neg x \approx x$*; (3)*
$\mathbf{A}/\mathcal{D} \in \mathcal{RISL}$*.*

证明。 (1) 推出 (2)。若 (1) 成立，则对任意 $a \in A$，有 $a = aa = a \cdot \neg a$。(2) 推出 (3)。若 (2) 成立，则对任意 a，有 $a \cdot \neg a = a$ 且 $\neg a \cdot a = \neg a \cdot \neg\neg a = \neg a$。因此 $[a]_{\mathcal{D}} = [\neg a]_{\mathcal{D}}$，即 $\mathbf{A}/\mathcal{D} \in \mathcal{RISL}$。

(3) 推出 (1)。设 $a, b \in A$。由 (3) 和 a-对合性质，$a \cdot \neg b = (a \cdot \neg b) \cdot \neg(a \cdot \neg b) = a \cdot \neg b \cdot \neg a \cdot b$。但是，利用左正规性并再次应用 (3)，$a \cdot \neg b = a \cdot \neg b \cdot \neg a \cdot b = a \cdot b \cdot \neg a \cdot \neg b = (a \cdot b) \cdot \neg(a \cdot b) = a \cdot b$。□

引理 3.2。 设**A** 是一个 a-对合左正规带。以下条件等价：

(1) $\mathbf{A} \vDash x \cdot \neg x \approx x \cdot \neg x \cdot y \cdot \neg y$*;*
(2) $\mathbf{A} \vDash x \cdot \neg x \approx x \cdot \neg x \cdot y$*; (3)*
$\mathbf{A}/\mathcal{D} \in \mathcal{BISL}$。

证明。 (1) 推出 (2)。若 (1) 成立，则给定 $a, b \in A$，有 $a \cdot \neg a \cdot b = a \cdot \neg a \cdot b \cdot \neg b \cdot b = a \cdot \neg a \cdot b \cdot \neg b = a \cdot \neg a$。

(2) 推出 (3)，因为恒等式在商下保持不变。(3) 推出 (1)。若 (3) 成立，则对任意 a, b，有 $[a \cdot \neg a]_{\mathcal{D}} = [a]_{\mathcal{D}} \vee \neg[a]_{\mathcal{D}} = [a]_{\mathcal{D}} \vee \neg[a]_{\mathcal{D}} \vee [b]_{\mathcal{D}} \vee \neg[b]_{\mathcal{D}} = [a \cdot \neg a \cdot b \cdot \neg b]_{\mathcal{D}}$。特别地，$a \cdot \neg a \cdot b \cdot \neg b = a \cdot \neg a \cdot a \cdot \neg a \cdot b \cdot \neg b = a \cdot \neg a$。□

引理 3.3。 设**A** 是一个 a-对合左正规带。以下条件等价：

(1) **一个** $\vDash x \cdot \neg x \cdot y \approx x \cdot \neg x \cdot \neg y$*;*
(2) **一个**$/\mathcal{D} \in \mathcal{RBISL}$。

证明。 对于非平凡的蕴涵，注意到若 (3) 成立，则对于任意 a, $b \in A$ $a \cdot \neg a \cdot b$ 和 $a \cdot \neg a \cdot \neg b$ 都等于 $a \cdot \neg a \cdot b \cdot \neg b$。□

下文中，对于给定的对偶化类型 $\mathcal{L}$ 的强非正则簇 $\mathcal{V}$，其双极平衡正则化 $Bip(\mathcal{V})$ 是满足且仅满足在 $\mathcal{V}$ 中成立的所有双极平衡恒等式的簇；其正则双极平衡正则化 $R(Bip(\mathcal{V}))$ 则是满足且仅满足在 $\mathcal{V}$ 中成立的所有正则双极平衡恒等式的簇。由事实 3.1 和 3.2，以及命题 3.1 和推论 3.1 可知，若 $\mathcal{T}$ 是类型 $\langle 2$ 的平凡簇，则 $1\rangle(\mathcal{T}) = \mathcal{RISL}$，$Bip(\mathcal{T}) = \mathcal{BISL}$，$R(Bip(\mathcal{T})) = \mathcal{RBISL}$，且 $B(\mathcal{T}) = \mathcal{ISL}$。

4. 德摩根双半格

回顾一下，分配双半格是一个双带$\mathbf{B} = \langle B, \wedge, \vee\rangle$其约化代数 $\langle B, \wedge\rangle$和 $\langle B, \vee\rangle$都是半格，并且 $\wedge$($\vee$（分别）分配于 $\vee$ ($\wedge$（分别）。因此，分配双半格构成一个簇，记作 $\mathcal{DBL}$。在其经典论文中， [26], Płonka 证明了 $\mathcal{DBL} = R(\mathcal{DL})$, 其中 $\mathcal{DL}$ 是分配格簇。

在本文中，我们关注德摩根双半格这一簇。德摩根双半格是一种类型为 2 的代数 $\mathbf{B} = \langle B, \wedge, \vee, \neg\rangle$，满足 $\langle B, \wedge, \vee\rangle$是分配双半格，并且恒等式 $\neg\neg x \approx x$,$\neg(x \wedge y) \approx \neg x \vee \neg y$ 以及 $\neg(x \vee y) \approx \neg x \wedge \neg y$成立。德摩根双半格在 [30] 中被称为 *Angellic*代数 , 在 [16]中也以不同名称进行了研究。它们在 [23]中得到了广泛研究。正如引言中所述，它们是德摩根格这一簇的平衡正则化，因此也是所有能够表示为分配格的德摩根-Płonka 和的代数所构成的类。

德摩根格是满足 $x \approx x \wedge (x \vee y)$ 的德摩根双半格。稍作宽泛处理，可将对合半格视为满足 $x \wedge y \approx x \vee y$ 的德摩根双半格。提及对合半格时，依据上下文即可明确我们将其视为类型$\langle 2, 1\rangle$ 的代数，还是类型 $\langle 2, 2, 1\rangle$的代数。我们将继续使用相同的符号表示 $\langle 2, 2, 1\rangle$ 类型的对合半格及其 $\langle 2, 1\rangle$-约化代数，并再次依靠上下文消除歧义。

有时，若 F 是由分配格构成、以 $\mathbf{IS}_2$ 为指标集的对合半格直系统，满足 F (j) 是平凡代数且 $\mathbf{A} = F(\mathbf{i})^{\neg}$，则我们将德摩根双半格 $\mathbf{DP\acute{t}}(F)$记作 $\mathbf{A}^{\dagger}$。

我们尤其感兴趣的是，对于德摩根格簇 $\mathcal{DML}$ 的每个子簇 $\mathcal{V}$，考察簇 $R(\mathcal{V})$ $Bip(\mathcal{V})$ $R(Bip(\mathcal{V}))$ 和 $B(\mathcal{V})$。显然，这些簇都是 $\mathcal{DMBL}$ 的子簇（见图 4；图中未描绘对合半格的簇 $R(\mathcal{T})$ $Bip(\mathcal{T})$ $R(Bip(\mathcal{T}))$ 和 $B(\mathcal{T})$）。

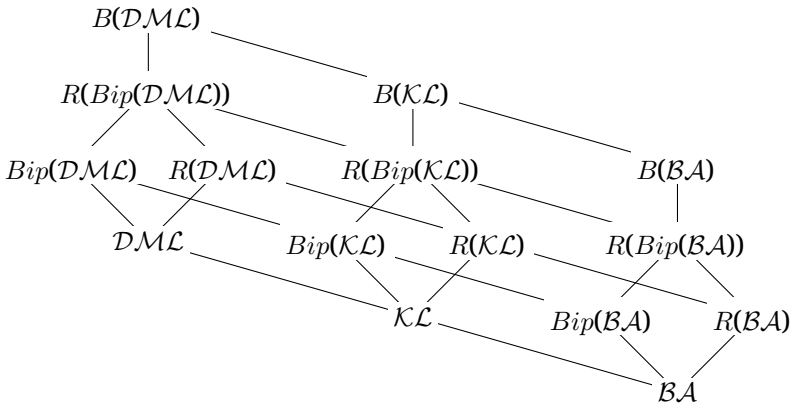

图 4. 簇 $\mathcal{DMBL}$ 的一些子簇

自然会产生至少五个问题：

- 我们能为这些簇中的每一个找到合适的生成元吗?
- 我们能为它们提供公理化吗?
- 我们能否根据其纤维和底层对合半格，刻画其成员的德摩根-Płonka 表示?

- 这些簇是否两两不同?
- 连同 $\mathcal{DML}$ 的子簇，它们是否穷尽了 $\mathcal{DMBL}$ 的子簇格?

我们将探讨所有这些问题，并回答其中许多问题。

4.1. 正则化的类型：刻画结果。我们首先以若干不同方式刻画簇 $\mathcal{DMBL} = B(\mathcal{DML})$ 本身。下一个定理在很大程度上汇集了文献中已有的结果。其中提到的代数 U 同构于分配格在 IS_4 上的德摩根-普翁卡和 $\mathsf{DPł}(F)$，使得若 D_2 与 D_1 分别为二元分配格与一元分配格，则有 $F(\mathsf{k}) = \mathsf{D1}$， $F(\mathsf{j}) = F(\neg\mathsf{j}) = \mathsf{D}_2$，以及 $F(\mathsf{i}) = \mathsf{D}_2 \times \mathsf{D}_2$（见 [10], [23]）。

定理 4.1. 下列各簇全部重合：

(1) $\mathcal{DMBL}$*; (2)* $\mathcal{DBL}^*$*; (3)* $B(\mathcal{DML})$*; (4)* $B(\mathcal{DL}^*)$*; (5)* $(R(\mathcal{DL}))^*$*; (6)* $V(\mathbf{DM}_4,\mathbf{IS}_4)$*; (7)* $V(\mathbf{U})$*; (8)* 分配格的德摩根-普翁卡和的类。

证明。 根据定义，(1) 与 (2) 相同，(3) 与 (4) 也相同。

根据本节开头的说明，(2) 与 (5) 相同。根据定理2.6，(4) 与 (8) 相同。根据定理2.1，(3) 与 (6) 相同。(2) 和事实3.2。(6) 包含于 (1)，因为二者都是德摩根双半格$\mathbf{DM}_4$ 和 $\mathbf{IS}_4$ 。

es.

我们证明 (1) 包含于 (8)。如 [30], 所示，任意德摩根双半格 $\mathbf{B}$ 都是带相容运算的 a-对合左正规带，其见证是运算 $x \cdot y := x \wedge (x \vee y)$。因此，根据定理 2.6，$\mathbf{B}$ 可表示为关于 $\langle B, \wedge, \neg\rangle/\mathcal{D}$的德摩根-Płonka 和。然而，按构造，该表示中的每个纤维都满足恒等式 $x \cdot y \approx x$，因此它是一个分配格。

为完成证明，只需证明 (6) 与 (7) 等价。然而，$\mathbf{DM}_4$ 和$\mathbf{IS}_4$ 分别是$\mathbf{U}$的一个子代数和一个商。反过来，$\mathbf{U}$是$\mathbf{DM}_4 \times \mathbf{IS}_4$ 的一个商的子代数，该商通过将且仅将第二个坐标为$\mathbf{k}$的元素合并而得到。□

回顾第2.4节中的内容，正则化吸收的德摩根双半格[23] 是 $\mathcal{DMBL}$ 的一个成员，并满足恒等式

$$\text{R-Abs } x \wedge (x \vee y) \approx x \wedge (x \vee \neg y).$$

正则化吸收型德摩根双半格的簇记作 $\mathcal{RDMBL}$。根据下一个定理（其内容大多是已知结果的汇集）， $\mathcal{RDMBL} = R(\mathcal{DML})$。

定理 4.2. 以下各簇均相同：

(1) $\mathcal{RDMBL}$；*(2)* $R(\mathcal{DML})$；*(3)* $V(\mathbf{DM}_4,\mathbf{IS}_2)$ *(4)* $V(\mathbf{DM}_4^\dagger)$；

(5) 在 $V(\mathbf{IS}_2)$ 的成员上取分配格的德摩根-*Płonka* 和所构成的类。

证明。(1) 与 (2) 的一致性已在 [16] 中证明，而前两项与 (4) 的一致性则在 [23]中确立。由于 $V(\mathbf{IS}_2)$ 与半格簇项等价，因此根据定理2.4，(2) 与 (5) 一致。(3) 包含于 (1)，因为 $\mathbf{DM}_4$ 和 $\mathbf{IS}_2$ 均满足 $\mathcal{RDMBL}$的公理。最后，(4) 包含于 (3)，因为 $\mathbf{DM}_4^\dagger$ 是 $\mathbf{DM}_4\times\mathbf{IS}_2$的一个商。□

现在我们继续证明几个全新的结果。双极吸收的德摩根双半格是 $\mathcal{DMBL}$ 的一个成员，满足恒等式

$$\text{B-Abs}\ x\wedge(x\vee\neg x)\approx x\wedge(x\vee\neg x)\wedge(x\vee\neg x\vee y).$$

双极吸收德摩根双半格的簇记作 $\mathcal{BDMBL}$。

定理 4.3。 以下各簇彼此相同：

(1) $\mathcal{BDMBL}$；*(2)* $Bip(\mathcal{DML})$；*(3)* $V(\mathbf{DM}_4,\mathbf{IS}_3)$；*(4)* 由分配格在 $V(\mathbf{IS}_3)$ 中的成员上取德摩根-*Płonka* 和所成的类。

证明。(1) 包含于 (4) 中。设 $\mathbf{A}\in\mathcal{BDMBL}$。由于 $\mathcal{BDMBL}\subseteq\mathcal{DMBL}$，由定理4.1$\mathbf{A}$ 可表示为分配格的德摩根 -Płonka 和。然而，根据 (C-Abs)，其 a- 对合左正规带项约化 $\langle A,\cdot,\neg\rangle$ 满足$x\cdot\neg x\approx x\cdot\neg x\cdot y$，据引理 3.2 $\langle A,\cdot,\neg\rangle/\mathcal{D}\in\mathcal{BISL}$。因此，由命题3.1，其指标反演半格属于 $V(\mathbf{IS}_3)$。

(2) 与 (3) 相同。根据定义，$Bip(\mathcal{DML})$ 满足恒等式 $\varphi\approx\psi$当且仅当 $\mathcal{DML}$ 满足 $\varphi\approx\psi$ 并且 $\varphi\approx\psi$ 是双极平衡的。根据定理 2.1 和命题 3.1，当且仅当 $\mathbf{DM}_4$ 和 $\mathbf{IS}_3$ 都满足 $\varphi\approx\psi$时，结论成立。

(3) 包含于 (1) 中。容易看出，$\mathbf{DM}_4$ 和 $\mathbf{IS}_3$ 满足 $\mathcal{BDMBL}$ 的所有公理，因此得证。

(4) 包含于 (2) 中。设 $\mathbf{A}$ 可表示为某个 $V(\mathbf{IS}_3)=\mathcal{BISL}$ 中分配格的德摩根-Płonka 和。我们需要证明$\mathbf{A}$ 满足 $\mathcal{DML}$ 中成立的所有双极平衡恒等式。

我们采用对 [2, 定理 2.32] 中证明的改写。假设$\varphi\approx\psi$ 在所有德摩根格中都成立，且 $\varphi\approx\psi$ 是双极平衡的。根据 $\varphi\approx\psi$ 是双极平衡的这一事实，我们分别讨论它是双极恒等式还是平衡恒等式的情形。

如果它是平衡的，那么，由于它在所有德摩根格中也成立，因此在$\mathbf{A}$的德摩根-普翁卡表示中各纤维的所有双侧化中也成立；根据定理2.5 $\mathbf{A}\models\varphi\approx\psi$。

如果它是双极的，那么，事实 $Var^+(\varphi)\cap Var^-(\varphi)\neq\emptyset$和 $Var^+(\psi)\cap Var^-(\psi)\neq\emptyset$，以及底层对合半格属于 $\mathcal{BISL}$ 这一事实，共同推出：对于所有 $h\in Hom(\mathbf{Fm}(\langle 2,\ 2,\ 1\rangle),\ \mathbf{A})$，我们有 $h(\varphi)$ 属于

$A_{i\vee\neg i\vee k}$，其中 $h(x) \in A_i$ 和 $h(\neg x) \in A_{\neg i}$ 对某个 $x \in Var^+(\varphi) \cap Var^-(\varphi)$ 成立，且 $h(\psi)$ 属于 $A_{j\vee\neg j\vee l}$；其中 $h(y) \in A_j$ 和 $h(\neg y) \in A_{\neg j}$ 对某个 $y \in Var^+(\psi) \cap Var^-(\psi)$ 成立。然而，由于底层对合半格属于 $\mathcal{BISL}$，我们知道 $i\vee\neg i\vee k\vee j\vee\neg j\vee l = i\vee\neg i$ 和 $j\vee\neg j\vee l\vee i\vee\neg i\vee k = j\vee\neg j$，最终推出 $i\vee\neg i = j\vee\neg j$。因此，对于所有 $h \in Hom(\mathrm{Fm}(\langle 2,2,1\rangle), \mathbf{A})$，$h(\varphi)$ 和 $h(\psi)$ 属于同一个纤维 $F(i\vee\neg i) = F(\neg(i\vee\neg i))$。由于 $\varphi \approx \psi$ 在所有德摩根格中成立，因而也在所有分配格的双边化中成立，并且 $i\vee\neg i$ 是否定不动点，所以 $\mathbf{A} \vDash \varphi \approx \psi$。

□

一个正则双极吸收德摩根双半格是满足该恒等式的 $\mathcal{DMBL}$

$$\text{RB-Abs}\ x \wedge (x \vee \neg x) \wedge (x \vee \neg x \vee y) \approx x \wedge (x \vee \neg x) \wedge (x \vee \neg x \vee \neg y).$$

正则双极吸收德摩根双半格簇记作 $\mathcal{RBDMBL}$。

定理 4.4。以下各簇彼此相同：

(1) $\mathcal{RBDMBL}$；*(2)* $R(Bip(\mathcal{DML}))$；*(3)* $V(\mathbf{DM}_4,\mathbf{IS}_2,\mathbf{IS}_3)$；*(4)* 分配格在 $V(\mathbf{IS}_2,\mathbf{IS}_3)$ 的成员上的德摩根-*Płonka* 和所构成的类。

证明。(1) 包含于 (4)。设 $\mathbf{A} \in \mathcal{RBDMBL}$。由于 $\mathcal{RBDMBL} \subseteq \mathcal{DMBL}$，根据定理 4.1 $\mathbf{A}$ 可表示为分配格的德摩根-Płonka 和。然而，根据 (RB-Abs)，其 a-对合左正规带项约化 $\langle A,\cdot,\neg\rangle$满足 $x\cdot\neg x\cdot y \approx x\cdot\neg x\cdot\neg y$，由引理 3.3 $\langle A,\cdot,\neg\rangle/\mathcal{D} \in \mathcal{RBISL}$。因此，根据推论 3.1，其指标反演半格属于 $V(\mathbf{IS}_2,\mathbf{IS}_3)$.

(2) 与 (3) 重合。根据定义， $R(Bip(\mathcal{DML}))$ 满足恒等式 $\varphi \approx \psi$当且仅当 $\mathcal{DML}$满足 $\varphi \approx \psi$ 且 $\varphi \approx \psi$ 要么是双极且正则，要么是平衡正则。后一个条件意味着它既正则，又是双极或平衡的。由定理 2.1 事实 3.1和命题 3.1可知，这当且仅当 $\mathbf{DM}_4$, $\mathbf{IS}_2$和 $\mathbf{IS}_3$ 均满足 $\varphi \approx \psi$。

(3) 包含于 (1) 中。不难看出，$\mathbf{DM}_4$, $\mathbf{IS}_2$ 和 $\mathbf{IS}_3$ 满足 $\mathcal{RBDMBL}$ 的所有公理，因此包含关系成立。

(4) 包含于 (2) 中。设$\mathbf{A}$ 可表示为某个 $V(\mathbf{IS}_2,\mathbf{IS}_3) = \mathcal{RBISL}$ 上分配格的德摩根-Płonka 和。我们需要证明$\mathbf{A}$ 满足 $\mathcal{DML}$ 中所有成立的正则双极平衡恒等式。

假设 $\varphi \approx \psi$ 在所有德摩根格中均成立，并且 $\varphi \approx \psi$ 是正则双极平衡的。我们根据它们是否为双极且正则，或为平衡正则，分别进行讨论。对于后一种情况，我们按照定理 4.3 中的论证，并得出 $\mathbf{A} \vDash \varphi \approx \psi$。

若为前者，则以下事实的合取： $Var(\varphi) = Var(\psi)$ 且$Var^+(\varphi) \cap Var^-(\varphi) \neq \emptyset$ and $Var^+(\psi) \cap Var^-(\psi) \neq \emptyset$ and，以及底层对合半格 I 属于 $\mathcal{RBISL}$，蕴含对于所有 $h \in Hom(\mathrm{Fm}(\langle 2,2,1\rangle), \mathbf{A})$，我们都有 $h(\varphi)$ 属于 $A_{(i\vee\neg i)\vee k}$，其中 $h(x) \in A_i$ and $h(\neg x) \in A_{\neg i}$，对某个 $x \in Var^+(\varphi) \cap Var^-(\varphi)$ 成立，且 $h(\psi)$ 属于 $A_{(j\vee\neg j)\vee l}$，其中 $h(y) \in A_j$and $h(\neg y) \in A_{\neg j}$，对某个 $y \in Var^+(\psi) \cap Var^-(\psi)$ 成立。由于 $\varphi \approx \psi$ 是一个正则恒等式，我们可以假设 $i\vee\neg i\vee k = \alpha^{\mathbf{I}}(v_1,...,v_n)$ and $j\vee\neg j\vee l =$

$\beta^{\mathbf{I}}(v_1, \ldots\ldots, v_n)$，其中 α 和 β 是类型为 $\langle 2,\ 1\rangle$ 且实际包含变量 $v_1, \ldots\ldots, v_n$ 的公式。特别地，令 α_1 和 α_2 为 α 的子公式，使得$\alpha_1^{\mathbf{I}}(v_1, \ldots\ldots, v_n) = i$，$\alpha_2^{\mathbf{I}}(v_1, \ldots\ldots, v_n) = k$，并令 β_1 和 β_2 为 β 的子公式，使得 $\beta_1^{\mathbf{I}}(v_1, \ldots\ldots, v_n) = j$，$\beta_2^{\mathbf{I}}(v_1, \ldots\ldots, v_n) = l$。

我们有：

$$\begin{aligned} i \vee \neg i \vee k &= \alpha_1^{\mathbf{I}}(\vec{v}) \vee \neg\alpha_1^{\mathbf{I}}(\vec{v}) \vee \alpha_2^{\mathbf{I}}(\vec{v}) \\ &= \alpha_1^{\mathbf{I}}(\vec{v}) \vee \neg\alpha_1^{\mathbf{I}}(\vec{v}) \vee \alpha_2^{\mathbf{I}}(\vec{v}) \vee \neg\alpha_2^{\mathbf{I}}(\vec{v}) \\ &= \beta_1^{\mathbf{I}}(\vec{v}) \vee \neg\beta_1^{\mathbf{I}}(\vec{v}) \vee \beta_2^{\mathbf{I}}(\vec{v}) \vee \neg\beta_2^{\mathbf{I}}(\vec{v}) \\ &= \beta_1^{\mathbf{I}}(\vec{v}) \vee \neg\beta_1^{\mathbf{I}}(\vec{v}) \vee \beta_2^{\mathbf{I}}(\vec{v}) \\ &= j \vee \neg j \vee l. \end{aligned}$$

这里，第二个和第四个等式成立，是因为$\mathbf{I} \in \mathcal{RBISL}$；第三个等式则成立，是因为德摩根-Płonka 和中转移映射和对偶化映射的作用，而 α 和 β 包含相同的变量。

因此，$h(\varphi)$和 $h(\psi)$属于同一个纤维 $F(i \vee \neg i \vee k) = F(i \vee \neg i \vee k \vee \neg k) = F(\neg(i \vee \neg i \vee k \vee \neg k))$。由于 $\varphi \approx \psi$在所有德摩根格中成立，因而在所有分配格的双边化中也成立；又因为 $i \vee \neg i \vee k \vee \neg k$ 是否定不动点，所以可得$\mathbf{A} \vDash \varphi \approx \psi$。□

正如预期，上述四个定理中的等价关系在作相应修改后，仍可通过将 $\mathcal{DML}$ 替换为 $\mathcal{KL}$ 和 $\mathcal{BA}$而保持成立。

定理 4.5. 设 $\mathbf{A} \in \{\mathbf{B}_2, \mathbf{K}_3\}$。以下各簇彼此相同：

(1) $B(V(\mathbf{A}))$；*(2)* $V(\mathbf{A}, \mathbf{IS}_4)$；*(3)* $\mathcal{K}$ 由$\{\mathbf{DP}^\natural(F) : F : \mathbf{I} \to \mathcal{DL}$，$\flat F(i) \in V(\mathbf{A})$ 中的代数的同构像组成的类，对每个 $i \in I\}$.

证明。 (1) 和 (2) 相同，这由事实3.2得出。

我们证明 (1) 和 (3) 相同。根据定义，$B(V(\mathbf{A}))$ 是满足且仅满足在 $V(\mathbf{A})$ 中成立的所有平衡正则恒等式的簇。由定理 2.5，类 $\mathcal{K}$ 满足所有形如 $\flat F(i)$ 的代数中成立的平衡正则恒等式，其中 F 具有所述性质。因此，它满足在 $V(\mathbf{A})$ 中成立的所有平衡正则恒等式。但由于 $\mathcal{K}$ 包含 $\mathbf{IS}_4$ 和 $\mathbf{A}$，它只满足在 $V(\mathbf{A})$ 中成立的平衡正则恒等式。由此可得结论。□

定理4.6。 设 $\mathbf{A} \in \{\mathbf{B}_2, \mathbf{K}_3\}$。下列簇均相同：

(1) $R(V(\mathbf{A}))$; *(2)* $V(\mathbf{A}, \mathbf{IS}_2)$; *(3)* $V(\mathbf{A}^\dagger)$; *(4)* 由代数的同构像组成的类，属于

$$\{\mathbf{DP}^\natural(F) : F : \mathbf{I} \to \mathcal{DL}, \mathbf{I} \in V(\mathbf{IS}_2), \flat F(i) \in V(\mathbf{A}) \text{ for every } i \in I\}.$$

证明。 所有等价关系均由定理 2.4 以及关于正则簇的其他已知结果（例如，[19, 第 487] 页）推出，只需注意到

$$\{\mathbf{DP}^\natural(F) : F : \mathbf{I} \to \mathcal{DL}, \mathbf{I} \in V(\mathbf{IS}_2), \flat F(i) \in V(\mathbf{A}) \text{ for every } i \in I\}.$$

本质上就是 $V(\mathbf{A})$ 中代数的 Płonka 和构成的类。 □

定理 4.7. 设 $\mathbf{A} \in \{\mathbf{B}_2,\mathbf{K}_3\}$。以下各簇均相同：

(1) $Bip(V(\mathbf{A}))$*; (2)* $V(\mathbf{A},\mathbf{IS}_3)$*; (3)* 由代数的同构像组成的类，其中代数属于

$$\{\mathbf{DP}\natural(F) : F : \mathbf{I} \to \mathcal{DL}, \mathbf{I} \in V(\mathbf{IS}_3), \flat F(i) \in V(\mathbf{A}) \text{ for every } i \in I\}.$$

证明。 (1)与(2)相同，这由事实3.1得出。

(2)与(3)相同，证明方法与定理 4.5相同，使用定理4.3而非定理2.5。 □

定理 4.8。 设 $\mathbf{A} \in \{\mathbf{B}_2,\mathbf{K}_3\}$。以下簇均相同：

(1) $R(Bip(V(\mathbf{A})))$*; (2)* $V(\mathbf{A},\mathbf{IS}_2,\mathbf{IS}_3)$*; (3)* 由代数的同构像组成的类，其中代数属于

$$\{\mathbf{DP}\natural(F) : F : \mathbf{I} \to \mathcal{DL}, \mathbf{I} \in V(\mathbf{IS}_2,\mathbf{IS}_3), \flat F(i) \in V(\mathbf{A}) \text{ for every } i \in I\}.$$

证明。 (1) 与 (2) 的重合由事实3.1和命题 3.1得到。

(2) 与 (3) 的重合可按照定理 4.5中的方法证明，只需用定理4.4代替定理2.5。 □

4.2. **其他子簇**。 根据 Dudek 和 Graczyn- ska 的一个著名结果 [9], , 若 $\mathcal{V}$ 是一个强非正则簇，则其子簇格$\mathbf{L}$ 与 $R(\mathcal{V})$ 同构于 $\mathbf{M} \times \mathbf{D}_2$, , 其中 $\mathbf{M}$ 是 $\mathcal{V}$的子簇格。换言之， $\mathcal{V}$的正则化的子簇格是 $\mathcal{V}$ 的子簇格与半格簇的子簇格的直积。

这引出了如下猜想：对称强不规则簇 $\mathcal{V}$ 的平衡正则化的子簇格 $\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{V}$ 的子簇格与对合半格簇的子簇格的直积。若此猜想成立，则意味着图4中的簇，加上对合半格簇 $\mathcal{T}$， $R(\mathcal{T})$ $Bip(\mathcal{T})$ $R(Bip(\mathcal{T}))$ 以及 $B(\mathcal{T})$，是 $\mathcal{DMBL}$的子簇格中仅有的簇。

事实证明，这个猜想一般而言是错误的，尤其对 $\mathcal{V} = \mathcal{DML}$ 而言，因此 $\mathcal{DMBL}$ 的子簇格无法作这种直接分解。注意，若 $\mathcal{BA}$ 是布尔代数簇，则 Dudek-Graczynska 的结果意味着，在 $\mathcal{RDMBL} = R(\mathcal{DML})$ 的子簇格中， $\langle \mathcal{BA}、\mathcal{RISL}\rangle$ 构成一个分裂对。另一方面， $\langle \mathcal{BA}、\mathcal{ISL}\rangle$ 并非 $\mathcal{DMBL} = B(\mathcal{DML})$ 的子簇格中的分裂对，正如下述事实的第一项所示。具体而言，设 $\mathbf{A}_5 := \mathbf{DP}\natural(F)$, 其中 F: $\mathbf{IS}_3 \to \mathcal{DL}$ 满足 $F(\mathbf{i}) = F(\neg\mathbf{i}) = \mathbf{D}_2$, , 而 $F(\mathbf{j}) = \mathbf{D}_{1\circ}$ 为便于查阅，将 a （分别将 b）称为 $F(\mathbf{i})$ 的最大（分别为最小）元素，并将 u 称为 $F(\mathbf{j})$ 的唯一元素。[2]

事实 4.1。 以下关系存在于下文详述的各个簇之间：

(1) $\mathcal{BA} \not\subseteq V(\mathbf{A}_5) \not\subseteq \mathcal{ISL}$*. (2)* $\mathcal{BISL} \subset V(\mathbf{A}_5) \subset Bip(\mathcal{BA})$*.*

[2] $\mathbf{A}_5$ 实例化了一种与半环的 0-直和相关但并不相同的构造 [5] $_2$ 0 I_0^* $_2$ $\neg x \vee y \approx$。若将 $\mathbf{D}$视为半环，则 -直和 $\neg x \vee \neg y$ ($\mathbf{D}$) 满足例如 ()，而不是适当的德摩根恒等式。

证明。(1) 注意到，恒等式 $x \wedge \neg x \approx y \vee \neg y$ 在$\mathbf{A}_5$, 中成立，而在$\mathcal{BA}$中不成立。同理，恒等式 $x \wedge y \approx x \vee y$ 在 $\mathcal{ISL}$ 中成立，而在$\mathbf{A}_5$,中不成立，因为 $a \wedge b = b \neq a = a \vee b$。

(2) 回顾命题 3.1， $\mathcal{BISL} = V(\mathbf{IS_3})$，并注意到 $\mathbf{IS_3}$ 是 $\mathbf{A}_5$的子代数（实际上是一个收缩）。根据定理 4.7， $Bip(\mathcal{BA})$ 由 $\mathbf{B}_2$ 和 $\mathbf{IS_3}$, 生成；根据 [23], 中的结果，$\mathbf{A}_5$ 本身是 $\mathbf{B}_2 \times \mathbf{IS_3}$的一个商。由第 (1) 项的证明可知，$\mathbf{A}_5 \notin \mathcal{BISL}$ ，且 $\mathbf{A}_5$ 满足恒等式$x \wedge \neg x \approx y \vee \neg y$，而该恒等式在 $Bip(\mathcal{BA})$ 中不成立。因此，这些包含关系都是严格的。□

给定一个对偶化类型为 $\mathcal{L}$的强非正则簇 $\mathcal{V}$ ，令 $Bip^{-}(\mathcal{V})$ 表示满足且仅满足以下双极平衡恒等式的簇：这些恒等式要么在 $\mathcal{V}$ 中成立，要么是双极的；令 $R(Bip^{-}(\mathcal{V}))$ 表示满足且仅满足以下正则双极平衡恒等式的簇：这些恒等式要么在 $\mathcal{V}$ 中成立，要么是双极的；并令$B^{-}(\mathcal{V})$ 表示满足且仅满足以下平衡正则恒等式的簇：这些恒等式要么在 $\mathcal{V}$ 中成立，要么是双极的。

定理 4.9。以下关系成立于下述各簇之间：

(1) $Bip^{-}(\mathcal{DML}) = V(\mathbf{A}_5)$; *(2)* $R(Bip^{-}(\mathcal{DML})) = V(\mathbf{A}_5, \mathbf{IS}_2)$; *(3)* $B^{-}(\mathcal{DML}) = V(\mathbf{A}_5, \mathbf{IS}_4)$。

证明。(1) 对于从左到右的包含关系，设恒等式 $\varphi \approx \psi$ 要么是：(i) 非双极平衡的；要么是 (ii) 在 $\mathbf{DM}_4$ 中无效且不是双极的。在前一种情况下，根据命题 3.1，它在 $\mathbf{IS}_3$ 中失效，因而也在 $\mathbf{A}_5$, 中失效，而 $\mathbf{A}_5$, 包含 $\mathbf{IS}_3$ 作为子代数。在后一种情况下，不失一般性地设 $Var^{+}(\varphi) \cap Var^{-}(\varphi) = \emptyset$。于是存在 $h \in Hom(\mathrm{Fm}(\langle 2, 2, 1 \rangle), \mathbf{A}_5)$，使得 $h(\varphi) \in \{a, b\}$。因此，若可能存在这样的 h，使其满足 $h(\psi) \in \{\neg a, \neg b, u\}$，则 $\varphi \approx \psi$ 在 $\mathbf{A}_5$中失效。若不存在，则对于所有满足 $h(\varphi) \in \{a, b\}$的 $h \in Hom(\mathrm{Fm}(\langle 2, 2, 1 \rangle), \mathbf{A}_5)$，我们必有 $h(\psi) \in \{a, b\}$。但这也意味着 $Var^{+}(\psi) \cap Var^{-}(\psi) = \emptyset$。所以，本质上， φ和 ψ 等价于格语言中的恒等式。现在，鉴于 $\varphi \approx \psi$ 在 $\mathbf{DM}_4$ 中失效，并且可以将其视为一个无对合恒等式，因此它必定在分配格中失效。由此，由于 $\mathbf{D}_2$ 生成分配格的簇，并且是 $\mathbf{A}_5$, 的一个 $\langle \wedge, \vee \rangle$-子约化，我们知道 $\varphi \approx \psi$ 在 $\mathbf{A}_5$ 中也失效。

对于反向包含，假设 $\varphi \approx \psi$ 在 $\mathbf{A}_5$，中无效，即存在 $h \in Hom(\mathrm{Fm}(\langle 2, 2, 1 \rangle), \mathbf{A}_5)$，使得 $h(\varphi) \neq h(\psi)$。如果 $h(\varphi)\ h(\psi) \in \{u, a, \neg a\}$ 或 $h(\varphi)\ h(\psi) \in \{u, b, \neg b\}$ 中任一条件成立，那么 $\varphi \approx \psi$ 在 $\mathbf{IS}_3$ 中无效，因此根据命题 3.1，它不是双极平衡的。或者，假设（不失一般性） $h(\varphi)$ 属于前述集合之一，而 $h(\psi)$ 不属于，则可得如下结果。我们可以假设 $h(\varphi) = a, h(\psi) = b$ （注意其他情形类似）。这意味着 $Var^{+}(\varphi) \cap Var^{-}(\varphi) = \emptyset$ 且 $Var^{+}(\psi) \cap Var^{-}(\psi) = \emptyset$。由此，特别是，$\varphi \approx \psi$ 不是双极的。按照前一方向中的论证，我们可以找到一个反例，说明它在分配格中无效，因此在 $\mathbf{DM}_4$ 中也无效。

（2）从左到右，假设该恒等式 $\varphi \approx \psi$ 要么（i）不是正则双极平衡的，要么（ii）在$\mathbf{DM}_4$ 中无效且不是双极的。在情形（ii）中，根据前一项，我们知道它在$\mathbf{A}_5$中不成立。在情形（i）中，它要么不是双极平衡的，要么是非正则的。若属于前者，根据前一项，它再次在$\mathbf{A}_5$ 中不成立。若属于后者，根据事实$\mathbf{IS}_2$ ，它在3.1中不成立。反之，假设 $\varphi \approx \psi$ 在$\mathbf{A}_5$ 或$\mathbf{IS}_2$中有一个反例。若是前者，则根据前一项，它要么不是双极平衡的（因而尤其不是正则双极平衡的），要么二者皆

在$\mathbf{DM}_4$中无效且不是双极的。若是后者，则根据事实3.1，它是非正则的，因此不是正则双极平衡的。

（3）类似地，利用事实 3.2。 □

显然，前述证明并不依赖德摩根格的任何特定性质，除了它们恰好满足分配格中成立的那些无否定恒等式。不过，克莱尼格和布尔代数也具有同样的性质。因此，我们有：

推论 4.10. 以下关系适用于下文详述的簇 :

（1） $Bip^{\neg}(\mathcal{DML}) = Bip^{\neg}(\mathcal{KL}) = Bip^{\neg}(\mathcal{BA})$。（2） $R($ $Bip^{\neg}(\mathcal{DML})) = R(Bip^{\neg}(\mathcal{KL})) = R(Bip^{\neg}(\mathcal{BA}))$。（3） $B^{\neg}($ $\mathcal{DML}) = B^{\neg}(\mathcal{KL}) = B^{\neg}(\mathcal{BA})$。

此外，请注意，上述簇都不是 $\mathcal{BA}$的扩张，因为它们都满足 $x \wedge \neg x \approx x \vee \neg x$。

5. 子簇格的结构

在最后这一节中，我们将完整描述 $\mathcal{DMBL}$的子簇格。回顾 [23, 引理 4。4]，若$\mathbf{A}$是一个次直不可约德摩根双半格，则其德摩根-普翁卡表示具有一个次直不可约的指标反演半格。此外，根据 [23, 定理 3。3] 定理**4.1** 中的代数U 生成 $\mathcal{DMBL}$ 作为一个准簇。还请回顾琼松引理的以下“相对化”版本（参见 [6]）：

定理 5.1。设 $\mathcal{K}$ 是一个有限代数构成的有限类，且 $ISP(\mathcal{K})$ 是一个簇。那么， $ISP(\mathcal{K})$ 的所有次直不可约成员都属于 $IS(\mathcal{K})$。

因此，所有次直不可约德摩根双半格都必须是$\mathbf{U}$的子代数，而这样的代数只有有限多个。不过，原则上，这个集合的每个子集都可能生成 $\mathcal{DMBL}$的一个不同子簇。尽管如此，我们将看到，实际不同的子簇要少得多。下面来看看如何精简这些潜在的生成元集合。

首先，接下来的定理使我们能够“剔除”一些次直不可约代数$\mathbf{A} \simeq \mathbf{DP}\text{ł}(F)$，使得只要我们关注的是确定子簇格的结构， F的定义域为$\mathbf{IS}_4$, 即可。

定理*5.2.* 设 $A \simeq DP\text{ł}(F)$ 是一个次直不可约的德摩根双半格，其中 F的定义域为 IS_4。则 $V(A) = V(F(i)^{\neg} \times IS_4) = V(B, IS_4)$，其中 $B \in \{DM_4, K_3, B_2, IS_1\}$。

证明。首先，我们证明第一个等式。由 [23, 定理 4.1]，若 $\mathrm{A} \simeq \mathrm{DP\text{ł}}(F)$ 是次直不可约的，且 F 论域为 IS_4, ，则可能出现两种情形：要么 $\mathrm{A} = \mathrm{IS}_4$, ，要么 $F(\mathrm{k}) = \mathrm{D}_1$且 $F(\mathrm{j}) = F(\neg \mathrm{j}) = \mathrm{D}_2$。另一方面，容易看出 $F(\mathrm{i})^{\neg} \times \mathrm{IS}_4$ 同构于一个形如 $\mathrm{DP\text{ł}}(G)$ 的代数，其中 $G : \mathrm{IS}_4 \to \mathcal{DL}$ 满足 $G(\mathrm{i}) = G(\mathrm{j}) = G(\mathrm{k}) = F(\mathrm{i})$ $G(\neg \mathrm{j}) = F(\mathrm{i})^d$。现在， $G(\mathrm{k})$ 是 $\mathrm{DP\text{ł}}(G)$ 的一个汇，因此由 [33, 引理 4.5.15], 等价关系 θ（将 $G(\mathrm{k})$ 的全部且仅全部成员坍缩）是 $\mathrm{DP\text{ł}}(G)$ 上的一个同余。然而，$\mathrm{DP\text{ł}}(F)$ 是 $\mathrm{DP\text{ł}}(G)/\theta$的一个子代数。因此，在上述任一情形中，A 都是$F(\mathrm{i})^{\neg} \times \mathrm{IS}_4$的一个同构像的一个商的一个子代数的一个同构像。就另一方向而言， $F(\mathrm{i})^{\neg}$与 IS_4 分别是 $\mathrm{DP\text{ł}}(F) \simeq \mathrm{A}$ 的一个子代数和一个商。于是，第一个等式得以确立。

对于第二个等式，如第 2.4 小节中所指出的， $F(\mathrm{i})^{\neg}$ 是一个德摩根格，因此由定理 2.1，它是一个次直积，其因子属于 $\{\mathrm{DM}_4, \mathrm{K}_3, \mathrm{B}_2, \mathrm{IS}_1\}$。若 $F(\mathrm{i})^{\neg}$ 是平凡的，则该等式显然成立。若不然，我们区分三种情形：(i) $F(\mathrm{i})^{\neg} \in \mathcal{BA}$，(ii) $F(\mathrm{i})^{\neg} \in \mathcal{KL} \setminus \mathcal{BA}$，(ii)$F(\mathrm{i})^{\neg} \in \mathcal{DML} \setminus \mathcal{KL}$。在情形 (ii) 中（其余情形类似）， $F(\mathrm{i})^{\neg}$ 的次直表示中的因子属于 $\{\mathrm{K}_3, \mathrm{B}_2, \mathrm{IS}_1\}$。因此 $V(\mathrm{K}_3, \mathrm{IS}_4)$将包含$F(\mathrm{i})^{\neg}$。但 $V(F(\mathrm{i})^{\neg}, \mathrm{IS}_4)$也将包含 K_3,，因为 $F(\mathrm{i})^{\neg} \in \mathcal{KL} \setminus \mathcal{BA}$。于是，我们的等式成立。□

若 $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ 具有 $\mathbf{IS}_4$ 作为指标反演半格，则定理 5.2 保证可以将其替换为一个次直不可约德摩根格，并与$\mathbf{IS}_4$一起使用。此外，根据 [23, 定理 4.1] 在 IS_1,$\mathbf{IS}_2$,$\mathbf{IS}_3$上只有 $\mathbf{IS}_4$ 个次直不可约德摩根双半格。将 IS_4 加入其中，我们得到一个具有 11个元素的集合

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{A} : \mathbf{A} \text{ is a s.i. De Morgan-Płonka sum over } \mathbf{IS}_1, \mathbf{IS}_2, \mathbf{IS}_3\} \cup \{\mathbf{IS}_4\},$$

因此， 的不同子簇至多与 $\mathcal{S}$的子集一样多。 11 个 $\mathcal{S}$ 中的德摩根双半格绘于图5中；椭圆表示其德摩根-普翁卡表示的纤维，而在每种情况下，转移映射和对偶化映射都由唯一方式确定。

完成这项任务的标准方法包括：(i) 计算预序

$$\preceq := \{\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle : \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{S}, \mathbf{A} \in HSP(\mathbf{B})\}$$

以及由此诱导的等价关系 $\equiv$ 定义为 $\preceq \cap \preceq^{-1}$，并且 (ii) 确定偏序集 $\langle \mathcal{S}/\equiv, \subseteq \rangle$ 的序理想。对于一个 11 元集合，(i) 的计算负担很重。然而，由于 $\mathcal{RDMBL} = R(\mathcal{DML})$ 是一个强非正则簇的正则化，其子簇格已知恰好包含 $\mathcal{DML}$ 的 4 个子簇及其正则化，并且这些簇两两不同。因此，只需描述 $\mathcal{DMBL}$ 中位于 $\mathcal{RDMBL}$ 以下的子簇之外的 即可。我们将通过 “ 手动 ” 施加一些足以证明 $\mathcal{DMBL}$ 的子簇格至多包含以下形式的簇的约束来完成这一点： $\mathcal{V}$， $B(\mathcal{V})$ $R(Bip(\mathcal{V}))$ $Bip(\mathcal{V})$ $R(\mathcal{V})$ 以及 $B^{-}(\mathcal{V})$ $R(Bip^{-}(\mathcal{V}))$ $Bip^{-}(\mathcal{V})$，其中 $\mathcal{V} \in \{\mathcal{T}, \mathcal{BA}, \mathcal{KL}, \mathcal{DML}\}$；然后证明这些簇两两不同。

定理 5.3。 $\mathcal{DMBL}$满足以下性质：

(1) 子簇的数量至多为 *23* 个，属于 $\mathcal{DMBL}$。*(2)* $\mathcal{DMBL}$ 的子簇格为图 *6*所示的子簇格；因此，特别地，子簇的数量恰为 23 个，属于 $\mathcal{DMBL}$。

证明。 (1) 运行图 7中的 Python 代码，可得到 15个满足所施加约束的子直接不可约代数的有效子集，由此得到图 6中的哈斯图。其中，出于排版原因，表示为 $Bip(\mathcal{T})$ 与 $Bip^{-}(\mathcal{DML})$之间的边应理解为指向上方。下面我们将论证这些约束的合理性。

约束（a）显然成立。之所以有约束（b），是因为我们要确定 $\mathcal{DMBL}$ 中不包含在 $\mathcal{RDMBL}$之下的子簇。之所以有约束（c），是因为$\mathbf{IS}_2$ 和$\mathbf{IS}_3$ 都是$\mathbf{IS}_4$的子代数。约束（d）成立，因为$\mathbf{IS}_3$ 是$\mathbf{A}_5$的子代数。约束（h）和约束（i）成立，因为$\mathbf{B}_2$ 是

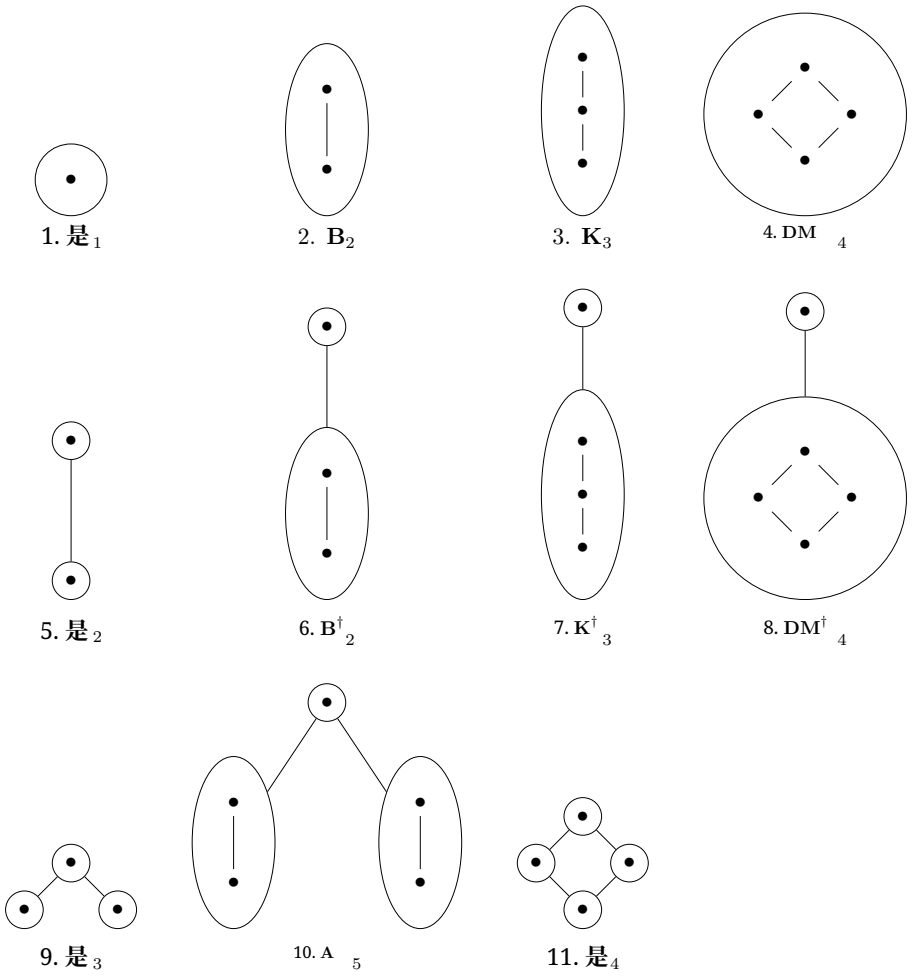

图5. $\mathcal{S}$中的次直不可约德摩根双半格

$\mathbf{K}_3$, 的子代数，而后者又是$\mathbf{DM}_4$的子代数。约束（g）成立，因为$\mathbf{B}_2$ 是$\mathbf{B}_2^\dagger$ 的子代数，而$\mathbf{IS}_2$ 是它的一个商；约束（e）和（f）同理。

关于约束（m）、（n）、（o），其从左到右的方向可由约束（e）、（f）、（g）推出。对于反方向，注意到，对于 $\mathbf{A} \in \{\mathbf{B}_2,\mathbf{K}_3,\mathbf{DM}_4\}$,$\mathbf{A}^\dagger$ 是$\mathbf{A} \times \mathbf{IS}_2$的一个商。

最后，我们通过证明对于 $\mathbf{A} \in \{\mathbf{B}_2,\mathbf{K}_3,\mathbf{DM}_4\}$， $V(\mathbf{A}_5,\mathbf{A})$ 与 $V(\mathbf{IS}_3, \mathbf{A})$ 一致，即与 $Bip(V(\mathbf{A}))$ 一致，来论证约束（j）、（k）、（l）。其中一个方向由以下事实得出：$\mathbf{IS}_3$ 是$\mathbf{A}_5$ 的子代数——参见约束（d）。对于反向包含，注意到 $\mathbf{A}_5$ 是 $\mathbf{A} \times \mathbf{IS}_3$ 的子代数。

(2) 图6 中的包含关系由（i）以及第4节中的定理得出。剩下需要证明的是，这些簇两两不同。

众所周知， $\mathcal{T} \subset \mathcal{BA} \subset \mathcal{KL} \subset \mathcal{DML}$。由 [7]中的结果可知， $B(\mathcal{T})$ 所显示的子簇两两不同（且不同于所有扩张 $\mathcal{BA}$的簇），而由 [9] 中的结果可知，算子 R是单射，且 $\mathcal{V} \subset R(\mathcal{V})$，其中 $\mathcal{V} \in \{\mathcal{T}, \mathcal{BA}, \mathcal{KL}, \mathcal{DML}\}$。

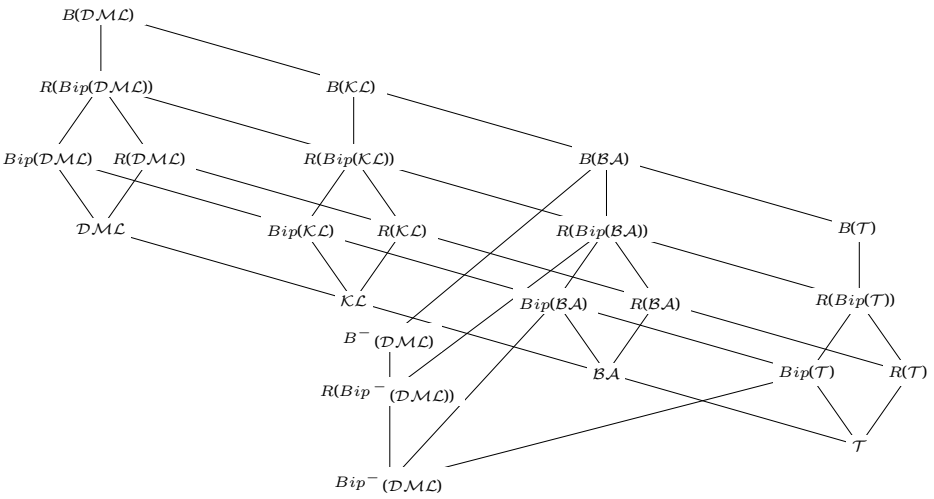

图 6. 所有德摩根双半格簇

下表通过给出一个恒等式，说明算子 $Bip(.)$ $R(Bip(.))$ $B(.)$ 是单射：对于簇 $\mathcal{V},\mathcal{W}$，若满足 $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$，则该恒等式在$Bip(\mathcal{V})$（分别地，在 $R(Bip(\mathcal{V}))$ $B(\mathcal{V})$）中成立，但在 $Bip(\mathcal{W})$（分别地，在$R(Bip(\mathcal{W}))$ $B(\mathcal{W})$）中不成立。我们用缩写 $\overline{x}$ 表示 $x \vee \neg x$，用 $\underline{x}$ 表示 $x \wedge \neg x$：

$Bip(\mathcal{BA}) \subset Bip(\mathcal{KL})$	$\underline{x} \approx \underline{y}$
$Bip(\mathcal{KL}) \subset Bip(\mathcal{DML})$	$\underline{x} \approx \underline{x} \wedge \overline{y}$
$R(Bip(\mathcal{BA})) \subset R(Bip(\mathcal{KL}))$	$\underline{x} \wedge y \approx \underline{x} \wedge \neg y$
$R(Bip(\mathcal{KL})) \subset R(Bip(\mathcal{DML}))$	$\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge (\underline{x} \vee \underline{y}) \approx \underline{x} \vee \underline{y}$
$B(\mathcal{BA}) \subset B(\mathcal{KL})$	$\underline{x} \wedge (\underline{x} \vee \underline{y}) \approx \underline{y} \wedge (\underline{y} \vee \underline{x})$
$B(\mathcal{KL}) \subset B(\mathcal{DML})$	$\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge (\underline{x} \vee \underline{y}) \approx \underline{x} \vee \underline{y}$

对于 $\mathcal{V},\mathcal{W} \in \{\mathcal{T},\mathcal{BA},\mathcal{KL},\mathcal{DML}\}$，我们有 $R(\mathcal{V}) \neq Bip(\mathcal{W})$ $R(\mathcal{V}) \neq R(Bip(\mathcal{W}))$，并且 $R(\mathcal{V}) \neq B(\mathcal{W})$，因为 $R(\mathcal{V})$ 满足 $x \wedge (x \vee y) \approx x \wedge (x \vee \neg y)$，而$Bip(\mathcal{W})$ $R(Bip(\mathcal{W}))$ $B(\mathcal{W})$ 不满足。我们还知道，$Bip(\mathcal{V}) \neq R(Bip(\mathcal{W}))$，因为 $Bip(\mathcal{V})$ 满足 $x \wedge (x \vee y \vee \neg y) \approx x \wedge (x \vee \neg x)$，而 $R(Bip(\mathcal{W}))$ 不满足。最后，我们有 $Bip(\mathcal{V}) \neq B(\mathcal{W})$，并且 $R(Bip(\mathcal{V})) \neq B(\mathcal{W})$，因为$Bip(\mathcal{V})$ $R(Bip(\mathcal{V}))$ 满足 $x \wedge (x \vee y \vee \neg y) \approx x \wedge (x \vee \neg x \vee y)$，而 $B(\mathcal{W})$ 不满足。

最后，让我们讨论 $Bip^-(\mathcal{DML})$ $R(Bip^-(\mathcal{DML}))$ $B^-(\mathcal{DML})$。它们满足包含关系 $Bip^-(\mathcal{DML}) \subset R(Bip^-(\mathcal{DML})) \subset B^-(\mathcal{DML})$，这可由以下事实看出：$Bip^-(\mathcal{DML})$ 满足 $x \wedge \neg x \approx y \vee \neg y$，而 $R(Bip^-(\mathcal{DML}))$ 不满足；此外，$R(Bip^-(\mathcal{DML}))$ 满足 $x \wedge \neg x \wedge y \approx x \wedge \neg x \wedge \neg y$，而 $B^-(\mathcal{DML})$ 不满足。这三个簇也都不同于所有对合半格簇，因为它们不满足 $x \wedge y \approx x \vee y$；它们也不同于 $\mathcal{BA}$ 的所有扩张，因为它们满足 $x \wedge \neg x \approx x \vee \neg x$，而 $\mathcal{BA}$ 的任何扩张都不满足该条件。□

致谢。 我们衷心感谢以下资金来源提供的支持：

• 欧盟（地平线欧洲研究与创新计划），通过 MSCA-RISE 行动 PLEXUS（资助协议编号 101086295）；
• 意大利教育、大学与研究部，通过PRIN 2022项目DeKLA（“发展克林逻辑及其应用”，项目代码：2022SM4XC8）以及PRIN Pnrr项目“逻辑、计算与自然过程的量子模型（Qm4Np）”（项目代码：P2022A52CR）；

• 撒丁基金会，通过项目“超内涵性的代数方法”，项目代码：F23C25000360007；

• 法国欧洲与外交事务部（MEAE）和高等教育、研究与创新部（MESRI），以及阿根廷科学、技术与创新部（MinCyT）和国家科学技术研究委员会（CONICET），通过双边ECOS Sud项目“逻辑后承与多值模型”（资助编号 A22H01）

•意大利西北哲学联盟（FINO）和弗朗哥与玛丽莉莎·卡利加拉基金会（意大利都灵）。

参考文献

[1] R. B. Angell. 可推演性、蕴涵与分析包含. 载于相干逻辑的方向，第119–143页. 施普林格，1989.[2] S. Bonzio、F. Paoli与M. Pra Baldi. 变元包含逻辑. 施普林格，柏林，2022.[3] S. Burris与H. P. Sankappanavar. 泛代数教程. 施普林格，纽约，1981.[4]S. Crvenković、I. Dolinka与M. Vinčić. 某些半群0-直并的等式基. 《匈牙利数学研究》，36(3/4):423–431，2000.[5] S. Crvenković与I. Dolinka. 对合半群与对合半环的簇. 《巴尼亚卢卡数学家协会通报》，9:7–47，2002.[6] J. Czelakowski与W. Dziobak. 其有限次直不可约成员构成全称类的同余分配拟簇. *Algebra Universalis*，27:128–149，1990.[7] I. Dolinka. 关于对合带簇的评注. 《代数通讯》，28(6):2837–2852，2000.[8] I. Dolinka与Vinčić. 对合 Płonka 和. 《匈牙利数学期刊》，46(1):17–31，2003.[9] J. Dudek与E. Graczyńska. 代数簇的格. 《波兰科学院通报·数学科学辑》，29:337–340，1981.[10] T. M. Ferguson. 双格上的截断运算. 载于多值逻辑国际研讨会（*ISMVL*），第24–29页. IEEE，2015.[11] T. M. Ferguson. 形式逻辑中的意义与禁令：*William T. Parry*命题逻辑的变体. 施普林格，沙姆，2017.[12] K. Fine. 安杰尔内容. 《哲学逻辑杂志》，45(2):199–226，2016.[13] L. Fusco与F. Paoli. 富化 Płonka 和. *Algebra Universalis*，87，3:2–32，2026.[14] G. Grätzer与J. Sichler. 代数的Agassiz 和. 《数学讨论会》，30:57–59，1974.

[15] P. Grillet. 半群：结构理论导论. Routledge，纽约，1995.[16] L. Hornischer. 同义逻辑.《哲学逻辑杂志》，49(4):767–805，2020.[17] J. Howie. 半群理论基础. 克拉伦登出版社，牛津，1995.[18] J. Kalman. 带对合格.《美国数学会汇刊》，87:485–491，1958.[19] H. Lakser、R. Padmanabhan与C. Platt. Płonka 和的次直积分解.《杜克数学杂志》，39:485–488，1972.[20] G. Laslo与J. Leech. 非交换格上的Green 等价关系.《数学科学学报》（塞格德），68:501–533，2002.[21] A. Monteiro. 经典命题演算的特征德摩根矩阵.《巴西科学院年刊》，32:1–7，1960.[22] T. Moraschini. 广义拟簇之间伴随的逻辑与代数刻画.《符号逻辑杂志》，83(3):899–919，2018.[23] F. Paoli、D. Szmuc与M. Zirattu. 解析包含代数.《逻辑、语言与信息杂志》，2024. 即将出版.[24] M. Petrich. 半群讲义. Wiley，伦敦，1977.[25] J. Płonka. 论抽象代数的一种构造方法.《数学基础》，61(2):183–189，1967.[26] J. Płonka. 论分配拟格.《数学基础》，60:191–200，1967.[27] J. Płonka. 论由正则方程定义的抽象代数等式类.《数学基础》，64:241–247，1969.[28] J. Płonka与A. Romanowska. 半格和. 载于A. Romanowska与J. Smith编，泛代数与拟群理论，第123–158页. Heldermann，莱姆戈，1992.[29] T. Randriamahazaka. 关于命题变量带符号出现的注记.《澳大拉西亚逻辑杂志》，19(1):59–72，2022.[30] T. Randriamahazaka. 德摩根-普翁卡和.《逻辑研究》，112(6):1343–1371，2024.[31] H. Rasiowa. 非经典逻辑的代数方法. 北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1974.[32] A. Romanowska. 论正则簇与正则化簇. *Algebra Universalis*，23:215–241，1986.[33] A. Romanowska与J. Smith. 模态. 世界科学出版社，新加坡，2002.

```
from itertools import 链 , 组合 A   =set ( range (1, 12) ) def 幂集 (s): s   =   list (s) return 链 .
```

图 7. $\mathcal{DMBL}$ 的子簇生成集上的约束