arXiv:2603.12190v1 [math.CV] 12 Mar 2026

一族亚纯函数的正规性判据

KUNTAL MANDAL 和 BIPUL PAL

摘要。我们考虑定义在区域 D 上的亚纯函数族 $\mathcal{F}$、全纯函数 ψ 以及次数为 d、权为 w 的齐次微分多项式 $P[f]$。本文证明，在满足某些条件时，$\mathcal{F}$ 是正规的，例如 $f \neq 0$、$P[f] \neq 0$，且函数 $P[f]-\psi^d$ 的所有零点的重数至少为 $\begin{matrix} w+1 \\ w-1 \end{matrix}$，对每个 $f \in \mathcal{F}$ 均成立。

1. 引言

设 D 是复平面 $\mathbb{C}$ 中的一个区域，$\mathcal{F}$ 是定义在 D 上的亚纯函数族。根据蒙特尔的定义，若对任意序列 $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$，都存在一个子序列 $\{f_{n_j}\}$，它在 D 中球面局部一致收敛于一个亚纯函数或 ∞，则称 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规（见 [6, 9, 13]）。以下是 Gu 于 1979 年得到的正规性判别准则（见 [5],），这是亚纯函数正规族的著名结果之一。

定理 A. 设 $\mathcal{F}$ 是定义在 D 上的亚纯函数族，且 k 是正整数。若对每个函数 $f \in \mathcal{F}$，都有 $f \neq 0$，$f^{(k)} \neq 1$，则 $\mathcal{F}$ 在 D 中正规。

这一结果已得到若干推广。正如一些作者所证明的，即使将 $f^{(k)} \neq 1$ 弱化为“ $f_{(k)}-1$ 的零点重数至少为 l，其中 $l \geq k+5+[2/k]$”，结论仍然成立（参见 [2, 3, 13], 等）。Fang 和 Chang [4] 于 2007年证明，当 $f^{(k)} \neq 0$ 时，l 的下界可以大幅降低，如下所示。

定理 B. 设 $\mathcal{F}$ 是定义在 D 上的亚纯函数族，且 k 是正整数。若对每个函数 $f \in \mathcal{F}$，都有 $f \neq 0$、$f^{(k)} \neq 0$，并且 $f_{(k)}-1$ 的所有零点重数至少为 $\begin{matrix} k+2 \\ k \end{matrix}$，则 $\mathcal{F}$ 在 D 中正规。

夏济英和徐岩 [11] 于2009年针对一个显而易见的问题提出了以下推广：当常数 1 被小函数 $\psi(z) \neq 0$ 替代时，定理 B 中的结论如何推广?

定理 *C.* 设 $\mathcal{F}$ 是定义在区域 $D \subset \mathbb{C}$ 内的亚纯函数族，$\psi(\neq 0)$ 和 a_0、a_1、.....、a_{k-1} 是 D 内的全纯函数，且 k 是一个正整数。假设对于每个函数 $f \in F$，$f \neq 0$ $f(k)+a_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+a_1f'+a_0f \neq 0$，并且 $f^{(k)}(z)+a_{k-1}(z)f(k-1)(z)+\cdots+a_1(z)f'(z)+a_0(z)f(z)-\psi(z)$ 的所有零点的重数至少为 $\begin{matrix} k+2 \\ k \end{matrix}$。若当 $k=1$ 时，ψ 只有重数至多为 *2* 的零点；而当 $k \geq 2$ 时，ψ 只有单零点，则 $\mathcal{F}$ 是 D 内的正规族。

2020 数学主题分类。30D35, 30D45。关键词和短语。亚纯函数，微分多项式，正规族，零点。第一作者的工作得到印度大学拨款委员会（UGC博士奖学金（国家考试局参考编号：211610061981））的资助。

Schwick [10] 在 1997年以及 Yang [12] 在1986年得出的早期结果已经表明，即使将 1 替换为非零全纯函数 $\psi(\not\equiv 0)$，定理 A 的结论仍然成立。

一个自然的问题随之产生：如果将定理 C 中的线性微分多项式 $f^{(k)}(z) + a_{k-1}(z)f^{(k-1)}(z) + \cdots + a_1(z)f'(z) + a_0(z)f(z)$ 替换为 f 中的非线性微分多项式，可以得出什么结论?

为了探究这一想法，我们首先引入一些基本定义，用以指导我们主要结果的证明。

考虑微分多项式

$$P[f] = P[f, f', \cdots, f^{(k)}] = \sum_{j=1}^{n} a_j M_j[f], \tag{1.1}$$

其中每一单项式项为

$$M_j[f] = M_j[f, f', \cdots, f^{(k)}] = \prod_{i=0}^{k} \left(f^{(i)}\right)^{n_{i,j}}$$

且每个 a_j 是 D 中的全纯函数。

k $M_j[f]$ 的次数和权定义为 $d_j = d(M_j[f]) = \sum n_{i,\ j}$ 和 $w_j = \sum_{i=0}$

$kw(M_j[f]) = \sum(1+i)n_{i,\ j}$ 分别。对于 $P[f]$，次数和权为$i=0$

$$d = d(P) = \max_{1\le j\le n} d_j \text{ and } w = w(P) = \max_{1\le j\le n} w_j$$

其下次数为 $\alpha = d = \min_{1\le j\le n} d_j$。

若 $\alpha = d$，则称 $P[f]$ 为齐次微分多项式。

现在我们给出主要结果，将上述定理推广到齐次微分多项式的情形，其中权仅对应一个单项式，且相应的 a_i 是无零全纯函数。

定理 1.1. 设 $\mathcal{F}$ 是定义在区域 $D \subset \mathbb{C}$上的亚纯函数族，设$\psi(\not\equiv 0)$ 和 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是 D上的全纯函数，且 k, n 是两个正整数。假设 $P[f]$ 是次数为 d、权为 w 的齐次微分多项式，并且 $P[f]$ 仅有一个单项式 $M_i[f]$，其中某个 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 的权为 w，相应的系数 a_i 是无零全纯函数。假设对于每个函数 $f \in \mathcal{F}$，$f \neq 0$, $P[f] \neq 0$，且 $P[f] - \psi^d(z)$ 的所有零点的重数至少为$\dfrac{w+1}{w-1}$。若对于 $w = 2$，ψ 的零点重数至多为2，且对于 $w \geq 3$，ψ 仅有单零点，则 $\overline{\mathcal{F}}$ 在 D中正规。

显然，定理 1.1 推广了定理 A、定理 B 和定理 C，也弥合了线性微分多项式与更广泛的微分多项式类之间的差距，为亚纯函数正规族的结构和性质带来了新的认识。

2. 引理

在正规族理论中的基础结果 Zalcman 引理的诸多改进中，Pang 和 Zalcman 提出的以下局部版本 [8] （参见 [1, 7, 14, 15, 16]）尤为重要。

引理 *2.1.* 设 k 为正整数，$\mathcal{F}$ 是在区域 D 内亚纯的函数族，且每个函数 $f \in \mathcal{F}$ 的零点重数都至少为 k。假设存在常数 $A \geq 1$，使得只要 $f(z) = 0$，就有 $|f^{(k)}(z)| \leq A$，$f \in \mathcal{F}$.。若 $\mathcal{F}$ 在 $z_0 \in D$ 处不正规，则对每个满足 $0 \leq \alpha \leq k$ 的 α，都存在点列 $z_j \in D$（满足 $z_j \to z_0$）、正数列 $\rho_j \to 0$ 和函数序列 $f_j \in \mathcal{F}$，使得 $g_j(\zeta) = \frac{f_j(z_j + \rho_j \zeta)}{\rho_j^{\alpha}}$ 在球面度量局部一致收敛，其中 g 是 $\mathbb{C}$ 上的非常值亚纯函数，其所有零点的重数都至少为 k，并且满足 $g^{\#}(\zeta) \leq g^{\#}(0) = kA + 1$.。此外，$g$ 的阶至多为 2。

这里，通常将球面导数定义为 $g^{\#}(\zeta) = \frac{|g'(\zeta)|}{1 + |g(\zeta)|^2}$.

引理 2.2. 设 $k(\geq 1)$ 和 $l(\geq 0)$ 是两个整数。假设 f 是一个有理函数，且 $M[f] = \prod_{i=0}^{k} (f^{(i)})^{n_i}$ 是一个次数为 d、权为 w 的单项式。如果 $f \neq 0$ 和 $f^{(k)} \neq 0$，那么函数 $aM[f](z) - z^l$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上至少有一个单零点，其中 a 是一个非零常数。

证明。由于 $f \neq 0$ 和 $f^{(k)} \neq 0$，可知 f 必定是一个非多项式的有理函数。因此，$f(z)$ 可写为

$$f(z) = \frac{C}{(z - z_1)^{r_1}(z - z_2)^{r_2} \cdots (z - z_t)^{r_t}},$$

其中 $C(\neq 0)$ 是常数，且 $r_1, r_2, \cdots, r_t$ 均为正整数。

令 $r = \sum_{j=1}^{t} r_j$。于是我们有

$$\begin{aligned} f'(z) =& -C\left\{ \frac{r_1}{(z - z_1)^{r_1+1}(z - z_2)^{r_2} \cdots (z - z_t)^{r_t}} + \frac{r_2 + 1}{(z - z_1)^{r_1}(z - z_2)^{r_2+1} \cdots (z - z_t)^{r_t}} + \cdots \right. \\ &\left. + \frac{r_t + 1}{(z - z_1)^{r_1}(z - z_2)^{r_2} \cdots (z - z_t)^{r_t+1}} \right\} \\ =& -\frac{C \sum_{j=1}^{t} r_j (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_{j-1})(z - z_{j+1}) \cdots (z - z_t)}{(z - z_1)^{r_1+1}(z - z_2)^{r_2+1} \cdots (z - z_t)^{r_t+1}} \\ =& -\frac{C\left(rz^{t-1} + b_{t-2}z^{t-2} + b_{t-3}z^{t-3} + \cdots + b_1 z + b_0\right)}{\prod_{j=1}^{t} (z - z_j)^{r_j+1}}, \end{aligned}$$

其中 $b_0, b_1, \cdots, b_{t-2}$ 为常数。现在，根据数学归纳法，我们得到

$$f^{(k)}(z) = \frac{Bz^{k(t-1)} + C_{k(t-1)-1}z^{k(t-1)-1} + \cdots + C_0}{\prod_{j=1}^{t} (z - z_j)^{r_j+k}},$$

其中 $B = (-1)^k r(r+1) \cdots (r+k-1)C \neq 0$ 且 $C_{k(t-1)-1}, \cdots, C_0$ 为常数。由于 $F^{(k)} \neq 0$ 与 $B \neq 0$，则有 $C_{k(t-1)-1} = C_{k(t-1)-2} = \cdots = C_0 = 0$ 与 $t - 1 = 0$，这意味着

$t = 1$。因此，我们有

$$f(z) = \frac{C}{(z - z_1)^{r_1}}.$$

此外，对于 $k \geq 1$，我们得到

$$f^{(k)}(z) = \frac{A_k}{(z - z_1)^{r_1+k}};$$

并且如果 $k = 0$，则 $A_0 = C$。因此，我们看到

$$\begin{aligned} M[f](z) =& \left(\frac{A_0}{(z - z_1)^{r_1}}\right)^{n_0} \left(\frac{A_1}{(z - z_1)^{r_1+1}}\right)^{n_1} \cdots \left(\frac{A_k}{(z - z_1)^{r_1+k}}\right)^{n_k} \\ =& \frac{B_1}{(z - z_1)^{(r_1-1)d+w}}. \end{aligned}$$

现在，我们有

$$aM[f](z) - z^l = \frac{aB_1 - z^l(z - z_1)^{(r_1-1)d+w}}{(z - z_1)^{(r_1-1)d+w}}. \tag{2.1}$$

由于分子是次数大于 1 的多项式，存在一点 z_0 使得$aM[f](z_0) - z_0^l = 0$。

如果可能，假设 $aM[f](z) - z^l$的所有零点都是多重零点。我们现在考虑以下两种情形。

情形 I: 假设 $l = 0$。

Then

$$M'[f](z) = 0 \quad \text{which implies} \quad -\frac{aB_1\{(r_1 - 1)d + w\}}{(z - z_0)^{(r_1-1)d+w+1}} = 0.$$

因此 $(r_1 - 1)d + w = 0$，从而得出矛盾。

情形 II: 假设 $l \geq 1$。

则 z_0是 $aM[f](z) - z^l$ 的一个根。于是我们得到

$$aM[f](z_0) - z_0^l = \frac{aB_1 - z_0^l(z_0 - z_1)^{(r_1-1)d+w}}{(z_0 - z_1)^{(r_1-1)d+w}}.$$

则这表明

$$aM'[f](z_0) - lz_0^{l-1} = \frac{-aB_1\{(r_1 - 1)d + w\} - lz_0^{l-1}(z_0 - z_1)^{(r_1-1)d+w+1}}{(z_0 - z_1)^{(r_1-1)d+w+1}} = 0. \tag{2.2}$$

现在，由 (2.1) 和 (2.2) 我们有

$$aB_1 = z_0^l(z_0 - z_1)^{(r_1-1)d+w} \tag{2.3}$$

and

$$aB_1\{(r_1 - 1)d + w\} = -lz_0^{l-1}(z_0 - z_1)^{(r_1-1)d+w+1}. \tag{2.4}$$

结合（2.3）和（2.4）可得 $z_0 = \frac{lz_1}{(r_1 - 1)d + w + l}$。因此，$aM[f](z) - z^l$只有一个零点$z_0$ 和 $z_1 \neq 0$。于是

$$aM[f](z) - z^l = \frac{-(z - z_0)^{(r_1-1)d+w+l}}{(z - z_1)^{(r_1-1)d+w}},$$

这意味着

$$aB_1 - z^l(z - z_1)^{(r_1-1)d+w} = -(z - z_0)^{(r_1-1)d+w+l}.$$

如果 $l \geq 2$，则左侧 z 的系数为 0，而右侧 z 的系数为

$$(-1)^{(r_1-1)d+w+l}\{(r_1-1)d+w+l\}z_0^{(r_1-1)d+w+l-1} \neq 0, \quad \text{a contradiction.}$$

若 $l=1$，比较 z 的系数，得到

$$(-1)^{(r_1-1)d+w+1}\{(r_1-1)d+w+1\}z_0^{(r_1-1)d+w} = (-1)^{(r_1-1)d+w+1}z_1^{(r_1-1)d+w},$$

这意味着

$$(r_1-1)d+w+1\left\{\frac{z_1}{((r_1-1)d+w+1}\right\}^{(r_1-1)d+w} = z_1^{(r_1-1)d+w}.$$

于是我们有 $\{(r_1-1)d+w+1\}^{(r_1-1)d+w-1}=1$，这导致矛盾。

因此，**情形 I** 和**情形 II** 共同证明 $aM[f](z)-z^l$ 至少有一个单零点。 □

引理 *2.3.* 设 $\mathcal{F}$ 是定义在区域 D 上的亚纯函数族，且 k、n 是两个正整数。设 $b(z)\not\equiv 0$ 和 $a_1(z)\ a_1(z)\ldots,a_n(z)$ 是 D 上的解析函数。假设 $P[f]$ 是次数为 d、权为 w 的齐次微分多项式，且 $P[f]$ 只有一个单项式 $M_i[f]$，其中某个 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 的权为 w，相应的系数 a_i 是无零全纯函数。若对每个函数 $f\in\mathcal{F}$，$f\neq 0$、 $P[f]\neq 0$，以及 $P[f](z)-b(z)$ 的所有零点的重数至少为 $\begin{matrix} w+1 \\ w-1 \end{matrix}$，则 $\mathcal{F}$ 在 D 中正规。

证明。由于正规性是一种局部性质，为了保持一般性，我们考虑 $D=\{z:\ |z|<1\}$。假设 $\mathcal{F}$ 在 z_0处不正规。因此，根据引理 2.1，存在一个由 $\mathcal{F}$ 中的函数组成的序列 $\{f_j\}$、一个 $\mathbb{C}$ 中的序列 $\{z_j\}$，使得 $z_j\longrightarrow z_0$，以及一个由正数组成的序列 $\{\rho_j\}$，使得当 $j\longrightarrow\infty$ 时 $\rho_j\longrightarrow 0$

$$g_j(\zeta)=\frac{f_j(z_j+\rho_j\zeta)}{\rho_j^{\frac{w-d}{d}}}\longrightarrow g(\zeta) \tag{2.5}$$

在 $\mathbb{C}$ 的紧子集上球面一致收敛，其中 $g(\zeta)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的非常值亚纯函数。现在，Hurwitz定理给出 $g(\zeta)\neq 0$。然后由 (2.5)，我们有

$$g_j^{(i)}(\zeta)=\frac{\rho_j^i f_j^{(i)}(z_j+\rho_j\zeta)}{\rho_j^{\frac{w-d}{d}}};\quad i=1,2,\cdots,k.$$

因此

$$M_q[g_j](\zeta)=\frac{\rho_j^{w_q-d}M_q[f_j](z_j+\rho_j\zeta)}{\rho_j^{w-d}};\quad q=1,2,\cdots,n.$$

不失一般性，我们假设 w 在 M_1中出现。于是， a_1 是一个无零全纯函数。因此，

$$P[f_j](z_j+\rho_j\zeta)=\sum_{q=1}^{n}\rho_j^{w-w_q}a_q(z_j+\rho_j\zeta)M_q[g_j](\zeta)\longrightarrow a_1(z_0)M_1[g](\zeta), \tag{2.6}$$

这意味着

$$\begin{aligned} P[f_j](z_j+\rho_j\zeta)-b(z_j+\rho_j\zeta) =& a_1(z_j+\rho_j\zeta)M_1[g_j](\zeta)+\sum_{q=2}^{n}\rho_j^{w-w_q}a_q(z_j+\rho_j\zeta)M_q[g_j](\zeta) \\ & -b(z_j+\rho_j\zeta) \\ & \longrightarrow a_1(z_0)M_1[g](\zeta)-b(z_0) \quad \text{as} \quad j\longrightarrow\infty. \end{aligned} \tag{2.7}$$

当 $P[f_j](z_j+\rho_j\zeta)\neq 0$时，由Hurwitz定理可知，对任意不是 $g(\zeta)$的极点的 $\zeta\in\mathbb{C}$，要么 $M_1[g](\zeta)\equiv 0$，要么 $M_1[g](\zeta)\neq 0$。若 $M_1[g](\zeta)\equiv 0$，则由于 $g\neq 0$，可推得 g 为非零常数。因此 $M_1[g](\zeta)\neq 0$。

由(2.7)，根据Hurwitz定理，我们得到 $a_1(z_0)M_1[g](\zeta)-b(z_0)$的所有零点的重数至少为 $\overline{w+1\over w-1}$。

若 $M_1[g]$ 是有理函数，则 g 是有理函数。由于 $g\neq 0$ 与 $M_1[g]\neq 0$，则由引理2.2 $a_1(z_0)M_1[g]-b(z_0)$至少有一个单零点，这与 $a_1(z_0)M_1[g]-b(z_0)$的所有零点的重数至少为 $\overline{\frac{w+1}{w-1}}$(> 1)这一事实相矛盾。因此， $M_1[g]$是超越的，故由Nevanlinna 第二基本定理，我们有

$$\begin{aligned} & T(r,M_1[g]) \\ \leq & \overline{N}\left(r,a_1(z_0)M_1[g]\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{a_1(z_0)M_1[g]}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{a_1(z_0)M_1[g]-b(z_0)}\right)+S\left(r,M_1[g]\right) \\ \leq & \frac{1}{w}N\left(r,a_1(z_0)M_1[g]\right)+\frac{w-1}{w+1}N\left(r,a_1(z_0)M_1[g]\right)+S\left(r,M_1[g]\right) \\ \leq & \frac{w^2+1}{w^2+w}T\left(r,M_1[g]\right)+S\left(r,M_1[g]\right), \end{aligned}$$

这意味着 $T(r,\ aM_1[g])=S(r,\ M_1[g])$，矛盾。证明至此完成。 □

3. 定理 1.1 的证明

证明。 不失一般性，我们考虑 w 出现在 M_1 中，因此 a_1 无零点。

众所周知，正规性是一个局部性质。为方便起见，假设 $D=\Delta=\{z:\ |z|<1\}$，且 $\psi(z)=z^l\varphi(z)\ (z\in\Delta)$，其中 l 是一个正整数， $\varphi(0)=1,\ \varphi(z)\neq 0$在 $\Delta'=\{z$ 上: $0<|z|<1\}$。由定理 C， $\mathcal{F}$ 在 $\Delta'=\{z:\ 0<|z|<1\}$ 上正规，因此只需证明 $\mathcal{F}$ 在 $z=0$ 处正规。

现在，我们考虑 $\mathcal{G}=\left\{g(z)=\overline{f(z)\,\psi(z)}:\ f\in\mathcal{F},\ z\in\Delta\right\}$，其中对所有 $g\in\mathcal{G},\ g(0)\neq\infty$，因为$f\neq 0,\ f\in\mathcal{F}$。需要证明 $\mathcal{G}$ 在 Δ 中正规。若不然，假设 $\mathcal{G}$在 $z_0\in\delta$ 处不正规。那么，根据引理 2.1，存在一个函数序列 $\{g_j\}$ 属于 $\mathcal{G}$，一个序列 $\{z_j\}$ 属于 $\mathbb{C}$，使得 $z_j\longrightarrow z_0$，以及一个正数序列 $\{\rho_j\}$，满足当 $j\longrightarrow\infty$ 时$\rho_j\longrightarrow 0$，并且

$$G_j(\zeta)=\frac{g_j(z_j+\rho_j\zeta)}{\rho_j^{\frac{w-d}{d}}}\longrightarrow G(\zeta)\quad(\text{as}\quad j\longrightarrow\infty),$$

在 $\mathbb{C}$的一个紧子集上球面一致收敛，其中 $G(\zeta)$是 $\mathbb{C}$ 上的非常值亚纯函数，且 $G(\zeta)\neq 0$。现在我们考虑以下两种情况。

情形 I: </style}假设_ $^{z_j}\longrightarrow\infty$ 当 $j\longrightarrow\infty.\rho_j$

然后，对 $f_j(z)=\psi(z)g_j(z)$ 使用导数的莱布尼茨法则，可得

$$\begin{aligned}&f_j^{(i)}(z)\\=&\binom{i}{0}g_j^{(i)}(z)\psi(z)+\binom{i}{1}g_j^{(i-1)}(z)\psi'(z)+\cdots+\binom{i}{p}g_j^{(i-p)}(z)\psi^{(p)}(z)+\cdots+\binom{i}{i}g_j(z)\psi^{(i)}(z)\\=&g_j^{(i)}(z)\psi(z)+\sum_{p=1}^{i}g_j^{(i-p)}(z)\psi^{(p)}(z),\end{aligned}$$

这意味着

$$g_j^{(i)}(z)=\frac{f_j^{(i)}(z)}{\psi(z)}-\sum_{p=1}^{i}\binom{i}{p}g_j^{(i-p)}(z)\frac{\psi^{(p)}(z)}{\psi(z)}. \tag{3.1}$$

再次

$$\begin{aligned}\psi^{(p)}(z)=&\sum_{t=0}^{p}l(l-1)(l-2)\cdots(l-p+t+1)\binom{p}{t}z^{l-p+t}\varphi^{(t)(z)}\\=&\sum_{t=0}^{p}A_{pt}z^{l-p+t}\varphi^{(t)}(z),\end{aligned} \tag{3.2}$$

其中

$$\begin{aligned}A_{pt}=&l(l-1)(l-2)\cdots(l-p+t+1)\binom{p}{t},\quad \text{if}\quad l\geq p\\=&0;\quad \text{if}\quad l<p\quad\text{and}\quad t=0,1,\cdots,p-l-1\\=&1;\quad \text{if}\quad t=p.\end{aligned}$$

因此，由（3.1）可得

$$g_j^{(i)}(z)=\frac{f_j^{(i)}(z)}{\psi(z)}-\sum_{p=1}^{i}\binom{i}{p}g_j^{(i-p)}(z)\sum_{t-0}^{p}A_{pt}\frac{1}{z^{p-t}}\frac{\varphi^{(t)}(z)}{\varphi(z)},\quad i=0,2,\cdots,k. \tag{3.3}$$

由于

$$G_j^{(i)}=\frac{\rho_j^i g_j^{(i)}(z_j+\rho_j\zeta)}{\rho_j^{\frac{w-d}{d}}};\quad i=0,1,2,\cdots,k,$$

我们有

$$\left(\rho_j^{\frac{w-d}{d}}\right)^{n_{qi}}\left(G_j^{(i)}\right)^{n_{qi}}=\left(\rho_j^i\right)^{n_{qi}}\left(g_j^{(i)}(z_j+\rho_j\zeta)\right)^{n_{qi}};\quad i=0,1,2,\cdots,k;\quad q=1,2,\cdots,n.$$

因此

$$\rho_j^{w-w_q}M_q[G_j](\zeta)=M_q[g_j](z_j+\rho_j\zeta). \tag{3.4}$$

现在，由 (3.3) 可得

$$\begin{aligned}&M_q[g_j](z_j+\rho_j\zeta)\\=&\prod_{i=0}^{k}\left[\frac{f_j^{(i)}(z_j+\rho_j\zeta)}{\psi(z_j+\rho_j\zeta)}-\sum_{p=1}^{i}\left\{g_j^{(i-p)}(z_j+\rho_j\zeta)\sum_{t=0}^{p}A_{pt}\frac{1}{(z_j+\rho_j\zeta)^{p-t}}\frac{\varphi^{(t)}(z_j+\rho_j\zeta)}{\varphi(z_j+\rho_j\zeta)}\right\}\right]^{n_{qi}}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

现在，由 (3.4) 和 (3.5) 可得

$$\begin{aligned}
&\rho_j^{w-w_q} M_q[G_j](\zeta)\\
=&\prod_{i=0}^{k}\left[\frac{f_j^{(i)}(z_j+\rho_j\zeta)}{\psi(z_j+\rho_j\zeta)}-\sum_{p=1}^{i}\left\{g_j^{(i-p)}(z_j+\rho_j\zeta)\sum_{t=0}^{p}A_{pt}\frac{1}{(z_j+\rho_j\zeta)^{p-t}}\frac{\varphi^{(t)}(z_j+\rho_j\zeta)}{\varphi(z_j+\rho_j\zeta)}\right\}\right]^{n_{qi}}\\
=&\prod_{i=0}^{k}\left[\frac{f_j^{(i)}(z_j+\rho_j\zeta)}{\psi(z_j+\rho_j\zeta)}-\sum_{p=1}^{i}\left\{\frac{g_j^{(i-p)}(z_j+\rho_j\zeta)}{\rho_j^p}\sum_{t=0}^{p}\frac{A_{pt}}{\left(\frac{z_j}{\rho_j}+\zeta\right)^{p-t}}\frac{\rho_j^t\varphi^{(t)}(z_j+\rho_j\zeta)}{\varphi(z_j+\rho_j\zeta)}\right\}\right]^{n_{qi}}. \quad (3.6)
\end{aligned}$$

显然，

$$\lim_{j\longrightarrow\infty}\frac{1}{\frac{z_j}{\rho_j}+\zeta}=0 \quad \text{and} \quad \lim_{j\longrightarrow\infty}\frac{\rho_j^t\varphi^t(z_j+\rho_j\zeta)}{\varphi(z_j+\rho_j\zeta)}=0, \quad \text{for} \quad t\geq 1.$$

这里，$\dfrac{g_j^{(i-p)}(z_j+\rho_j\zeta)}{\rho_j^p}$ 在 $G(\zeta)\}$的所有极点上局部有界，因为 $\dfrac{g_j(z_j+\rho_j\zeta)}{\rho_j^{\frac{w-d}{d}}} \longrightarrow G(\zeta)$。现在，(3.5) 可写为

$$\begin{aligned}
M_q[g_j](z_j+\rho_j\zeta)=&\frac{M_q[f_j](z_j+\rho_j\zeta)}{\psi^d(z_j+\rho_j\zeta)}+R(g_j(z_j+\rho_j\zeta)),\psi_j(z_j+\rho_j\zeta),z_j+\rho_j\zeta)\\
\text{or,}\quad \frac{M_q[f_j](z_j+\rho_j\zeta)}{\psi^d(z_j+\rho_j\zeta)}=&M_q[g_j](z_j+\rho_j\zeta)-R(g_j(z_j+\rho_j\zeta)),\psi_j(z_j+\rho_j\zeta),z_j+\rho_j\zeta). \quad (3.7)
\end{aligned}$$

因此，对于 $q=1$，结合 $\mathbb{C}$的每个不含 $G(\zeta)$极点的紧子集上的(3.3)、(3.4)、(3.6)和(3.7)，我们有

$$\frac{M_1[f_j](z_j+\rho_j\zeta)}{\psi^d(z_j+\rho_j\zeta)}\longrightarrow M_1[g](\zeta) \quad \text{as} \quad j\longrightarrow\infty. \quad (3.8)$$

如果 $q\neq 1$，那么

$$\frac{M_q[f_j](z_j+\rho_j\zeta)}{\psi^d(z_j+\rho_j\zeta)}\longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad j\longrightarrow\infty.$$

So,

$$\frac{\sum_{q=1}^{n}a_q(z_j+\rho_j\zeta)M_q[f_j](z_j+\rho_j\zeta)}{\psi^d(z_j+\rho_j\zeta)}\longrightarrow a_1(z_0)M_1[G](\zeta) \quad as \quad j\longrightarrow\infty \quad (3.9)$$

and

$$\frac{\sum_{q=1}^{n}a_q(z_j+\rho_j\zeta)M_q[f_j](z_j+\rho_j\zeta)-\psi^d(z_j+\rho_j\zeta)}{\psi^d(z_j+\rho_j\zeta)}\longrightarrow a_1(z_0)M_1[G](\zeta)-1 \quad \text{as} \quad j\longrightarrow\infty.$$

$_n$由于 $\sum a_q(z_j+\rho_j\zeta)M_q[f_j](z_j+\rho_j\zeta)\neq 0$，因此我们可以说$_{q=1}$

$$\sum_{q=1}^{n} a_q(z_j+\rho_j\zeta)M_q[f_j](z_j+\rho_j\zeta)-\psi^d(z_j+\rho_j\zeta)\quad\text{and}\quad\psi(z_j+\rho_j\zeta)$$

没有公共零点。接下来，使用引理 2.3 后半部分的相同论证，我们可以导出矛盾。

情形 II： 假设 $\frac{z_j}{\rho_j}\longrightarrow\alpha$ 是有限的，如同 $j\longrightarrow\infty$。

Then

$$\frac{g_j(\rho_j\zeta)}{\rho_j^{\frac{w-d}{d}}}=\frac{g_j(z_j+\rho_j(\zeta-\frac{z_j}{\rho_j}))}{\rho_j^{\frac{w-d}{d}}}=G_j(\zeta-\frac{z_j}{\rho_j})\longrightarrow G(\zeta-\alpha)=G_1(\zeta)\quad(\text{say}).$$

显然，$G_1(\zeta)\neq 0$，且 $\zeta=0$ 是 G_1 的一个阶至少为 l 的极点。现在，考虑

$$H_j(\zeta)=\frac{f_j(\rho_j\zeta)}{\rho_j^{\frac{w-d}{d}+l}}.\tag{3.10}$$

So,

$$H_j(\zeta)=\left(\frac{\psi(\rho_j\zeta)}{\rho_j^l}\right)\left(\frac{f_j(\rho_j\zeta)}{\rho_j^{\frac{w-d}{d}}\psi(\rho_j\zeta)}\right)=\left(\frac{\psi(\rho_j\zeta)}{\rho_j^l}\right)\left(\frac{g_j(\rho_j\zeta)}{\rho_j^{\frac{w-d}{d}}}\right).\tag{3.11}$$

显然，$\frac{\psi_{(\rho_j\zeta)}}{\rho_j^l}=\zeta^l\varphi(\rho_j\zeta)\longrightarrow\zeta^l$，当 $j\longrightarrow\infty$ 时。因此

$$H_j(\zeta)\longrightarrow\zeta^l G(\zeta-\alpha)=\zeta^l G_1(\zeta)\quad(\text{as}\quad j\longrightarrow\infty),$$

在 $\mathbb{C}$ 的紧子集上一致成立。由于 G_1 在 $\zeta=0$ 处有一个阶至少为 l 的极点，因此我们有$H(0)\neq 0\implies H(\zeta)\neq 0$。现在，由 (3.10) 得

$$H_j^{(i)}(\zeta)=\frac{f_j^{(i)}(\rho_j\zeta)}{\rho_j^{\frac{w-d}{d}+l-i}}\longrightarrow H^{(i)}(\zeta)\quad(\text{as}\quad j\longrightarrow\infty)$$

在 $\mathbb{C}\backslash\{\text{all the poles of } G_1(\zeta)\}$ 的紧子集上球面一致。因此，在 $\mathbb{C}$ 中不含 $G(\zeta)$ 极点的每个紧子集上，我们有

$$\rho_j^{w-d}M_q[H_j](\zeta)=\rho_j^{w_q-d}\frac{M_q[f_j](\rho_j\zeta)}{\rho_j^{ld}}$$

并且当 $q=1$ 时，则 $w_1=w$。因此

$$\frac{M_1[f_j](\rho_j\zeta)}{\rho_j^{ld}}\longrightarrow M_1[H](\zeta)\quad(\text{as}\quad j\longrightarrow\infty)$$

在 $\mathbb{C}\backslash$ {的一个紧子集上球面一致地，其中不含 $G_1(\zeta)$的所有极点，并且

$$\rho_j^{w-w_q}M_q[H_j](\zeta)=\frac{M_q[f_j](\rho_j\zeta)}{\rho_j^{ld}}\longrightarrow 0\quad\text{as}\quad j\longrightarrow\infty.$$

因此，对于 $\mathbb{C}$中的每一个不含 $G(\zeta)$极点的紧子集，我们有

$$\frac{\sum_{q=1}^{n} a_q(\rho_j\zeta)M_q[f_j](\rho_j\zeta)}{\rho_j^{ld}} \longrightarrow a_1(z_0)M_1[H](\zeta) \quad (\text{as} \quad j \longrightarrow \infty) \tag{3.12}$$

and

$$\frac{\sum_{q=1}^{n} a_q(\rho_j\zeta)M_q[f_j](\rho_j\zeta) - \psi^d(\rho_j\zeta)}{\rho_j^{ld}} \longrightarrow a_1(z_0)M_1[H](\zeta) - \zeta^{ld} \quad (\text{as} \quad j \longrightarrow \infty) \tag{3.13}$$

在 $\mathbb{C}$ 上局部一致。根据该定理的假设以及 (3.13)，胡尔维茨定理表明， $a_1(z_0)M_1[H](\zeta) - \zeta^{ld}$ 的所有零点的重数至少为 $\begin{matrix} w+1 \\ w-1 \end{matrix}$。

类似地，由 (3.11) 可知，要么 $a_1(z_0)M_1[H](\zeta) \neq 0$，要么 $a_1(z_0)M_1[H](\zeta) \equiv 0$。

若 $M_1[H](\zeta) \equiv 0$，则 $a_1(z_0)M_1[H](\zeta) - \zeta^{ld} = -\zeta^{ld}$ 仅有一个重数为 ld 的零点。现设 $w = 2$。根据该定理的假设，我们有 $ld \leq 2$。因此，函数$a_1(z_0)M_1[H](\zeta) - \zeta^{ld}$ 仅有一个重数为 ≤ 2 的零点，这与该函数的所有零点都具有重数 $\begin{matrix} w+1 \\ w-1 \end{matrix} = 3$ 这一事实相矛盾。

若 $w \geq 3$，则 $ld = 1$。于是，经过类似的论证，我们可以得到矛盾，因为$\begin{matrix} w+1 \\ w-1 \end{matrix} > 1$。因此，$\overline{M_1[H]}(\zeta) \neq 0$。

假设 $M_1[H](\zeta)$ 是有理函数。注意到， $M_1[H](\zeta) \neq 0$ ，并由引理 2.3 可知，$a_1(z_0)M_1[H](\zeta) - \zeta^{ld}$ 至少有一个单零点，这导致矛盾，因为 $a_1(z_0)M_1[H](\zeta) - \zeta^{ld}$ 的所有零点的重数都至少为 $\begin{matrix} w+1 \\ w-1 \end{matrix}$。因此， $M_1[H](\zeta)$ 是超越函数。

因此，由奈望林纳第一、第二基本定理，我们有

$$T\left(r, a_1(z_0)M_1[H] - \zeta^{ld}\right) = T\left(r, M_1[H]\right) + S(r, M_1[H])$$

$$\begin{aligned} \& \quad T\left(r, M_1[H]\right) \leq & \overline{N}\left(r, \frac{1}{M_1[H]}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{a_1(z_0)M_1[H] - \zeta^{ld}}\right) + \overline{N}\left(r, M_1[H]\right) \\ & + S(r, M_1[H]). \end{aligned} \tag{3.14}$$

由于 $\overline{N}(r, \ M_1[H]) \leq \frac{1}{w} N(r, \ M_1[H])$，因此由 (3.14) 可得

$$\begin{aligned} T(r, M_1[H]) \leq & \frac{1}{w}N(r, M_1[H]) + \frac{w-1}{w+1}N\left(r, \frac{1}{a_1(z_0)M_1[H] - \zeta^{ld}}\right) + S(r, M_1[H]) \\ \leq & \frac{1}{w}N(r, M_1[H]) + \frac{w-1}{w+1}N(r, M_1[H]) + S(r, M_1[H]) \\ \leq & \frac{w^2+1}{w^2+w}N(r, M_1[H]) + S(r, M_1[H]) \\ \leq & \frac{w^2+1}{w^2+w}T(r, M_1[H]) + S(r, M_1[H]). \end{aligned}$$

由于 $\frac{w^2+1}{w^2+w}<1$，那么 $T(r,\ M_1[H]) = S(r,\ M_1[H])$，这就导致矛盾。因此，$\mathcal{G}$ 在 Δ 中是正规的。

还需证明函数族 $\mathcal{F}$ 在 $z=0$ 处正规。由于 $\mathcal{G}$ 在 Δ 中正规，它关于球面距离等度连续。此外，由于对每个 $g\in\mathcal{G}$，都有 $g(0)=\infty$，因此存在 $\delta>0$，使得对每个 $g\in\mathcal{G}$ 和每个 $z\in\Delta_\delta=\{z$，都有 $|g(z)|>1:|z|<\delta\}$。

反设函数族 $\mathcal{F}$ 在 $z=0$处不正规。现在，考虑函数族

$$\mathcal{F}_1=\left\{\frac{1}{f}:f\in\mathcal{F}\right\}.$$

那么，显然 $\mathcal{F}_1$ 在 $\Delta'=\{z:\ 0<|z|<1\}$ 中正规，但在 $z=0$ 处不正规。因此存在一个序列 $\left\{\frac{1}{f_j}\right\}\subset\mathcal{F}_1$，它在 Δ' 中局部一致收敛，但在 Δ 中不收敛。

由于 $f_j\neq 0$ 属于 Δ，每个 $\frac{1}{f_j}$ 在 Δ上都是全纯的。根据最大模原理，我们有$\frac{1}{f_j}\to\infty$ 属于 Δ'，这意味着$f_j\to 0$ 在 Δ'上局部一致收敛；$\{g_j\}\subset\mathcal{G}$也如此，其中 $g_j=\frac{f_j}{\varphi}$。然而，这与对每个$z\in\Delta_\delta$都有 $|g_j(z)|\geq 1$ 这一事实矛盾。

定理 1.1 的证明至此完成。 □

参考文献

[1] Chen, H. 和 Gu, Y. 对 Marty 判据的改进及其应用。中国科学：数学 *A* 辑，6（1993），674–681。[2] Chen, H. H. 和 Hua, X. H. 正规性判别准则与奇异方向。载于《复分析会议论文集（天津，*1992*）》，会议论文讲义分析系列，*I*，国际出版社，马萨诸塞州剑桥（1994），第34–40页。[3] Fang, M. 亚纯函数族的正规性判据。数学学报 *37*（1994），86–90。[4] Fang, M. 和 Chang, J. 正规族与多值。数学档案 *88*，6（2007），560–568。[5] Gu, Y. 亚纯函数族的正规判据。中国科学 *1*（1979），267–274。[6] Hayman, W. K. 亚纯函数，第78卷。牛津克拉伦登出版社，1964。[7] Huaihui, C. 整函数及其导数的吉田函数与皮卡值。澳大利亚数学会通报 *54*，3（1996），373–381。[8] Pang, X. 和 Zalcman, L. 正规族与共享值。伦敦数学会通报 *32*，3（2000），325–331。[9] Schiff, J. L. 正规族。Springer Science & Business Media，1993。[10] Schwick, W. 例外函数与正规性。伦敦数学会通报 *29*，4（1997），425–432。[11] Xia, J. 和 Xu, Y. 具有多值的亚纯函数正规族。数学分析与应用杂志 *354*，1（2009），387–393。[12] Yang, L. 亚纯函数的正规族与不动点。印第安纳大学数学杂志 *35*，1（1986），179–191。[13] Yang, L. 值分布理论。施普林格出版社与科学出版社，柏林，1993。[14] Yuefei, W. 和 Mingliang, F. 具有多重零点的亚纯函数的皮卡值与正规族。数学学报 *14*，1（1998），17–26。[15] Zalcman, L. 复函数论中的启发式原理。美国数学月刊 *82*，8，1975，813–817。[16] Zalcman, L. 正规族：新视角。美国数学会通报 *35*，3（1998），215–230。

维斯瓦-巴拉蒂大学数学系，桑蒂尼克坦，印度西孟加拉邦 731235。电子邮件地址：
mkuntal1994@gmail.com

数学系，维斯瓦-巴拉蒂大学，桑蒂尼克坦，西孟加拉邦，印度 731235。电子邮箱地址：
palbipul86@gmail.com, bipul.pal@visva-bharati.ac.in