arXiv:2603.12295v1 [math.NT] 11 Mar 2026

有限矩阵群与代数中的幂映射周期点

SAIKAT PANJA

摘要。考虑素数 L 的幂映射 x ↦ x^L，其中 L ≠ 2 满足 L|q − 1，q 是某个素数的幂。我们确定该映射在 M$_n$(q) 上的周期点，其中 M$_n$(q) 是定义在 q 阶有限域上的 n ×n 矩阵代数；我们也确定其在群 GL$_n$(q) = M$_n$(q)$^\times$ 上的周期点。我们计算极限 lim$_{q\to\infty}$ v$_L$(q−1)=c | Per(x ^{L} $_\ell$ | ,M (q)) M (q)，并由此得到 lim$_{q\to\infty}$ v$_L$(q−1)=c |Per(x ^{L} $_\ell$ | ,GL (q)) GL (q)，其中 v$_L$ 表示 L 进赋值。我们还计算了量 lim$_{q\to\infty}$ v$_L$(q−1)=c|Per(x ^{L} $_{2\ell}$ | ,Sp (q)) Sp (q) 和 lim$_{q\to\infty}$ v$_L$(q−1)=c|Per(x ^{L} $_\ell$ | ,U (q)) U (q)；结果表明这两个极限值相同。在所有情形中，正则半单元在确定极限值方面都发挥着作用。

1. 引言

1.1. 动力系统。 离散动力系统是一个二元组（S，f），其中 S 是一个集合，f 是一个自映射。对于正整数 $n \geq 1$，记号如下：

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ times}}.$$

若存在$n > 1$ 使得$f^n(\alpha) = \alpha$，则称点 $\alpha \in S$ 为周期点。该系统（S，f）的所有周期点的集合记为 Per(f，S)。若将S视为有限域 $\mathbb{F}_q$，且f为某个$L \geq 2$ 对应的多项式t^L 或切比雪夫多项式，则该系统的算术动力学研究见 [13]。从算术和图论的角度研究这些问题的工作见 [26] 。文献 [12]考察了形如$z^2 + c$ 的多项式的周期点比例。本文将有限域替换为有限 $\mathbb{F}_q$-代数或群。我们研究这一问题的动机来自群上的词映射和代数上的多项式映射这一领域。

1.2. 群上的词映射与代数上的多项式映射。 给定元组（w_1,w2，.....，w_r），其中各元为自由群 $\mathbf{F}_r$ 中的群词，以及群 G，通过对赋值可得到一个由词映射元组构成的离散动力系统

$$(w_1, w_2, \ldots, w_r) : G^r \longrightarrow G^r, \overline{g} = (g_1, \ldots, g_r) \mapsto (w_1(\overline{g}), \ldots, w_r(\overline{g})).$$

日期：2026年3月16日。2020 数学主题分类20G40, 20P05, 16R10, 16S50, 11T06, 37P25, 37P05, 37P35。关键词和短语动力系统、周期点、幂映射、矩阵代数、一般线性群、辛群、酉群。Panja 获得国家基础数学研究委员会博士后奖学金资助，档案编号以 R&D-II/6746 结尾。

通过将自由群替换为自由 R-代数（关于 r 个未定元），并将 G 替换为一个 R-代数 A，即可得到一个由多项式映射元组构成的动力系统。

词映射的研究可追溯到1951年，当时 Øystein Ore 证明，交错群 A_n 中的每个元素都是一个换位子，并猜想所有有限非阿贝尔单群也都如此 [15]。经过许多数学家的努力，这一猜想最终得以证明；参见 [10] 及其中的参考文献。一项相关结果表明，对于阶足够大的每个有限非阿贝尔单群G 以及每个非平凡群词w，都有$w(G)^2 = G$ [9]。指数 2 已是最佳结果；例如，A_5 上的平方映射并非满射。

多项式映射也得到了广泛研究。Shoda 于 1937年证明，在特征为零的域上，每个迹为零矩阵都是一个换位子 [27]。Kaplansky 和 L'vov 猜想，无限域k 上多线性多项式在 $\mathrm{M}_n(k)$ 上的像总是一个向量空间；尽管已有部分进展 [7, 6], ，该猜想对$n \geq 4$仍未解决。Brˇesar 证明，若C 是特征为 0 的域 $\mathbb{F}$ 上的交换含幺代数，$A = \mathrm{M}_n(C)$，且f既不是A的恒等多项式，也不是中心多项式，那么A 中的每个换位子都可以表示为两个来自$f(A)$ [1] 的和的差，每个和均含有 7788 个元素；另见 [2]。上三角矩阵代数 [5, 20]和八元数代数 [23]上的多项式映射也得到了研究；另见 [22]。

1.3. **幂映射**。 本文研究有限矩阵代数 $\mathrm{M}_n(q)$ 上的幂映射，其中包含$n \times n$ 矩阵，以及有限一般线性群、辛群和酉群。我们考虑幂映射，即映射 $x \mapsto x^L$，其中 $L \geq 2$ 为正整数。Chatterjee 和 Steinberg 早先独立地在代数群的背景下研究了这些映射 [3, 28]；文献 [8, 24, 25]，研究了某些有限李型群中的情形，文献 [21] 研究了有限主理想局部环上长度二的一般线性群中的情形；另见 [19] 及其中的参考文献。幂映射具有若干显著特征（见 [16]），并且是研究实共轭类数量的有用工具 [18]。文献 [17] 对 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 和 $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 上的幂映射进行了复动力系统研究。

研究动力系统 $(\mathrm{M}_n(q), f)$ 时，显然，形如 $\mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 的矩阵，其中所有 α_is 都是映射 f的周期为 ℓ 的周期点，属于 $\mathrm{Per}(\mathrm{M}_n(q), f)$。然而，这些并非 $\mathrm{Per}(\mathrm{M}_n(q), f)$ 中的全部点；如下例所示。

例1.1. 考虑代数 $\mathrm{M}_2(59)$ 上的幂映射 $x \mapsto x^2$, 以及元素 $A = \begin{pmatrix} 0 & 42 \\ 1 & 31 \end{pmatrix}$。那么，$A$ 有一个不可约多项式，并且它属于平方映射的一个28-周期。因此，存在一些非对角矩阵（或非对角矩阵的共轭），它们是周期的。

基于此，我们考察动力系统 $(G_n(q), x^L)$ 的周期点，其中L 是素数，$\gcd(L, q) = 1$, 而 $G_n(q)$ 是有限矩阵代数或矩阵群；更确切地说，是有限一般线性群、辛群或酉群之一。我们考察其极限值

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{|\mathrm{Per}(G_n(q), x^L)|}{|G_n(q)|},$$

但一般而言，此极限并不存在；例如，若x^L （即L，$\mathrm{M}_n(q) = 1$）是 $\mathrm{M}_n(q)$ 的置换多项式，则该比值为 1；若它不是置换多项式，其值则未必为 1。因此，需要对L-进求值$q - 1$施加一个额外条件。对于

例如，我们在定理 1 中证明，若L 是一个正整数，则在适当条件下可得

$$\lim_{\substack{q\longrightarrow\infty \\ v_L(q-1)=c}} \frac{\left|\mathrm{Per}(x^L,\mathrm{M}_\ell(q))\right|}{|\mathrm{M}_\ell(q)|} = \lim_{\substack{q\longrightarrow\infty \\ v_L(q-1)=c}} \frac{\left|\mathrm{Per}(x^L,\mathrm{GL}_\ell(q))\right|}{|\mathrm{GL}_\ell(q)|}$$
$$= \sum_{\lambda\vdash\ell}\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{(\lambda_i)^{m_i}m_i!}\frac{1}{L^{m_i v_L(q^{\lambda_i}-1)}},$$

其中求和遍及 $\lambda=(\lambda_{m_1}1,\lambda_{m_2}2,\ldots,\lambda_{m^r}r)$ 的所有分拆，其中 ℓ。

我们在第 2 节证明一些基本结果。我们在第 3 节证明关于 $\mathrm{M}_n(q)$ 和 $\mathrm{GL}_n(q)$ 的极限值的结果。关于 $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$ 和 $\mathrm{U}_n(q)$ 的结果在第 4 节证明。全文中， $\delta_L(p)$ 表示p 模L的乘法阶，而$v_L(c)$ 表示c的L进赋值。

2. 预备材料

由于 $\mathrm{M}_n(q)$（以及 $\mathrm{GL}_n(q)$）的共轭类由不可约多项式和分拆参数化，参见例如 [11], ，因此需要统计根满足给定幂条件的不可约多项式。下面的结果给出了这一数量。

引理 2.1. 设 L 是一个与有限域 $\mathbb{F}_q$ 的特征 p 互素的素数。设$\mathfrak{d}_n$ 表示域 $\mathbb{F}_q$ 上次数为 n 的首一不可约多项式f的数量，且f的每个根 α 都满足$\alpha^{e_n}=1$，其中 $e_\ell:=q^\ell-1\,L^{v_L(q^\ell-1)}$ ，其中 $\ell\geq 1$ 为整数。则

$$\mathfrak{d}_n=\frac{1}{n}\left(\sum_{i|n}\mu\left(\frac{n}{i}\right)\frac{q^i-1}{L^{v_p(q^i-1)}}\right),$$

其中 μ 是默比乌斯函数。

证明。 注意 $\mathfrak{d}_n$ 是下列集合中元素的数量

$$D_n=\left\{\alpha\in\mathbb{F}_{q^n}\,|\,\alpha^{e_n}=1,\alpha\notin\mathbb{F}_{q^i}\text{ for all }i\mid n\right\}.$$

对于给定的$i\mid n$，元素 $\alpha\in\mathbb{F}_{q^i}$ 与$\alpha^{e_n}=1$ 蕴含 $\alpha^{\gcd(q^i-1,e_n)=1}$。注意$i\mid n$，因此$n=i\cdot n'$，从而

$$v_L(q^n-1)=v_L(q^{in'}-1)=v_L(q^i-1)+v_L(n'),$$
从而最大公约数(q^i-1,e_n) $=$最大公约数 $\left(\begin{array}{c} q^i-1,(q^i-1)(\sum^{n/i-1}_{j=0}q^{ij})\\ \hline \end{array}\right.$ $\left.\begin{array}{c} L^{v_L(q^i-1)}\cdot L^{v_L(n/i)}\\ \hline \end{array}\right)=$

$q^i-1\,L^{v_L(q^i-1)}$。于是该结果由容斥原理得出。 □

为了对有限辛群的共轭类进行分类，需要自~互反的首一多项式，即首一多项式$f(t)$，使得$f(0)\neq 0$且$f(t):=f(0)^{-1}t^{\deg f}f(1/t)=f(t)$；参见 [29]。

引理 2.2. 设 L 是一个与有限域 $\mathbb{F}_q$ $with\tilde{}L|q-1$ 的特征 p 互素的素数。假设 $\mathfrak{d}_{2n}$ 表示满足以下条件的自反不可约首一多项式 f 的数量：

该多项式在域 $\mathbb{F}_q$ 上的次数为 $2n$，且 f 的每个根 α 都满足 $\alpha^{e_{2n}}=1$。那么

$$\widetilde{\mathfrak{d}}_{2n}=\frac{1}{2n}\left(\sum_{\substack{i|n\\ i\ odd}}\mu(i)\frac{q^{n/i}+1}{L^{v_L(q^{n/i}+1)}}\right).$$

证明。 利用 [14, 定理 1], 可知，这样的根 α os f 必须满足 $\alpha^{q^n+1}=1$。因此可得 $\alpha^{\gcd(e_{2n},}$ $^{q^n+1)}=1$。于是，根据容斥原理

$$\widetilde{\mathfrak{d}}_{2n}=\frac{1}{2n}\left(\sum_{\substack{i|n\\ i\ \text{odd}}}\mu(i)\gcd\left(\frac{q^{2n/i}-1}{L^{v_L(q^{2n/i}-1)}},q^{n/i}+1\right)\right).$$

注意，这里我们对满足i为奇数且$i|n$的指标求和。这是因为$t^{q^n}+1$ 的每个不可约因子（次数为 ≥ 2）都是次数为 $2d$的自反不可约首一多项式，其中d 整除n ，且n/d 为奇数；参见 [14, 定理 1]。

接下来，有最大公约数 $\left((q^{n/i}+1)(q^{n/i}-1)\ L^{v_L(q^{2n/i}-1)},q^{n/i}+1\right)=q^{n/i}+1\,L^{v_L(q^{n/i}+1)}$，由此即可得到结论。

□

自共轭首一多项式是满足$f(t)\in\mathbb{F}_{q^2}[t]$ 的多项式，其中$f(0)\neq 0$ 且$f(t):=(f(0)^q)^{-1}t$ $^{\deg f}\sum a^q{}_i t^{-i}=f(t)$，其中$f(t)=\sum a_i t^i$。在$i$ i对酉群的共轭类进行分类时，我们需要这些多项式；参见 [29]。

引理 2.3. 设 L 是一个与有限域 $\mathbb{F}_{q^2}$ 的特征 p 互素的素数，且 $L|q-1$。假设 $\mathfrak{d}_n$ 表示有限域 $\mathbb{F}_{q^2}$ 上次数为 n的自共轭不可约首一多项式 f 的数量，且 f 的每个根 α 都满足 $\alpha^{e_n}=1$。那么

$$\overline{\mathfrak{d}}_n=\frac{1}{n}\left(\sum_{i|n}\mu(i)\frac{q^{n/i}+1}{L^{v_L(q^{n/i}+1)}}\right).$$

证明。 由于f的一个根 α 也满足 $\alpha^{q^n+1}=1$，结论可由类似于引理 2.2 证明中的方法得到。□

最后，我们以如下一个易于证明的引理结束本节。

引理 2.4. 设 $f\in\mathbb{F}_q[t]$ 是一个多项式，$A\in \mathrm{M}_n(q)$ 是一个矩阵。那么，$f^m(A)=A$，当且仅当对于 A 的任意共轭矩阵 B，都有 $f^m(B)=B$。

3. 全矩阵代数中周期点的比例与属 L

LINEAR GROUP

根据引理 2.4，若要判断元素 A 是否满足$f^m(A)=A$，显然只需考虑其在代数闭包$\mathbb{F}_q$ 上的共轭类的一个代表元。

下面给出一个结果，描述矩阵何时是周期的

命题 3.1. 设 L 是一个与有限域 $\mathbb{F}_q$ 的特征 p 互素的素数，并令 f 表示映射 $x\mapsto x^L$。假设 $\delta_L(p)\,|d$，其中 $q=p^d$，对某个 $d\geq 1$ 成立。矩阵 $A\in\mathrm{M}_n(q)$ 是周期的，当且仅当 A 的所有特征值都是周期的，且其约当标准形中不存在幂零元

块（在 $\mathbb{F}_q$ 的代数闭包上）。特别地，矩阵 $A \in \mathrm{GL}_n(q)$ 是周期的，当且仅当其所有特征值都是周期的。

证明。我们在域 $\mathbb{F}_q$ 中进行讨论，并援引引理 2.4。因此，矩阵 A 可化为它的约当标准形 $\mathrm{diag}(J_{\lambda_q,m_1}, J_{\lambda_2,m2}, \cdots, J_{\lambda_u,m_u})$，其中 m_i 为正整数，且

$$J_{\lambda,m} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}_{m\times m} \in \mathrm{M}_m(\overline{\mathbb{F}_q}).$$

由于 $\mathrm{fm}(\mathrm{diag}(\mathrm{J}_{\lambda_q,\mathrm{m}_1}, \mathrm{J}_{\lambda_2,\mathrm{m}2}, \cdots, \mathrm{J}_{\lambda_u,\mathrm{m}_u})) = \mathrm{diag}(\mathrm{J}_{\lambda_q,\mathrm{m}_1}, \mathrm{J}_{\lambda_2,\mathrm{m}2}, \cdots, \mathrm{J}_{\lambda_u,\mathrm{m}_u})$ 当且仅当对所有 i 有 $\mathrm{fm}(\mathrm{J}_{\lambda_i,\mathrm{m}_i}) = \mathrm{J}_{\lambda_i,\mathrm{m}_i}$，我们完全可以假定 A 在共轭意义下只有一个若尔当块。当 $\lambda = 0$ 时，无需证明，因为对某个 $\mathrm{r} > 0$ 有 $\mathrm{f}^r(\mathrm{J}0,n) = 0$；因此，这样的矩阵永远不能进入一个循环。于是我们假定 $\lambda \neq 0$，从而 $\mathrm{J}_{\lambda,n} \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{q})$。现在，注意到对任意 $\mathrm{r} > 0$

$$J^r_{\lambda,n} = \begin{pmatrix} \lambda^r & \binom{r}{1}\lambda^{r-1} & \binom{r}{2}\lambda^{r-2} & \cdots & \binom{r}{n-1}\lambda^{r-(n-1)} \\ 0 & \lambda^r & \binom{r}{1}\lambda^{r-1} & \cdots & \binom{r}{n-2}\lambda^{r-(n-2)} \\ 0 & 0 & \lambda^r & \cdots & \binom{r}{n-3}\lambda^{r-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^r \end{pmatrix},$$

这意味着，为了满足 $J^r_{\lambda,\ n} = J_{\lambda,\ n}$

$$\binom{r}{i}\lambda^{r-i} \equiv \begin{cases} \lambda & \text{when } i = 0 \\ 1 & \text{when } i = 1 \\ 0 & \text{when } n-1 \geq i \geq 2 \end{cases}.$$

因此，我们得到 $p \mid \binom{r}{i}$ 对所有 $i \geq 2$ 都成立，且 $r \equiv 1$（模 p）。如果 $r = L^{r'}$，则有 $\delta_p(L) | r'$。

考虑以 p 为底的展开式，$r = 1 + \sum_{i=1}^{u} r_i p^i$ 以及 $s = \sum_{i=0}^{u} s_i p^i$。回顾卢卡斯定理，有一个满足

$$\binom{r}{s} \equiv \prod_{i=1}^{u} \binom{r_i}{s_i} \pmod{p}.$$

首先我们得到 $r \geq n$；否则 $\binom{rn}{-t}$ 对于某个 $t \geq 1$ 成立。令 $r = p^{v_p(r-1)}a$，其中 $a \neq 0$（模 p）。令 $a = \sum_{i=0}^{\ell} a_i p^i$。因此我们有

$$r = 1 + a_1 p^{v_p(r-1)+1} + a_2 p^{v_p(r-1)+2} + \ldots = 1 + \sum_{i=0}^{\ell} a_i p^{v_p(r-1)+i};$$

其中 $v_p(r-1) \geq 1$ 满足 $p|r-1$，且 $a_1 \neq 0$。现在，如果可能，令 $n > p^{v_p(r-1)}$。固定 $i_0 = 1 + p^{v_p(r-1)}$，由卢卡斯定理可知

$$\binom{r}{i_0} \equiv \binom{1}{1} \cdot \binom{a_1}{1} \neq 0 \pmod{p};$$

也有 $2 < i_0 \leq n-1$。我们得出，$n \leq p^{v_p(r-1)}$。再次应用卢卡斯定理，当$n \leq p^{v_p(r-1)}$时，对所有 $2 \leq i \leq n-1$，都有 $\binom{r}{i} \equiv 0 \pmod{p}$）。

现在，我们聚焦于幂映射 $x \mapsto x^L$，并在底域的代数闭包上进行讨论。矩阵 $A = \bigoplus_{i=1}^{\ell} J_{\lambda_i, m_i}$ 是周期的——也就是说，当且仅当 $\lambda_j^{L^r} = \lambda_j$ 对所有 $1 \leq j \leq \ell$ 且 $m_i \leq p^{v_p(L^r-1)}$ 时，$A^{L^r} = A$。还可以得到，若 $\mu^{L^r} = \mu$ 对某个 $\mu \in \mathbb{F}_q$ 成立，则对任意 $b \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，$\mu^{L^{br}} = \mu$ 也成立。根据指数提升引理，有 $v_p(L^{br}-1) = v_p(L^r-1) + v_p(b)$。给定 n，可以选取 b，使得 $n < v_p(L^{br}-1)$，其中 $\lambda^{L^r} = 1$，且 $\lambda \in \sigma(A)$。结论得证。□

因此，我们首先需要找出给定有限域上幂映射迭代下的不动点。这个数量在 [26, 定理 1]中有更一般的表述和证明。不过，为完整起见，我们给出一个证明；另请参见 [13, 引理 4.2]，其中给出了以下结果的另一种证明。

引理 3.2。设 L 是一个与有限域 $\mathbb{F}_q$ 的特征 p 互素的素数，并令 f 表示映射 $x \mapsto x^L$。元素 $\alpha \in \mathbb{F}_q$ 是周期的，当且仅当 $\alpha = 0$ 或 $\alpha^d = 1$，其中 $q - 1 = L^{v_L(q-1)} d$。

证明。设 α 是周期的。若 $\alpha = 0$，则结论得证。否则令 $\alpha^{L^r} = \alpha$，这意味着 $\alpha^{L^r-1} = 1$，从而 $(\mathrm{ord}(\alpha), L) = 1$。由于 α 是循环群 $\mathbb{F}_q^\times$ 的一个元素，因此有 $\alpha^{q-1} = 1$，这就证明了正向部分。

对于逆命题，若 $\alpha = 0$，则无需证明。因此，设 $\alpha^d = 1$ 其中 $q - 1 = L^{v_L(q-1)} d$。由于 $(L, d) = 1$，L 在群 $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}^\times$ 中可逆，因此存在一个正整数 m，使得 $L^n = 1 + md$。于是 $\alpha^{L^n} = \alpha$；即 α是周期的。□

现在我们讨论两个例子；

例 3.3. 考虑代数 $M_2(q)$ 以及幂映射 $x \mapsto x^L$，其中 $\delta_L(p)|d$，且 $q = p^d$。我们有 $\vartheta_1 = q - 1$ $L^{v_L(q-1)}$ 和 $\vartheta_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(q^2 - 1\, L^{v_L(q^2-1)} - q - 1\, L^{v_L(q-1)} \right)$。$M_2(q)$ 的共轭类（在 $GL_2(q)$ 的作用下）及其大小如下：

代表元	条件	数量	Size
$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$	$\lambda \in \mathbb{F}_q$	q	1
$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$	$\lambda, \mu \in \mathbb{F}_q,\ \lambda \neq \mu$	$\frac{q(q-1)}{2}$	$q(q+1)$

代表元	条件	数量	Size
$\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$	$\lambda \in \mathbb{F}_q$	q	q^2-1
$\begin{pmatrix}0 & -b\\ 1 & a\end{pmatrix}$	$x^2-ax+b \in \mathbb{F}_q[x]$ 不可约	$\frac{q^2-q}{2}$	$q(q-1)$

表 1. $\mathrm{M}_2(q)$ 中的共轭类

元素 $\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \lambda\end{pmatrix}$ 是周期的，当且仅当 $\lambda^{e_1}=1$，因此共有 $\mathfrak{d}_1+1$ 个这样的周期共轭类；它们总计贡献 $\mathfrak{d}_1+1$ 个周期元素。类似地，与 $\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \mu\end{pmatrix}$- 共轭的矩阵（其中 $\lambda\neq\mu$-）贡献 $q(q+1)\,\mathfrak{d}_1(\mathfrak{d}_1+1)$ 2 个元素。若 $\lambda=0$，则与 $\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ & \lambda\end{pmatrix}$ 共轭的矩阵不是周期的；若 $\lambda\neq 0$，它们总计贡献 $(\mathfrak{d}_1+1)(q^2-1)$ 个元素。最后一类矩阵将贡献 $q(q-1)\mathfrak{d}_2$ 个元素。因此，在映射 $x\mapsto x^L$ 下，$\mathrm{M}_2(q)$ 中周期矩阵的总数为

$$\begin{aligned}&\frac{q-1}{L^{v_L(q-1)}}+1+\frac{1}{2}\left(\frac{q-1}{L^{v_L(q-1)}}\right)\left(\frac{q-1}{L^{v_L(q-1)}}+1\right)(q^2+q)+\left(\frac{q-1}{L^{v_L(q-1)}}\right)(q^2-1)\\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{q^2-1}{L^{v_L(q^2-1)}}-\frac{q-1}{L^{v_L(q-1)}}\right)(q^2-q)\\ =&\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{q^4}{L^{2v_L(q-1)}}+\frac{q^4}{L^{v_L(q^2-1)}}\right)+\Sigma_{<4}(q),\end{aligned}$$

其中 $\Sigma_{<4}$ 是一个次数严格小于 4 的有理数系数多项式。因此我们得到 t

$$\lim_{\substack{q\longrightarrow\infty\\ v_L(q-1)=c}}\frac{\left|\mathrm{Per}(x^L,\mathrm{M}_2(q))\right|}{|\mathrm{M}_2(q)|}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{L^{2v_L(q-1)}}+\frac{1}{L^{v_L(q^2-1)}}\right).$$

由于对次数为 4 的项有贡献的元素都是可逆的，我们最终得到 t

$$\lim_{\substack{q\longrightarrow\infty\\ v_L(q-1)=c}}\frac{\left|\mathrm{Per}(x^L,\mathrm{GL}_2(q))\right|}{|\mathrm{GL}_2(q)|}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{L^{2v_L(q-1)}}+\frac{1}{L^{v_L(q^2-1)}}\right).$$

例 3.4. 考虑代数 $\mathrm{M}_3(\mathrm{q})$ 和幂映射 $\mathrm{x}\mapsto \mathrm{x}^L$，其中 $\delta_L(\mathrm{p})|\mathrm{d}$，其中 $\mathrm{q}=\mathrm{p}^d$。我们有 $\mathfrak{d}_1=\mathrm{q}-1\,\mathrm{L}^{v_L}(\mathrm{q}-1)$，$\mathfrak{d}_2=\frac{1}{2}\cdot\left(\mathrm{q}^2-1\,\mathrm{L}^{v_L}(\mathrm{q}^2-1)-\mathrm{q}-1\,\mathrm{L}^{v_L}(\mathrm{q}-1)\right)$，以及 $\mathfrak{d}_3=\frac{1}{3}\cdot\left(\mathrm{q}^3-1\,\mathrm{L}^{v_L}(\mathrm{q}^3-1)-\mathrm{q}-1\,\mathrm{L}^{v_L}(\mathrm{q}-1)\right)$。以下是共轭类信息：

Type	代表元	条件	数量	Size
1	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$	$\alpha \in \mathbb{F}_q$	q	1
2	$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$	$\alpha \in \mathbb{F}_q$	q	$q(q^3-1)(q^2-1)$
3	$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$	$\alpha \in \mathbb{F}_q$	q	$(q^3-1)(q+1)$
4	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$	$\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{F}_q$两两不同	$\binom{q}{3}$	$q^3(q+1)(q^2+q+1)$
5	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$	$\alpha,\ \beta \in \mathbb{F}_q,\ \ \alpha \neq \beta$	$q(q-1)$	$q^2(q^2+q+1)$
6	$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$	$\alpha, \beta \in \mathbb{F}_q,\ \alpha \neq \beta$	$q(q-1)$	$q^2(q^3-1)(q+1)$
7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 \end{pmatrix}$	$g(t) = t^3+\alpha_2 t^2+\alpha_1 t+\alpha_0$, g 在 $\mathbb{F}_q$ 上不可约	$\frac{1}{3}(q^3-q)$	$q^3(q^2-1)(q-1)$
8	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 0 & 1 & -\alpha_1 \end{pmatrix}$	$f(t) = t^2+\alpha_1 t+\alpha_0$, f 在 $\mathbb{F}_q$ 上不可约	$\frac{1}{2}q(q^2-q)$	$q^3(q^3-1)$

表 2. $M_3(q)$ 中的共轭类

每种共轭类的贡献如下；

Type	贡献	Type	贡献
1	$\mathfrak{d}_1+1$	5	$\mathfrak{d}_1(\mathfrak{d}_1+1)\cdot q^2(q^3-1)(q+1)$
2	$\mathfrak{d}_1\cdot q(q^3-1)(q^2-1)$	6	$\mathfrak{d}_1^2\cdot q^2\ (q^3-1)\ q+1)$
3	$\mathfrak{d}_1\cdot(q^3-1)(q+1)$	7	$\mathfrak{d}_3\cdot q^3\ (q^2-1)\ q-1)$
4	$\binom{\mathfrak{d}_1+1}{3}\cdot q^3(q+1)(q^2+q+1)$	8	$(\mathfrak{d}_1+1)\mathfrak{d}_2\cdot q^3(q^3-1)$

因此，在幂映射下周期的矩阵总数为

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{q^9}{L^{3v_L(q-1)}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{q^9}{L^{v_L(q^3-1)}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{q^9}{L^{v_L(q-1)}L^{v_L(q^2-1)}}+\Sigma_{<9}(q),$$

其中$\Sigma_{<9}$是一个次数严格小于 9 的有理系数多项式。因此，通过与前一个例子类似的论证，我们得到：

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{q\longrightarrow\infty\\ v_L(q-1)=c}}\frac{\left|\mathrm{Per}(x^L,\mathrm{M}_3(q))\right|}{|\mathrm{M}_3(q)|}&=\lim_{\substack{q\longrightarrow\infty\\ v_L(q-1)=c}}\frac{\left|\mathrm{Per}(x^L,\mathrm{GL}_3(q))\right|}{|\mathrm{GL}_3(q)|}\\&=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{L^{3v_L(q-1)}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{L^{v_L(q^3-1)}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{L^{v_L(q-1)}L^{v_L(q^2-1)}}.\end{aligned}$$

根据命题 3.1，如果$A\in\mathrm{M}_n(q)$是周期的，那么对应于 0 的若尔当块是对角的。此外，例 3.3 和例 3.4 表明，对于正整数 $\ell\geq 2$，$\left|\mathrm{Per}(x^{L}_{\ell}{}^{n}\right|,\mathrm{M}(q))\ \mathrm{M}(q)$和$\left|\mathrm{Per}(x^{L}_{\ell}{}^{n}\right|,$ $\left|{}_{\ell}{}^{n}\right|$ $\left|{}_{\ell}{}^{n}\right|$ $\mathrm{GL}(q))\ \mathrm{GL}(q)$的（受限）极限值确实存在。事实的确如此，下面给出相应的结果。

命题 3.5. 对于正整数 $\ell\geq 2$，考虑代数$\mathrm{M}_\ell(q)$ 以及幂映射 $x\mapsto x^L$，其中 $\delta_L(p)|d$，$q=p^d$。那么

$$\lim_{\substack{q\longrightarrow\infty\\ v_L(q-1)=c}}\frac{\left|\mathrm{Per}(x^L,\mathrm{M}_\ell(q))\right|}{|\mathrm{M}_\ell(q)|}=\lim_{\substack{q\longrightarrow\infty\\ v_L(q-1)=c}}\frac{\left|\mathrm{Per}(x^L,\mathrm{GL}_\ell(q))\right|}{|\mathrm{GL}_\ell(q)|}.$$

*Furt*其中，极限值由正则半单可逆矩阵的共轭类贡献。 *s.*

证明。只需证明，特征值中含有 0 的元素数量所贡献的多项式次数严格小于 ℓ^2。只需针对一种特定类型的矩阵进行讨论。固定多重集 $\Lambda=\{(\mathrm{d}0,\lambda_0)、(\mathrm{d}1,\lambda_1)、(\mathrm{d}2,\lambda_2).....、(\mathrm{d}_\ell,\lambda_\ell)\}$，其中 $\mathrm{d}_0=1、\ \lambda_0=1^{m_0}、\mathrm{d}_i\geq 1$ 为正整数，且 λ_i 是 m_i 的一个分拆，对所有 $\ell\geq \mathrm{i}\geq 1$ 均成立；此外，$\sum \mathrm{d}_i\mathrm{m}_i=\mathrm{n}$。考虑集合 $(\mathrm{d}0,\lambda_i)\in\Lambda$

$$\mathscr{A}_\Lambda=\{A\in\mathrm{M}_n(q):\delta_A=1\},$$

其中 $\delta_A=1$ 当且仅当特征多项式具有如下形式：$t^{m_0}\prod f_i(t)^{m_i}$，且附属于$i$矩阵$A$ 的组合数据具有如下形式：$\{(f_i,\lambda_i):i\}$，并且 $\deg f_i=d_i$；注意，f_i 的选取取决于矩阵A，尽管次数序列保持不变。于是A 共轭

于如下对角分块矩阵： $\bigoplus J_i \oplus \mathbf{0}$，其中$_i$

$$J_i = \begin{pmatrix} C_{f_i} & \mathrm{I}_{d_i} & & \\ & C_{f_i} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{f_i} \end{pmatrix},$$

是一个m_i次$f_i \times m_i$次f_i矩阵，而$\mathbf{0}$是大小为$m_0 \times m_0$的零矩阵。设J： $= \bigoplus J_i$. 因此，$_i$可得，对于$A \in \mathscr{A}$

$$|X \in \mathrm{GL}_n(q) : AX = XA| = |\mathscr{Z}_{\mathrm{GL}}(J)| \cdot |\mathrm{GL}_{m_0}(q)|.$$

我们先讨论一般情形，随后很快将具体讨论J。考虑X $\in$GL$_s(q)$，使得X的最小多项式为 $_u$ $\prod_{i=1}{}_n \prod_{j=1}^{i} f_{ei,j\,i,j}$，其中 $\deg f_{i,j} = d_i$。设X的若尔当标准形为

$$\bigoplus_{i=1}^{u} \bigoplus_{j=1}^{n_i} \left(J_{\lambda_{i,j,1}}^{l_{i,j,1}} \oplus J_{\lambda_{i,j,2}}^{l_{i,j,2}} \oplus \ldots \oplus J_{\lambda_{i,j,k_{i,j}}}^{l_{i,j,k_{i,j}}} \right),$$

其中 J$_{\lambda_{i,j,k}}$ 是关于 f$_{i,j}$(t) 的维数为 $\lambda_{i,j,k}$ 的若尔当块；此外，附属于 X 的组合数据为 $\{($ f$_i$, j λf$_{i,j}$) $|$i, j$\}$，其中 λf$_{i,j} = \left(\lambda$l$_{i,j}$,1 i, j 1, λl$_{i,j}$,2 i, j 2 $\ldots$, λl$_{i,j,k_{i,j}}$, j $\right)$ i, j,k$_i$，且 λ_i, j $_1 < \lambda_i$, j $_2 < \ldots < \lambda_{i,j,k_{i,j}} =$ e$_{i,j}$。那么

$$|\mathscr{Z}_{\mathrm{GL}}(X)| = q^{\gamma} \left| \prod_{i=1}^{u} \prod_{j=1}^{n_i} \prod_{k=1}^{k_{i,j}} \left(\mathrm{GL}_{l_{i,j,k_{i,j}}}(q^{d_i}) \right) \right|$$

其中

$$\gamma = \sum_{i=1}^{u} d_i \left(\sum_{j=1}^{n_i} \left(2 \sum_{a<b} \lambda_{i,j,a} l_{i,j,a} l_{i,j,b} + \sum_{k=1}^{k_{i,j}} (\lambda_{i,j,k} - 1) l_{i,j,k}^2 \right) \right);$$

参见 [4, 定理 2.28]。

回到具体情形，我们得到 $\mathscr{A}$ 中元素的数量为

$$\binom{\mathfrak{d}_{d_1}}{n_1} \binom{\mathfrak{d}_{d_2}}{n_2} \cdots \binom{\mathfrak{d}_{d_u}}{n_u} \frac{|\mathrm{GL}_\ell(q)|}{|\mathrm{GL}_{m_0}(q)| \cdot |\mathscr{Z}_{\mathrm{GL}}(J)|},$$

其中 $J \in \mathrm{GL}_{\ell - m_0}(q)$。注意，对于所有满足 $A \in \mathscr{A}$ 的 A'，共轭类的大小均不变。因此，表达式 $|\mathscr{A}|$ 中出现的 q 的最高次幂至多为

$$\mathfrak{H}_q = \sum_{i=1}^{u} n_i d_i + \ell^2 - m_0^2 - \gamma - \sum_{i=1}^{u} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{k_{i,j}} d_i l_{i,j,k_{ij}}^2.$$

注意，

$$\begin{aligned}
&\gamma+\sum_{i=1}^{u}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{k_{i,j}} d_i l_{i,j,k_{ij}}^2 \\
&=\sum_{i=1}^{u} d_i\left(\sum_{j=1}^{n_i}\left(2\sum_{a<b}\lambda_{i,j,a}l_{i,j,a}l_{i,j,b}+\sum_{k=1}^{k_{i,j}}(\lambda_{i,j,k}-1)l_{i,j,k}^2\right)\right)-\sum_{i=1}^{u}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{k_{i,j}} d_i l_{i,j,k_{ij}}^2 \\
&=\sum_{i=1}^{u} d_i\left(\sum_{j=1}^{n_i}\left(2\sum_{a<b}\lambda_{i,j,a}l_{i,j,a}l_{i,j,b}+\sum_{k=1}^{k_{i,j}}\lambda_{i,j,k}l_{i,j,k}^2\right)\right) \\
&=\sum_{i=1}^{u} d_i\left(\sum_{j=1}^{n_i}\left(\sum_{a,b}\min\{\lambda_{i,j,a},\lambda_{i,j,b}\}l_{i,j,a}l_{i,j,b}\right)\right).
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
\mathfrak{H}_q-\ell^2 &= \sum_{i=1}^{u} n_i d_i - m_0^2 - \sum_{i=1}^{u} d_i\left(\sum_{j=1}^{n_i}\left(\sum_{a,b}\min\{\lambda_{i,j,a},\lambda_{i,j,b}\}l_{i,j,a}l_{i,j,b}\right)\right) \\
&\le \sum_{i=1}^{u} n_i d_i - m_0^2 - \sum_{i=1}^{u} d_i\left(\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{a}\lambda_{i,j,a}l_{i,j,a}^2\right) \qquad (\text{since } \lambda_{i,j,a}\ge 1) \\
&= -m_0^2 - \sum_{i=1}^{u} d_i\sum_{j=1}^{n_i}\left\{\left(\sum_{a}\lambda_{i,j,a}l_{i,j,a}^2\right)-1\right\},
\end{aligned}$$

这意味着 $\mathfrak{H}_q=\ell^2$ 当且仅当 $m_0=0$ 且 $\lambda_{i,\ j,\ 1}=l_{i,\ j,\ 1}=1$ 并且对所有 $a>1$，$l_{i,\ j,\ a}=0$ 均成立。因此，只有正则半单可逆元素对极限值有贡献。□

定理 1。对于正整数 $\ell\ge 2$，考虑代数 $\mathrm{M}_\ell(q)$ 以及幂映射 $x\mapsto x^L$，其中 $\delta_L(p)|d$，$q=p^d$。那么

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{q\longrightarrow\infty\\ v_L(q-1)=c}}\frac{\left|\mathrm{Per}(x^L,\mathrm{M}_\ell(q))\right|}{|\mathrm{M}_\ell(q)|} &= \lim_{\substack{q\longrightarrow\infty\\ v_L(q-1)=c}}\frac{\left|\mathrm{Per}(x^L,\mathrm{GL}_\ell(q))\right|}{|\mathrm{GL}_\ell(q)|} \\
&= \sum_{\lambda\vdash\ell}\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{(\lambda_i)^{m_i}m_i!}\frac{1}{L^{m_i v_L(q^{\lambda_i}-1)}},
\end{aligned}$$

其中求和遍历所有分拆 $\lambda=(\lambda m_{11},\ \lambda m_{22},\ .....,\ \lambda m^r r)$，其和为 ℓ。

证明。根据命题 3.5，只需研究正则半单类。矩阵 X $\in\mathrm{GL}_\ell(\mathrm{q})$ 是正则半单的，当且仅当与其关联的组合数据为 $\{(\mathrm{f}_{i,j},1):\mathrm{i}\ 1\le\mathrm{j}\ \le\mathrm{m}_i\}$，其中 $\mathrm{f}_{i,j}$ 对所有 j 都是次数为 d_i 的不可约多项式，且 $\sum\mathrm{d}_i\mathrm{m}_i=\ell$。这确定了 ℓ 的一个分拆，更准确地说，是分拆 $\lambda=(\mathrm{d}_1^{m_1},\mathrm{d}_2^{m_2},\ldots,\mathrm{d}^{m_r}\mathrm{r})$。此类共轭类中的元素数量由 $|\mathrm{GL}_\ell(\mathrm{q})|$ r 给出。这类 $\prod(\mathrm{q}^{d_i}-1)^{m_i}\mathrm{i}_{=1}$

共轭类的数量由下式给出

$$\begin{aligned}
&\binom{\mathfrak{d}_{d_1}}{m_1}\binom{\mathfrak{d}_{d_2}}{m_2}\cdots\binom{\mathfrak{d}_{d_r}}{m_r}\\
=&\prod_{i=1}^{r}\frac{\mathfrak{d}_{d_i}(\mathfrak{d}_{d_i}-1)\dots(\mathfrak{d}_{d_i}-m_i+1)}{m_i!}\\
=&\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{(d_i)^{m_i}m_i!}\left(\frac{q^{d_i}-1}{L^{v_L(q^{d_i}-1)}}+\cdots\right)\left(\frac{q^{d_i}-1}{L^{v_L(q^{d_i}-1)}}+\cdots-1\right)\dots\left(\frac{q^{d_i}-1}{L^{v_L(q^{d_i}-1)}}-m_i+1\right)\\
=&\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{(d_i)^{m_i}m_i!}\left\{\frac{q^{d_im_i}}{L^{m_iv_L(q^{d_i}-1)}}+\Sigma_{<d_im_i}\right\},
\end{aligned}$$

其中，$\Sigma_{<d_im_i}$ 是一个次数严格小于d_im_i的有理数系数多项式。因此，对所有此类分拆求和，即得结果。□

4. 辛群与酉群中的周期点

定理 2. 对于正整数 $\ell\geq 2$，考虑有限辛群$\mathrm{Sp}_{2\ell}(q)$ 及幂映射 $x\mapsto x^L$，其中 L 是素数，且 $\delta_L(p)|d$，$q=p^d$。那么

$$\lim_{\substack{q\longrightarrow\infty\\ v_L(q-1)=c}}\frac{|\mathrm{Per}(x^L,\mathrm{Sp}_{2\ell}(q))|}{|\mathrm{Sp}_{2\ell}(q)|}=\sum_{\lambda\vdash\ell}\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{(\lambda_i)^{m_i}m_i!}\frac{1}{L^{m_iv_L(q^{\lambda_i}+1)}}\prod_{a=1}^{s}\frac{1}{(\lambda'_a)^{m'_a}m'_a!}\frac{1}{L^{m'_av_L(q^{\lambda'_i}-1)}},$$

其中，求和遍及所有满足 $\lambda=(\lambda m_{11},\dots,\lambda m'r\,\lambda' m_1{}'_1,\dots,\lambda' m's)$ 的分拆。

证明。 我们首先利用正则半单共轭类得到一个下界，随后再处理等号成立的情形。回忆一下，$\mathrm{Sp}_{2\ell}(q)$中的正则半单元没有任何特征值 ±1。因此，矩阵$X\in\mathrm{Sp}_{2\ell}(q)$是正则半单的，当且仅当与之关联的组合数据具有如下形式：$\{(f_{i,j},1)\mid i\ 1\leq j\leq m_i\}\cup\{g_{a,b}g^{*}_{a,b}\mid a\ 1\leq b\leq m'_a\}$，其中

(1) $f_{i,\ j}$ 是次数为 $2d_i$的自反不可约首一多项式。(2) $g_{a,\ b}\neq g^{*}_{a,\ b}$ 是次数为d'_a的首一不可约多项式。(3) $\sum d_im_i+\sum d'_am'_a=\ell$。

此类共轭类中的元素数量由下式给出：$|\mathrm{Sp}_{2\ell}(q)|\ r\ s$；见 [29,$\underline{\prod(q^{d_i}+1)\ \prod(q^{d_a}-1)i}$
$=1$ $a=1$
第 36] 页。利用多项式的次数，我们得到两个分拆 $(2d_1^{m_1},\ 2d_2^{m_2},\ ..,\ 2d^{m_r}r)$ 和 $(d_1'^{m'_1},\ d_2^{m'_2},\ ..,\ d'^{m'_s}s)$。此类共轭类的数量由下式给出

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{r}\binom{\widetilde{\mathfrak{d}}_{2d_i}}{m_i}\cdot\prod_{a=1}^{s}\binom{\mathfrak{d}_{d'_a}}{m'_a}\\
=&\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{(2d_i)^{m_i}m_i!}\left\{\frac{q^{d_im_i}}{L^{m_iv_L(q_i^{d}+1)}}+\Sigma_{<d_im_i}\right\}\prod_{a=1}^{s}\frac{1}{(d'_a)^{m'_a}m'_a!}\left\{\frac{q^{d'_am'_a}}{L^{m_av_L(q^{d'_a}-1)}}+\Sigma_{d'_am'_a}\right\},
\end{aligned}$$

其中 $\Sigma_{<d_im_i}$ 与$\Sigma_{<d'_am'_a}$ 是次数分别严格小于 d_im_i 与 $d'_am'_a$ 的多项式；论证与定理 1 类似。取极限后，我们得到一个下界，与定理中的表达式相同。于是只需得到一个类似的结果，它与命题 3.5 平行。

假设L为奇数。为了按照 [29], 保持记号，我们对一个分拆的各部分使用略有不同的记号。考虑在第L次幂下为周期的、具有组合数据的矩阵类型

$$\{(t\pm 1,\lambda^{t\pm 1})\}\cup\{(f_{i,j},\lambda^{f_{i,j}})\mid 1\le j\le m_i\}\cup\{(g_{a,b}g_{a,b}^{*},\lambda^{g_{a,b}})\mid 1\le b\le m_a\},$$

其中

(1) $\lambda^{t\pm 1}$ 是一个带符号辛分拆（即某个自然数的分拆，其中奇数部分的重数为偶数，并且为每个偶数部分选择一个符号），对应于多项式 $t\pm 1$; (2) $f_{i,j}(t)\neq t\pm 1$ 是一个次数为 $2d_i$ 的自反不可约首一多项式，对所有 $1\le j\le m_i$; $\lambda^{f_{i,j}}$ 是一个分拆; (3) $g_{a,b}(t)\neq g_{a,b}^{*}(t)$ 是一个次数为 d'_a 的不可约首一多项式，对所有 $1\le b\le m'_a$; $\lambda^{g_{a,b}}$是一个分拆; (4) $\sum|\lambda^{t\pm 1}|+\sum 2d_i|\lambda^{f_{i,j}}|+\sum 2d'_a|\lambda^{g_{i,j}}|=2\ell$。

给定一个具有上述组合数据的矩阵，每个共轭类中的元素数量由 Wall 的工作确定 [29], 也就是 $\prod_{\lambda}{}^{2\ell}|\mathrm{Sp}(q)B(h_h)$; 其中，对于 $1\le i\le n_h$

$$A(h,u)=\begin{cases}|\mathrm{U}_{m_u(\lambda^h)}(q^{\deg h/2})| & \text{if } h(t)=\widetilde{h}(t)\neq t\pm 1\\ |\mathrm{GL}_{m_u(\lambda^h)}(q^{\deg h})|^{1/2} & \text{if } h(t)\neq\widetilde{h}(t)\\ |\mathrm{Sp}_{m_u(\lambda^h)}(q)| & \text{if } h(t)=t\pm 1, u\equiv 1 \pmod 2\\ q^{m_u(\lambda^h)/2}|\mathrm{O}^{\varepsilon}_{m_u(\lambda^h)}(q)| & \text{if } h(t)=t\pm 1, u\equiv 0 \pmod 2\end{cases},$$

其中 $\varepsilon\in\{\pm\}$ 取决于 i 在 $\lambda^{t\pm 1}$ 中的符号以及

$$B(h,\lambda^h)=q^{\deg h\left(\sum_{u<v}um_u(\lambda^h)m_v(\lambda^h)+(\sum_u(u-1)m_u(\lambda^h)^2)/2\right)}\prod_{u=1}^{2\ell}A(h,u).$$

在上述公式中，$m_u(\lambda_h)$ 表示 λ_h 中大小为 u 的部分数；当 $m_u(\lambda^h)=0$ 时，假定 $A(h,u)$ 等于 1。

那么，这种矩阵类型会产生如下形式的构成项

$$\frac{1}{\prod_h B(h,\lambda^h)}\prod_{i=1}^{r}\binom{\widetilde{\mathfrak{d}}_{2d_i}}{m_i}\prod_{a=1}^{s}\binom{\mathfrak{d}_{d'_a}}{m'_a}.$$

已知存在一个多项式 h 使得 $|\lambda^h|>1$，我们声称在 $q\longrightarrow\infty$ 下，上述表达式的极限值为零，其中 $\delta_L(q-1)=c$。注意

$$\prod_{i=1}^{r}\binom{\widetilde{\mathfrak{d}}_{2d_i}}{m_i}\prod_{a=1}^{s}\binom{\mathfrak{d}_{d'_a}}{m'_a}=\mu q^{\left(\sum_{i=1}^{r}d_im_i+\sum_{a=1}^{s}d'_am'_a\right)}+\Sigma,$$

对于某个 $\mu\in\mathbb{Q}$ 以及一个次数严格小于次数 $\sum d_im_i+\sum d'_am'_a$的多项式 Σ。由于我们处理的是一种特定类型的矩阵，我们固定一个带符号分拆。由于对 $\varepsilon\in\{\pm 1\}$ 的任意选取以及一个正整数 μ，都有 $|\mathrm{O}^{\varepsilon}_{2\mu}(q)|=2q^{\mu^2-\mu}(q^{\mu}-\varepsilon)\prod_{j=1}^{\mu-1}(q^2j-1)$，因此贡献到构成项中的 q的最高次幂为 $2\mu^2-\mu=(2\mu)^2/2-(2\mu)/2$。对于$\mathrm{O}^{\varepsilon}_{2\mu+1}(q)$的情形，$q$的最高次幂为 $2\mu^2+\mu=(2\mu+1)^2/2-(2\mu+1)/2$。因此，对任意 μ，确实有

在 $|\mathrm{O}_{\mu}^{\varepsilon}(q)|$ 中，q 的最高次幂由 $\mu^2/2-\mu/2$ 给出。因此，我们得到由 $\prod B(h\ \lambda_h)$ 所确定的多项式中 q 的最高次幂为 h

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathfrak{H}}_q = &\sum_{\varepsilon=\pm1}\left(\sum_{u<v} u m_u(\lambda^{t+\varepsilon}) m_v(\lambda^{t+\varepsilon}) + \frac{1}{2}\sum_u (u-1) m_u(\lambda^{t+\varepsilon})^2)\right)\\ &+\sum_{\varepsilon=\pm1}\left(\sum_{u\equiv 0\,(2)} \frac{m_u(\lambda^{t+\varepsilon})}{2}\left(\frac{m_u(\lambda^{t+\varepsilon})^2}{2}-\frac{m_u(\lambda^{t+\varepsilon})}{2}\right)+\sum_{u\equiv 1\,(2)}\left(\frac{m_u(\lambda^{t+\varepsilon})^2}{2}+\frac{m_u(\lambda^{t+\varepsilon})}{2}\right)\right)\\ &+\sum_{i=1}^{r} 2d_i \sum_{j=1}^{m_i}\left(\sum_{u<v} u m_u(\lambda^{f_{i,j}}) m_v(\lambda^{f_{i,j}}) + \frac{1}{2}\sum_u (u-1) m_u(\lambda^{f_{i,j}})^2) + \sum_u \frac{d_i}{2} m_u(\lambda^{f_{i,j}})^2\right)\\ &+\sum_{a=1}^{s} 2d'_a \sum_{s=1}^{m'_a}\left(\sum_{u<v} u m_u(\lambda^{g_{a,b}}) m_v(\lambda^{g_{a,b}}) + \frac{1}{2}\sum_u (u-1) m_u(\lambda^{g_{a,b}})^2) + \sum_a d'_a m_u(\lambda^{g_{a,b}})^2\right).\end{aligned}$$

如果存在一个 h 使得 $|\lambda(h)|>1$，那么要么存在 $u\geq 2$ 使得 $m_u(\lambda_h)\geq 1$，要么存在 $m_1(\lambda_h)>1$。在这两种情况下，$\widetilde{\mathfrak{H}}_q$ 都严格大于 $\sum d_i m_i + \sum d'_a m'_a$。对 L 为偶数的情况进行类似研究，考虑极限 $q\longrightarrow\infty$ 即可得到结论。□

定理 3. 对于正整数 $\ell\geq 2$，考虑有限辛群 $\mathrm{U}_\ell(q)$ 以及幂映射 $x\mapsto x^L$，其中 L 是素数且 $\delta_L(p)|d$，$q=p^d$。那么

$$\lim_{\substack{q\longrightarrow\infty\\ v_L(q-1)=c}} \frac{|\mathrm{Per}(x^L,\mathrm{U}_\ell(q))|}{|\mathrm{U}_\ell(q)|} = \sum_{\lambda\vdash\ell}\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{(\lambda_i)^{m_i} m_i!}\frac{1}{L^{m_i v_L(q^{\lambda_i}+1)}}\prod_{a=1}^{s}\frac{1}{(\lambda'_a)^{m'_a} m'_a!}\frac{1}{L^{m'_a v_L(q^{\lambda'_i}-1)}},$$

其中求和遍历所有分拆 $\lambda=(\lambda m_{11},\ldots,\lambda m^r r\ \lambda' m_1{}^{'_1},\ldots,\lambda' m^{'_s} s)$，其分拆对象为 ℓ。

证明。 证明与定理 2 的证明类似。不过，此处需要注意不同的共轭类大小；相关内容见 [29,第 34] 页。□

参考文献

[1] Matej Breˇsar. “换位子与非交换多项式的像”。载于：数学进展 374 (2020)。ISSN：0001-8708,1090-2082 [2].[2] Matej Breˇsar 和 Jure Volˇciˇc。“非交换有理函数的矩阵求值与华林问题”。载于：*Selecta Mathematica*。新系列 31.97 (2025) [2].[3] Pralay Chatterjee。“特征零代数群幂映射的满射性”。载于：《数学研究快报》 9.5-6 (2002) [2].[4] Giovanni De Franceschi、Martin W. Liebeck 和 Eamonn A. O’Brien。有限典型群中的共轭。施普林格数学专著。施普林格，Cham， [2025] ©2025。ISBN：978-3-031-86460-5；978-3-031-86461-2 [10].[5] Ivan Gonzales Gargate 和 Thiago Castilho de Mello。“无限域上 $n\times n$ 上三角矩阵上的多重线性多项式的像”。载于：《以色列数学杂志》 252.1 (2022)。ISSN：0021-2172,1565-8511 [2].[6] Alexey Kanel-Belov、Sergey Malev 和 Louis Rowen。“在 3×3 矩阵上求值的多重线性多项式的像”。载于：美国数学会会刊 144.1 (2016)。ISSN：0002-9939,1088-6826[2]。

[7] Alexey Kanel-Belov、Sergey Malev 和 Louis Rowen。“在 2×2 矩阵上求值的非交换多项式的像”。载于：美国数学会会刊 140.2 (2012)。ISSN：0002-9939,1088-6826 [2].[8] Rijubrata Kundu 和 Anupam Singh。“GL(n,q) 中幂的生成函数”。载于：《以色列数学杂志》259.2 (2024)。ISSN：0021-2172,1565-8511 [2].[9] Michael Larsen、Aner Shalev 和 Pham Huu Tiep。“有限单群的华林问题”。载于：《数学年刊》(2) 174.3 (2011)。ISSN：0003-486X,1939-8980 [2].[10] Martin W. Liebeck、E. A. O’Brien、Aner Shalev 和 Pham Huu Tiep。“Ore 猜想”。载于：《欧洲数学会杂志》(JEMS) 12.4 (2010)。ISSN：1435-9855,1435-9863 [2].[11] I. G. Macdonald。“若干有限典型群中的共轭类数量”。载于：《澳大利亚数学会通报》23.1 (1981)。ISSN：0004-9727 [3].[12] Kalyani K. Madhu。伽罗瓦理论与多项式轨道。博士论文——罗彻斯特大学。ProQuest LLC，Ann Arbor, MI，2011。ISBN：978-1124-95766-1 [1].[13] Michelle Manes 和 Bianca Thompson。“代数群相关多项式在有限域塔中的周期点”。载于：《落基山数学杂志》49.1 (2019)。ISSN：0035-7596,1945-3795 [1, 6].[14] Helmut Meyn 和 Werner G¨otz。“有限域上的自反多项式”。载于：组合学研讨会（上弗兰肯，1990）。第413卷。斯特拉斯堡路易·巴斯德大学数学研究所出版物， 1990 [4].[15] Oystein Ore。“关于换位子的一些评注”。载于：美国数学会会刊 2 (1951)。ISSN：0002-9939,1088-6826 [2].[16] S. Panja。“群词映射、多项式映射与像比”。载于：《数学档案》(2024)。即将出版。arXiv：2405.17026 [math.GR] [2].[17] Saikat Panja。群上词映射与代数上多项式映射的动力学。2025。arXiv：2511.04377 [math.DS] [2].[18] Saikat Panja。某些有限李型群中平方映射的纤维及其一个应用。2024。arXiv：2403.17096 [math.GR] [2].[19] Saikat Panja。“有限典型群中的单位元的根”。载于：《数学科学杂志》(2025) [2].[20] Saikat Panja 和 Sachchidanand Prasad。“上三角矩阵代数上的多项式的像与华林型问题”。载于：《代数杂志》631 (2023)。ISSN：0021-8693,1090-266X [2].[21] Saikat Panja、Ayon Roy 和 Anupam Singh。有限主理想局部环上一般线性群的幂映射，长度二。2025。arXiv：2508.18952 [math.GR] [2].[22] Saikat Panja、Prachi Saini 和 Anupam Singh。“带常数的多项式映射的像”。载于：《Mathematika》71.3 (2025)。ISSN：0025-5793,2041-7942 [2].[23] Saikat Panja、Prachi Saini 和 Anupam Singh。“分裂八元数代数上的带常数多项式映射”。载于：《代数通讯》0.0 (2025)。电子版：https : / / doi . org / 10 . 1080 / 00927872.2025.2531559 [2].[24] Saikat Panja 和 Anupam Singh。“有限正交群与辛群中的幂：一种生成函数方法”。载于：《以色列数学杂志》266.1 (2025)。ISSN：0021-2172,1565-8511 [2].[25] Saikat Panja 和 Anupam Singh。“有限酉群中的幂”。载于：《代数杂志》660 (2024)。ISSN：0021-8693,1090-266X [2]。

[26] Min Sha 和 Su Hu。《有限域上一维单项式动力系统》。载于：《算术学报》148.4（2011年）。ISSN：0065-1036,1730-6264 [1, 6].[27] 正田建次郎。《关于矩阵的一些定理》。载于：《日本数学杂志》13.3（1937年）。ISSN：0075-3432 [2].[28] Robert Steinberg。《代数群中的幂映射》。载于：《数学研究快报》10.5-6（2003年） [2].[29] G. E. Wall。《酉群、辛群与正交群中的共轭类》。载于：《澳大利亚数学会杂志》3（1963年） [3, 4, 12–14]。

电子邮箱地址: panjasaikat300@gmail.com

印度统计研究所，班加罗尔中心，迈索尔路8英里，RVCE邮政区，Gnana Bharathi，班加罗尔，卡纳塔克邦560059，印度