arXiv:2603.12301v1 [math.CT] 12 Mar 2026

多阶段投资组合构建与对齐的双范畴框架

Wesley Phoa
wesley@topos.institute

2026年3月16日

摘要

我们构造了一个薄双范畴 $\mathbb{HS}$ (中心辐射)，其对象是标准单形的闭子集，水平态射是表示投资组合重新实现过程的连续映射，垂直态射则是表示对齐约束的闭关系。该框架对工业级投资组合构建流水线进行建模——这类层级结构将单一投资策略经由多个阶段转换为数千个客户投资组合。我们建立了四个结构定理：对齐的组合性（函子性）、交易前安全保证（伴随）、合规检查的顺序无关性结果（Lax Beck–Chevalley），以及滤子交换律（弗罗贝尼乌斯互反律）。我们证明，允许的投资组合空间必须是闭且紧的这一拓扑要求——它排除了由开放约束规范产生的“幻影投资组合”——对于相干性至关重要。我们进一步探讨了通过《系统的双歌剧理论》实现的集值再实现、通过波兰空间上的马尔可夫核实现的随机再实现，以及基于Wasserstein 距离的传输安全度量。抽象的公理化处理确定了足以推出主要结果的装备公理。这里的数学内容浅显易懂——不需要新的范畴论成果。本文的贡献在于建模主张：这些特定的对象和态射能够正确地形式化投资组合重新实现。

arXiv 主题分类： math.CT（主要）；q-fin.PM（交叉列表）**MSC 2020：** 18N10, 18B35, 18F75, 91G10**关键词：** 双范畴、装备、真映射、Wasserstein距离、投资组合构建、投资组合对齐、合规

目录

序言与读者指南 8

非技术性摘要 11

致谢 16

1 引言 17

1.1 投资组合空间与重新实现.171.2 组合挑战 .171.3 双范畴框架 .181.4 为何采用闭对象 .191.5 主要结果 .19

逻辑结构 22

符号与术语 23

I 基础理论 25

2 投资组合空间：环境与许可 27

2.1 环境投资组合空间（单纯形） .272.2 允许的投资组合空间（对象） .27

3 投资组合重新实现（水平态射） 29

3.1 定义与解释 .293.2 投资组合重新实现的示例 .29

4 对齐 R elations（垂直态射） 31

4.1 闭关系作为对齐 .314.2 垂直复合 .32

5 双范畴 $\mathbb{HS}$ 34

5.1 双范畴的定义.345.2 重新实现的对齐约束 .36

6 拉回与 推前运算 37

6.1 拉回：重新索引对齐 .376.2 推前：前向传播 .37

7 适当性的核心作用 39

7.1 适当性与推前.397.2 函子性与伴随 .397.3 无效映射与对象 .40

8 贝克–切瓦利条件 **41**
8.1 LaxBeck–Chevalley .418.2 逐点笛卡尔性 .438.3 严格 Beck–Chevalley .44

9 弗罗贝尼乌斯互反律 **47**
9.1 陈述 .479.2 投资组合解释.47

10 为何闭n ess并非可有可无 50
10.1 适当性丧失，以及一个不成功的解决方案 .5010.2 概率模型中闭包修正的不足 .52

11 构造最优重新实现 **55**
11.1 设置：许可空间、定量属性与目标函数 .5511.2 通过约束优化实现最优重新实现 .5611.3 通过对齐关系约束实现最优重新实现 .5911.4 由对齐约束构造的方形的相干性 .6111.5 总结 .64

12 投资组合变更与新要求的传播 65
12.1 投资组合变更的传播 .6512.2 新的对齐要求的传播 .65

13 计算 al 考量68
13.1 对象与态射的表示.6813.2 计算拉回.6813.3 计算推出.6813.4 最优重新实现.7013.5 具体实例详解.70

II 公理化 与扩展 72

模型指南 **73**

14 公理化框架 **74**
14.1 公理 .7414.2 沿水平态射的推前与拉回 .7614.3 Beck–Chevalley .7614.4 弗罗贝尼乌斯互反律 .7714.5 松弛语义与伴随态射的失效 .77

15 A 的证据 对齐8 0
15.1 概述：向非薄 2-胞腔的扩展 .8015.2 通过跨度双范畴构造“证据”2-胞腔 .8015.3 Beck–Chevalley 与 Frobenius.84

16 人格索引的中心辐射式 **86**
16.1 人物索引的可允许空间 .8616.2 索引双范畴 $\mathbb{HS}/B$ 及其定律 .8716.3 基底示例 B 与建模模式 .8816.4 跨世代约束 .9016.5 总结 .90

17 投资组合系统的 DOTS **92**
17.1 DOTS 装备 .9217.2 编码常见投资组合关系 .9417.3 算子的幺半群模板 .9517.4 DOTS Beck–Chevalley 与 Frobenius .9717.5 案例研究：端到端流水线.9817.6 一个简短的演算示例 .99

III 概率论 100

18 概率中心辐射理论 102
18.1 动机.10218.2 分级双范畴 HSP-r .10218.3 紧 Feller 核：建模不完美优化 .10418.4 概率运算：两种方法 .106

19 概率 运算：安全半径 109
19.1 安全半径方法 .10919.2 风险的复合与累积.11019.3 安全半径方法的相干律 .114

20 概率 运算：最高密度区域 11 **7**
20.1 定义.11720.2 安全半径与 HDR 方法的组合安全性 .123

21 基于传输的安全性 **125**
21.1 概率运算 .12621.2 相干性与复合 .12721.3 伴随、Lax Beck–Chevalley 与 Frobenius . 12921.4 实践中的校正.131

22 随机核的估计与存储 134
22.1 核的估计 $P(x)$ .13422.2 高效表示与存储 .13522.3 高斯假设的结构性失效 .135

23 处理离散约束 137
23.1 “分裂峰”：最小持仓规模 .13723.2 “空心壳”：总敞口限额 .13723.3 “香蕉”：税务高效转换 .13823.4 DOTS：菜单驱动的替代方案.139

24 流动性感知投资组合构建 14124.1 基础框架中的流动性约束 .14124.2 DOTS：带流动性和容量筛选的菜单 .14224.3 Wasserstein：交易成本预算.144

结论 146
批判性观点与局限性 .147未来方向：对齐的对偶演算.148未来方向：合成概率与支撑函子 . 148

参考文献 154

预备知识与系统架构 155

数学依赖关系 156

范畴论预备知识 157
A.1 范畴与函子 .157A.2 双范畴 .158A.3 松弛函子与序结构.158

B 拓扑、集值 -值分析与概率 160
B.1 拓扑与真映射 .160B.2 集值分析与优化 .160B.3 波兰空间与随机核 .160B.4 最优传输与Wasserstein距离 .163B.5 卷积稳定性的证明（命题 20.8） .164

C 一般 DOTS框架 166
C.1 环境结构：框架双范畴 .166C.2 作为广义元素的状态 .166C.3 作用算子 .166C.4 幺半结构与并行性 .167C.5 算子的复合 .167

D 概念系统架构与工作流程 168
D.1 架构原则 .168D.2 组件图 .168D.3 执行流 .169

E 概念验证实现 171
E.1 应用I：DOTS框架.171E.2 应用 II：概率框架 .172E.3 观察 .175

术语表与重要参考文献 176

索引 180

图目录

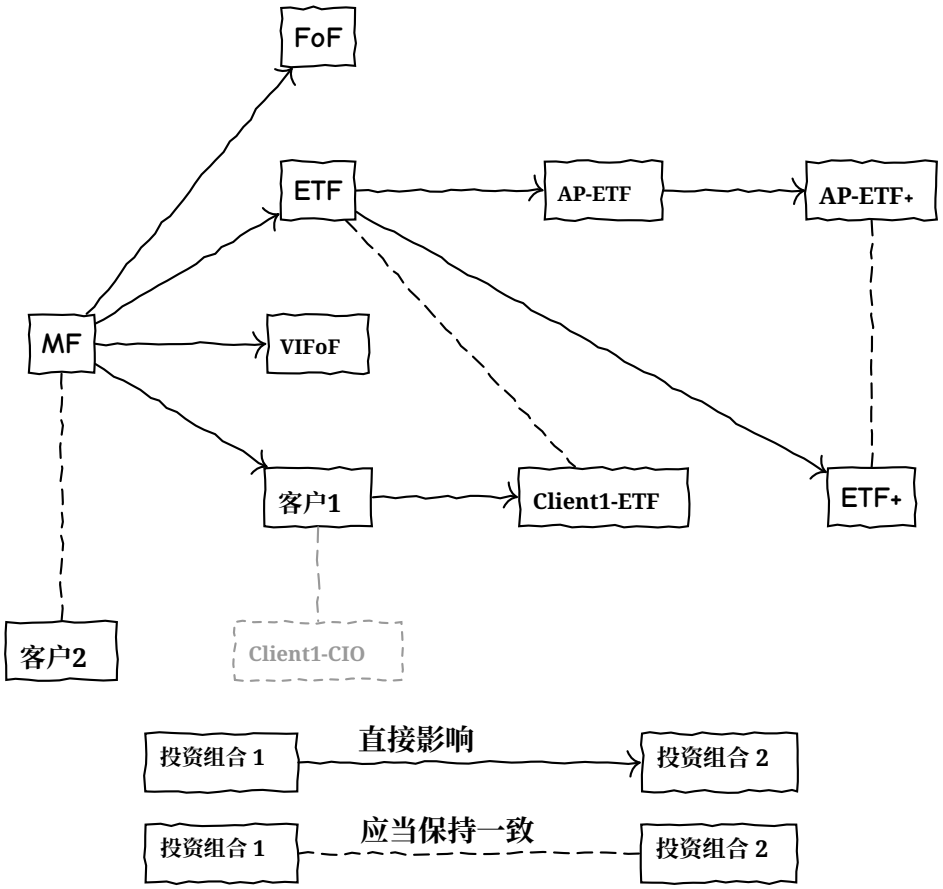
1 在 $\mathbb{HS}$ 双范畴中将一个 2-胞腔可视化.26 2 将（紧）2-单纯形 Δ^2 可视化为（非紧）空间$\mathbb{R}^3$ 的子集。任何有效投资组合 $p = (x_0, x_1, x_2)$ 都位于三角形平面段上，其中权重之和为 1 且均为非负数.27 3 将例 2.6 中的允许投资组合空间 $K \subseteq \Delta^2$ 可视化。环境单纯形（灰色）表示所有可能的投资组合。允许区域 K（蓝色多边形）由约束 $x_0 \leq 0.5$ （股票上限）和 $x_2 \geq 0.1$ （现金下限）的交集定义.28 4 将对齐关系 $R \subseteq K_1 \times K_3$ 可视化为乘积空间中的闭子集（紫色）。闭性保证对齐投资组合的极限仍然对齐.31 5 垂直复合的三维可视化。关系 R （红色）和 S （橙色）是不规则多边形，严格包含于允许集的乘积中（由蓝色虚线框标示）。关系 $S \circ R$ （蓝色）是 K_1–K_3 平面中的多边形子集.32 6 概念图：比较两种不同水平态射 f 和 g对应的拉回（上）与推前（下）。这些运算将对齐关系投影到枢纽空间或辐条空间中不同且形状各异的区域.37 7 “审计安全性”流程图。该图展示命题：中心侧验证是保守的。松弛的 Beck–Chevalley 包含关系意味着，由路径 A（早期审计）生成的投资组合集合包含于由路径 B（后期审计）生成的集合之中.42 8 一个未满足逐点笛卡尔条件（定义 8.2）的交换方块示意图。存在一致对（y, z）（因为 $f(y) = h(z)$），但所需的枢纽投资组合 x 会落在对象 K_A的“空洞”（非许可区域）中。. . . . . 45 9 弗罗贝尼乌斯互反律的可视化.48 10 一个投资组合空间、其定量属性空间以及一个目标函数（效用函数）.56 11 从一组允许的辐条中寻找最优辐点.58 12 由一组垂直对齐约束 $R_f, R_g, R_{f'}, R_{g'}$（虚线）构造的一组水平态射 f, g, f', g'（蓝色实线）组成的方形.62 13 跨度模型中的一个垂直态射。不同于仅断言 $R(a, b)$的简单关系，跨度要求一个具体对象 e （证据），它投影后能够确定其所关联的具体枢纽投资组合和辐射投资组合.81 14 拉回中逐元素映射的细节。仅当各个见证元 e 和 f 映射到同一个中间投资组合 b时，顶层空间中才存在复合见证（e, f）。投影映射 π_E 和 π_F 可从复合结果中恢复原始证据.82 15 目标日期滑行路径构建的设定：按计划参与者年龄群体索引的允许空间。随着年龄增长，允许区域 K_b 逐渐缩小并向下移动（降低风险），同时始终严格处于环境单纯形内。. . . 88 16 对齐关系对投资组合的作用，生成一个辐条菜单。图中还以蓝色显示了预先存在的可许可子集.94

17 可视化厄米组合。简单的连线图 Φ （红色虚线框）充当模板。它接收两个许可空间作为输入（K_{core}、K_{sat}），根据结构关系将它们混合，应用全局约束（费用上限），并输出由此得到的总投资组合菜单.96 18 HSP-r 中的随机优化一致性。“涂抹”表示 ϵ-支撑集：包含绝大部分概率质量的区域。风险预算会舍弃该区域之外的尾部事件.105 19 安全半径与 HDR 方法中概率拉回的比较。左：以统一宽度收缩安全区域。右：若某点的大部分概率质量落在 S 内，则该点有效.123 20 安全半径与 HDR 方法中概率推前的比较。左：以统一宽度扩展安全区域。右：在每个点都遵循核的分布形状.124 21 用三种方法评估同一非合规分布。求解器输出的 95% 概率质量位于约束集 S 内，另有 5% 的尾部仅略微越过边界。安全半径方法拒绝该分布（度量球越过 S）。HDR 方法拒绝该分布（尾部超过风险预算 $\epsilon < 0.05$）。Wasserstein 方法则接受该分布：校正两个离群值（将其移回内部）的成本微乎其微。125 22 可视化 Wasserstein 安全性。约束 S 是绿色区域。求解器生成一簇投资组合（点）。其中一些落在区域之外（红色）。Wasserstein 风险 ϵ 是校正违反约束情况的期望成本（红色虚线箭头长度的平均值）。132 23 DOTS 流程不会传递单个投资组合，而是传递有效可能性的集合，并在每一步逐渐缩小菜单范围.140 24 可视化伴随 $L \dashv R$.158 25 可视化上半连续性.161 26 可视化紧 Feller 核的定义。紧性意味着，对于任意紧输入 C，都存在一个紧子集 P_ϵ、$C \subseteq Y$，其中包含大部分概率质量。右图展示了失败的情形：输入保持在 C 中，但概率质量不断漂移至无穷远处。 . . . 162 27 可视化 Wasserstein 距离（W_1）。它表示将概率质量从含噪的求解器分布 μ 移至合规分布 ν 所需的最小“功”.164 28 $\mathbb{HS}$ 框架的系统架构。语义核心抽象数学逻辑，使用专用求解器执行，并借助证据账本持久记录审计轨迹。范畴编排器协调重新实现工厂和对齐引擎；它作用于抽象态射，并将数值执行委派给下层.168 29 工作流 A 映射到架构。编排器将构造工作委派给求解器，并将安全检查委派给验证器。只有验证器通过松Beck–Chevalley 条件确认枢纽变更安全后，才会提交辐条.169 30 工作流B 映射到架构。对齐引擎驱动双重过程：求解器为辐条定义新的可行域，而验证器则识别出失效的枢纽.170 31 工作流 C 映射到架构。对齐引擎根据 R 定义搜索空间，使求解器能够构造新的水平态射 f，以最大化目标函数 u（第 11.3 节）.170

序言与读者指南

这项工作的灵感源于下图，作者在一次临时的商务讨论中绘制了这张图。它描绘了一个分层投资组合构建流程：以“枢纽”投资组合为基础构建“辐条”投资组合，后者纳入新资产、不同的载体类型或定制的客户约束，同时保持相同的基本特征。由此形成树状结构。此外，不同分支中各节点之间还设有对齐要求（例如暴露度、风险）。

该图示最初只是为了阐明投资流程的性质，其解释也纯属非正式。不过，人们自然会想知道，能否赋予该图示以数学含义，从而体现投资流程应具备的形式性质。



我们描述一个范畴论框架，使该图示具有形式化解释。随着大规模定制不断发展，投资组合构建必须日益自动化，以实现规模化，而自动化系统需要形式化规则。传统投资组合理论描述了投资组合的组成部分，但无法自然地处理跨越多个构建与变换阶段的约束复合。双范畴框架对于处理变换的复合（图中的实线箭头）和对齐约束的复合（虚线；不过上方的简单图示中没有复合）都必不可少。该框架旨在服务于实际应用，尤其适用于工业规模的投资组合构建环境——例如定制或复制数千个投资组合——在这些环境中，人工监督已不切实际。

读者指南：应用范畴论学家

该框架记作 $\mathbb{HS}$（中心辐射），是一个薄双范畴，其对象是标准单形中的闭子集 $K \subseteq \Delta^n$，水平态射是连续映射（表示投资组合重新实现），垂直态射是闭关系（表示对齐约束），而 2-胞腔则是包含关系。如果你熟悉装备和框架双范畴[62],，那么这里的内容会让你感到熟悉。初次阅读时，可以暂且忽略金融术语；范畴论内容本身是自足的。

对范畴论学家而言，真正值得关注之处有三。首先，对紧对象的限制使所有水平映射自动成为真映射，因此推前 $f_!$ 得以保持闭性——拓扑假设在这里发挥了范畴论作用。其次，主要的相干定理（Beck–Chevalley、Frobenius）最终被证明是对金融领域标准审计问题的形式化：“在优化前筛选出符合环境、社会和治理要求的对象，是否会得到与优化后筛选相同的结果？”这正是弗罗贝尼乌斯互反律的一个实例。第三，第 17 节将这一框架与双歌剧理论系统 [44], 联系起来，把有效的投资组合重新实现集合解释为连线图代数簇上的一个代数。熟悉 [46] 或 [34] 有助于理解定义这些态射的优化问题所涉及的金融背景，但并非严格必要。

读者指南：资产管理专业人士

如果你从事投资组合构建，就已经熟悉本文中的对象。允许的投资组合空间（K）是投资授权所允许的投资组合集合。重新实现（f）是优化器将模型投资组合转换为客户账户时所执行的操作。对齐（R）是合规团队检查的内容——跟踪误差是否在界限内，行业敞口是否在容差范围内。

这篇论文的贡献在于揭示，这三件事构成了一个数学结构——双范畴——其内部相容律能够回答你目前通过临时方法解决的问题。标准优化器流程管线常常在边界处失效，生成一些数值上看似正确、却没有有效参考投资组合的投资组合（“幻影投资组合”）。论文证明了三个在实践中至关重要的结论：(a) 如果将约束规定为闭紧集，优化过程就是稳定的——市场数据的微小变化不会导致输出发生剧烈跳变；(b) 适当性确保每个客户投资组合都可以追溯至有效的枢纽决策，不会产生孤立账户；(c) 在流程管线早期进行合规验证是一种保守策略，绝不会产生假阳性，并且交换筛选器的顺序在数学上是一致的。金融学预备知识是 [34] 或 [49]；范畴论工具则从头开始构建。

非技术性摘要

问题所在

投资组合经理改变了对一只股票的看法。现在，这一决策必须传播——通过一只交易所交易基金、数百个进行税务管理的独立管理账户，再通过一套目标日期退休产品——最终传递到十万个客户投资组合，而每个投资组合都有自身的约束。如果传播缺乏相干性，其中一些投资组合将违反其投资授权。公司可能要等到下一次审计时才会发现。

这就是大规模定制带来的问题，它打破了传统工作流程。请思考现代投资策略的生命周期：

- 首席投资官（CIO）定义了一个“全球增长”模型投资组合。
- 该模型被复制为交易所交易基金，用于零售分销。
- 该模型同时被调整为数百个税务管理型独立管理账户，每个账户都有独特的排除清单（例如“排除烟草”“排除七巨头”）。
- 随后，它会进一步转化为目标日期退休产品系列的“滑行路径”，其中风险画像会根据投资者的年龄自动调整。

过去，这些步骤通常由不同团队使用各自的软件系统处理，并通过人工流程、电子表格和临时编写的脚本串联起来。这种碎片化不仅带来不便，更是系统性运营风险的来源。首席投资官的模型一旦发生变更，可能无法正确传递到税务管理账户中。在流程开始时检查的合规规则，可能会在最后的重新优化步骤中遭到违反。问题不在于任何单一步骤有误，而在于没有人能证明整条变换链是正确的。

本文的核心问题是：无论经历了多少次变换，我们如何从数学上保证最终的客户投资组合能有效体现最初的投资意图？

复式记账与此处的类比并非随意为之。复式记账本身就是一个复合系统：每笔交易同时记作一项借项和一项贷项，并且在账本的每个节点，两方都必须保持平衡。复式记账处理单笔交易，而范畴论处理流程之间的关系——它提供了一套逻辑，用于验证一条变换链是否保留了应当保留的内容。相关问题并非单个投资组合是什么样子（传统投资组合理论已能处理这一点），而是先针对税务进行优化、再按环境、社会和治理标准筛选，是否会得到与先筛选、再优化相同的结果。这是一个关于复合的问题，而范畴论正是为处理复合而设计的。

对齐与重新实现：具体示例

上面的抽象词典需要填充内容。这两个基本概念——对齐（投资组合之间的一种关系）和重新实现（将一个投资组合转换为另一个投资组合的过程）——各自涵盖了广泛的实际情形。

对齐（垂直箭头）体现了两个投资组合 P 和 Q之间可能存在的多种“接近”或“兼容”方式。以下各项都是不同的对齐关系，公司可以同时施加多项：

- 主动风险。 P 与 Q 之间的跟踪误差低于给定阈值——这是委托投资组合管理中的经典合规检查。

- 资产类别敞口。 P 与 Q 的股票、固定收益和另类资产权重之差不超过规定的容差（例如，“权益配置与模型相差不超过 5%”）。
- 因子敞口。 P 和 Q 在指定因子模型（价值、动量、质量、规模、久期等）上的载荷差异不超过给定阈值——这是比资产类别检查更细致的版本。

- 策略一致性。 P 和 Q 采用相同的底层策略，但权重或投资载体选择可能不同。这是一种组合条件，而非度量条件。
- 情景主导。在给定的一组压力情景下， Q的收益以指定置信水平高于 P的收益——这种对齐具有前瞻性和概率性，而非静态的。

关键在于，这些条件分别定义的是一种关系，而非函数：对于给定的 P，可能有多个投资组合 Q 满足该条件，反之亦然。它们都被建模为两个投资组合空间之积的闭子集。

重新实现（水平箭头）是确定性过程，可将一个证券范围中的投资组合转换为另一个证券范围中的投资组合：

- 多目标优化。从枢纽投资组合 P出发，在新的证券范围内或通过新的策略叠加，求解出一个辐射投资组合，使其在跟踪 P的暴露度与实现新目标（降低费用、提高收益率、改善环境、社会和治理评分）之间取得最佳平衡。
- 投资工具替换（最小化跟踪误差）。使用不同的金融工具组合来复制 P 的暴露度——例如使用交易所交易基金而非共同基金——同时将相对于 P 的跟踪误差降至最低。
- 投资工具替换（最大化收益）。采用相同的投资工具替代方式，但在跟踪误差预算的约束下最大化预期收益。目标函数的改变会带来不同的映射。

- 机械替换。将境外上市证券替换为其 ADR 等价物，或将单只债券替换为久期和信用质量相匹配的债券梯。这些映射较为简单——通常是分段线性的——但它们依然是映射，而且可以与其他映射复合。

理论的扩展允许采用非确定性的重新实现，这种情况可能源于实际应用中使用优化器。

从对齐到重新实现。对齐与重新实现并非彼此独立的概念。两个投资组合空间之间的对齐关系隐式定义了一个候选重新实现族：给定枢纽投资组合 P，在所有满足对齐关系的候选项中，按照某种指定标准，找出最优的辐射投资组合 Q 。重新实现是通过求解约束优化问题，从对齐关系推导而来的。本文建立的大部分形式化工具——垂直态射与水平态射之间的相互作用、Beck–Chevalley 律和 Frobenius 律——正是为了确保这一过程保持一致：先检查对齐关系再进行优化，与先优化再检查，所得结果相同。

核心框架：中心、辐条与幻影投资组合

本文将运营经理熟悉的“中心辐射”模型形式化。枢纽是投资智慧的源头；辐条是执行的所在。数学上的挑战在于如何在两者之间进行转换。

关键步骤之一是严格定义“许可空间”。在标准量化金融中，约束的规定往往较为宽泛，例如“目标权重 > 0”。我们指出，这种宽泛的定义是系统不稳定性的根源之一。

来看“幻影投资组合”问题。Hub策略要求严格分散化：每项资产的权重都必须严格大于零（$x > 0$）。为尽量降低费用，Spoke优化器会将某项高费用资产的权重降至 0.0001%，然后降至 10^{-9}%，最终降至恰好 0%。

这列有效投资组合收敛到一个极限（0%），而该极限不在Hub的许可空间内。由此产生了一个“幻影”——一个看似合规、没有有效父对象，却由公司自己的系统生成的辐射投资组合。这个幻影通过了每一项局部检查，唯独未能通过全局检查。在工业级SMA平台上，这些孤立账户悄然累积。

解决方法是提出一项拓扑要求：所有许可空间都必须是**闭集**（包含其边界，即 ≥ 0 而非 > 0）。这样可以确保重新实现映射是**真**的（紧集的原像仍为紧集）——没有任何投资组合能够脱离系统逻辑，每个客户账户也都有一个有效的父策略。

主要结果

基于这一拓扑基础，本文确立了四项结构性性质——每项性质都对应一个定理并附有证明——回答了任何投资组合构建团队最终都会面对的问题。

我们能否逐阶段验证流程管线？可以。多阶段投资组合构建能够保持对齐：如果每个阶段都单独满足合规要求，那么复合后的流程管线也满足合规要求。无需另行进行端到端验证。（组合性，定理5.5。）

我们能否在错误发生前加以防范？可以。前推–拉回伴随（定7.7理）证明，构建之后检查约束，与在构建之前限制输入，两者等价。这定义了“安全Hub”——枢纽空间中的一些区域，在这些区域中，任何策略都会自动生成合规辐条。这一转变意味着从被动修复出问题的账户，转向主动预防。

我们能否集中管理合规？可以，但需采取保守方式。在大型公司中，一个投资组合会经过多个团队：资产配置 $\rightarrow$ 证券选择 $\rightarrow$税务叠加 $\rightarrow$交易。贝克–切瓦利条件（定理8.4，图7）保证，尽早在枢纽层级检查合规是保守的：如果某项策略在上游通过检查，那么经重新实现后，也会在下游通过检查。合规检查可以集中进行，而不必在每个交易台重复开展。

筛选顺序重要吗？不重要。弗罗贝尼乌斯互反律（定理9.1）决定了筛选（例如 ESG 筛选）如何与优化相互作用。考虑两个同时存在的要求：枢纽约束 R （“共同基金必须与成长型资产配置保持一致，容差为 5%”）和辐条约束 S （“最终的交易所交易基金投资组合必须跟踪一个被动篮子，误差不超过 50 个基点”）。弗罗贝尼乌斯互反律证明，先按成长目标筛选枢纽，再优化为交易所交易基金，与先进行优化、再进行筛选，所得有效客户投资组合集合完全相同。这提供了真正的灵活选择：先筛选以提高速度，或最后筛选以提高报告透明度——受托结果完全一致。

扩展 1：大规模定制与用户画像

基础理论假设枢纽与辐条之间存在静态关系。但策略会不断演变——在退休市场中，策略必须根据客户的年龄、风险承受能力或税率档次动态调整。

第 16节介绍了**用户画像索引投资组合**：“对象”并非单一的投资组合空间，而是由人口统计变量索引的一组空间。

这使我们能够将滑行路径建模为连续的数学对象，而不是由一组离散基金（2030、2035、2040）构成的集合（见图 15）。我们可以应用“跨世代约束”，例如要求权益配置随着年龄增长而平滑下降。该框架确保针对“30岁”群组做出的重新实现决策能够一致地传递至“31岁”群组，从而避免因各年份分别管理而产生的锯齿状或不一致的转型路径。

扩展 2：设计策略菜单（DOTS）

首席投资官往往不希望指定单一投资组合，而是希望定义一个由允许选项构成的“菜单”——“您可以任意组合这 5 位已批准的管理人，但总费用不得超过 50 个基点。”

第 17 节介绍了 **DOTS（系统双幺半群理论）**模型。对齐关系充当生成元：我们取一个枢纽空间，并通过施加约束对其进行“作用”，从而生成一个由允许的辐条构成的“菜单”（见图17）。中央办公室定义沙盒的边界——风险和费用的限额，而具体的选择则交由本地投资组合经理或自动化税损收割算法决定。

扩展 3：管理不完美的求解器（概率风险）

在实践中，优化过程并不简单。求解器会受到数值噪声、抖动和局部最优解的影响；市场流动性有限；理论上的交易未必能够执行。

第 18节将框架扩展至 **HSP-r（枢纽辐射风险）**。在此，重新实现的结果并非单一的点，而是一个概率分布——一片可能结果的“云”。我们介绍两种管理此类风险的方法：

安全半径：我们围绕目标投资组合计算一个“缓冲区”（例如，根据求解器可能产生的误差来定义）。系统会验证整个缓冲区是否都位于合规限值内。如果求解器的误差幅度为 1%，我们就将合规边界收窄 1%，以确保安全。

Wasserstein 安全性（“修复成本”）：有时，投资组合仅因相差几分之一美分而在技术上不合规。拒绝它会造成不必要的换手——治愈方法比病情本身更糟。借助最优传输理论（第 21 节），我们不再将对齐定义为二元的“是/否”，而是将其视为一种成本：“修复这个投资组合预计需要多少交易成本？”如果“修复成本”低于微量门槛（例如，换手率的 1 个基点），系统就会接受该投资组合（见图 22）。集合隶属关系的僵化逻辑让位于交易成本的经济逻辑。

系统架构与实现

附录D将这一理论转化为信息技术系统的具体蓝图。在当前实践中，支配投资组合变换的业务逻辑通常存在于Python脚本或Excel宏中，对合规而言不透明，且难以更新。

我们提出一个**范畴编排器**（图28），它位于投资平台的中心。

- 语义核心： 编码范畴结构——对象、态射和复合律——并强制执行顺序约束（例如，当税务优化与 ESG 筛选不可交换时，必须在 ESG 筛选之后进行税务优化）。

- 求解器接口： 将数值计算委托给专用求解器（Gurobi、Axioma 等），使系统不依赖特定求解器：无需重写合规逻辑，即可替换优化器。

- 证据账本： 不仅存储最终投资组合，还存储态射——连接枢纽与辐条的具体审计轨迹（2-胞腔）。这提供了完整溯源：系统可以重建为何 针对特定客户进行了特定交易。

结论

向工业规模的投资组合定制转型，需要一套关于投资组合之间关系的理论，而不仅仅是针对单个投资组合的理论。现有投资组合理论并非为此而设计；它一次只优化一个投资组合，对于变换如何复合则只字未提。本文提出了一个数学基础。该框架能否经受住生产环境系统的考验——这些系统中求解器容差问题棘手、组织政治错综复杂，数据也总是无法与模型完全吻合——仍有待观察。定理保证了在其假设条件下的相干性；但这些假设本身是理想化的。生产环境中最先失效的很可能是确定性：现实中的优化器会抖动，因此第三部分的概率扩展才应运而生。其次会失效的，是认为许可空间预先已知这一假设；在实践中，许可空间需要协商确定、不断修订，有时还会彼此矛盾。不过，我们认为，这些理想化设定正是值得追求的方向——它们阐明了相干性的含义，然后再探究任何特定系统是否能够实现它。

致谢

作者感谢 Kevin Davenport、Ella Sinfield 和 Kelly Densmore 提供注释，感谢 Greg Zitelli 和 David Jaz Myers 提出促成第 18 节和 17节内容的建议，并感谢 Brendan Fong 的支持与鼓励。本研究的早期版本曾在 Topos Institute 非正式地作报告，并根据听众提出的建议进行了完善，尤其是公理化部分（第 14节）。本研究还曾在 Capital Group 的理论研讨会以及 Capital Solutions Group 的长篇研究电话会议上作报告。

方法：大语言模型的使用

我使用了大语言模型——Claude（Sonnet 4.5、Opus 4.5、Opus 4.6）、Gemini（Pro 2.5、3）和 GPT-5——作为技术助手，用于 LaTeX 排版、文献识别、对标准推导进行常规验证，以及编辑润色。概念框架、定义或证明均非由模型提出。我将这些模型视为可能出错的起草工具，而它们确实会出错。我亲自核验了所有数学证明、图表和金融逻辑，并对本作品最终的准确性和原创性承担全部责任。

免责声明

此处表达的观点仅代表作者本人，并不一定反映 Capital Group 的观点或政策。本作品仅供参考。示例均为通用示例，仅用于说明目的；不一定反映 Capital Group 实际的投资流程或其他业务流程。附录中的概念系统架构和工作流程D 仅为阐述之目的而纳入。

作者与 Capital Group 对本文所含信息的准确性或完整性不作任何明示或默示的陈述或保证。作者与 Capital Group 对因使用该信息而产生的任何错误、遗漏或亏损概不承担责任。

1 引言

1.1 投资组合空间与重新实现

给定一个有限的资产集合 $\mathcal{A} = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$，**仅做多投资组合** 会为每项资产 a_i 分配一个非负权重 $x_i \geq 0$，使权重之和为一：$\sum_{i=0}^{n} x_i = 1$。

所有此类投资组合构成标准的 n-单纯形：

$$\Delta^n = \left\{ (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, x_i \geq 0, \sum_{i=0}^{n} x_i = 1 \right\}$$

注释 1.1（放宽仅做多限制）。 如果允许卖空头寸和杠杆，所有投资组合的空间为 $\mathbb{R}^n$。这种设置过于简单，无法处理与为卖空头寸或杠杆头寸提供资金相关的其他问题；我们不再对此进行讨论。

在实践中，投资者很少被允许持有 Δ^n中的任何 投资组合。投资组合几乎总是受到基准约束的限制：头寸限制、行业界限、监管要求、ESG筛选器。

这促成了我们的核心定义：**允许的投资组合空间** 是 $K \subseteq \Delta^n$的一个**闭子集**。几何对象 K，而非完整的单纯形 Δ^n，才是真正的允许投资组合空间。

注释 1.2（资产集合）。 不同的投资组合空间可能提供不同的可用资产集合——例如共同基金与交易所交易基金、主动型基金与被动型基金——但它们代表的资产类别相同。因此，我们有必要将投资组合映射到一个共同的“定量属性空间”，以比较其投资特征（第 11节）。

投资组合重新实现 是指将投资组合从一个许可空间转换到另一个许可空间。重新实现 $f : K_1 \to K_2$ 将一个“枢纽”投资组合（例如，$K_1 \subseteq \Delta^n$中的主动策略）映射到一个“辐条”投资组合（例如，$K_2 \subseteq \Delta^m$中的被动ETF实现）。示例包括：

- 投资组合复制</style}：在新的投资载体 K_2中复制来自 K_1 的策略。
- **资产替换**：将主动型共同基金投资组合（K_1）替换为定制化低费率ETF组合（K_2）。
- **限制**：仅使用 K_2 中的受限证券集合，重新实现来自 K_1 的一般投资组合（例如，ESG筛选资产集合）。
- **聚合**：将个股投资组合（K_1）转换为行业配置（K_2）。
- **因子分解**：将证券权重（K_1）转换为因子风险敞口（K_2）。

从许可空间 $K_1 \subseteq \Delta^n$ 到 $K_2 \subseteq \Delta^m$的投资组合再实现，在数学上是一个**连续映射** $f : K_1 \to K_2$。我们允许 f 是非线性的，因为实际中最常见的再实现方式（例如寻找税务最优或低费用的替代方案）是通过约束优化构建的（第 11 节），通常并非简单的仿射映射。

1.2 组合性挑战

在实践中 因此，投资组合管理流程通常涉及一系列重新实现链：

$$K_1(\text{Funds}) \xrightarrow{f_1} K_2(\text{ETFs}) \xrightarrow{f_2} K_3(\text{Factors})$$

在每个阶段，我们都会施加对齐，并将其建模为**闭关系** $R \subseteq K_i \times K_j$。

- 交易所交易基金层面的跟踪误差对齐（必须跟踪共同基金）
- 因子层级的因子风险预算
- 针对更抽象的投资组合空间（例如资产类别空间）定义的对齐

关键问题:

1. 对齐如何在重新实现的过程中传递?
2. 我们能否在中间阶段验证对齐，还是必须追溯到原始证券?
3. 验证的顺序是否重要?

4。何时可以将复杂的多阶段策略分解为更简单的部分 ?

这些问题会在一些可辨识的转折点变得迫切：(a) 规模——中心辐射关系的数量超出临时管理的能力，需要通过电子表格追踪数十个辐条；(b) 复杂性——相互重叠的监管、环境、社会和治理及税务筛选条件，使得人工验证约束之间的相互作用变得不可靠；(c) 准备——预期中的结构性变化（监管改革、基准转换、新的资产类别授权）要求我们确信，在进行修改之前，这些修改能够正确传播。

经典投资组合理论 [46, 61, 34, 49] 并非为回答这些问题而设计——它旨在回答另一个同样重要的问题，即如何以最优方式构建单一投资组合。正如 Markowitz 所说：“投资组合的选择过程可以分为两个阶段”——形成信念和选择投资组合 [46]。我们关注的是第三个阶段，而 Markowitz 没有理由考虑这一阶段：让这一选择沿着一条变换链连贯地传播。这个间隙并非经典理论的缺陷，而是其适用范围所致。

更准确地说，我们需要一种复合理论，其中：

- 投资组合重新实现能够正确复合
- 对齐关系具有传递性
- 两种复合能够协调一致地相互作用

这正是**双范畴** [9, 32, 43]所提供的结构。

1.3 双范畴框架

一个**双范畴** $\mathbb{D}$ 提供了一个包含**对象**、两种不同类型的态射——**水平态射**（例如， $f : A \to B$）和**垂直态射**（例如， $R : A \dashrightarrow C$）——以及**2-胞腔** α 的框架。2-胞腔填充由这些态射构成的方形，例如：

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle R}\downarrow & \Downarrow \alpha & \downarrow{\scriptstyle S} \\ C & \xrightarrow[g]{} & D \end{array}$$

水平态射沿水平方向复合（$\circ_h$），垂直态射沿垂直方向复合（$\circ_v$），而2-胞腔既可以水平复合，也可以垂直复合。这些复合必须满足结合律、恒等律和**交换律**，以确保水平复合与垂直复合2-胞腔的顺序无关。

我们构造一个双范畴 $\mathbb{HS}$ （中心辐射）：

$$\begin{array}{ccc} K_1 & \xrightarrow{f(\text{re-impl.})} & K_2 \\ {\scriptstyle R(\text{align})}\,\vdots\downarrow & & \downarrow\vdots\,{\scriptstyle S(\text{align})} \\ K_3 & \xrightarrow[g(\text{re-impl.})]{} & K_4 \end{array}$$

对象：允许的投资组合空间 K （单纯形的闭子集 Δ^n）

水平态射：连续投资组合重新实现 $f\colon K_1 \to K_2$

垂直态射：闭对齐关系 $R \subseteq K_1 \times K_3$

2-胞腔：确保重新实现保留对齐关系的包含关系

如果一个双范畴中的每个方形（2-胞腔）都由包含关系或相等关系决定，且没有非平凡的2-胞腔结构，则称其为薄的。在薄双范畴中，交换律自动成立。例如，双范畴 $\mathbb{HS}$ 是薄的。（第15节将不再采用薄性假设，并介绍一个更丰富的框架。）

1.4 为何对象要闭

许可空间为闭集单纯形子集的要求并非技术上的细枝末节。如果对象是开集（例如要求严格正权重，$x_i > 0$），则从中映射出的连续映射不一定是真映射，而闭对齐关系的推前 $f_!R$ 可能无法保持闭性——从而产生“幻影投资组合”：它们看似合规，却不存在有效的中心原像。第7节证明，对象的闭性（因此也具有紧致性）会使所有水平态射自动成为真映射；第10节则展示了缺少这一性质时会出现的精确问题。

1.5 主要结果

该框架得出以下定理。定义和证明都很直接——不需要新的数学知识。其新颖性完全在于模型本身：即主张这些特定的对象和态射正是形式化投资组合重新实现所需的正确对象和态射。

(I) **闭性保持（定理 7.4）**：投资组合重新实现自动是真映射，因此在向前传播（推前）过程中保持对齐关系的闭性。

(II) **合成相干性（定理 5.5）**：双范畴 $\mathbb{HS}$（由许可空间和真重新实现构成）满足所有双范畴公理，且具有闭合成运算。

(III) **伴随（定理 7.7）**：推前 $(f_!)$ 和拉回 (f^*) 运算构成一个伴随对：

$$R \subseteq f^*S \iff f_!R \subseteq S$$

这表明，对齐的枢纽空间和辐条空间表述之间存在一种形式化关系。

（IV）**Beck–Chevalley（定理 8.4）**：在第 8 节中，我们证明了一条 Beck–Chevalley 定律，适用于已有的水平态射交换方块，且这些交换方块为逐点笛卡尔（定义8.2）——这是一个相当严格的条件。幸运的是，该定律“较易”的一半对一般交换方块成立，而正是这一半在实践中发挥作用：它确保上游合规性检查是保守的。

（V）**弗罗贝尼乌斯互反律（定理 9.1）**：对齐关系的交集与重新实现可交换：

$$f_!(R \cap f^* S) = f_! R \cap S$$

投资组合可以等价地在重新实现之前或之后进行筛选。

（VI）**最优重新实现的构造（定理 11.6）**：我们构造重新实现，将其作为优化问题的解（例如，在跟踪误差约束下最小化费用）。利用贝尔热最大值定理，我们证明该优化构造出一个定义良好的连续映射 f，其定义域为一个**闭集** K——而这正是我们双范畴的对象。

(VII) **投资组合变更的传播（第 12节）**：投资组合变更可以得到协调一致的传播。适当性确保闭对齐的推前仍然闭合。随后，伴随、Beck–Chevalley 和 Frobenius 律确保筛选与重新实现可交换。

(VIII) **无闭对象时的失效（定理 10.3）**：尝试使用非闭的允许空间（例如开内部）会破坏适当性。通过对推前取拓扑闭包来“修复”，会破坏伴随、Beck–Chevalley 和 Frobenius 性质，并引入“幻影”投资组合。这证明了我们采用限制性定义的合理性。

综合来看，这些结果转化为具体的操作属性：

- **路径无关性**：多阶段策略可以按任意顺序验证
- **分解**：复杂的优化可以拆分为更简单的阶段
- **边界稳定性**：极限投资组合的行为具有可预测性
- **对齐交换性**：筛选与重新实现可以重新排序
- **组合推理**：大型策略可以由已验证组件构建
- **对非线性复制或定制进行建模**：该框架明确支撑优化导出的重新实现。

组织结构

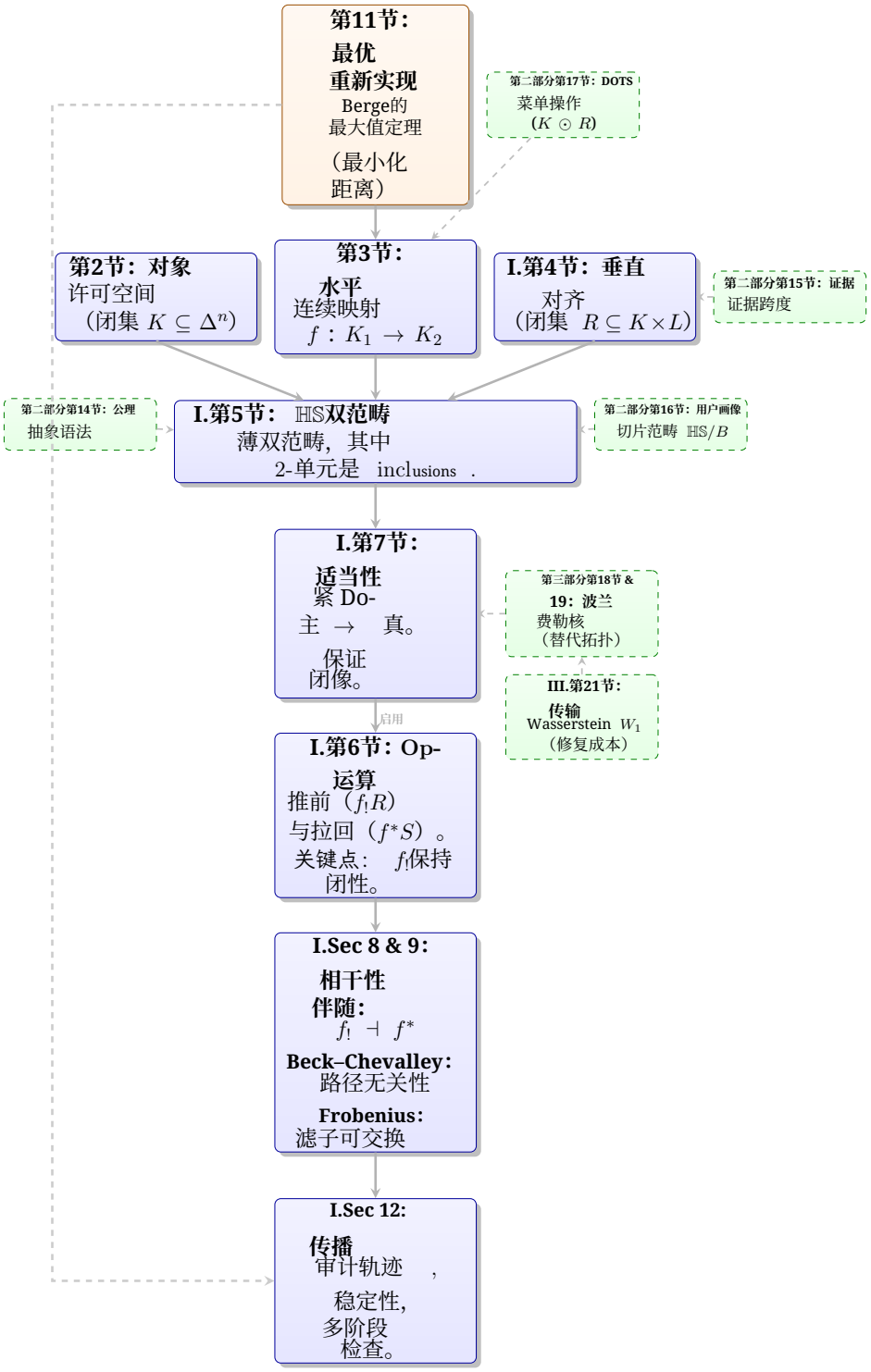
第一部分：基础理论 构建核心 $\mathbb{HS}$ 框架。第2 节将范畴中的对象定义为环境单形内的允许区域。第3 节介绍水平态射（重新实现），第4 节介绍垂直态射（对齐关系）。第5节将这些组成部分整合为 $\mathbb{HS}$双范畴。第6 节定义拉回和推送运算，第7 节则确立一项关键结果：我们的重新实现自动构成真映射。第8 节和9 节证明了有关路径 20 的主要相干定理

独立性和筛选。第10 节分析非闭合模型的失效模式。第11节提供一种通过优化推导真重新实现的构造性方法。最后，第12 节和13 节讨论投资组合管理的实际应用及计算实现。

第二部分：公理化与扩展 介绍更广泛的理论背景和复杂的用例。我们先在第 14 节提出一个公理化框架，作为该理论抽象的“语法”。接着，我们在第 15 节通过跨度扩展该框架，纳入“对齐证据”。后续章节将围绕具体的产业问题，发展两种替代性的语义模型：用于滑行路径的按角色索引投资组合（第16 节）以及用于处理允许辐条菜单的 DOTS 框架（第 17 节）。

第三部分：概率理论 发展该框架的随机扩展。第 18 节介绍概率中心辐射范畴 HSP-r，将重新实现建模为波兰空间上的紧 Feller 核。第 19 节和 20 节提出概率合规的两种方法——安全半径和最高密度区域；第 21 节则通过 Wasserstein 距离介绍基于传输的安全性，以及相关的复合、伴随和相干性定理。后续章节将探讨生产环境中随机核的估计与存储，以及连续概率模型与离散投资组合约束之间的相互作用（第 23 节）。最后，第 24 节将框架的三个层面——$\mathbb{HS}$、DOTS 和 Wasserstein——应用于包含非流动性资产和半流动性资产的流动性感知投资组合构建问题。

逻辑结构


第11节：
最优
重新实现
Berge的
最大值定理
（最小化
距离）
第二部分第17节：DOTS
菜单操作
$(K \odot R)$
第2节：对象
许可空间
（闭集 $K \subseteq \Delta^n$）
第3节：
水平
连续映射
$f : K_1 \to K_2$
I.第4节：垂直
对齐
（闭集 $R \subseteq K \times L$）
第二部分第15节：证据
证据跨度
第二部分第14节：公理
抽象语法
I.第5节：$\mathbb{HS}$双范畴
薄双范畴，其中
2-单元是 inclusions .
第二部分第16节：用户画像
切片范畴 $\mathbb{HS}/B$
I.第7节：
适当性
紧 Do-
主 → 真。
保证
闭像。
第三部分第18节 &
19：波兰
费勒核
（替代拓扑）
III.第21节：
传输
Wasserstein W_1
（修复成本）
启用
I.第6节：Op-
运算
推前（$f_!R$）
与拉回（f^*S）。
关键点： $f_!$保持
闭性。
I.Sec 8 & 9：
相干性
伴随：
$f_! \dashv f^*$
Beck–Chevalley：
路径无关性
Frobenius：
滤子可交换
I.Sec 12:
传播
审计轨迹 ，
稳定性，
多阶段
检查。

符号与术语

符号	数学定义	金融解释
核心对象与态射		
Δ^n	$\mathbb{R}^{n+1}$ 中的标准 n-单纯形。	所有理论上可能的使用 $n+1$ 资产的只做多投资组合。
K	一个闭子集 $K \subseteq \Delta^n$。	A**允许的投资组合空间**。该满足基准约束的投资组合条件（例如，头寸限制，ESG筛选器）。
$f : K_1 \to K_2$	许可集之间的连续映射sible 空间。	**重新实现**。确定性的将每个有效的枢纽投资组合映射到唯一的辐射投资组合（例如，将模型投资组合中的基金优化为一个交易所交易基金投资组合）。一个交易所交易基金投资组合）。
$R \subseteq K_1 \times K_2$	一个闭关系。	**对齐**。连接两个投资组合的约束。
$\mathbb{HS}$	中心辐射双重类-型。	组合框架组织投资组合、重新实现和对齐。
运算		
$f_!R$	R 沿 f的推前。	**向前传播**。由.....构成的集合由有效.....派生的有效辐条投资组合枢纽投资组合。
f^*S	沿 f对 S 的拉回。	**预对齐**。识别哪些枢纽投资组合将产生合规的辐射投资组合。
$S \circ R$	关系复合。	**传递对齐**。检查跨多个步骤的对齐（例如，基金 $\to$ 基准 $\to$因子模型)。
$Graph(f)$	映射的图 $\{(x, f(x))\}$ f.	观察 a 确定性的 re-实现 as a 具体 type 对齐关系。

符号	数学定义	金融解释	
扩展（第二部分和第三部分）			
p: $K \to B$	基空间上的展示映射 B。	**投资者画像索引**。 受可变参数约束的投资组合（例如，滑行路径中的投资者年龄）。	
$(X,\ \mathcal{B},\ \mu)$	波兰测度空间。	配备了一个无体积/概率的投资组合空间。	
$P : X \rightsquigarrow Y$	紧 Feller 核。	**随机再实现**。将枢纽投资组合映射到概率辐条投资组合的能力分布（例如，带噪优化）。	A
$P^* S$	概率拉回。	映射到合规辐条且概率为 1 的枢纽集合。	
$K \odot R$	关系 R 对集合 K 的作用。	**菜单生成**。所有可行的辐条集合，可供给定枢纽使用，受约束 R (DOTS框架)。	

第一部分基础理论

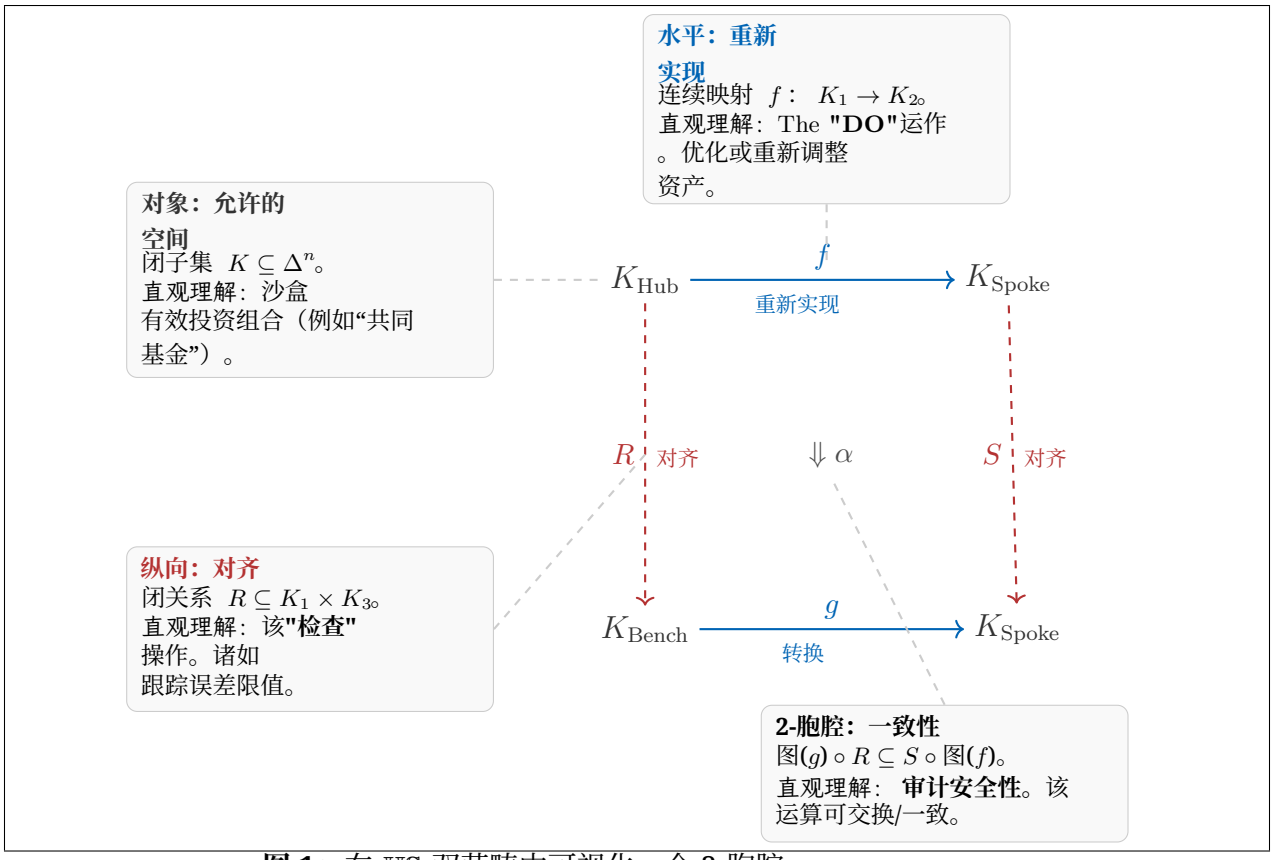


图 1： 在 $\mathbb{HS}$ 双范畴中可视化一个 2-胞腔。

2 投资组合空间：环境与许可

2.1 环境投资组合空间（单纯形）

定义 2.1（资产集）。资产集是由有限个不同投资机会组成的集合 $\mathcal{A} = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$。

例如，资产集的元素可以是单个证券、共同基金或交易所交易基金，也可以是资产类别或因子敞口等更抽象的实体。

定义 2.2（环境投资组合空间）。资产集 $\mathcal{A}$ 上满足 $|\mathcal{A}| = n + 1$ 的环境投资组合空间是标准的 n-单纯形：

$$\Delta^n(\mathcal{A}) = \left\{ (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, x_i \geq 0, \sum_{i=0}^{n} x_i = 1 \right\}$$

赋予其从 $\mathbb{R}^{n+1}$ 继承的子空间拓扑。当 $\mathcal{A}$ 明确时，我们记作 Δ^n。

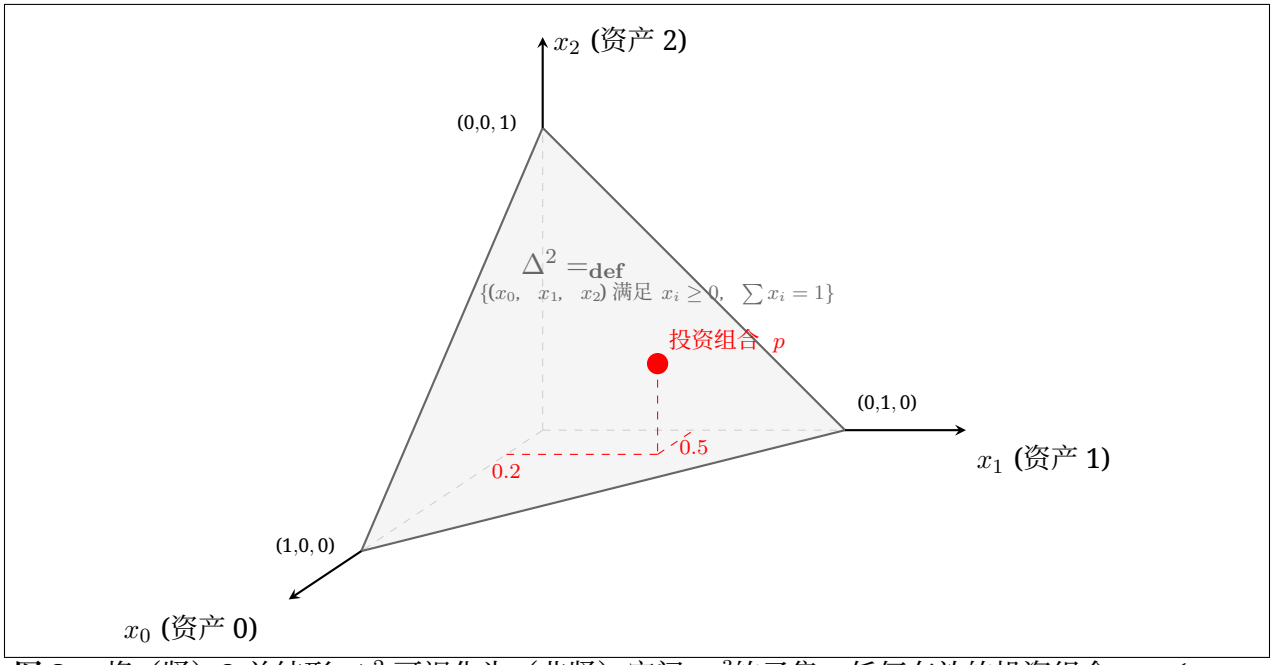


图 2： 将（紧）2-单纯形 Δ^2 可视化为（非紧）空间 $\mathbb{R}^3$的子集。任何有效的投资组合 $p = (x_0, x_1, x_2)$ 均位于三角形平面段上，其权重之和为 1 且均为非负数。

命题 2.3 (单纯形性质)。环境投资组合空间 Δ^n 是紧、凸、*Hausdorff*、道路连通且局部紧的。

Δ^n 的**紧致性** 是我们框架中最重要的性质。

2.2 允许的投资组合空间（对象）

定义 2.4（允许的投资组合空间（对象））。一个 **允许的投资组合空间** 是一个 **闭子集** $K \subseteq \Delta^n$，其中 n。这些将作为第 $\mathbb{HS}$ 5 节中定义的双范畴的对象。我们将 K 解释为基线对齐下的允许区域（例如，头寸限制、行业界限）。

注释 2.5。 严格来说，我们需要记录所指的是哪些资产：允许的投资组合空间应定义为一个对 $(\mathcal{A}, K)$，其中 $\mathcal{A}$ 是资产列表，而 K 是一个几何对象，用于表示持有这些资产的投资组合。不过，为了简化记号，我们将用 K 代替 $(\mathcal{A}, K)$，并将 $\mathcal{A}$ 隐含处理。

例 2.6 （ Δ^2中的允许区域）。 设 $\mathcal{A} = \{$股票、债券、现金$\}$。投资者可能会有以下约束：“股票占比不超过 50%”（$x_0 \leq 0.5$）和“现金占比至少为 10%”（$x_2 \geq 0.1$）。许可空间为：

$$K = \{x \in \Delta^2 \mid x_0 \leq 0.5, x_2 \geq 0.1\}$$

这是一个位于三角形 Δ^2内部 的闭凸多边形（梯形）。这是我们范畴中的一个有效对象。

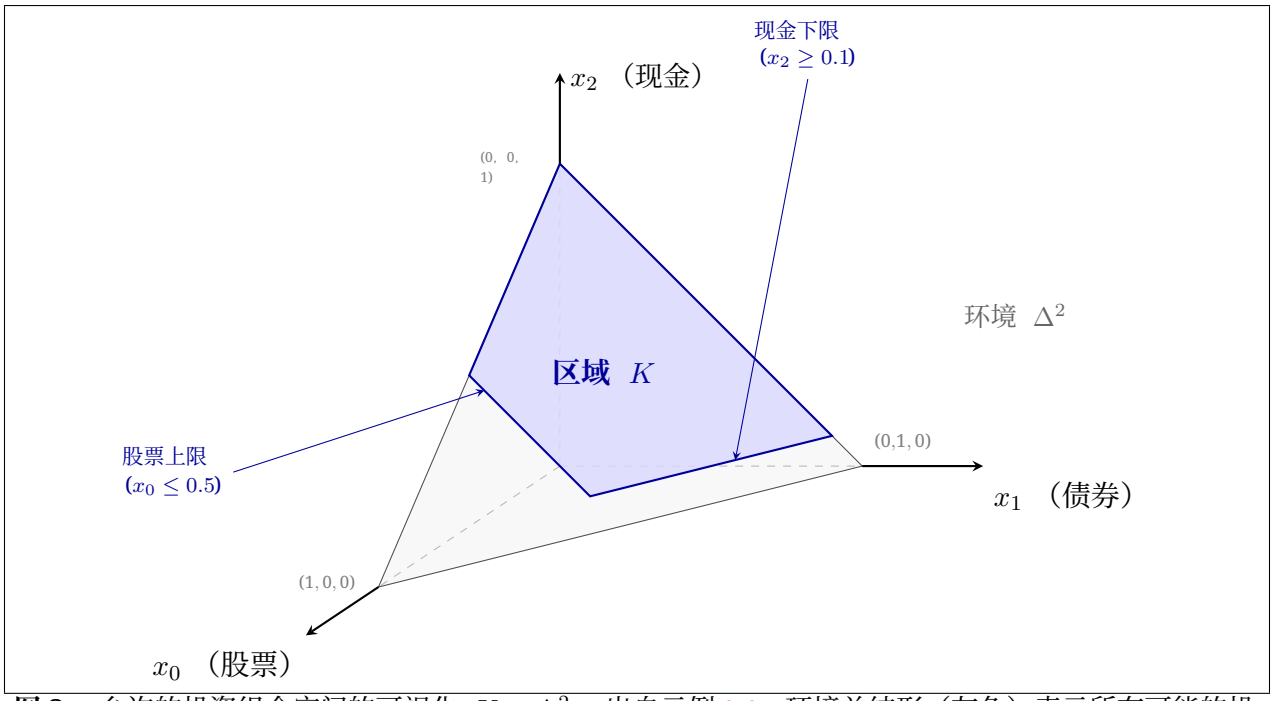


图 3： 允许的投资组合空间的可视化 $K \subseteq \Delta^2$，出自示例 2.6。环境单纯形（灰色）表示所有可能的投资组合。允许区域 K （蓝色多边形）由以下约束的交集定义： $x_0 \leq 0.5$ （股票上限）和 $x_2 \geq 0.1$ （现金下限）。

请注意，每个允许的投资组合空间 K 都是紧致拓扑空间。

3 投资组合重新实现（水平态射）

3.1 定义与解释

定义 3.1（重新实现（水平态射））。从许可空间 $K_1 \subseteq \Delta^n$ 到 $K_2 \subseteq \Delta^m$ 的**水平态射**（或投资组合重新实现） $f: K_1 \to K_2$ 是从拓扑空间 K_1 到 K_2的**连续映射**。

3.2 投资组合重新实现示例

示例 3.2（行业聚合）。考虑由以下行业组成的集合 $\mathcal{B} = \{$科技、金融、能源$\}$。令$\mathcal{A} = \{s_1, ..., s_{100}\}$为一个由 100 只股票组成的集合，并按行业划分：

$$\text{Tech} = \{s_1, \ldots, s_{30}\}, \quad \text{Finance} = \{s_{31}, \ldots, s_{60}\}, \quad \text{Energy} = \{s_{61}, \ldots, s_{100}\}$$

令 $K_1 = \Delta^{99}(\mathcal{A})$ 和 $K_2 = \Delta^2(\mathcal{B})$ 分别为这些资产集上的全单纯形（坐标分别由资产 s_1、...、s_{100}和行业索引）。重新实现 f: $K_1 \to K_2$为：

$$f(x_{s_1}, \ldots, x_{s_{100}}) = \left(\sum_{i=1}^{30} x_{s_i}, \sum_{i=31}^{60} x_{s_i}, \sum_{i=61}^{100} x_{s_i} \right)$$

这是一个连续的线性映射。它是一个有效的水平态射。

示例 3.3（受限投资范围下的重新实现）。令 $\mathcal{A} = \{$股票 1, ..., 500$\}$（标普500指数）和 $\mathcal{B} = \{$股票 1, ..., 100$\}$（一个 ESG筛选子集）。

- 环境辐条空间为 $\Delta^{99}(\mathcal{B})$。令 $K_2 = \Delta^{99}(\mathcal{B})$。
- 环境枢纽空间为 $\Delta^{499}(\mathcal{A})$。允许区域 K_1 仅由持有环境、社会和治理资产的投资组合组成：

$$K_1 = \{x \in \Delta^{499} \mid x_i = 0 \text{ for } i = 101, \ldots, 500\}$$

- K_1 是 Δ^{499} 的闭面（它是一个子单纯形），因此是一个有效对象。
- 平凡的重新实现 $f: K_1 \to K_2$ 是投影：

$$f(x_1, \ldots, x_{100}, 0, \ldots, 0) = (x_1, \ldots, x_{100})$$

此映射是线性且连续的，因此是一个有效的水平态射。

我们可能有兴趣将其扩展为一种重新实现 $g: \Delta^{499}(\mathcal{A}) \to K_2$，将任意投资组合映射为其“最接近的符合ESG标准的投资组合”。除非明确“最接近”的含义，否则这个问题并非良定义。

示例 3.4 (因子分解)。设 $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ (资产)和因子（参见 [22]）

$$\mathcal{B} = \{\text{Market, Value, Momentum, Quality}\}$$

给定因子载荷矩阵 $F \in \mathbb{R}^{4 \times n}$，其中 F_{ji} 是资产 a_i 对因子 j的暴露度，我们希望将投资组合分解为因子配置，并将范围限定为因子敞口均非负的投资组合。

- 令 $K_1 = \{x \in \Delta^{n-1} \mid (Fx)_j \geq 0 \text{ 对所有 } j\}$成立。这是与$\Delta^{n-1}$的闭半空间的交集，因此 K_1 是一个闭且紧的集合（有效对象）。
- 令 $K_2 = \Delta^3(\mathcal{B})$。
- 定义归一化映射 $f : K_1 \to K_2$ 如下：

$$f(x) = \frac{Fx}{\|Fx\|_1}.$$

只要 $\|Fx\|_1 > 0$，该映射就是良定义且连续的。然而， K_1 可能包含x 投资组合，其 $Fx = 0$（总因子敞口为零）；在这些投资组合处， f 未定义，通常也无法将其连续延拓至这些点（当 $Fx \to 0$ 时， $Fx/\|Fx\|_1$的极限取决于趋近方向）。

为获得有效的水平态射，我们施加以下条件之一，以确保$\|Fx\|_1 > 0$ 在 K_1上成立：

（a）具有完全覆盖的非负载荷。如果 F的条目均为非负，则对于 $x \in \Delta^n$，$(Fx)_j \geq 0$自动成立，且 $\|Fx\|_1 = (\mathbf{1}^T F)\, x$。只有当投资组合支撑于 i 资产上，且这些资产 $\sum_j F_{ji} = 0$（完全没有因子暴露）时，该值才会消失。从 $\mathcal{A}$中排除这类因子惰性资产——或者等价地，假设每项资产至少加载于一个因子——即可在整个 Δ^{n-1}上得到 $\|Fx\|_1 > 0$，并且 $K_1 = \Delta^{n-1}$。

（b）一般性。对于一般的（可能含负值的）载荷矩阵，假设 $\ker(F) \cap K_1 = \emptyset$，即投资组合 K_1 中不存在对所有因子的暴露度均为零的情况。由于 $\ker(F)$在 $\mathbb{R}^n$中的余维至多为 4，当 $n \gg 4$时，此条件对一般的 F 成立。于是， $\|Fx\|_1$ 在紧集 K_1上连续且严格为正，因此 f 在 K_1上连续。

（c）最低敞口阈值。对于所有 j，将 K_1 替换为 $K_1^{(c)} = \{x \in \Delta^n \mid (Fx)_j \geq 0\,,\ \|Fx\|_1 \geq c\}$，其中阈值 $c > 0$ 表示有意义的因子倾斜的最低水平。这仍然是 Δ^n 的闭紧子集（闭半空间与一个闭半空间的交集），且 f 在 $K_1^{(c)}$ 上连续。

在上述任一条件下， $f:\ K_1 \to K_2$ 是紧集之间的连续映射，因此是一个有效的水平态射。

示例 3.5（最优 ETF 替代（非线性））。 这是一个关键示例，将在第 11 节中完整展开。构造一个映射 f，将“枢纽”投资组合 x （例如，由共同基金构成）转换为并寻找“辐条”投资组合 $f(x)$（例如，由交易所交易基金构成），使其 费用最小化，同时满足 对 x暴露度的跟踪误差在一定范围 ϵ之内。

正如我们将在定理 11.6中证明的，这个优化问题自然定义了 :

1. 一个闭集的允许的“枢纽”空间 $K_1 = \{x \mid$可以进行跟踪$\}$。
2. 一个连续的（通常为非线性的）映射 $f : K_1 \to K_2$。

这为有效的非线性水平态射提供了一个实用来源。

4 对齐关系（垂直态射）

4.1 作为对齐的闭关系

定义 4.1（对齐关系（垂直态射））。**A垂直态射**（或对齐关系） R 从许可空间 $K_1 \subseteq \Delta^n$ 到 $K_3 \subseteq \Delta^p$ 是一个**闭子集**：

$$R \subseteq K_1 \times K_3$$

我们将（$x,\ z$） $\in R$ 记作“投资组合 $x \in K_1$ 与投资组合 $z \in K_3$对齐”。

请注意，对齐被视为一种简单的二元关系： x 和 z 要么对齐，要么不对齐。我们（目前）还没有“ x 和 z 对齐程度如何”的概念。

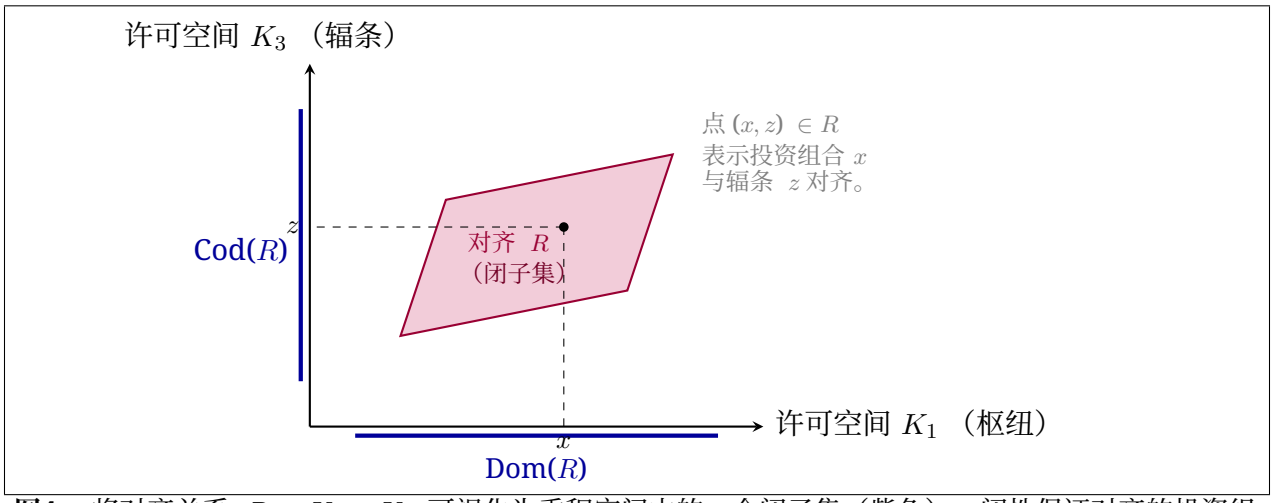


图4： 将对齐关系 $R \subseteq K_1 \times K_3$ 可视化为乘积空间中的一个闭子集（紫色）。闭性保证对齐的投资组合的极限仍保持对齐。

注释 4.2（解释）。 对齐关系编码了各种投资组合要求 ：

- **基准跟踪**：$R \subseteq K_1 \times K_{\text{基准}}$ 若投资组合 $x \in K_1$ 的跟踪误差相对于基准 $z \in K_{\text{基准}}$为 $\leq \epsilon$，则 $R \subseteq K_1 \times K$ 将投资组合 $x \in K_1$ 与基准 $z \in K$ 联系起来。请注意， K_1 和 $K_{\text{基准}}$ 通常是不同的投资组合空间：例如， $K_{\text{基准}}$ 中的投资组合可能由资产类别或指数构成，而 K_1 中的投资组合则可能由共同基金菜单构成。

- **风险预算**：如果两个投资组合的风险画像足够接近，则 $R \subseteq K_1 \times K_1$ 将它们联系起来。
- **因子敞口**： R 将投资组合与因子载荷向量相关联。

闭性确保稳定性：如果序列 $(x_k,\ z_k) \in R$ 收敛到 $(x,\ z)$，那么 $(x,\ z) \in R$。对齐关系在取极限时得以保留。

注释 4.3（作为对齐的合规性/资格/许可性）。 考虑特殊情形 $K_3 = \mathbf{1}$，其中 $\mathbf{1}$ 是单点集。在这种情况下，对齐关系 $R \subseteq K_1 \times \mathbf{1}$ 就是 K_1的一个闭子集。它可以视为从投资组合中划出一个较小的许可集合，其中的投资组合满足某些额外的合规要求。

4.2 垂直复合

定义 4.4（垂直复合）。给定 $R\colon K_1 \to K_2$ 和 $S\colon K_2 \to K_3$（即 $R \subseteq K_1 \times K_2$和 $S \subseteq K_2 \times K_3$），**垂直复合** 就是标准的关系复合：

$$S \circ R = \{(x,z) \in K_1 \times K_3 \mid \exists y \in K_2 : (x,y) \in R \text{ and } (y,z) \in S\}$$

$$\begin{array}{c} K_1 \\ \vdots\, R \\ \downarrow \\ K_2 \\ \vdots\, S \\ \downarrow \\ K_3 \end{array}$$

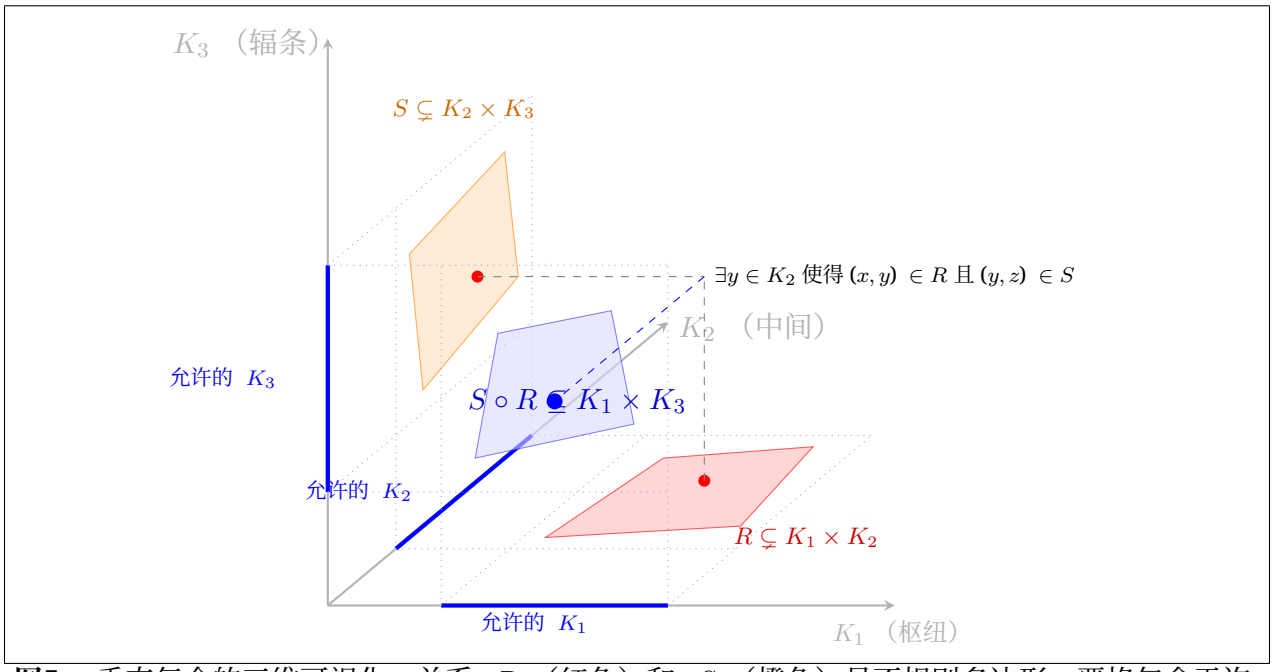


图5： 垂直复合的三维可视化。关系 R（红色）和 S（橙色）是不规则多边形，严格包含于许可集的积中（由蓝色虚线框标示）。关系 $S \circ R$（蓝色）是 K_1–K_3 平面的一个多边形子集。

引理 4.5（垂直复合的闭性）。若 R 和 S 是垂直态射（闭关系），则 $S \circ R$ 也是垂直态射（闭关系）。

证明。给定 $R \subseteq K_1 \times K_2$和 $S \subseteq K_2 \times K_3$，二者均为闭集。我们需要证明 $S \circ R$在 $K_1 \times K_3$中是闭集。考虑积 $R \times S$的子集 $E = \{((x,y),(y',z)) \in (R \times S) \mid y = y'\}$。该子集是闭集。对象 K_1、K_2、K_3 都是紧空间。因此 R 和 S 是紧空间。$R \times S$ 是紧空间，E 也是紧空间（因为它是紧空间的闭子集）。映射 $\pi\colon E \to K_1 \times K_3$ 定义为$\pi((x,y),(y,z)) = (x,z)$，是连续的。像 $S \circ R = \pi(E)$是紧的（紧空间在连续映射下的像仍为紧空间），因此它在豪斯多夫空间 $K_1 \times K_3$中是闭集。 □

例4.6（多层资产配置）。设 K_1 为由个别证券（股票、债券、现金）构成的投资组合空间，K_2 为资产类别投资组合空间

（例如，美国股票、国际股票、固定收益）。设 $g : K_1 \to K_2$ 为聚合映射，将各资产类别中证券的权重相加。

考虑以下两种对齐关系：

- R ： $K_1 \dashrightarrow K_2$：“实现”对齐。投资组合 $x \in K_1$ 与推荐的战术资产配置 $y \in K_2$ 对齐，若该投资组合在给定容差 ϵ内实现该资产配置： $R = \{(x, y) \mid \|g(x) - y\| \leq \epsilon\} \subseteq K_1 \times K_2$。

- S ： $K_2 \dashrightarrow K_2$：“政策”对齐。战术资产配置 $y \in K_2$ 与长期战略基准 $z \in K_2$ 对齐，若战术调整处于允许区间 δ内：$S = \{(y, z) \mid \|y - z\| \leq \delta\} \subseteq K_2 \times K_2$。

垂直复合 $S \circ R$： $K_1 \dashrightarrow K_2$ 将实际证券持仓 x 直接关联到战略基准 z。条件 $(x,\ z) \in S \circ R \subseteq K_1 \times K_2$ 表示，投资组合 x 是某种 战术资产配置 y 的有效实现，而该配置本身符合战略基准 z。

5 双范畴 $\mathbb{HS}$

5.1 双范畴的定义

定义 5.1 （允许的（中心辐射）投资组合空间的双范畴 $\mathbb{HS}$）。允许的（中心辐射）投资组合空间的 $\mathbb{HS}$ 双范畴由以下部分组成：

- **对象**：允许的投资组合空间 K （单纯形的闭子集 Δ^n）
- **水平态射**：连续重新实现 $f : K_1 \to K_2$
- **垂直态射**：闭对齐关系 $R \subseteq K_1 \times K_3$
- **水平复合**：标准函数复合 $g \circ f$。
- **垂直复合**：标准的关系复合 $S \circ R$。
- **水平单位**：$\mathrm{id}_K :\ K \to K$ （恒等映射）。
- **垂直单位**：$\Delta_K = \{(x,\ x) \mid x \in K\}$ （对角关系）。
- **2-胞腔**：对于一个方形

$$\begin{array}{ccc} K_1 & \xrightarrow{f} & K_2 \\ {\scriptstyle R}\,\vdots\downarrow & & \vdots\downarrow{\scriptstyle S} \\ K_3 & \xrightarrow[g]{} & K_4 \end{array}$$

  当且仅当包含关系 $\mathrm{Graph}(g) \circ R \subseteq S \circ \mathrm{Graph}(f)$ 成立时，才存在一个 2-胞腔。这使得 $\mathbb{HS}$成为一个**薄** 双范畴。

注释 5.2。 请注意，这一定义与双范畴最简单的例子——集合、函数和关系的双范畴——非常相似。其对象是集合，水平态射是集合函数，垂直态射是集合之间的关系，并且当上述包含关系成立时，2-胞腔就存在。然而，我们的定义具有更受限的对象类，同时也是拓扑的，从而形成了一个结构更少的双范畴。

注释 5.3 (图像闭性)。 对于紧豪斯多夫空间之间的任意连续映射 $f : K_1 \to K_2$，其图 $\mathrm{Graph}(f) = \{(x, f(x)) :\ x \in K_1\}$是 $K_1 \times K_2$的闭子集。这是因为映射 $x \mapsto (x, f(x))$ 连续，且 K_1是紧空间，所以其像是紧集，因而在豪斯多夫空间 $K_1 \times K_2$中是闭集。因此，$\mathrm{Graph}(f)$ 是 $\mathbb{HS}$中的一个有效垂直态射。

注释 5.4。 薄性假设体现了这样一种观点：对齐检查会产生二元的“是／否”答案——这种简化限制了表达能力，但也正是它使相干律自动成立。第 15节将不再采用薄性假设，并引入一个更丰富的框架，将对齐证据纳入其中。

定理5.5 （ $\mathbb{HS}$的良定义性）。 $\mathbb{HS}$ 是一个良定义的双范畴。

证明。 我们验证双范畴公理：

- 水平范畴： 连续映射的复合仍为连续映射；恒等映射是连续的。

- 垂直范畴： 闭关系的复合保持闭性（引理4.5）； 对角关系 Δ_K 在 $K \times K$中是闭集。

- 结合律和单位元： 水平结合律和单位元继承自函数复合；垂直结合律和单位元继承自关系复合。

- 2-胞腔与交换律： 2-胞腔条件 Graph(g) $\circ R \subseteq S \circ$ Graph(f) 是一个性质（而非结构），因此 $\mathbb{HS}$是薄的。交换律成立，因为关系复合关于包含具有单调性。对于水平粘贴：给定可复合的 2-胞腔 Graph(g) $\circ R \subseteq S \circ$Graph($f$)（左方块）和 Graph($g'$) $\circ S \subseteq T \circ$Graph($f'$)（右方块），单调性给出 Graph($g'$) $\circ$ Graph(g) $\circ R \subseteq$ Graph(g') $\circ S \circ$ Graph(f) $\subseteq T \circ$Graph(f') $\circ$Graph(f), 即 Graph($g' \circ g$) $\circ R \subseteq T \circ$Graph($f' \circ f$)。垂直粘贴的论证类似，利用 Graph($g$) $\circ R \subseteq S \circ$ Graph(f) 和 Graph(h) $\circ S' \subseteq T' \circ$Graph($g$)，通过相同的单调性得到 Graph($h$) $\circ (S' \circ R) \subseteq (T' \circ S)$ $\circ$Graph(f)。

□

注释 5.6（2-胞腔解释）。 包含图 Graph(g) $\circ R \subseteq S \circ$ Graph(f) 具有如下具体含义：

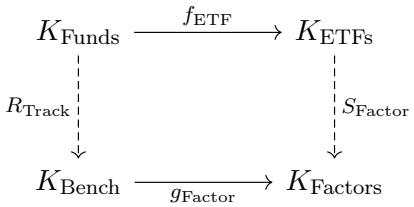
- Graph(g) $\circ R = \{(x,\ z) \mid \exists w \in K_3 :\ (x,\ w) \in R,\ g(w) = z\}$（通过 R向下“前往” w，然后通过 g 向右“前往” $z = g(w)$）
- $S \circ$Graph(f) $= \{(x,\ z) \mid (f(x)\ z) \in S\}$（通过 f向右“前往” $y = f(x)$，然后通过 S向下“前往” z）

2-胞腔条件意味着：“对于任何 投资组合 x，如果‘先向下再向右’的路径可行，那么‘先向右再向下’的路径也必须可行，并产生相同的对齐。”
注释 5.7（包含方向的金融直觉）。 2-胞腔包含的方向 Graph(g) $\circ R \subseteq S \circ$ Graph(f) 经过选择，以确保该框架发挥**安全保证**的作用，而不是成为僵化的恒等关系。

在金融操作中， R 和 S 通常表示合规或对齐界限（例如跟踪误差 $\leq$ 10基点）。包含关系断言：如果一个枢纽投资组合符合合规要求（R），那么由变换过程（$g \circ R$）生成的任何投资组合都必须落在允许的下游界限（$S \circ f$）之内。

如果将包含关系反过来（$S \circ$Graph(f) $\subseteq$Graph(g)$\circ R$），就意味着每个合规辐射投资组合都必须源自一个合规枢纽投资组合。但这通常并不成立：即使父对象枢纽违反了下游行业限制，重新实现也可能“意外地”满足该限制。如此定义的包含关系既保留了投资意图，又不会对重新实现的有效结果施加过多限制。

例5.8 （示例图）。 考虑以下图示



其中

- $K_{\text{基金}}$：允许的主动型共同基金投资组合。
- $K_{\text{交易所交易基金}}$：允许的被动型 ETF 篮子。
- $K_{\text{基准}}$：基准投资组合。
- $K_{\text{因子}}$：因子暴露向量。
- $f_{\text{交易所交易基金}}$：重新实现（例如，最优替代）。
- $g_{\text{因子}}$：重新实现（例如，因子分解）。
- $R_{\text{跟踪}}$：对齐关系（例如，跟踪误差足够低）。
- $S_{\text{因子}}$：对齐关系（例如，因子载荷足够接近）。

这里的 2-胞腔断言了相容性：如果某基金与某基准对齐（向下），且该基准映射到一组因子敞口（向右），那么该基金就必须映射到一个交易所交易基金（向右），并且该交易所交易基金与同一组因子敞口对齐（向下）。直观而言，如果因子载荷差异的容差比跟踪误差容差“更宽松”，那么这种情况就会成立。

5.2 重新实现的对齐约束

2-胞腔存在性的一种重要特殊情形如下：

$$\begin{array}{ccc} K_1 & \xrightarrow{id} & K_1 \\ {\scriptstyle id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle R} \\ K_1 & \xrightarrow[f]{} & K_2 \end{array}$$

在这种情形下，当且仅当重新实现态射 f 保持其定义域与陪域中的投资组合之间的对齐关系 R 时，2-胞腔才存在。

典型的投资组合管理问题是：给定一个对齐关系 R，构造一个重新实现态射 f，使其保持 R，并且在某种意义上是“最优”的。更多讨论见第 11.3节。

注释 5.9（与优化和菜单的关系）。 重新实现 f遵循对齐 R （即 2-胞腔的存在）这一条件，可以从两种互补的角度来看待，我们将在后文展开：

- **构造性视角（第 11.3节）：** 我们通常不检查一个预先存在的映射 f 是否满足R，而是通过从所有对齐的可能性中选择最优辐射投资组合来 f 构造。

- **代数视角（第 17节）：** 在 DOTS 框架中，我们将对齐 R 视为一个生成所有允许的辐条投资组合“菜单”的算子（记作 $K \odot R$）。因此，有效的水平态射 f 就是从该菜单中连续选择。

6 拉回与推前运算

6.1 拉回：重新索引对齐

Defi定义 6.1（拉回）。给定 $f\colon K_1 \to K_2$ 和 $S \subseteq K_2 \times K_3$，**拉回**为：

$$f^*S = \{(x,z) \in K_1 \times K_3 \mid (f(x),z) \in S\}$$

命题 6.2（拉回保持闭性）。若 f 是水平态射且 S 是垂直态射，则 f^*S 是垂直态射。

证明。映射 $f \times \mathrm{id}_{K_3}\colon K_1 \times K_3 \to K_2 \times K_3$ 是连续的（连续映射的积）。S 在 $K_2 \times K_3$ 中是闭的（根据定义）。$f^*S = (f \times \mathrm{id}_{K_3})^{-1}(S)$ 是闭集的连续原像，因此它在 $K_1 \times K_3$中是闭的。□

注释 6.3（投资组合解释：预对齐）。拉回回答：**“K_1 中的哪些枢纽投资组合会重新实现为 K_2 中满足 S的投资组合？”**

6.2 推前：前向传播

定义 6.4（推前）。给定 $f\colon K_1 \to K_2$ 和 $R \subseteq K_1 \times K_3$，**推前** 为：

$$f_!R = \{(y,z) \in K_2 \times K_3 \mid \exists x \in K_1 : f(x) = y \text{ and } (x,z) \in R\}$$

注释 6.5（投资组合解释：对齐向前传播）. 推前回答：**“K_2 中哪些辐条投资组合是 K_1 中满足 R的枢纽投资组合的重新实现？”**

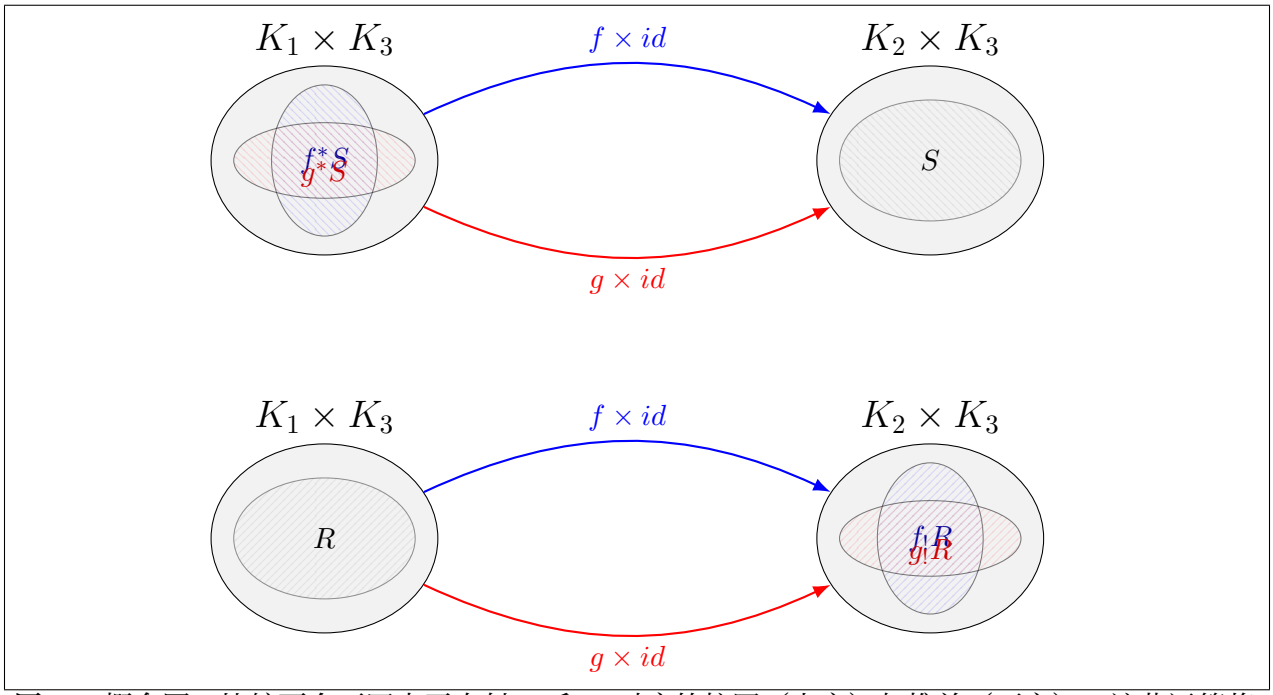


图 6： 概念图：比较两个不同水平态射 f 和 g对应的拉回（上方）与推前（下方）。这些运算将对齐关系投影到枢纽空间或辐条空间中不同（形状也不同）的区域。

一般而言，闭集在连续映射下的推前并非闭集——这正是我们的拓扑要求体现其价值之处。

例 6.6（推前无法保持闭性）。本例说明为何不能使用非闭对象。设 $K_1 = [0,1)$（一个开区间，并非 $\mathbb{HS}$ 中的有效对象）。设 $f\colon K_1 \to \Delta^1$ 为包含 $f(x) = (x, 1-x)$。这是连续的。设 $K_3 = [0,1] \subset \Delta^1$ 与 $R = \{(x,x) \mid x \in K_1\}$（在 $K_1 \times K_3$ 中为闭集）。则：

$$f_! R = \{((y_0, y_1), z) \mid y_0 = z, (y_0, y_1) = (x, 1-x), x \in [0,1)\}$$

$$f_! R = \{((x, 1-x), x) \mid x \in [0,1)\}$$

Th该集合在 $\Delta^1 \times K_3$ 中并非闭集。极限点 $((1,0),1)$（作为 $x \to 1$）缺失 .

投资组合问题：一个“幻影投资组合”$((1,0),1)$ 看似满足传播后的对齐关系，但并不存在满足原始对齐关系的实际枢纽投资组合。这一失败恰恰是因为 K_1 并非闭集（因而也不紧）。

这些后果并不限于这个例子。幻影投资组合会破坏审计轨迹（没有任何允许的枢纽生成它们），破坏枢纽端验证与辐射端验证之间的伴随（定理 7.7），造成数值不稳定性（舍入误差可能使投资组合从有效变为无效），并阻碍逻辑组合（Beck–Chevalley 定律和 Frobenius律不再成立，因此合规检查的顺序会改变结果）。第 10 节将详细展示这些失效情形。

7 适当性的核心作用

7.1 适当性与推前

定义 7.1（真映射）。 拓扑空间之间的连续映射 $f\colon X \to Y$称为**真**映射，如果对每个紧 $K \subseteq Y$，其原像 $f^{-1}(K)$ 在 X 中都是紧的。

注释 7.2. 从紧空间 K_1 到任意拓扑空间 K_2的连续映射 f 具有以下性质： K_2 中任意紧集的原像在 K_1中是紧的。如果 K_2 是豪斯多夫的，则紧子集是闭集，下面将利用这一点推导推前的闭性。

命题 7.3（水平态射是真映射）。 每个水平态射 $f\colon K_1 \to K_2$ 在$\mathbb{HS}$中都是一个真映射。

证明。根据定义， f 是一个连续映射。对象 K_1 是紧的。对象 K_2 是 Δ^m的子集，而 Δ^m是豪斯多夫空间。从紧空间（K_1）到豪斯多夫空间（K_2）的连续映射自动是真映射。 □

适当性意味着：**不会逃逸至边界；极限表现良好**。 我们的框架设计（使用紧对象 K）确保了这一点。

自动适当性正是确保推前运算定义良好所必需的。关键的“定理”虽然显而易见，却至关重要。

定理 7.4（真推前保持闭性）。 设 $f\colon K_1 \to K_2$ 是一个水平态射， $R \subseteq K_1 \times K_3$ 是一个垂直态射。那么 $f_!R$ 是一个垂直态射（即，它在 $K_2 \times K_3$ 中是闭集）。

证明。 由于 K_1 和 K_3 是紧集，且 R 是闭集，因此 R 是紧集。映射 $f \times \mathrm{id}_{K_3}\colon K_1 \times K_3 \to K_2 \times K_3$ 连续，所以

$$f_!R = (f \times \mathrm{id}_{K_3})(R)$$

是紧集。在豪斯多夫空间 $K_2 \times K_3$ 中，紧集是闭集。 □

注释 7.5（为何这在实践中很重要）。 这个结果虽简短，却值得着重强调。在投资组合构建中，约束设定由弱不等式（$\leq$， $\geq$）和等式——半空间、超平面、范数球——构成，它们与单纯形的交集总是闭集。该定理表明：如果输入（约束设定）是闭集，那么输出（下游投资组合集合）也会自动成为闭集。不会出现幻影投资组合。无需在边界处采取特别措施。单纯形的紧致性会默默发挥作用。这并非数学上的便利，而是一项设计要求：第8–9节的整个相干性理论都以此为基础，而第10 节则准确说明了违反这一条件会导致什么问题。

7.2 函子性与伴随

命题 7.6。 推前具有协变函子性：$(g \circ f)_! = g_! \circ f_!$。拉回具有逆变函子性：$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$。

证明。 这些结论由定义直接得到。对于拉回：$(x,z) \in (g \circ f)^* S \iff ((g \circ f)(x)\ z) \in S \iff (g(f(x))\ z) \in S \iff (f(x)\ z) \in g^* S \iff (x,z) \in f^*(g^* S) \iff (x,z) \in (f^* \circ g^*)S$。

对于推前：$(y,z) \in (g \circ f)_! R \iff \exists x \in K_1\colon (g \circ f)(x) = y,\ (x,z) \in R \iff \exists x \in K_1\colon g(f(x)) = y,\ (x,z) \in R \iff \exists x \in K_1, w \in K_2\colon w = f(x)\ g(w) = y,\ (x,z) \in R \iff \exists w \in K_2\colon g(w) = y$ 以及 $(\exists x \in K_1\colon w = f(x),\ (x,z) \in R) \iff \exists w \in K_2\colon g(w) = y,\ (w,z) \in f_!R \iff (y,z) \in g_!(f_!R)$。 □

定理 7.7（伴随 $f_! \dashv f^*$）。对于任意 $f\colon\ K_1 \to K_2$、$R \subseteq K_1 \times K_3$ 和 $S \subseteq K_2 \times K_3$:

$$R \subseteq f^* S \iff f_! R \subseteq S$$

证明。($\Rightarrow$) 假设 $R \subseteq f^* S$。令 $(y, z) \in f_! R$。则存在 $x \in K_1$，使得 $f(x) = y$，且 $(x, z) \in R$。由于 $R \subseteq f^* S$，我们有 $(x, z) \in f^* S$，这意味着 $(f(x)\ z) \in S$。因此 $(y, z) = (f(x)\ z) \in S$。由此 $f_! R \subseteq S$。

($\Leftarrow$) 假设 $f_! R \subseteq S$。令 $(x, z) \in R$。由于 $x \in K_1 = \mathsf{dom}(f)$，根据推前的定义，我们有 $f(x) \in K_2$，且 $(f(x)\ z) \in f_! R$。由于 $f_! R \subseteq S$，我们有 $(f(x)\ z) \in S$。根据拉回的定义，这意味着 $(x, z) \in f^* S$。由此 $R \subseteq f^* S$。 □

注释 7.8。用序理论语言来说，该伴随构成了 K_1 与 K_2 上对齐关系之间的一个伽罗瓦连接。特别是，这保证了 f^* 保持交集（交），而 $f_!$ 保持并集（并）。

注释 7.9。闭包算子 $c = f^* \circ f_!$ 的不动点是枢纽空间上的对齐关系，它们具有“辐条相容”性，即不依赖于通过 f 重新实现过程中丢失的任何信息。内部算子 $i = f_! \circ f^*$ 的不动点是辐条空间上的对齐关系，它们具有“完全可达”性，即 S 所允许的每个辐射投资组合都是某个枢纽投资组合在 f 下的像。

7.3 无效映射与对象

例 7.10（无效对象：比率约束）。考虑一项约束，要求资产 i的持有权重至少为资产 j权重的 c 倍：集合 $\{x \in \Delta^n \mid x_i/x_j \geq c\}$ 不是**闭集**，因为满足 $x_j \to 0^+$ 和 $x_i/x_j \geq c$ 的序列可以收敛到边界点，在这些点上 $x_j = 0$ 和 $x_i = 0$成立，而这些点不属于该集合（也可能属于，取决于约定——这正是该定义含糊不清、不适用的原因）。正确的表述是线性约束 $\{x \in \Delta^n \mid x_i \geq c \cdot x_j\}$，它是闭集（半空间与 Δ^n的交集），因此是 $\mathbb{HS}$中的有效对象。**投资组合问题**：开集版本允许投资组合序列收敛到违反该约束的极限——幻影投资组合病理再次出现。教训很简单：在将比率约束编码为许可空间之前，应始终先将其改写为线性不等式。

8 Beck–Chevalley 条件

从某种意义上说，贝克–切瓦利条件正是整个框架旨在证明的定理。其他一切——闭对象、适当性、伴随——都是为这一结果搭建的脚手架。它回答的问题很简单：如果我在枢纽层级检查合规性，还需要在辐射端层级再次检查吗？如果答案是否定的，我们就有了路径无关性，审计轨迹也就可靠。

本节指南。 本节介绍两个结果。对于 **宽松的** 贝克–切瓦利包含（第 8.1节），每一个 中的交换方块 $\mathbb{HS}$都成立，且无需额外假设。这是一种单向包含——上游检查是 保守的：它可能拒绝下游本可通过的投资组合，但绝不会批准下游会失败的投资组合。这是实际操作中的核心工具；正是它使枢纽层合规检查变得安全。只有当方块满足 **严格的** 相等（第 8.3节）时，才成立；这要求该方块是 逐点笛卡尔的 ——也就是说，顶层映射的每个纤维都必须满射到下层映射的对应纤维。这是一个限制性条件，在多阶段优化流水线中可能无法满足：枢纽层级的优化器可能不会探索辐条的完整空间。严格结果是额外收益，而不是主要内容。

本节陈述并证明一个 Beck–Chevalley（BC）定律，该定律仅使用双范畴 $\mathbb{HS}$中已有的 对象和态射。我们不 构造新的纤维积对象。相反，我们假设给定了一个由现有水平态射组成的交换方块，并对该方块施加逐点笛卡尔条件。

8.1 Lax Beck–Chevalley

完整的 Beck–Chevalley 定律只有在上述严格的逐点笛卡尔性条件下才成立。幸运的是，松弛的一半具有完全一般性，而实践中起作用的正是这一半。我们称之为“审计安全不等式”：

命题 8.1 (松弛的 Beck–Chevalley 包含关系)。 设以下是 $\mathbb{HS}$ 中由水平态射（紧致许可空间之间的连续映射）构成的交换方块：

$$\begin{array}{ccc} K_A & \xrightarrow{g} & K_B \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ K_C & \xrightarrow[h]{} & K_D \end{array}$$

满足 $f \circ g = h \circ f'$。设 Z 是另一个许可空间，且设 $R \subseteq K_B \times Z$ 是一个闭垂直态射（对齐关系）。则：

$$f'_!(g^* R) \subseteq h^*(f_! R).$$

证明。 设 $(y,\ z) \in f'_!(g^* R)$。根据推前的定义，存在 $x \in K_A$ 使得：

1. $f'(x) = y$，以
及 2. $(x,\ z) \in g^* R$。

根据拉回的定义，条件 (2) 蕴含：

$$(g(x), z) \in R.$$

设 $w = g(x) \in K_B$。那么 $(w,\ z) \in R$。现在我们通过 f 将 w 映射到 K_D。根据方形 $(f \circ g = h \circ f')$ 的交换性：

$$f(w) = f(g(x)) = h(f'(x)) = h(y).$$

Since $(w, z) \in R$ 并且 $f(w) = h(y)$，根据推前的定义可得 ：

$$(h(y), z) \in f_!R.$$

最后，根据沿 h 拉回的定义，可得：

$$(y, z) \in h^*(f_!R).$$

因此，$f'_!(g^*R) \subseteq h^*(f_!R)$。 □

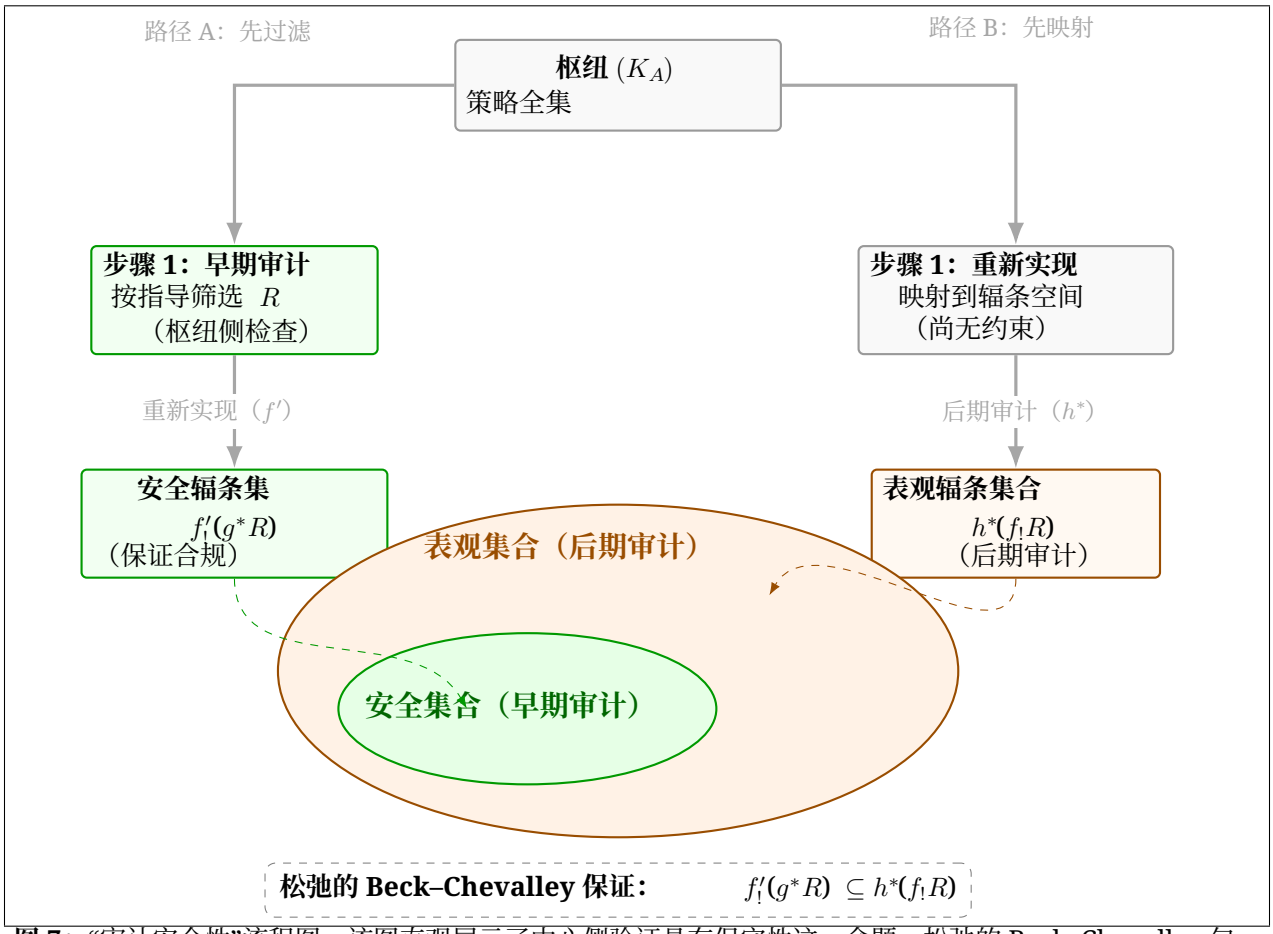


图 7：“审计安全性”流程图。该图直观展示了中心侧验证具有保守性这一命题。松弛的 Beck–Chevalley 包含关系意味着，由路径 A（早期审计）生成的投资组合集合包含于由路径 B（后期审计）生成的集合之中。

金融动机：中心侧验证的“安全性”

例如，考虑一个投资组合重新实现的交换方块，其中 $g\colon K_{Hub} \to K_{Agg}$将详细投资组合聚合为摘要视图（例如，行业），而 $f'\colon K_{Hub} \to K_{Spoke}$ 将投资组合重新实现到辐射端领域（例如，交易所交易基金）。令 R 为定义在聚合空间 K_{Agg}上的对齐约束。

松Beck–Chevalley条件由以下包含给出

$$f'_!(g^*R) \subseteq h^*(f_!R),$$

允许一种投资组合管理 关于对齐验证时机的解释 :

- **左端（早期验证）：** 集合 $f'_!(g^*R)$ 表示先筛选枢纽投资组合后生成的辐条投资组合全集。我们找出所有满足行业限额 R（通过 g^*）的 $x \in K_{Hub}$，然后重新实现它们（$f'_!$）。

- **右侧（后期验证）：** 集合 $h^*(f_! R)$ 表示事后看来合规的辐条投资组合全集。这些是 K_{Spoke} 中的投资组合，其汇总特征与 K_{Agg}中的某个有效行业概况对齐。

- **包含即安全：** 包含关系表明中心侧验证是保守的。由已对齐枢纽生成的任何投资组合都将通过下游对齐检查。

8.2 逐点笛卡尔性

反向包含仅在相当严格的条件下成立。假设我们在 $\mathbb{HS}$ 中有如上所述的一个交换方块。

定义 8.2（逐点笛卡尔方块）。若对于每一对 $(y,\ z) \in K_B \times K_C$满足 $f(y) = h(z)$，存在 $x \in K_A$使得 $g(x) = y$且 $f'(x) = z$，则称该交换方块是逐点笛卡尔的。

注释 8.3。定义8.2仅涉及给定的四个对象和箭头。它并未引入任何新对象，例如纤维积；在 $\mathbb{HS}$ 中可能不存在这样的对象。该定义等价于：对于每一对 $(y,\ z)$ 满足 $f(y) = h(z)$，存在一个枢纽 x使得 $g(x) = y$且 $f'(x) = z$。这是集合论拉回的一种覆盖性质，并确保该方块在点上的满射性意义下交换。

坦率地说，有必要说明这一条件的要求是什么。逐点笛卡尔性通常不是直接检查的性质；更常见的是，人们希望通过确认该方形属于某个自动满足这一性质的类别来验证它（例如线性聚合链）。在实践中，许多多阶段流水线都包含优化步骤，其输出取决于求解器状态、数值容差或排序效应——对于这类流程，该条件可能根本不成立。无论如何，松弛的 Beck–Chevalley 包含关系始终成立，这正是论文单独强调它的原因；但完整的相等关系——路径无关性真正要求的条件——应当视为需要验证的性质，而非想当然地认为它成立。

这一条件何时成立?

示例 1：线性聚合链 股票 $\to$ 行业 $\to$资产类别映射是闭单纯形上的全映射和连续映射。每一对一致的行业和资产类别投资组合，都对应某个股票投资组合。

- g：将股票聚合为行业
- f'：将行业权重映射为资产类别敞口

因此，该方形是逐点笛卡尔的，且 Beck–Chevalley 条件成立（路径无关性）。

例 2：真基于优化的重新实现 考虑一个由垂直态射构成的交换方形，即对齐关系：

$$\begin{array}{ccc} K_n & \overset{S}{\dashrightarrow} & K_p \\ {\scriptstyle R'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle R} \\ K_m & \underset{S'}{\dashrightarrow} & K_q \end{array}$$

假设在第 11.3 节的背景下，我们构造了水平态射

$$\begin{array}{ccc} K_n & \xrightarrow{g} & K_p \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ K_m & \xrightarrow[h]{} & K_q \end{array}$$

其中，水平态射是尊重相应对齐约束的重新实现，并且是所有满足该条件的重新实现中唯一的 最优 重新实现（设置见第11.3节）。 若此方形交换，则限制后的方形

$$\begin{array}{ccc} K_n & \xrightarrow{g} & \operatorname{Im} K_n \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \operatorname{Im} K_n & \xrightarrow[h]{} & K_q \end{array}$$

是逐点笛卡尔的。（注意，由于适当性，这些像是闭的，因此是 $\mathbb{HS}$ 中良定义的对象。）

遗憾的是，我们将在第 11.4 节看到，重新实现方块一般未必交换——连续优化的结果可能依赖于路径。我们必须施加额外假设以确保该方块交换，从而使限制后的方块逐点笛卡尔。

8.3 严格贝克–切瓦莱

回顾第 $f_!$ 节中闭关系上的算子（推前）和 f^*（拉回）。水平映射的适当性（第 6节）确保闭性得以保持。

定理 8.4（现有逐点笛卡尔方形的 Beck–Chevalley）。 设 t

$$\begin{array}{ccc} K_A & \xrightarrow{g} & K_B \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ K_C & \xrightarrow[h]{} & K_D \end{array}$$

是 $\mathbb{HS}$ 中由现有对象和水平态射构成的交换方形，且该方形是逐点笛卡尔的。令 Z 为另一个许可空间。那么对于每个闭关系 $R \subseteq K_B \times Z$，

$$f'_!\big(g^* R\big) \;=\; h^*\big(f_! R\big).$$

证明。 我们证明两个包含关系。

$(\subseteq)$设 $(y, z) \in f'_!\,(g^* R)$。则存在 $x \in K_A$，使得 $f'(x) = y$，且 $(x, z) \in g^* R$，即 $(g(x)\ z) \in R$。令 $y' := g(x) \in K_B$。由交换性可得 $f(y') = f(g(x)) = h(f'(x)) = h(y)$。

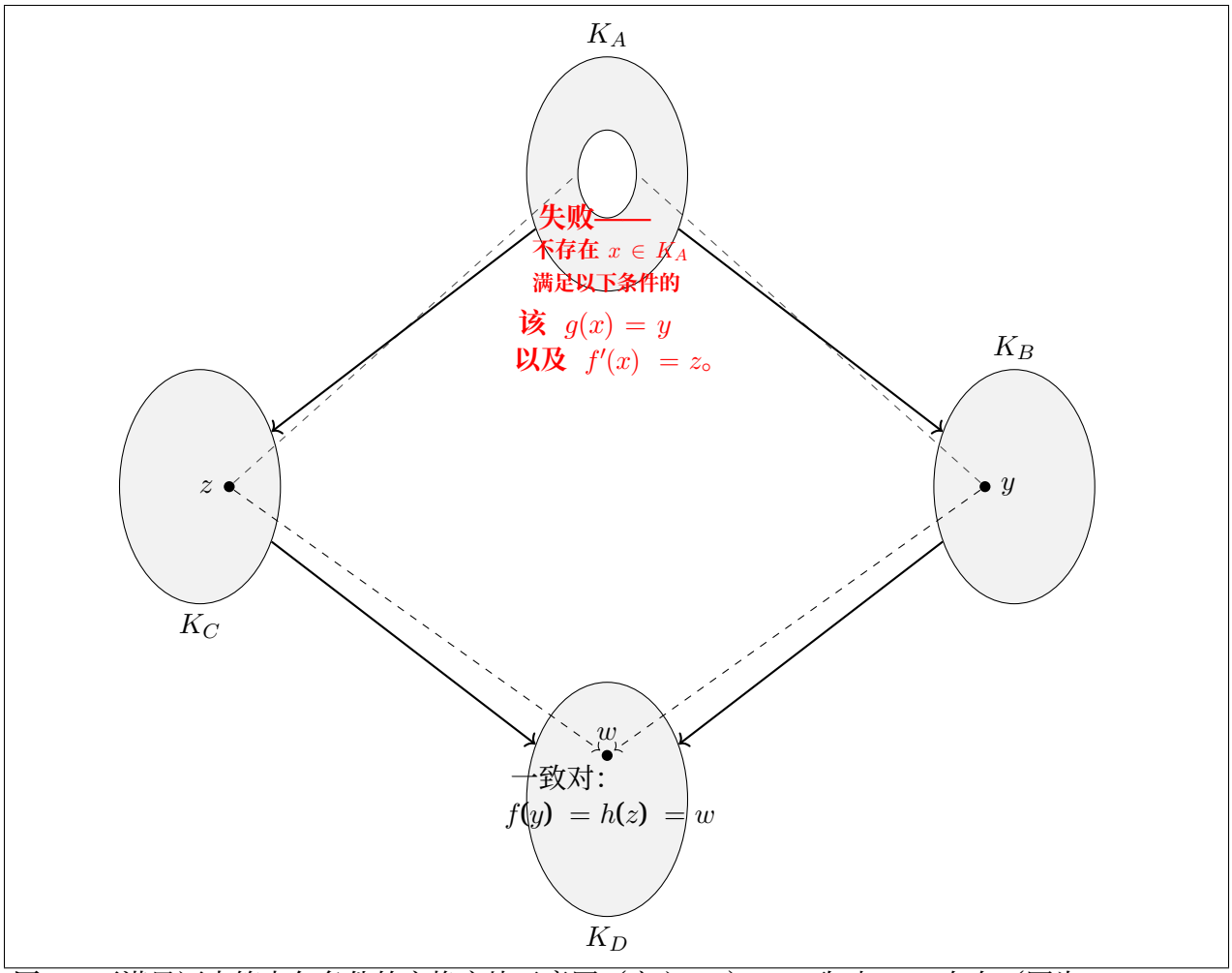


图 8： 不满足逐点笛卡尔条件的交换方块示意图（定义 8.2）。一致对 (y, z) 存在（因为 $f(y) = h(z)$），但所需的枢纽投资组合 x 将落在对象 K_A的一个“空洞”（非许可区域）中。

由于 $(y', z) \in R$，我们有 $(f(y')\ z) \in f_!R$，从而 $(h(y)\ z) \in f_!R$。根据拉回的定义，这等价于 $(y, z) \in h^*(f_!R)$。

（⊇）设 $(y, z) \in h^*(f_!R)$。则 $(h(y)\ z) \in f_!R$，因此存在 $y' \in K_B$，使得 $f(y') = h(y)$ 且 $(y', z) \in R$。由逐点笛卡尔性，存在 $x \in K_A$，使得 $g(x) = y'$ 且 $f'(x) = y$。由 $(y', z) \in R$ 与 $g(x) = y'$，我们得到 $(x, z) \in g^*R$，并由 $f'(x) = y$ 得出 $(y, z) \in f'_!(g^*R)$。 □

下面通过伴随态射恒等式给出定理 8.4 的另一种证明，并借此阐明范畴结构。

定理 8.5 (通过伴随态射恒等式得到的 Beck–Chevalley)。 若该方形按定义 8.2 的意义是逐点笛卡尔的，那么对于每个允许的许可空间 Z 和每个对齐关系 $R \subseteq K_B \times Z$，都有

$$f'_!(g^*R) \;=\; h^*(f_!R).$$

证明。 我们证明等价的伴随态射恒等式：作为从 K_C 到 K_B 的关系，

$$\mathrm{Graph}(g) \circ \mathrm{Graph}(f')^\dagger \;=\; \mathrm{Graph}(f)^\dagger \circ \mathrm{Graph}(h), \tag{1}$$

其中，$\mathrm{Graph}(k)^\dagger = \{(k(x)\ x)\}$ 表示反向图（共轭）。定理8.4 可由（1）通过与任意对齐关系左复合得到 $S \subseteq K_B \times Z$。

（$\subseteq$）设 $(y, y')\ \in$Graph$(g)\ \circ$Graph$(f')^\dagger$。根据定义，存在 $x \in K_A$，使得 $(y, x)\ \in$Graph$(f')^\dagger$，且 $(x, y') \in$ Graph(g)，即 $f'(x) = y$ 且 $g(x) = y'$。由方形的交换性，$f(y') = f(g(x)) = h(f'(x)) = h(y)$，因此 $(y, y') \in$ Graph$(f)^\dagger \circ$Graph(h)。

（$\supseteq$）设 $(y, y')\ \in$Graph$(f)^\dagger \circ$Graph(h)。则 $(y, h(y))\ \in$Graph(h)，且 $(h(y)\ y')\ \in$Graph$(f)^\dagger$，所以 $f(y') = h(y)$。由逐点笛卡尔性（定义 8.2），存在 $x \in K_A$，使得 $g(x) = y'$ 且 $f'(x) = y$。因此 $(y, y') \in$ Graph$(g)\ \circ$Graph$(f')^\dagger$。

定理的复苏 *8.4*。由于推前与拉回可表示为与（反向）图的关系复合——$f'_!(T) = T \circ$图$(f')^\dagger$与 $h^*(T) = T \circ$图(h)——贝克–切瓦利等式 $f'_!(g^*S) = h^*(f_!S)$ 对于 $S \subseteq K_B \times Z$可通过左复合（1）与 S:

$$f'_!(g^*S) = S \circ \mathrm{Graph}(g) \circ \mathrm{Graph}(f')^\dagger \ = \ S \circ \mathrm{Graph}(f)^\dagger \circ \mathrm{Graph}(h) = h^*(f_!S). \qquad \square$$

投资组合解释

贝克–切瓦利等式

$$f'_! \circ g^* \ = \ h^* \circ f_!$$

形式化了现有两阶段流水线中对齐传播的路径无关性 。真性确保每一步都保持闭性，而逐点笛卡尔性则确保两条路径捕获的投资组合完全相同。

9 弗罗贝尼乌斯互反律

在经典表示论语境中，弗罗贝尼乌斯互反律指出，诱导与限制互为伴随——无论是在表示变换之前还是之后进行筛选，结果都相同。在我们的语境中，其含义更为具体：如果将对齐关系与拉回的约束取交后再推送，所得结果与先推送、再取交相同。其实践意义在于，投资组合经理无论在枢纽层级还是辐射端层级进行筛选，都能得到相同的合规全集。这类结果一经阐明，便让人觉得理所当然；关键在于，在 给定框架的情况下，它确实理所当然，无需另行设计证明策略。

9.1 陈述

定理 9.1. 设 $f : K_1 \to K_2$ 为 $\mathbb{HS}$ 中的水平态射。对于闭对齐关系 $R \subseteq K_1 \times K_3$ 与 $S \subseteq K_2 \times K_3$:

$$f_!(R \cap f^* S) = f_! R \cap S$$

证明. （注： f 按其定义在其定义域 K_1 上是全的。）

计算左端: $f_!(R \cap f^* S)$

$$R \cap f^* S = \{(x, z) \in K_1 \times K_3 \mid (x, z) \in R \text{ and } (f(x), z) \in S\}$$
$$f_!(R \cap f^* S) = \{(y, z) \in K_2 \times K_3 \mid \exists x \in K_1 : f(x) = y, (x, z) \in R, (f(x), z) \in S\}$$

计算右侧: $f_! R \cap S$

$$f_! R = \{(y, z) \in K_2 \times K_3 \mid \exists x \in K_1 : f(x) = y, (x, z) \in R\}$$
$$f_! R \cap S = \{(y, z) \mid (\exists x \in K_1 : f(x) = y, (x, z) \in R) \text{ and } (y, z) \in S\}$$

证明左端 $\subseteq$ 右侧: 假设 $(y,\ z) \in f_!(R \cap f^* S)$。那么存在 $x \in K_1$ 使得 $f(x) = y$，$(x,\ z) \in R$，且 $(f(x)\ z) \in S$。因此 $(y,\ z) \in S$ 且 $(y,\ z) \in f_! R$。于是 $(y,\ z) \in f_! R \cap S$。

证明右侧 $\subseteq$ 左端: 假设 $(y,\ z) \in f_! R \cap S$。那么:

- 存在 $x \in K_1$ 使得 $f(x) = y$ 且 $(x,\ z) \in R$
- $(y, z) \in S$

由于 $f(x) = y$，我们有 $(f(x)\ z) = (y,\ z) \in S$。因此 $(x,\ z) \in R$ 且 $(f(x)\ z) \in S$，这意味着 $(x,\ z) \in R \cap f^* S$。由于 $f(x) = y$，我们有 $(y,\ z) \in f_!(R \cap f^* S)$。

闭性: 两边根据定理 7.4 （由于 f 为真）以及交集下的闭包而为闭集。

□

9.2 投资组合解释

弗罗贝尼乌斯互反律保证，无论在重新实现之前还是之后进行筛选，通过中心侧对齐 R 和辐条侧对齐 S 对投资组合进行筛选，都会产生相同的允许的辐条投资组合集合。

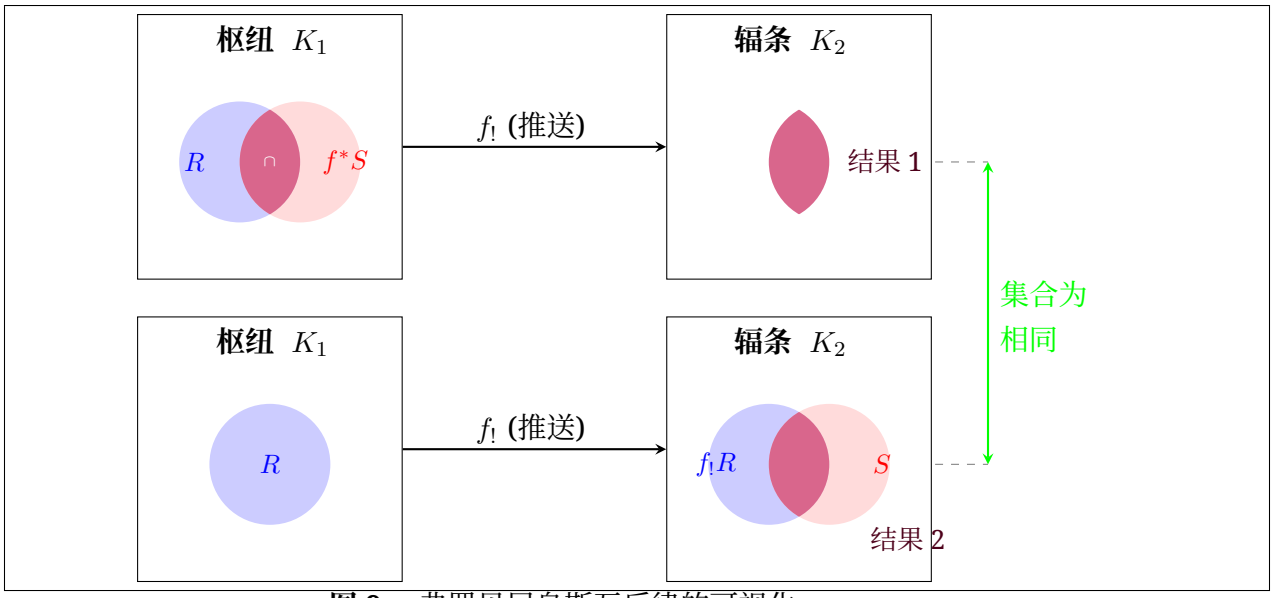


图 9： 弗罗贝尼乌斯互反律的可视化

$$\begin{array}{ccc} K_1 & \xrightarrow{f} & K_2 \\ {\scriptstyle R\cap f^*S}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_!R\cap S} \\ K_3 & \xrightarrow[\mathrm{id}_{K_3}]{} & K_3 \end{array}$$

（这里 $R \subseteq K_1 \times K_3$ 和 $S \subseteq K_2 \times K_3$ 对于某个 K_3，以及 $f\colon\ K_1 \to K_2$）

示例 9.2 （多重约束定制）。

- 枢纽： K_1 （允许的共同基金投资组合）
- 辐条： K_2 （允许的 ETF 篮子）
- $f\colon\ K_1 \to K_2$：最优重新实现
- $R =$ “枢纽投资组合是多元化的”： $\{(x, \checkmark) \mid \text{赫芬达尔–赫希曼指数}(x) \le H_0\} \subseteq K_1 \times \{\checkmark\}$
- $S =$ “辐条 ETF 篮子费用低”： $\{(y, \checkmark) \mid \text{费用}(y) \le 0.1\%\} \subseteq K_2 \times \{\checkmark\}$

  （此处使用注释 4.3 来将约束/资格/合规条件解释为对齐关系 R 和 S。）

K_2 中哪些 ETF 篮子是多元化枢纽投资组合的实现，并且 费用较低？我们可以通过两种方式构建所需的投资组合：

1. 找出多元化的枢纽投资组合（$x \in K_1$）（R），然后重新实现为低费用交易所交易基金（f^*S）。通过 f 实现。
2. 实现所有多元化枢纽投资组合（$f_!R$）。筛选所得 ETF 篮子，选出费用较低的篮子（S）。

Frobenius 保证答案相同。

注释 9.3。 弗罗贝尼乌斯互反律在这一设定中的优雅——其证明本质上不过是两行集合代数——可能会掩盖一个真正的操作层面的困难。该定理假定约束 R 与 S 均可表示为闭对齐关系。在实践中，许多约束（例如换手率限制，或依赖于投资组合当前状态、而非仅依赖于目标配置的约束）并非天然具有这种形式。Frobenius 告诉你，如果 你能将约束表示为闭关系，则筛选顺序无关紧要；但它并不告诉你如何如此表示它们。

10 为什么闭性不可或缺

对 $\mathbb{HS}$ 中对象和垂直态射的闭性要求是一项设计原则，而非数学上的便利条件。本文中的每一项相干性结果——适当性（定理 7.4）、伴随（定理7.7）、Beck–Chevalley（命题 8.1）、Frobenius（定理 9.1）——都依赖于这一要求。本节将说明，这项要求不能放宽，而自然的补救尝试（对推前取拓扑闭包）会引入新的病态问题。随后还将表明，同一原则也适用于第三部分的概率设定：闭性不仅对确定性框架至关重要，对本文提出的每一种扩展也同样不可或缺。

10.1 适当性的丧失与一种未能奏效的解决方案

如果 K_1 在 Δ^n中不是闭集，它就不是紧的。从非紧空间 K_1 出发的连续映射 $f\colon K_1 \to K_2$ 并不一定是真映射。

如例 6.6所示，非真映射 f(例如包含 $f\colon [0,1) \to [0,1]$) 无法在推前下保持闭性。 $f_!R$ 将不是闭集。

如果放宽对象必须为闭集的要求，推前 $f_!R$ 可能不是闭集（如例6.6所示）。一种简单的修补方法是定义一个经过修改的推前，以强制其具有闭性：$f_!R$ =cl($f_!R$)。这确实保留了复合、伴随和 Lax Beck–Chevalley；但它破坏了严格 Beck–Chevalley，更重要的是，破坏了 Frobenius。

定理 10.1 (闭包修补的稳定性)。 设 $f\colon X \to Y$ 和 $g\colon Y \to Z$ 是拓扑空间之间的连续映射（不一定是紧空间）。设垂直态射为 闭关系。定义“修补后”的推前为 $f_!R := \mathrm{cl}(f(R))$。此运算保留下列结构定律：

1. 组合性（函子性）：

$$\overline{(g \circ f)}_!R = \overline{g}_!(\overline{f}_!R)$$

证明。对于任意连续映射 g，我们有 g(cl(A)) $\subseteq$ cl(g(A))：事实上， g^{-1}(cl(g(A))) 是闭集（由连续性可知），且包含 A （因为 g(A) $\subseteq$ cl(g(A))），因此也包含 cl(A)。因此，g(A) $\subseteq$ g(cl(A)) $\subseteq$ cl(g(A))。取闭包：cl(g(A)) $\subseteq$ cl(g(cl(A))) $\subseteq$ cl(cl(g(A))) =cl(g(A))，所以 cl(g(cl(A))) = cl(g(A))。将此应用于关系 R:

$$\begin{aligned}\mathrm{RHS} &= \mathrm{cl}(g(\mathrm{cl}(f(R)))) \\ &= \mathrm{cl}(g(f(R))) \quad \text{(by topological identity)} \\ &= \mathrm{cl}((g \circ f)(R)) \\ &= \overline{(g \circ f)}_!R \quad \text{(LHS)}\end{aligned}$$

□

2. 伴随（$f_! \dashv f^*$）：

$$\overline{f}_!R \subseteq S \iff R \subseteq f^*S$$

证明。 修补后的推前的定义是 cl(f(R))。条件 cl(f(R)) $\subseteq$ S成立，当且仅当 f(R) $\subseteq$ S，因为 S 是一个**闭集**（根据垂直态射的定义）。条件 f(R) $\subseteq$ S是标准的集合论伴随，等价于 $R \subseteq f^{-1}$(S) =f^*S。因此，伴随得以精确保留。

□

3. ***Lax Beck–Chevalley***（安全性）：

$$\overline{f'_!}(g^*R) \subseteq h^*(\overline{f_!}R)$$

证明。令 $A = f'(g^*R)$ 为标准（非闭集）推前。根据标准的集合论逻辑，我们知道 $A \subseteq h^*(f_!R)$。由于 $f_!R \subseteq \mathrm{cl}(f_!R) = f_!R$，由单调性可得：

$$A \subseteq h^*(\overline{f_!}R)$$

集合 $h^*(f_!R)$ 是连续映射 h 下某个闭集的原像，因此它是闭集。若集合 A 包含于闭集 C 中，那么它的闭包也包含于 C 中：

$$\mathrm{cl}(A) \subseteq C$$

将各项代回：

$$\overline{f'_!}(g^*R) \subseteq h^*(\overline{f_!}R)$$

□

定理 10.2 (闭包修正破坏路径无关性（严格 Beck–Chevalley）)。令 $f_!R := \mathrm{cl}(f_!R)$。存在一个交换方块和一个闭关系 S，使得：

$$\overline{f'_!}(g^*S) \subsetneq h^*(\overline{f_!}S)$$

因此，修补后的推前不满足严格 *Beck–Chevalley* 等式。

反例。考虑交换方块

$$\begin{array}{ccc} K_A & \xrightarrow{g} & K_B \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ K_C & \xrightarrow[h]{} & K_D \end{array}$$

具有以下数据：

- $K_A = [0,1)$（非闭集，因此非紧）。
- $K_B = K_C = K_D = [0,1]$。
- $g = f' = \iota\colon\ [0,1) \hookrightarrow [0,1]$（包含映射），以及 $f = h = \mathrm{id}_{[0,1]}$。
- $Z = [0,1]$，以及 $S = \{(1,\ 1)\} \subseteq K_B \times Z$（将端点与其自身配对的边界约束）。

交换性成立：$f \circ g = \iota = h \circ f'$。注意，$f' = \iota$ 并非真映射：适当性不成立，因为 $K_A = [0,1)$ 非紧。（从紧空间到豪斯多夫空间的连续映射自动是真映射，但 K_A 并不紧。特别地，$\iota^{-1}([0,1]) = [0,1)$ 非紧。）

左端（早期审计）： 先将 S 拉回枢纽，再向前推送。

$$g^*S = \{(x,z) \in K_A \times Z : (g(x), z) \in S\} = \{(x,z) \in [0,1) \times [0,1] : x = 1,\ z = 1\} = \emptyset$$

由于 $1 \notin [0,1)$。因此 $f'_!(\overline{\emptyset}) = \mathrm{cl}(\emptyset) = \emptyset$。

右侧（后期审计）：先正向推送，再反向拉回。

$$f_!S = \{(f(w), z) : (w, z) \in S\} = \{(\mathrm{id}(1), 1)\} = \{(1, 1)\}$$

这已经是闭集，因此 $f_!S^{-} = \{(1, 1)\}$。于是：

$$h^*(\overline{f_!}\, S) = \{(y, z) \in K_C \times Z : (h(y), z) \in \{(1, 1)\}\} = \{(1, 1)\}$$

结论： $f_!'(g^*S^{-}) = \emptyset \subsetneq \{(1,\ 1)\} = h^*(f_!\, S)^{-}$ 宽松包含 左端 $\subseteq$右侧成立（与前述定理一致），但严格等式不成立。右侧接受一个位于边界 $x = 1$ 处的“幻影投资组合”，但它在枢纽空间 $K_A = [0, 1$ 中没有原像；左端则正确地识别出不存在这样的枢纽。 □

定理 10.3 (闭包修补破坏弗罗贝尼乌斯互反律**)。** 令 $f_!R := \mathrm{cl}(f_!\overline{R})$ 表示针对非真映射的“修补后”推前。此运算违反弗罗贝尼乌斯互反律。具体而言，存在映射 f 和关系 R、S，使得：

$$\overline{f_!}(R \cap f^*S) \neq \overline{f_!}R \cap S$$

反例。设 $K_1 = [0, 1)$（非闭枢纽）和 $K_2 = [0, 1]$（闭辐条）。设 $f\colon K_1 \to K_2$为包含映射 $f(x) = x$。令 R 为 K_1（“所有有效枢纽”）上的对角关系，并且令 $S = \{(1,\ 1)\}$ 为 K_2上的边界约束。

左端（先筛选后正向推送）：首先，计算拉回 $f^*S = \{(x, z) \in K_1 \times K_2 \mid (f(x)\ z) \in S\} = \{(x, z) \mid x \in [0, 1)\ f(x) = 1, z = 1\}$。由于 $1 \notin K_1$，拉回为空：$f^*S = \emptyset$。因此，交集 $R \cap f^*S$ 为空，推前也为空。

$$\mathrm{LHS} = \emptyset$$

右侧（先正向推送后筛选）：计算标准正向像 $f_!R = \{(x, x) \mid x \in [0, 1)\}$。闭包为 $f_!R = \{(x, x) \mid x \in [0, 1]\}$，其中包含点 (1,1)。与 S 求交：

$$\mathrm{RHS} = \overline{f_!R} \cap S = \{(x, x) \mid x \in [0, 1]\} \cap \{(1, 1)\} = \{(1, 1)\}$$

结论： $\emptyset \neq \{(1,1)\}$。右侧在边界处接受一个“幻影投资组合”，这意味着存在一个有效的枢纽；而左端则正确地识别出不存在这样的枢纽。 □

失效的投资组合解释

幻影投资组合：闭包向 $f_!R$ 添加了在 R中没有实际原像的极限点。这些是看似满足传播的对齐关系、但实际上并非由满足原始对齐关系的任何枢纽投资组合所产生的辐条投资组合。

结论：对象的闭性（因而紧致性）是使所有水平态射为真、推前良定义、并且复合相干律（伴随、基变换、Frobenius）可用的唯一假设。

10.2 闭包修正对概率模型的不充分性

正如我们稍后将看到的，在生产环境中，重新实现通过不完美优化器自动完成，因此必须在概率设定下理解对齐。尽管“闭包修正” $f_!R = \mathrm{cl}(f_!R)$在技术上可以恢复确定性情形下的基本范畴组合，

但对于第 18 节和21节中建立的概率框架而言，在数学上并不充分。以下讨论假设读者已了解相关背景。

即使我们要求水平态射是 紧 *Feller* 核 （根据定义B.12，防止质量逃逸到无穷远），我们也不能放宽对垂直态射为 闭关系的要求，因为这两个条件在理论中发挥着不同的作用。紧性处理系统在无穷远处的行为，而闭性对于处理边界处的行为至关重要。如果对齐关系 R 不是闭的（例如严格不等式 $x > 0$），第18 节所建立的概率与几何之间的联系就会失效，从而导致以下失效模式：

Portmanteau定理失效（极限不稳定性）概率框架的数学引擎是 **Portmanteau定理** （定理B.10）。它确立了概率测度的弱收敛（求解器稳定性）意味着质量在**闭集**上的上半连续性：

$$\mu_n \Rightarrow \mu \implies \limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \le \mu(F) \quad \text{for all } \textbf{closed} \text{ sets } F.$$

- **失效：** 如果对齐关系 R 定义了一个非闭约束集 S （例如“跟踪误差 $<$ 15基点”），则函数 $x \mapsto P(x,\ S)$不再保证具有上半连续性。

- **后果：** 我们失去了信任极限的能力。一系列枢纽投资组合$x_n \to x$ 可能都“安全”（落入 S的概率很高），但极限投资组合 x 可能是“不安全的”（概率在边界处不连续下降）。这破坏了第21.4节所讨论的敏感性分析所需的稳定性。

-支撑集的不稳定性 -最高密度区域的定义 ϵ （定义18.10）依赖密度函数的水平集来定义闭支撑。

- **失败：** 针对这些闭支撑验证非闭关系 S 会变得不稳定。

- **后果：** 考虑一个“触及”严格不等式约束边界的密度。分布中数值上可忽略的微小偏移，就可能使检查从真变为假，因为边界点被排除在 S之外。闭关系确保“触及边界”是一种有效且稳定的状态。

病态的 Wasserstein 投影 在输运模型（第21节）中，安全性由到有效集合 $\mathcal{P}_S$的距离定义。

$$W_1(P(x), \mathcal{P}_S) = \inf_{\nu\in\mathcal{P}_S} W_1(P(x), \nu).$$

- **失败：** 如果 S 不是闭集，则有效测度的集合 $\mathcal{P}_S$ 在弱拓扑中不是闭集。下确界可能无法由任何有效分布达到。

- **结果：** “校正”投资组合并不严格存在（可以无限接近它，却永远无法达到）。这会破坏第21.4 节中的计算算法，因为这些算法依赖于将样本投影到有效集合上。求解器若尝试投影到 $x > 0$，就会发生振荡或出现数值计算失败；而投影到 $x \ge 0$ 则是一种标准且稳定的操作。

还可以证明，如果不要求对齐关系是闭集，那么对于安全半径、HDR 和基于传输的这三种方法，伴随、Lax Beck–Chevalley 和 Frobenius 性质都会失效。

设计原则及其对第三部分的影响这些失效并非边缘情况。现实投资组合系统中的每项约束设定都由弱不等式（$\leq$, $\geq$）和等式构成——而它们产生的是闭集。严格不等式（$<$, $>$）只会源于规范错误或含糊的文档。因此，设计原则是：将约束建模为闭集，框架就能发挥作用；将其建模为开集，则行不通。

这一原则还有更深层的影响。当水平态射变为随机的（第三部分）时，确定性推前 $f_!R$ 会被一种概率运算取代，该运算会根据风险预算 R 将 ϵ“膨胀”。自然的做法是让膨胀集保持为开集——毕竟，它表示的是一种近似约束。但上述分析表明，这恰恰是错误的做法。开约束集会破坏概率框架所依赖的基于 Portmanteau 定理的稳定性论证（第18节），使 Wasserstein 投影变得不适定（第21节），并破坏 HDR 支持集演算。因此，第三部分始终坚持闭性要求，即使对于概率运算也是如此：分级双范畴HSP-r （定义18.1）使用闭关系作为垂直态射，而概率合规的三种方法（安全半径、HDR、Wasserstein）的定义也都确保所得集合保持闭性。第10.2 节尝试的“闭包修正”并无必要，因为它旨在解决的问题——开集推前——在输入定义正确时根本不会出现。

11 构造最优再现

在前几节中，水平态射 $f: K_1 \to K_2$ 被视为可行投资组合空间之间的给定的连续映射。现在，我们将展示一种构造此类态射的方法，包括其定义域 K_1 和陪域 K_2，并以实际的优化目标为依据。这样，抽象框架便落实到具体的投资组合管理任务中，例如寻找能够最优复制给定共同基金投资组合的低费用交易所交易基金投资组合。该过程自然会得到 $\mathbb{HS}$ 所要求的紧对象和连续（真）态射。

11.1 Setup：许可空间、定量属性与目标函数 s

假设我们从两个环境投资组合空间 $\Delta^n(\mathcal{A})$ 和 $\Delta^m(\mathcal{B})$ 开始（例如，共同基金和交易所交易基金）。起初，我们可能只知道基准**许可集** $P_1 \subseteq \Delta^n$ 和 $P_2 \subseteq \Delta^m$，它们必须是闭子集（因此也是 $\mathbb{HS}$ 中的紧对象）。这些集合表示满足基本约束的最大可能空间，但我们构造的态射的实际定义域和陪域可能更小。

我们需要以下组成部分:

- 一个"定量属性空间"（V，$\|\cdot\|_V$），即一个有限维巴拿赫空间，用于比较来自不同全集的投资组合。
- 定义在许可集上的连续**属性映射**：$g_{\mathcal{A}}: P_1 \to V$ 和 $g_{\mathcal{B}}: P_2 \to V$。这些映射将投资组合映射到相关特征（例如资产类别敞口、因子载荷）。
- 一个连续的**目标函数** u：$V \to \mathbb{R}$ 定义在定量属性空间上。该函数根据投资组合的度量表示来量化其期望程度（例如，从风险／收益指标得出的效用、与因子指标相关的负费用）。我们假设 u 的值越高越好。

（请注意，上述定义中的"度量"一词与数学上的度量空间概念毫无关系。它指的是对某种金融特征进行定量测量。）

定义 11.1（定量属性投资组合空间）。 定量属性**投资组合空间** 是一个有限维巴拿赫空间 $(V, \|\cdot\|_V)$。

一个**投资组合定量属性映射** 是一个连续函数 $g: P \to V$，定义在允许的投资组合空间 $P \subseteq \Delta^k$ 上。

例 11.2（定量属性空间）。

- **资产类别敞口**：$V = \mathbb{R}^k$。 $g_{\mathcal{A}}: P_1 \to V$ 和 $g_{\mathcal{B}}: P_2 \to V$ 用于汇总资产类别敞口。
- 因子敞口</style】：$V = \mathbb{R}^k$（风险因子）。 $g(x) = Fx$ 是投资组合的因子载荷。
- 风险贡献</style】：$V = \mathbb{R}^n$ 其中，$g(x)_i$ 是资产 i的风险贡献。

示例 11.3（共同基金与交易所交易基金）。 设 $P_1 \subseteq \Delta^n(\mathcal{A})$ 为共同基金投资组合的许可空间，$P_2 \subseteq \Delta^m(\mathcal{B})$ 为ETF投资组合的许可空间。二者均旨在提供对 k 资产类别的暴露度。 $g_{\mathcal{A}}: P_1 \to \mathbb{R}^k$ 与 $g_{\mathcal{B}}: P_2 \to \mathbb{R}^k$ 将投资组合映射到其在 $V = \mathbb{R}^k$中的资产类别敞口。

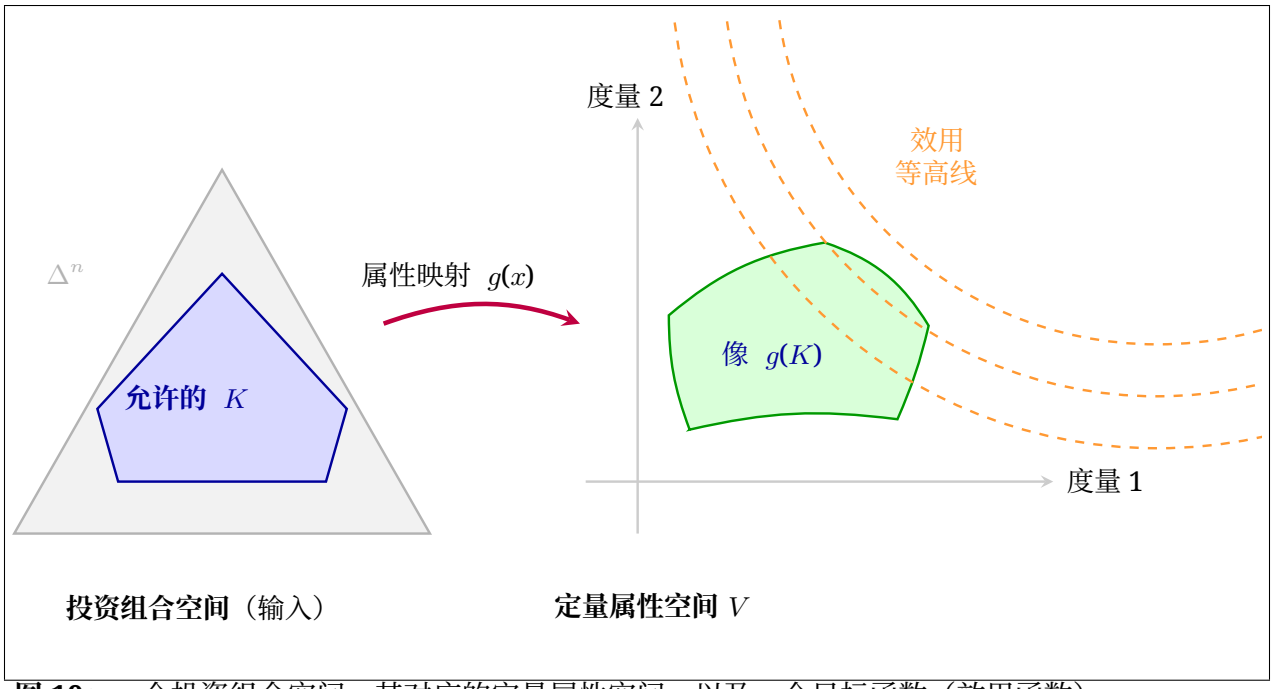


图 10：一个投资组合空间、其对应的定量属性空间，以及一个目标函数（效用函数）。

示例 11.4（定量属性上的目标函数）。

- **基于度量的效用**：如果 $v \in V$ 表示预期收益和方差度量，$u(v) = v_{\text{收益}} - \lambda v_{\text{方差}}$。

- **与定量属性相关的负成本**：如果 v 表示因子敞口，$u(v) = -\text{成本}(v)$，其中成本可能与为实现这些敞口而产生的换手率或税费有关。

注：如果主要目标（如费用）直接取决于辐射投资组合 $y \in P_2$，而非其度量 $g_{\mathcal{B}}(y)$，则可以在下文的优化中使用复合目标来调整这一设定；但此处我们聚焦于 $u\colon\ V \to \mathbb{R}$。

11.2 通过约束优化进行最优重新实现

对于给定的枢纽投资组合 $x \in P_1$，目标是找到一个辐射投资组合 $y \in P_2$，以尽可能实现两个可能相互冲突的目标：

1. 匹配中心度量：$g_{\mathcal{B}}(y)$ 应与 $g_{\mathcal{A}}(x)$“接近”。
2. 优化目标函数：$u(g_{\mathcal{B}}(y))$ 应达到最大值。

我们将这些内容合并为一个优化问题。对于固定的 $x \in P_1$，我们寻求满足以下条件的 $y \in P_2$：

$$\min_{y \in P_2} \left(\|g_{\mathcal{A}}(x) - g_{\mathcal{B}}(y)\|_V^p - \lambda u(g_{\mathcal{B}}(y)) \right)$$

这里， $p \geq 1$ （对于平方欧几里得距离，通常为 $p = 2$ ），而 $\lambda \geq 0$ 是一个权重参数，用于平衡度量匹配（最小化距离）与目标最大化（最大化 u，因此最小化 $-u$）。

令 $F(x,\ y)$ 为依赖于参数 λ 的目标函数：

$$F(x, y) = \|g_{\mathcal{A}}(x) - g_{\mathcal{B}}(y)\|_V^p - \lambda u(g_{\mathcal{B}}(y))$$

给定 $x \in P_1$ 时的最优解集合为：

$$y^*(x) = \arg\min_{y \in P_2} F(x, y)$$

我们使用贝尔热最大值定理 [10] （应用于最小化）来确立此优化问题构造有效水平态射的条件 $f : K_1 \to K_2$ 在 $\mathbb{HS}$ 中。

定理 11.5 （贝尔热极小值定理（非正式表述））。设 X、Y 为拓扑空间。设$F :\ X \times Y \to \mathbb{R}$ 为连续函数。设 $C \subseteq Y$ 为非空紧集。定义对应 $\Phi :\ X \rightrightarrows C$ 为 $\Phi(x) =$极小值$_{y \in C} F(x, y)$。则：

1. 值函数 $v(x) =$最小值$_{y \in C} F(x, y)$ 在 X 上连续。
2. 极小值对应 $\Phi(x)$ 在 X 上上半连续且取紧值。
3. 如果对于每个 $x \in X$，函数 $y \mapsto F(x, y)$ 在 C 上有唯一最小值，那么 $\Phi(x)$ 是单值的，且由此得到的函数 $f(x) = \Phi(x)$ 在 X 上连续。

定理 11.6。假设：

- 许可集 $P_1 \subseteq \Delta^n$ 和 $P_2 \subseteq \Delta^m$ 是闭集（因此是紧集）。
- 属性映射 $g_{\mathcal{A}} :\ P_1 \to V$, $g_{\mathcal{B}} :\ P_2 \to V$ 是连续的。
- 目标函数 $u :\ V \to \mathbb{R}$ 是连续的。
- 组合目标函数 $F(x, y) = \|g_{\mathcal{A}}(x) - g_{\mathcal{B}}(y)\|_V^p - \lambda u(g_{\mathcal{B}}(y))$ （对于固定的 $p \geq 1, \lambda \geq 0$）在每个 $x \in P_1$ 下，于 P_2 上有一个唯一最小值 $y^*(x)$ 。

则：

1. *Th* e 映射 $f :\ P_1 \to P_2$ 定义为 $f(x) = y^*(x) =\arg\min_{y \in P_2} F(x, y)$ 是连续的 $s.$
2. 令 $K_1 = P_1$。 K_1 是 $\mathbb{HS}$ 中的有效对象。
3. 令 $K_2 = f(K_1) \subseteq P_2$。 K_2 是紧的（因而是闭集），并且是 $\mathbb{HS}$ 中的有效对象。
4. 映射 $f :\ K_1 \to K_2$ 构成了 $\mathbb{HS}$中的一个有效水平态射。

唯一性的充分条件包括： P_2 是凸的， $g_{\mathcal{B}}$ 是仿射的，函数 $v \mapsto \|v\|^p$严格凸（这要求 $p > 1$，且 $\|\cdot\|_V$是严格凸范数，例如欧几里得范数或任何满足 $1 < q < \infty$的 ℓ^q 范数），并且函数 $v \mapsto -u(v)$严格凸（即 u 严格凹）。

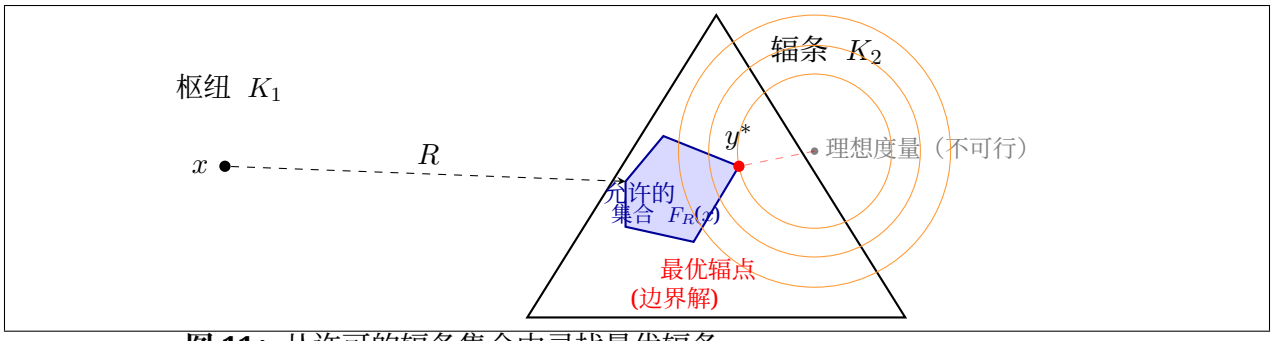


图 11： 从许可的辐条集合中寻找最优辐条

证明。(1) 函数 $F(x,y)$在 $P_1 \times P_2$ 上连续，因为 $g_{\mathcal{A}}$、 $g_{\mathcal{B}}$、 u、范数以及乘方运算（$(\cdot)^p$）都是连续的。约束集 P_2 是紧的（因为它是 Δ^m的闭子集），且独立于 x。根据假设，对每个 x， $F(x,y)$都有唯一的最小值，因此可直接应用伯格定理的第3部分（取 $X = P_1$、 $C = P_2$），从而函数 $f(x) = \arg\min_{y \in P_2} F(x,y)$是连续的。(2) 根据假设， $K_1 = P_1$ 是闭集，因此是有效对象。(3) $K_2 = f(K_1)$是紧集 K_1 的连续像。因此， K_2 是紧集。豪斯多夫空间（例如 Δ^m）中的紧子集是闭集。因此， K_2 是有效对象。(4) K_1 和 K_2 是有效对象，且$f : K_1 \to K_2$ 是连续映射。这符合 $\mathbb{HS}$中水平态射的定义。

□

我们将其更简洁地重述如下：

定理 11.7 (通过优化 $\mathbb{HS}$构造态射)。 假设 $P_1 \subseteq \Delta^n$ 和 $P_2 \subseteq \Delta^m$是闭集（因此是紧集）， $g_{\mathcal{A}} : P_1 \to V$、 $g_{\mathcal{B}} : P_2 \to V$ 是连续的，且 $u : V \to \mathbb{R}$ 是连续的。若 $g_{\mathcal{B}}$ 是仿射且单射的， P_2 是凸的， $1 < p < \infty$、 $\|\cdot\|_V$ 是严格凸范数（例如欧几里得范数或任何满足 $1 < q < \infty$的 ℓ^q 范数；这确保 $v \mapsto \|v\|_V^p$ 是严格凸的），且$v \mapsto -u(v)$ 是严格凸的，那么对于每个 $x \in P_1$，该最小化问题都有唯一解$y^*(x)$，且映射 $f(x) = y^*(x)$ 是连续的。

注释 11.8（单射性的作用）。 对 $g_{\mathcal{B}}$ 施加单射性假设可确保目标函数$F(x, y) = \|g_{\mathcal{A}}(x) - g_{\mathcal{B}}(y)\|_V^p - u(g_{\mathcal{B}}(y))$ 关于 y是严格 凸的，而不仅仅是凸的。如果 $g_{\mathcal{B}}$不是单射的，则具有 $g_{\mathcal{B}}(y) = g_{\mathcal{B}}(y')$的不同投资组合 $y \neq y'$ 会产生相同的目标函数值，从而破坏唯一性。在实践中，也可以通过添加正则化项（例如，一个较小的 $\|y\|^2$ 项），或限制 P_2 使得 $g_{\mathcal{B}}|_{P_2}$ 为单射，来恢复唯一性。

注释 11.9（重要性）。 该定理表明，在确保最优解唯一的标准条件下（例如，严格凸性/凹性），寻找一种在度量匹配与目标优化之间取得平衡的“最优”重新实现的过程，会自然地构造出紧可行空间 K_1， K_2之间的连续映射 f。枢纽空间 K_1 就是初始允许空间 P_1，而辐条空间 K_2 则是可实现的最优投资组合的集合。这保证了所得的重新实现 f 自动为真，并且能够协调一致地融入$\mathbb{HS}$双重范畴结构中。

非唯一性

当目标函数是平坦的（例如，线性规划存在多个解）或不存在（纯粹的约束满足问题）时，我们必须依赖迈克尔选择定理来保证存在连续的重新实现。

定理 11.10 (迈克尔选择定理 [50])。 设 X 是一个仿紧空间（例如度量空间），且 Y 是一个巴拿赫空间。设 $\Phi\colon X \rightrightarrows Y$ 是一个下半连续对应，其取值非空、闭且凸。则存在连续函数 $f : X \to Y$ 使得$f(x) \in \Phi(x)$ 对所有 $x \in X$成立。

推论 11.11 （连续重新实现的存在性）。 设许可空间 K_1 与 K_2为单纯形的凸闭子集。设 $R \subseteq K_1 \times K_2$ 为闭对齐关系，使得对每一个 $x \in K_1$，可行集 $F_R(x)$ 均为凸且非空。若对应 $x \mapsto F_R(x)$ 是下半连续的，则在 $\mathbb{HS}$ 中存在连续水平态射 $f\colon K_1 \to K_2$，使得$\mathrm{Graph}(f) \subseteq R$。（由于 K_2 是 $\mathbb{R}^m$的闭凸子集，*Michael*定理保证存在进入 $\mathbb{R}^m$ 的连续选择，其取值位于该对应的凸像之中，因此该选择落在 K_2中。）

注释 11.12。 凸性要求可由线性约束自然满足（例如，预算集、部门限制）。下半连续性条件直观上要求，选项的“菜单”不会在枢纽空间的内部突然坍缩。当可测性而非连续性已足够时，库拉托夫斯基–里尔-纳德热夫斯基可测选择定理 [39] 在较弱的假设下提供了一种替代方案。该定理确保“设计”阶段（定义允许的辐条投资组合菜单，参见第17）在数学上与“执行”阶段（选择连续映射 f）相容。

11.3 通过对齐关系约束进行最优重新实现

当主要目标是在辐条空间上优化目标函数 $u\colon K_2 \to \mathbb{R}$，同时受预先定义的对齐关系 $R \subseteq K_1 \times K_2$约束时，会出现另一种情景，如第 5.2 节所述。此处，$K_1 \subseteq \Delta^n$ 和 $K_2 \subseteq \Delta^m$ 是给定的紧（闭）允许投资组合空间，而 R 是一个闭关系（垂直态射）。

给定一个枢纽投资组合 $x \in K_1$，可行辐射投资组合的集合由关系R确定：

$$F_R(x) = \{y \in K_2 \mid (x, y) \in R\} \subseteq K_2$$

集合 $F_R(x)$ 表示 K_2 中所有根据 R被视为与 x 对齐的投资组合。接下来，优化问题是从该集合中选出最优投资组合：

$$\max_{y \in F_R(x)} u(y)$$

设 $\Phi_R(x)$ 为最优解集合：

$$\Phi_R(x) = \arg\max_{y \in F_R(x)} u(y) \subseteq K_2$$

如果最优解唯一，Φ_R 便定义了一个函数 $\phi : K_1 \to K_2$。

我们再次使用贝尔热最大值定理，以确定何时此过程在 $\mathbb{HS}$ 中产生有效的水平态射。

定理 11.13 （通过对齐约束构造）。 假设：

1. $K_1 \subseteq \Delta^n$ 个 以及 $K_2 \subseteq \Delta^m$ 是允许的投资组合空间，即闭集（因此也是紧集）。
2. $R \subseteq K_1 \times K_2$ 是垂直态射，即闭关系。
3. $u\colon K_2 \to \mathbb{R}$ 是一个连续目标函数。

4. 对于每个 $x \in K_1$，定义可行对应

$$F_R(x) := \{y \in K_2 \mid (x, y) \in R\}.$$

假设对于所有 $x \in K_1$， $F_R(x)$ 均非空。

5. 对应 $F_R : K_1 \rightrightarrows K_2$ 是上半连续的，且具有紧值。（注：根据下文注释 *11.14* ，当 .....时，此条件是自动满足的： R 是紧豪斯多夫空间之间的闭关系——这由假设 *(1)* 和 *(2)* 保证。此处列出该条件是为了逻辑清晰，但实践中无需单独验证。）

6. 对于每个 $x \in K_1$，最大化问题

$$\max_{y \in F_R(x)} u(y)$$

有唯一解。

那么：

1. 诱导映射

$$f : K_1 \to K_2, \qquad f(x) := \arg\max_{y \in F_R(x)} u(y),$$

是连续的。

2. 设

$$K_1' := \mathrm{dom}(R) = \{x \in K_1 \mid F_R(x) \neq \varnothing\}.$$

那么 K_1' 是闭集，因此是 $\mathbb{HS}$的有效对象。

3. 设 $K_2' := f(K_1')$。那么 K_2' 是紧集（因而是闭集），并且是 $\mathbb{HS}$的有效对象。

4. 映射 $f : K_1' \to K_2'$ 是 $\mathbb{HS}$ 中的一个水平态射，满足 $\mathrm{Graph}(f) \subseteq R$.

注释 11.14（上半连续性的充分条件）。 对应的一个方便的充分条件是

$$F_R : K_1 \rightrightarrows K_2, \qquad F_R(x) := \{y \in K_2 \mid (x, y) \in R\},$$

t上半连续且具有紧值的条件是，对齐关系

$$R \subseteq K_1 \times K_2$$

为闭集，且 K_1 与 K_2 为紧豪斯多夫空间。

事实上，若 R 在 $K_1 \times K_2$中为闭集，则对每个 $x \in K_1$ ，纤维

$$F_R(x) = \{y \in K_2 \mid (x, y) \in R\}$$

是紧的。此外， R 的闭性意味着对应 F_R 具有闭图。对于具有紧值、取值于豪斯多夫空间的对应，闭图性质等价于上半连续性。

在实际的投资组合构建场景中，关系 R 通常由如下形式的不等式系统定义

$$g_j(x, y) \leq 0, \qquad j = 1, \ldots, m,$$

其中每个 g_j ： $K_1 \times K_2 \to \mathbb{R}$ 连续。此类关系自动是闭关系，因此会导出上半连续的可行集对应。因此，定理 11.13 中构造的优化器的连续性可由标准拓扑事实得出，无需作出任何内点性或凸性假设，除确保最优解唯一性所需的假设外。

证明。 (1) 对于固定的 x， $F_R(x)$ 是闭集 $R \cap (\{x\} \times K_2)$ 在 K_2 上的投影。由于 R 在 $K_1 \times K_2$ 中是闭集，且 $\{x\} \times K_2$ 是闭集，它们的交集是闭集。由于 $K_1 \times K_2$ 是紧集， R 是紧集，且该交集也是紧集。紧集在连续投影下的像是紧集，因此 $F_R(x)$ 是紧集。 F_R 的上半连续性可由 R 是紧豪斯多夫空间之间的闭关系这一事实推出（这是一个标准结果，与对应的闭图定理有关）。 (2) $K_1' = \mathrm{dom}(R) = \pi_1(R)$ 是紧集 R 在连续投影 $\pi_1 \colon K_1 \times K_2 \to K_1$ 下的像，因此是紧集，进而是 $K_1 \subseteq \Delta^n$ 中的闭集。(3) $K_2' = f(K_1')$ 是紧集 K_1' 在连续映射下的像，因此是紧集，进而是 $K_2 \subseteq \Delta^m$ 中的闭集。(4) K_1' 和 K_2' 是有效对象，且 $f \colon K_1' \to K_2'$ 是连续映射，符合水平态射的定义。

□

注释 11.15（意义）。 该定理表明，只要关系 R 和目标函数 u 满足标准条件（确保定义域 K_1' 为闭集且解唯一），受对齐关系约束的优化也会自然地构造出有效的 $\mathbb{HS}$对象和态射。这进一步证明，该 $\mathbb{HS}$ 框架适用于对实际投资组合构建任务建模，尤其是在约束由关系而非度量邻近性给出时。使 R 成为闭集的必要条件（与 F_R的下半连续性有关）在实际情形中往往成立，例如，当 R 本身由涉及连续函数的不等式定义时。

注释 11.16（可行集的范畴论解释）。 回顾第 5.2 节，有效的水平态射 f 必须满足包含关系 $Graph(f) \subseteq R$。在优化的语境下，可行集 $F_R(x)$ 恰好是关系 R 在 x处的纤维：

$$F_R(x) = \{y \in K_2 \mid (x, y) \in R\}.$$

因此，该优化问题在结构上等价于寻找一个连续选择$f(x) \in F_R(x)$。若存在这样的连续选择，所得映射 f 便自动满足第 5.2 节的 2-胞腔条件。所有 x对应的这些可行集的并集构成第 17 节中定义的“作用” $K_1 \odot R = \bigcup_{x \in K_1} F_R(x)$。

11.4 由对齐约束构造的方形的相干性 s

现在，我们来分析一个由水平态射构成的方形的相干性。与其通过基于度量的优化（定理 11.6）构造，**这些水平态射是通过**定理11.13中定义的对齐关系约束构造的。

假设给定四个对象（K_1、 K_2、 K_3、 K_4），以及由四个垂直态射（对齐关系）构成的一个“方形”，它们充当约束：

- $R_f \subseteq K_1 \times K_2$
- $R_g \subseteq K_1 \times K_3$
- $R_{g'} \subseteq K_2 \times K_4$
- $R_{f'} \subseteq K_3 \times K_4$

我们还假设给定连续目标函数 $u_2 \colon K_2 \to \mathbb{R}$、 $u_3 \colon K_3 \to \mathbb{R}$ 和 $u_4 \colon K_4 \to \mathbb{R}$。

水平态射 f， g， f'， g'随后根据定理 11.13构造为由这些关系定义的可行集上的唯一优化器。例如，对于给定的 $x \in dom(f)$，$f(x)$是唯一的投资组合 y，它使 $u_2(y)$最大化，并满足约束 $(x,\ y) \in R_f$。

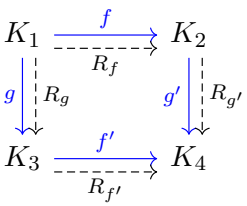


图12： 由垂直对齐约束方形 f，g，f'，g'(蓝色实线)构造的水平态射方形 R_f，R_g，$R_{f'}$，$R_{g'}$(虚线)。

交换性分析

在这个框架中，方形**通常不交换**。这种构造本质上具有路径依赖性。让我们追踪给定 $x \in K_1$ 的两条路径：

- **路径 1 ($f' \circ g$):**

  1. $z = g(x) = \arg\max_{z' \in F_{R_g}(x)} u_3(z')$。这是 z 在 K_3（根据 u_3）中与 x 对齐的"最佳"投资组合（通过 R_g）。2. $w = f'(z) = \arg\max_{w' \in F_{R_{f'}}(z)} u_4(w')$。这是 w 在 K_4（根据u_4）中与 z 对齐的"最佳"投资组合（通过 $R_{f'}$）。

- **路径 2 ($g' \circ f$):**

  1. $y = f(x) = \arg\max_{y' \in F_{R_f}(x)} u_2(y')$。这是 y在 K_2（根据u_2）中与 x 对齐的"最佳"投资组合（通过 R_f）。2. $w' = g'(y) = \arg\max_{w'' \in F_{R_{g'}}(y)} u_4(w'')$。这是 w' 在 K_4（根据 u_4）中与 y 对齐的"最佳"投资组合（通过$R_{g'}$）。

交换性（$w = w'$）不成立，因为中间的"贪心"优化各不相同。投资组合 z 是根据 R_g 和 u_3选择的，而 y 是根据 R_f 和 u_2选择的。由于 y 和 z 通常不同，第二阶段优化的输入也不同，因此得到的最终投资组合也不同（$w \neq w'$）。

对定义该方形的优化问题施加一些相当特殊的条件，就可以实现交换性。

定理 11.17 （通过 Bellman一致性实现交换性）。考虑对齐关系 $R_f \subseteq K_1 \times K_2$、$R_g \subseteq K_1 \times K_3$、$R_{g'} \subseteq K_2 \times K_4$、$R_{f'} \subseteq K_3 \times K_4$，它们构成一个关系的交换方块：$R_{f'} \circ R_g = R_{g'} \circ R_f$（即，经由两条路径可达的最终投资组合集合相同）。

令 $u_4 : K_4 \to \mathbb{R}$ 为一个连续、严格凹的目标函数。根据 *Bellman*值条件，定义中间目标函数 $u_2 : K_2 \to \mathbb{R}$ 和 $u_3 : K_3 \to \mathbb{R}$：

$$u_2(y) = \max\{u_4(w) \mid (y, w) \in R_{g'}\}$$
$$u_3(z) = \max\{u_4(w) \mid (z, w) \in R_{f'}\}$$

将水平态射 f, g, f', g' 构造为满足对齐约束的唯一优化器：

$$f(x) = \arg\max_{y \in K_2, (x,y) \in R_f} u_2(y), \qquad g'(y) = \arg\max_{w \in K_4, (y,w) \in R_{g'}} u_4(w),$$
$$g(x) = \arg\max_{z \in K_3, (x,z) \in R_g} u_3(z), \qquad f'(z) = \arg\max_{w \in K_4, (z,w) \in R_{f'}} u_4(w).$$

假设对于每个 $x \in K_1$，可达最终投资组合 $W_x = \{w \in K_4 \mid (x, w) \in R_{f'} \circ R_g\}$均非空且为凸集。则重新实现方块满足交换律：

$$f' \circ g = g' \circ f$$

证明。设 $x \in K_1$ 为任意枢纽投资组合。我们确定 x 在两条路径下的像。**步骤 1：全局最优解的唯一性**。将 $W_x \subseteq K_4$ 定义为从 x可达的所有最终投资组合的集合。由于这些关系可交换（$R_{f'} \circ R_g = R_{g'} \circ R_f$），两条路径的可达投资组合集合相同。由于 K_i 是紧的且关系是闭集，W_x 是紧的。由假设，W_x 是凸的。由于 u_4 是严格凹的，且 W_x 是凸且紧的，存在唯一的全局最大化元 $w^* \in W_x$：

$$w^* = \arg\max_{w \in W_x} u_4(w).$$

步骤 2：路径 1 的分析（$x \xrightarrow{g} z \xrightarrow{f'} w$）。态射 $g(x)$ 选取在约束 $(x,\ z) \in R_g$ 下使 $u_3(z)$ 最大化的投资组合 $z^* \in K_3$。代入 u_3 的定义：

$$z^* = \arg\max_{z:(x,z)\in R_g} \left(\max_{w:(z,w)\in R_{f'}} u_4(w) \right).$$

这一嵌套最大化等价于在复合关系 $R_{f'} \circ R_g$ 上最大化 $u_4(w)$。为看出见证元重合：设 w^* 为 u_4 在 W_x 上的唯一最大化元（由凸紧集 W_x上的严格凹性保证唯一）。由于 $w^* \in W_x = \{w :\ \exists z,$ $(x, z) \in R_g$ 且 $(z, w) \in R_{f'}\}$，存在 z_0 使得 $(x, z_0) \in R_g$ 且 $(z_0, w^*) \in R_{f'}$。于是 $u_3(z_0) = \max_{w:(z_0,w)} \in R_{f'} u_4(w) \geq u_4(w^*)$。但由 z^* 的最优性，$u_3(z^*) \geq u_3(z_0)$，且对某个满足 $(z^*, w') \in R_{f'}$ 的 w'，有 $u_3(z^*) = u_4(w')$，因此$w' \in W_x$ 且 $u_4(w') \geq u_4(w^*)$。由唯一性，$w' = w^*$，从而 $(z^*, w^*) \in R_{f'}$。第二个态射 $f'(z^*)$ 随后计算：

$$f'(z^*) = \arg\max_{w:(z^*,w)\in R_{f'}} u_4(w).$$

由于 w^* 可由 z^* 到达，且 w^* 是 W_x上的全局最大值，因此 $f'(z^*) = w^*$。因此，$(f' \circ g)(x) = w^*$。

步骤 3：路径 2（$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g'} w$）**的分析**。根据对称性，$f(x)$ 选择使 $u_2(y)$ 最大的 $y^* \in K_2$。根据 u_2的贝尔曼定义，选择 y^* 正是因为它能够访问 u_4的最大值，而该最大值在 w^*处取得。随后，第二个态射 $g'(y^*)$ 选择 w^*。因此，$(g' \circ f)(x) = w^*$。

结论。两条路径都将每个 $x \in K_1$ 映射到同一个唯一的全局最优解 w^*。该方形交换。

□

注释 11.18（W_x的凸性）。当对齐关系 $R_g, R_{f'}$ 由仿射约束（对投资组合权重的线性等式和不等式）定义时，W_x 的凸性假设是一个较弱的条件，因为凸集在满足仿射约束的关系复合下的像仍然是凸集。当这些关系编码非凸约束（例如基数约束或离散行业分配）时，该条件可能不成立。

注释 11.19（集合值中间优化器）. 当中间价值函数 u_2 与u_3 并非严格凹时，argmax对应 f 与 g 可能是集值的。交换性结论——两条路径均到达同一终端投资组合 w^*——无论如何仍然成立：它仅依赖于最终最优解的唯一性，而不依赖于中间最优解的唯一性。如果

需要单值水平态射，充分条件包括中间目标的严格凹性；当 u_4 严格凹且约束对应$z \mapsto \{w : (z,w) \in R_{f'}\}$ 为仿射时，该条件成立。

遗憾的是，该定理在实践中很少有用，因为它需要将原始目标函数替换为由 Bellman 值条件定义的中间目标函数。

11.5 总结

本节的结果可方便地总结如下。

定理11.20 (再实现流水线的相容构造)。 设 K_1, K_2, K_3, K_4 为允许的投资组合空间，即单纯形的闭（因此紧）子集。

Let

$$R_f \subseteq K_1 \times K_2, \quad R_g \subseteq K_1 \times K_3, \quad R_{g'} \subseteq K_2 \times K_4, \quad R_{f'} \subseteq K_3 \times K_4$$

为构成交换方块的闭对齐关系：

$$R_{f'} \circ R_g = R_{g'} \circ R_f.$$

假设目标函数连续

$$u_2 : K_2 \to \mathbb{R}, \quad u_3 : K_3 \to \mathbb{R}, \quad u_4 : K_4 \to \mathbb{R}.$$

(A) 存在性与连续性。 假设对于每个 $h \in \{f, g, f', g'\}$ 和每个可容许输入投资组合，由关系 R_h 定义的可行对应非空、紧、上半连续，并且相对于相关目标函数存在唯一优化器。

那么，诱导映射

$$f : K_1 \to K_2, \quad g : K_1 \to K_3, \quad g' : K_2 \to K_4, \quad f' : K_3 \to K_4$$

是连续的水平态射，属于 $\mathbb{HS}$，其图包含于相应关系中 s.

(B) 一般（路径依赖）行为。 一般而言，由此产生的两阶段重新实施

$$f' \circ g \quad and \quad g' \circ f$$

未必一致。因此，即使对齐关系可交换，通过贪心分阶段优化构造的流程管线通常也具有路径依赖性。

（C）贝尔曼一致（与路径无关）的情形。此外，假设最终目标函数$u_4 : K_4 \to \mathbb{R}$ 严格凹，并定义中间价值函数如下：

$$u_2(y) := \max\{u_4(w) \mid (y,w) \in R_{g'}\}, \qquad u_3(z) := \max\{u_4(w) \mid (z,w) \in R_{f'}\}.$$

假设对于每个 W_x ，可达最终投资组合的集合 x都是凸集，因此u_4 在 W_x 上的严格凹性保证这些最大值都能唯一取得（定理*11.17*）。将全部四个映射f、 g、 g'、 f'构造为相对于这些价值函数的唯一优化器。

于是，所得的水平态射方形交换：

$$f' \circ g = g' \circ f.$$

（D）解释。（*B*）部分反映了贪心局部优化中真实存在的经济路径依赖。（*C*）部分则指出了一种动态规划机制，在这种机制下，重新实施流程能够保持一致：每个阶段都优化未来价值，且最终投资组合在所有通过复合对齐关系可达的投资组合中达到全局最优。

12 投资组合变更与新要求的传播

12.1 投资组合变更的传播

投资组合管理的一项基本任务，是确定“枢纽”投资组合的变化应如何传递到其“辐条”上。 $\mathbb{HS}$ 双范畴为这一过程提供了严谨的支撑。

水平态射 $f\colon\ K_1 \to K_2$ 充当传播机制。枢纽 K_1 处的投资组合变更$x \rightsquigarrow x'$ 被相干地变换为辐条 K_2处的变更 $y \rightsquigarrow y'$ ，其中$y = f(x)$且 $y' = f(x')$。

对齐由闭关系 $R \subseteq K_1 \times K_3$ 建模。

- **适当性的作用**：因为 f 自动为真（命题 7.3），推前$f_!R$ 是闭关系（定理 7.4）。这确保重新实现的投资组合 y' 不可能是“幻影投资组合”——一个看似满足所传播的对齐、却没有合规原像的极限点。

- **伴随的作用**：等价 $R \subseteq f^*S \iff f_!R \subseteq S$ （定理 7.7）允许在枢纽空间 K_1 或辐条空间 K_2中检查对齐。

- **复合律**：Beck–Chevalley（定理 8.4）和 Frobenius（定理 9.1）确保路径无关性，并确保筛选与重新实现可交换。

$\mathbb{HS}$ 的相干性意味着，若**枢纽**投资组合（$x \rightsquigarrow x'$）的变更遵循对齐关系 R ，那么**辐条**投资组合（$y \rightsquigarrow y'$）也会相应变化，并遵循传播后的闭集对齐关系 $f_!R$。

注释 12.1（拉回的诊断性用法与规范性用法）。拉回 f^*S 有两种截然不同的用法——这种区别源于数学，但会带来实际操作上的不同。在诊断模式下，我们会问：“如果按提议改变枢纽，辐条的对齐关系会被破坏吗？”此时，我们计算 f^*S 并检查新的枢纽投资组合是否属于适当的纤维；拉回在此充当可行性检验。在规范模式下，我们反过来提问：“应如何重新设计枢纽，才能实现所需的辐条对齐？”此时， f^*S 刻画了与辐条约束相容的枢纽投资组合集合，我们在其中进行优化。

还有一种更微妙的情况——基本框架能够处理，但并未着重强调——那就是辐条约束具有系统性：例如适用于所有客户账户的统一监管头寸限额。在这种情况下，各辐条共同约束枢纽。$\bigcap_i f_i^* S_i$ 所有辐条约束的交集定义了枢纽的可行域，规定方向也随之逆转。

12.2 新的对齐要求的传播

枢纽可能会被施加新的对齐或合规要求，这些要求必须向下游传播至辐条，且可能需要经过多个阶段。在实践中，投资组合变更更常由新的对齐要求触发，而非投资信念的变化。

为了说明前文确立的拓扑与范畴论结果在实践中的必要性，我们来看一个多阶段投资流程。在此情景中，集中式“枢纽”策略首先转化为一个中间“模型”投资组合，随后再转化为数百个定制的“客户”账户。

情景：新的首席投资官资产配置指引

首席投资官（CIO）已决定，投资组合现在必须符合集中式资产配置指引。该投资框架形式化如下：资产配置指引对应于投资组合 $z \in K_{\text{Asset Classes}}$，而实际投资组合对指引的"可接受符合程度"则对应于一种对齐关系

$$R_{\text{CIO}} : K_{\text{Hub}} \dashrightarrow K_{\text{Asset Classes}}$$

持续的投资组合管理问题如下：每当首席投资官资产配置指引发生变化时，枢纽投资组合可能需要调整，以符合新的指导。随后，这些变更需要传播至辐条投资组合，而这可能是一个多阶段过程。

也就是说，该指导的传播可能涉及一个复合重新实现过程：

$$K_{\text{Hub}} \xrightarrow{f} K_{\text{Model}} \xrightarrow{g} K_{\text{Client}}$$

在该流程管线的每个阶段都可能引入新的约束：

1. **阶段1（枢纽 $\to$ 模型）：** 映射 f 将Hub策略重新实现为模型投资组合。在此阶段，一项行业约束 S_{Sec} 得以应用（例如，严格与最大行业权重对齐）。

2. **阶段2（模型 $\to$ 客户）：** 映射 g 将模型重新实现为最终客户账户。在此阶段，税费约束 T_{Tax} 得以应用（例如，为提高税收效率而限制换手率）。

问题在于，最终的客户投资组合 $z \in K_{\text{Client}}$——经过行业约束 S_{Sec} 和税务约束 T_{Tax}的处理后——是否确实满足原始的首席投资官指引 R_{CIO}。双范畴 $\mathbb{HS}$ 确保了这一点，也确保审计轨迹在这一多阶段构造过程中始终完整无缺：

- **通过适当性确保一致性（定理 7.4）：** 由于重新实现映射 f和 g 是适当的，首席投资官指引的推前可以沿着这一链条安全传递。由首席投资官指引导出的有效客户投资组合集合（$g \circ f$）$^! R_{\text{首席投资官}}$，保证是一个闭集。这确保了在每个阶段与局部约束的交集都有良好定义；不会生成"虚构"的客户投资组合，虽然它们在技术上满足求解器容差，却违反了首席投资官的根本指令。

- **通过 Lax Beck–Chevalley 实现审计保守性（命题 8.1）：** 严格的路径无关性需要满足特定条件（逐点笛卡尔性），而 *Lax* Beck–Chevalley 条件在一般情形下均成立：

$$f'_!(g^* R_{\text{CIO}}) \subseteq h^*(f_! R_{\text{CIO}})$$

在实际操作中，这一包含构成了中心侧验证的安全保证。它表明，如果我们提前 验证一致性（在重新实现之前，根据首席投资官的指导筛选枢纽投资组合），那么由此得到的客户投资组合在数学上必定满足下游一致性检查。尽管理论上可能通过"后期验证"找到某些符合要求、但无法追溯到枢纽的投资组合（除非该方形是逐点笛卡尔的），但宽松条件确保上游审计严格保守，绝不会产生假阳性。

• **通过 Frobenius 实现的相干筛选（定理 9.1）：** Frobenius律确保可以在枢纽层面或模型层面检查行业合规，而不会影响结果。将 Frobenius 应用于 $f\colon K_{\text{枢纽}} \to K_{\text{模型}}$（其中 $R_{\text{首席投资官}}$ 位于 $K_{\text{枢纽}}$，而 $S_{\text{行业}}$ 位于 $K_{\text{模型}}$）：

$$f_!(R_{\mathrm{CIO}} \cap f^* S_{\mathrm{Sec}}) = f_!(R_{\mathrm{CIO}}) \cap S_{\mathrm{Sec}}$$

枢纽处的左端筛选器（通过 f^* 在重新实现前回拉行业约束）；模型处的右侧筛选器（在重新实现后求交）。通过 $g_!$ 将两侧向前推送，并与 T_{Tax}求交：

$$g_!\big(f_!(R_{\mathrm{CIO}} \cap f^* S_{\mathrm{Sec}})\big) \cap T_{\mathrm{Tax}} = g_!\big(f_!(R_{\mathrm{CIO}}) \cap S_{\mathrm{Sec}}\big) \cap T_{\mathrm{Tax}}$$

从业务角度看，无论是在枢纽层级（通过拉回 $f^* S_{\mathrm{Sec}}$，在第 1 阶段之前）还是在模型层级（通过 S_{Sec}，在第 1 阶段与第 2 阶段之间）纳入行业合规，允许的客户投资组合集合都相同。首席投资官的指导在经过后续约束层时，不会被“稀释”或丢失。

13 计算注意事项

13.1 表示对象和态射

用于 $\mathbb{HS}$中的计算：

- **对象** K：表示为多面体集合 $K = \{x \in \Delta^n \mid Ax \leq b\}$。这些集合是闭半空间的交集，因此始终是闭集（因而是有效对象）。
- **垂直态射** R：表示为 $R = \{(x,\ y) \in K_1 \times K_2 \mid Cx + Dy \leq e\}$。这些也都是闭集。
- **水平态射** f：

  – 如果 $f(x) = Fx + g$是仿射的，则它是连续的。– 如果 $f(x)$ 是第 11 节中优化问题的解，则它是连续的（根据定理 11.6）。

13.2 计算拉回

给定 $f\colon\ K_1 \to K_2$和 $S = \{(y,\ z) \in K_2 \times K_3 \mid Q(y,\ z) \leq 0\}$:

$$f^*S = \{(x,z) \in K_1 \times K_3 \mid Q(f(x),z) \leq 0\}$$

如果 f是仿射的（$f(x) = Fx + g$），且 S是多面体的（$Py + Qz \leq q$）：

$$f^*S = \{(x,z) \in K_1 \times K_3 \mid P(Fx+g) + Qz \leq q\}$$

这是一个简单的矩阵-向量运算。

13.3 计算推出

给定 $f\colon\ K_1 \to K_2$和 $R = \{(x,\ z) \in K_1 \times K_3 \mid C(x,\ z) \leq 0\}$:

$$f_!R = \{(y,z) \in K_2 \times K_3 \mid \exists x \in K_1 : y = f(x), C(x,z) \leq 0\}$$

这是一个投影操作。如果 f 和 C 是线性的，这就是傅里叶-莫茨金消元 [70], ，其计算复杂度很高。

不过，一般而言，计算推前更加困难，因为它需要将一个非线性集合投影

$$\{(x,y,z) \mid y = f(x),\ (x,z) \in R\}$$

到 $(y,\ z)$ 坐标上。这是一个非线性投影或量词消去问题，通常难以处理。

幸运的是，在高维生产环境中，我们很少需要精确地可视化或描绘 $f_!R$ 的边界。我们只需要回答："这个特定的辐射投资组合 y 是否满足 $(y,\ z) \in f_!R$？ 换句话说，是否存在 $x \in K_1$ 使得 $f(x) = y$并且 $(x,\ z) \in R$？"即使对于$N = 500$，如果 f 由凸优化定义且 R 是凸的，这个验证步骤也是一个标准的凸可行性问题，现代求解器可以有效处理。

那里 然而，在若干特殊情形下，在实践中界定 $f_!R$ 是可行的 .

1. 光滑局部可逆映射

如果 f 是光滑的 a 并且在局部可逆（雅可比矩阵非奇异）时，可以在局部对该关系求逆 :

$$f_!R = \{(f(x), z) \mid (x, z) \in R\}.$$

在这种情况下，可以通过在R的样本上逐点计算 f ，直接求得推前，因此适用于低维应用。

2. 分段线性或仿射映射

当 f 是分段仿射的（常见于会切换状态的基于优化的映射），且 R 是凸的或多面体的时， $f_!R$ 是有限个凸投影的并集:

$$f_!R = \bigcup_i (A_i R_i),$$

其中，每个区域 R_i 对应于 f的一个仿射片段。每个投影都可以通过线性规划或凸消元进行计算，具有良好的计算可行性。

3. 低维非线性映射

如果 f 的定义域维度较低（例如包含两到五种资产），且 R 由线性或二次约束定义，则可以通过对 x 进行离散化、计算 $y = f(x)$，并取所得 $(y,\ z)$ 对的凸包，以数值方式近似其推前。对于实际的投资组合问题，此方法能提供准确的可行区域估计。

4. 线性或凸陪域约束

若要验证包含关系 $f_!R \subseteq C$，且 C 为凸集（例如线性对齐约束），则检查可简化为

$$\forall (x, z) \in R, \quad f(x) \in C_z, \quad C_z = \{y \mid (y, z) \in C\}.$$

当 f 连续且 C_z 为凸集时，可以通过凸松弛或对 f进行区间包络来验证此包含关系，例如McCormick包络 [47] 或半定松弛。

5. 通过切锥进行线性化

当 R 描述局部对齐条件时，推前可近似为 f 的雅可比矩阵对切锥的作用:

$$T_{(f(x),z)}(f_!R) = Df(x)\, T_{(x,z)}R.$$

这种线性化推前在解析上易于处理，对应于可微投资组合变换中的标准敏感度分析或一阶传播。

金融解释。 在投资组合场景中， R 通常编码线性对齐约束（例如敞口匹配），而 f 表示基于非线性优化的重新实施（例如费用或税务优化）。当 f 为连续且真时，推前可通过采样或凸化可靠地刻画。然而，某些现实情形，例如由手数要求产生的离散约束，可能无法得到妥善处理。

13.4 计算最优重新实现

优化　　第 11 节中定义的问题通常是一个标准凸优化问题：

$$\max_{y\in\Delta^m} U_{\mathcal{B}}(y) \quad \text{subject to} \quad \|g_{\mathcal{A}}(x) - g_{\mathcal{B}}(y)\|_V \le \epsilon$$

（且 $y \in \Delta^m$为多面体的）。这通常是线性规划（LP）、二次规划（QP）或二阶锥规划（SOCP），这些问题都可以高效求解 [15, 11]。

13.5 一个具体的工作示例

为了具体说明拉回和推前运算，考虑一个简单的系统：

- **环境空间：** 设枢纽为 $\Delta^2 = \{(x_0,\ x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^3 \mid \sum x_i = 1,\ x_i \ge 0\}$（3 种资产），辐条为 $\Delta^1 = \{(y_0,\ y_1) \in \mathbb{R}^2 \mid y_0 + y_1 = 1,\ y_i \ge 0\}$（2 种资产）。

- **对象 K_1：** 一个对资产 0 设有上限的许可空间：

$$K_1 = \{x \in \Delta^2 \mid x_0 \le 0.5\}$$

- **对象 K_2 和 K_3：** 令 $K_2 = K_3 = \Delta^1$。

- **水平　　态射 f：$K_1 \to K_2$：** 一种将资产 0 和资产 1 组合起来的聚合映射　　：

$$f(x_0, x_1, x_2) = (x_0 + x_1, x_2) = (y_0, y_1)$$

  该映射是连续的，并将 K_1 映射到 K_2（因为 $x_0 + x_1 + x_2 = 1 \implies y_0 + y_1 = 1$）。

计算拉回 f^*S（预对齐）让我们定义一个辐射空间对齐 $S \subseteq K_2 \times K_3$，相对于某个基准 z_0限制聚合资产 y_0：

$$S = \{(y, z) \in \Delta^1 \times \Delta^1 \mid y_0 \le 2z_0\}$$

根据定义 6.1，拉回 f^*S 找出所有 $x \in K_1$ 在重新实现后满足此对齐条件的枢纽投资组合：

$$\begin{aligned} f^*S &= \{(x, z) \in K_1 \times K_3 \mid (f(x), z) \in S\} \\ &= \{(x, z) \in K_1 \times \Delta^1 \mid ((x_0 + x_1, x_2), z) \in S\} \\ &= \{(x, z) \in K_1 \times \Delta^1 \mid (x_0 + x_1) \le 2z_0\} \end{aligned}$$

结　　果得到的计算很简单，在枢纽空间上产生了一个新的闭关系　　.

计算推前 $f_!R$ (向前传播) 现在，定义一个枢纽空间对齐 $R \subseteq K_1 \times K_3$，用于约束资产 0 相对于基准 z_0：

$$R = \{(x, z) \in K_1 \times \Delta^1 \mid x_0 \ge z_0\}$$

根据定义 6.4，推前 $f_!R$ 找出所有可能被对齐的枢纽投资组合 $x \in R$“命中”的辐条空间对 $(y,\ z)$：

$$f_!R = \{(y, z) \in K_2 \times K_3 \mid \exists x \in K_1 : f(x) = y \text{ and } (x, z) \in R\}$$

为计算此式，我们必须在下列约束下消去 x：

1. $x \in K_1 \implies x_0 \le 0.5$ （且 $x \in \Delta^2$）
2. f（x） $= y \implies x_0 + x_1 = y_0$ 且
$x_2 = y_1$3. $(x, z) \in R \implies x_0 \ge z_0$4.
$x_i \ge 0 \implies x_0 \ge 0, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

由 (2) 和 (4)， $x_1 = y_0 - x_0 \ge 0 \implies x_0 \le y_0$。我们需要确定是否存在 一个满足 x_0上所有条件的 x_0：

$$x_0 \ge 0 \quad \text{and} \quad x_0 \le 0.5 \quad \text{and} \quad x_0 \ge z_0 \quad \text{and} \quad x_0 \le y_0$$

这样的 x_0 存在，当且仅当“下界”小于或等于“上界”：

$$\max(0, z_0) \le \min(0.5, y_0)$$

因此，推前（投影的结果）为：

$$f_!R = \{(y, z) \in \Delta^1 \times \Delta^1 \mid \max(0, z_0) \le \min(0.5, y_0)\}$$

正如定理 7.4所保证的那样，这是一个闭集，但其定义并非完全平凡，而是由量词消去得出。

第二部分公理化与扩展

模型指南

模型变体	主要用途	数学成本
$\mathbb{HS}$ **（参考）** 第一部分	**架构与安全**。基线模型 用于定义对象、保证适当性, 并确立审计安全性（Lax BC）。	**Low** （点集拓扑）
$\mathbb{S}$**泛（证据）** 第 *15*	**定量** **审计**。 取代二元 “对齐” 检查 with 定量证据 （例如，跟踪误差幅度、费用预算）。	**中等** （双范畴）
$\mathbb{HS}/B$ **（用户画像）** 第 *16*	**大规模定制**。 建模族 按年龄或风险参数索引的投资组合 （例如，生命周期投资路径、目标日期基金）。	**中** （切片类别）
DOTS（菜单） 第 *17*	**策略设计**。生成可供人类选择或外包首席投资官工作流程使用的“菜单”，列出可行的 辐条 工作流程（作用 $K \odot R$）。	**High** （旋子）
HSP-r（随机的） 第*18*节	**执行与流动性**。 处理随机- 性在求解器中（舍入, 平局决胜）以及 杂乱的非紧状态空间。	**High** （测度论）

表 1：本文所介绍的不同模型指南。参考模型（$\mathbb{HS}$）提供了架构基础，而第二部分和第三部分中的扩展则使该框架适应特定的工业约束。

14 一个公理化框架

第一部分构造的双范畴 $\mathbb{HS}$ 是 Shulman意义下的薄装备（加框双范畴） [62]，也是 Grandis–Paré [32]意义下的薄装备：伴随是映射的图，共伴随是其逆，而伴随 $f_! \dashv f^*$ 由单位/余单位不等式得出。这是标准的范畴论工具，为求完整起见，下面列出公理。

公理化处理的意义另有所在——它指出，当框架扩展到概率设定时，哪些方面会失效。在高中-r （第三部分）中，随机核的水平复合会引入误差累积：复合前推 $(g \circ f)_!$ 包含于分步前推 $g_! f_!$，但通常是其真子集。要求严格函子性的伴随构造无法实现。推前和拉回运算成为原始谓词变换器，而不再是与某个指定垂直箭头的复合。第14.5节将这一观察发展为“松弛逻辑框架”，准确指出哪些公理仍然成立（伴随、次函子性、Lax Beck–Chevalley、松弛 Frobenius），哪些则不成立（伴随、共伴随、严格函子性）。本节的贡献正在于此：不在于公理本身，而在于精确诊断它们在哪些方面失效。

本节指南。 熟悉装备的读者可以略读第14.1–14.4节，直接阅读第 14.5 节。主要关注具体模型的读者可以完全跳过本节；第 15–17 节以及第三部分中的变体语义不依赖于抽象公理。

14.1 公理

记号。 我们用 $\wedge$ 表示垂直偏序集中的二元交；在具体模型 $\mathbb{HS}$中，这就是集合论意义上的交集 $\cap$。

我们假设一个薄双范畴（加框双范畴／proarrow 装备 t)

$$\mathbb{D} = (\mathrm{Obj}, \mathbb{D}_h, \mathbb{D}_v)$$

由以下内容组成（括号中注明金融解释 $\mathbb{HS}$）：

- 对象 $A, B, C, \ldots$（允许的投资组合空间）。
- 水平箭头 $f : A \to B$ 构成一个范畴 $\mathbb{D}_h$ （严格复合；恒等态射 1_A）（重新实现）。
- 垂直箭头 $R : A \dashrightarrow B$ 对每个 (A, B)，构成一个偏序集 $\mathbb{D}_v(A, B)$，其垂直复合为 $S \circ R$，恒等态射为 $\Delta_A : A \dashrightarrow A$ （对齐关系；偏序集中的顺序是约束包含）。

薄 性意味着所有 2-胞腔都是这些偏序集中的包含关系：如果存在一个 2-胞腔 α，那么它是唯一的 .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle R}\,\vdots & \Downarrow \alpha & \vdots\,{\scriptstyle S} \\ C & \xrightarrow[g]{} & D \end{array}$$

定义14.1 （垂直带匕首的类代数结构）。 假设：

(V1) 每个同态集 $\mathbb{D}_v(A, B)$ 都是一个偏序集 $(\leq)$，具有二元交 $R \wedge R'$ (在 $\mathbb{HS}$, $\wedge$ 中是集合论意义上的交集 $\cap$)。

(V2) 垂直复合是单调的；当其中一个因子是伴随或共轭时，它对交具有分配性：对于任意垂直态射 R, R' 以及任意伴随 $\langle f\rangle$ 或共轭 $[f]$,

$$\langle f\rangle \circ (R \wedge R') = (\langle f\rangle \circ R) \wedge (\langle f\rangle \circ R'), \qquad (R \wedge R') \circ [f] = (R \circ [f]) \wedge (R' \circ [f]),$$

并且交换伴随与共轭的角色时也类似。交分配性不成立对于两个任意垂直态射的复合（见注释 14.2）。

（V3）伴随逆（converse）$(-)^\dagger : \mathbb{D}_v(A,B) \to \mathbb{D}_v(B,A)$ with $(R^\dagger)^\dagger = R$ and $(S \circ R)^\dagger = R^\dagger \circ S^\dagger$.

（V4）模律（戴德金公式）：对于可复合的 S 和 R,

$$(S \circ R) \wedge T \;\leq\; S \circ (R \wedge (S^\dagger \circ T)).$$

在 $\mathbb{HS}$ 中，公理 V4 是关系演算中的一个标准恒等式：若 $(y,z) \in (S \circ R) \cap T$，则见证 x 满足 $(y,x) \in R$ 且 $(x,z) \in S$，也满足 $(y,z) \in T$；由于 $(y,z) \in T$ 且 $(x,z) \in S$（等价地，$(z,x) \in S^\dagger$），我们得到 $(y,x) \in S^\dagger \circ T$，因此 $(y,x) \in R \cap (S^\dagger \circ T)$，从而 (y,z) 属于$S \circ (R \cap (S^\dagger \circ T))$。本文中所有垂直态射都是关系的模型（包括 HSP-r 和三个概率合规框架）都满足模律，但只有在伴随存在的确定性装备框架中才会用到它（定理 14.10）。概率模型缺少伴随，只使用正向弗罗贝尼乌斯包含，而它不需要公理 V4。

关于将关系范畴抽象为 allegory，参见 [24]；关于伴随量词的逻辑基础（$f_! \dashv f^*$），参见 [41]。关于限制范畴，参见 [19]。

注释 14.2（为何 V2 仅限于伴随和共伴随）。在 $\mathbb{HS}$ 中，当一个因子是函数图时，交分配性成立：$\mathrm{Graph}(f) \circ (R \cap R') = (\mathrm{Graph}(f) \circ R) \cap (\mathrm{Graph}(f) \circ R')$ and $(R \cap R') \circ \mathrm{Graph}(f) = (R \circ \mathrm{Graph}(f)) \cap (R' \circ \mathrm{Graph}(f))$，因为函数图为每个元素指定唯一的像。无约束版本（对任意垂直复合满足分配性）因与其在 Rel 中失效的原因相同而失效：标准反例（$R = \{(a,b)\}$, $R' = \{(a,c)\}$, $T = \{(b,d),(c,d)\}$，给出 $T \circ (R \cap R') = \emptyset \subsetneq \{(a,d)\} = (T \circ R) \cap (T \circ R')$）适用于带闭关系的有限紧空间。

定义 14.3（装备：伴随与共伴随）。对于每个水平态射 $f : A \to B$，都存在垂直态射

$$\langle f\rangle : A \dashrightarrow B \qquad \text{and} \qquad [f] : B \dashrightarrow A$$

（即 伴随 和共伴随），使得：

（E1）$\langle f\rangle \dashv [f]$ 在垂直偏序集中：

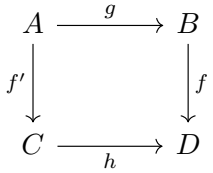
$$\Delta_A \leq [f] \circ \langle f\rangle \qquad \text{and} \qquad \langle f\rangle \circ [f] \leq \Delta_B.$$

（E2）函子性：$\langle 1_A\rangle = \Delta_A$、$[1_A] = \Delta_A$，以及水平复合（通过笛卡尔比较 2-胞腔）的标准伴随映射相容性。

（E3）（Frobenius 所需）匕首相容性：$\langle f\rangle^\dagger = [f]$ 和 $[f]^\dagger = \langle f\rangle$。此公理对于伴随（命题 14.5）或 Beck–Chevalley 条件（定理14.9）并非必需，但对于弗罗贝尼乌斯互反律（定理14.10）至关重要，因为后者要求垂直复合满足模律（戴德金公式）。

例如，在 $\mathbb{HS}$ 中，水平态射 f 的伴随是图 $\mathrm{Graph}(f)$，共轭是反向图 $\mathrm{Graph}(f)^\dagger$，二者由 E3 相关联。

引理 14.4 （伴随态比较）. 对于任意交换方块



（因此 $f \circ g = h \circ f'$），对于任意 $R\colon\ B \dashrightarrow Z$，我们有 $f'_!(g^*R) \le h^*(f_!R)$。

证明。 根据伴随 $h_! \dashv h^*$（由 E1 得出），不等式 $f'_!(g^*R) \le h^*(f_!R)$ 等价于 $h_!(f'_!(g^*R)) \le f_!R$。根据函子性（E2），$h_! \circ f'_! = (h \circ f')_!$ 且 $f_! \circ g_! = (f \circ g)_!$。由于 $f \circ g = h \circ f'$，我们有 $h_! \circ f'_! = f_! \circ g_!$，因此左端变为 $f_!(g_!(g^*R))$。根据余单位不等式（E1），$g_!(g^*R) \le R$，并根据 $f_!$ 的单调性：

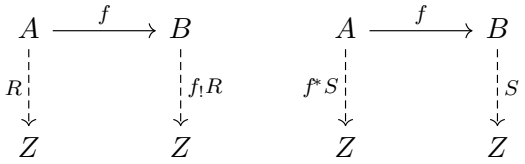
$$f_!(g_!(g^*R)) \le f_!(R).$$

不等式成立。 □

14.2 沿水平态射的推前与拉回

固定一个对象 Z。对于 $f\colon\ A \to B$，定义垂直同态偏序集之间的单调映射：

$$f_! : \mathbb{D}_v(A,Z) \to \mathbb{D}_v(B,Z), \quad f_!(R) := \langle f \rangle \circ R, \qquad f^* : \mathbb{D}_v(B,Z) \to \mathbb{D}_v(A,Z), \quad f^*(S) := [f] \circ S.$$



命题 14.5 (伴随 $f_! \dashv f^*$)。对于所有 $R\colon\ A \dashrightarrow Z$ 以及 $S\colon\ B \dashrightarrow Z$，

$$R \le f^*S \quad \Longleftrightarrow \quad f_!R \le S.$$

证明。 ($\Rightarrow$) 若 $R \le [f] \circ S$，则由垂直复合的单调性可得 $\langle f \rangle \circ R \le \langle f \rangle \circ [f] \circ S \le \Delta_B \circ S = S$，其中第二步使用了 *(E1)* 中的余单位 $\langle f \rangle \circ [f] \le \Delta_B$。($\Leftarrow$) 若 $\langle f \rangle \circ R \le S$，则由单调性可得 $[f] \circ \langle f \rangle \circ R \le [f] \circ S$，而 *(E1)* 中的单位 $\Delta_A \le [f] \circ \langle f \rangle$ 给出 $R \le [f] \circ \langle f \rangle \circ R \le [f] \circ S$。 □

命题 14.6 (函子性)。 对于可复合的水平态射 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$，

$$(g \circ f)_! = g_! \circ f_!, \qquad (g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

证明。 由 *(E2)* 及垂直复合的结合律可得。 □

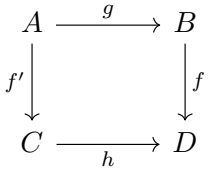
14.3 Beck–Chevalley

命题 14.7 (Lax Beck–Chevalley)。 设 f, g, f', h 是装备 $\mathbb{D}$ 中的水平态射，它们构成一个交换方块，如引理 *14.4* (因此 $f \circ g = h \circ f'$)。对于任意垂直态射 $R : B \dashrightarrow Z$，我们有以下不等式：

$$f'_!(g^*R) \le h^*(f_!R).$$

这是引理的内容*14.4*。

定义 14.8。 水平态射的交换方块



若对于每个 $R\colon\ B \dashrightarrow Z$，都有 $f'_!(g^*R) = h^*(f_!R)$，则称其为 笛卡尔。

定理 14.9 （严格 Beck–Chevalley）。 对于一个笛卡尔水平态射方块（参见 *[17, 69]*）以及任意$R\colon\ B \dashrightarrow Z$，

$$f'_!(g^*R) = h^*(f_!R).$$

14.4 弗罗贝尼乌斯互反律

定理 14.10 （Frobenius）。 对于任意水平 $f\colon\ A \to B$、任意 $R\colon\ A \dashrightarrow Z$ 以及 $S\colon\ B \dashrightarrow Z$，

$$f_!\big(R \wedge f^*S\big) \;=\; f_!R \wedge S.$$

证明。 在 $\mathbb{D}_v(B,\ Z)$ 中进行。利用 （*V2*） 和 （*E1*），

$$\begin{aligned} f_!\big(R \wedge f^*S\big) &= \langle f\rangle \circ \big(R \wedge ([f] \circ S)\big) \\ &= (\langle f\rangle \circ R) \wedge \big(\langle f\rangle \circ [f] \circ S\big) \\ &\le (\langle f\rangle \circ R) \wedge (\Delta_B \circ S) = f_!R \wedge S. \end{aligned}$$

对于反向不等式，我们使用公理 *V4*（模律）：

$$(\langle f\rangle \circ R) \wedge S \;\le\; \langle f\rangle \circ \big(R \wedge \langle f\rangle^{\dagger} \circ S\big).$$

根据 *E3*，$\langle f\rangle^{\dagger} = [f]$，因此右侧为 $\langle f\rangle \circ (R \wedge [f] \circ S) = f_!(R \wedge f^*S)$。由于 $f_!R = \langle f\rangle \circ R$，左侧为 $f_!R \wedge S$。因此 $f_!R \wedge S \le f_!(R \wedge f^*S)$，等式成立。 □

注释 14.11. 这些抽象论证用到：(i) 带有二元交的垂直同态偏序集（V1）；(ii) 垂直复合对交的保持性（V2，仅针对伴随）；(iii) 带有单位与余单位不等式的伴随/共伴随（E1）；(iv) 模律（V4）与伴随逆相容性（E3），用于证明 Frobenius 反向蕴含。

14.5 松弛语义与伴随的失效

标准装备的公理（定义14.3）蕴含推前与拉回运算的严格函子性：$(g\circ f)_! = g_!\circ f_!$。然而，正如概率扩展（第18节，特别是定理20.6和20.5）所示，实际的风险管理往往只能满足松弛的函子性，此时复合会导致误差界或风险预算的积累。

因此，我们概述一个广义框架，在该框架中，装备中严格的相等关系放宽为不等式。

定义14.12 （松弛逻辑框架）。一个**松弛逻辑框架**由如下双范畴结构组成：

1. 水平范畴 $\mathbb{D}_h$ 和垂直偏序集 $\mathbb{D}_v$ 的定义与定义14.1相同。

2. 对于每个水平态射 $f\colon A \to B$，存在单调映射 $f_!\colon \mathbb{D}_v(A,\ \cdot) \to \mathbb{D}_v(B,\ \cdot)$ 和 $f^*\colon \mathbb{D}_v(B,\ \cdot) \to \mathbb{D}_v(A,\ \cdot)$。

3. **伴随：** $f_! \dashv f^*$ 成立为伽罗瓦连接：$f_!R \le S \iff R \le f^*S$。

4. **幺元性：** $(\mathrm{id}_A)_!R = R$ 以及 $(\mathrm{id}_A)^*S = S$，对所有 $R,\ S$ 均成立。

5. **松弛复合（次函子性）：**

$$(g \circ f)_!R \ \le\ g_!(f_!R) \quad \text{and} \quad f^*(g^*S) \ \le\ (g \circ f)^*S$$

注：这两个不等式在第 (3) 项的伴随下互为伴随，因此等价。

推前 $\Rightarrow$拉回。假设对所有 R，$(g \circ f)_!R \le g_!(f_!R)$。我们希望证明对所有 S，$f^*(g^*S) \le (g \circ f)^*S$。由 $(g \circ f)_!R \le g_!(f_!R)$，对两边应用 $(g \circ f)^*$，并使用单位 $R \le (g \circ f)^*((g \circ f)_!R)$，得到 $R \le (g \circ f)^*(g_!(f_!R))$。根据伴随关系 $g_! \dashv g^*$，$g_!(f_!R) \le S$ 当且仅当 $f_!R \le g^*S$，同理 $f_!R \le g^*S$ 当且仅当 $R \le f^*(g^*S)$。串联起来：只要 $(g \circ f)_!R \le S$，就有 $R \le f^*(g^*S)$；而根据第 (3) 项，$(g \circ f)_!R \le S$ 当且仅当 $R \le (g \circ f)^*S$，因此 $f^*(g^*S) \le (g \circ f)^*S$。

拉回 $\Rightarrow$推前。</style}假设 $f^*(g^*S) \le (g \circ f)^*S$ 对所有 S 均成立。我们希望证明 $(g \circ f)_!R \le g_!(f_!R)$。令 $S = g_!(f_!R)$。于是 $(g \circ f)^*S \ge f^*(g^*S) \ge f^*(f_!R) \ge R$，其中最后一步使用了 $f_! \dashv f^*$ 的单位。根据条目（3），$R \le (g \circ f)^*S$ 当且仅当 $(g \circ f)_!R \le S = g_!(f_!R)$。

对偶框架（带有反向不等式，用于建模超函子性 误差累积）可以通过交换 $f_!$ 和 f^* 得到。

注释 14.13（伴随的不可用性）。在严格装备中，推前通过伴随以构造方式定义：$f_!R = \langle f \rangle \circ R$。由于赋值 $f \mapsto \langle f \rangle$ 是从水平范畴到垂直双范畴的函子，该定义强制满足严格函子性。

在松弛逻辑框架中，**无法通过共伴随和共轭来定义推前和拉回**。证明：假设对于某个垂直箭头 $\langle f \rangle$，有 $f_!R = \langle f \rangle \circ R$。那么：

$$(g \circ f)_!\Delta_A = \langle g \circ f \rangle \quad \text{and} \quad g_!(f_!\Delta_A) = \langle g \rangle \circ \langle f \rangle.$$

如果系统的物理学要求满足严格不等式（例如，由于凸性累积而有 $(g \circ f)_! < g_! \circ f_!$），那么 $\langle g \circ f \rangle \ne \langle g \rangle \circ \langle f \rangle$。这意味着从水平映射到垂直关系的映射不是函子，从而破坏了标准装备所需的结构相干性。

因此，在 HSP-r 等松弛情形中，运算 $f_!$ 和 f^* 必须被视为**原始谓词变换器**，而非与区分态射的复合。我们失去了将函数 f 表示为“完美”关系的能力，因为在宽松系统中，没有任何关系能够完美复合。

注释 14.14（Lax Beck–Chevalley：一项指导原则）。在松弛逻辑框架中，定理 $f_!'(g^*S) = h^*(f_!S)$ 的严格 Beck–Chevalley 等式 8.4 通常不成立。不过，安全（保守）方向

$$f_!'(g^*S) \ \le\ h^*(f_!S) \tag{2}$$

在适当的假设下仍可能成立。非正式地说，如果松弛性在推前方向上是子函子性的（$(g \circ f)_!R \ \le\ g_!(f_!R)$，即复合前推低估了分步前推），并且回拉–前推伴随在每个阶段都得以保留，那么（2）就能通过与严格情形相同的伴随配对论证成立，只需将所有等式替换为不等式。

这一原理的具体实例，以及精确的假设和证明，出现在概率情境中：

- **安全半径：** 定理20.5确立了 $P^{*,\ \delta}(Q^{*,\ }$ {v19'>) $\subseteq (Q\circ P)^{*,\ \delta+\epsilon}S$，它是带加性风险预算的（2）的拉回类比。
- **HDR：** 对于 ϵ 20 6 $Q\circ P$ R $\subseteq$-推前，$Q^{\epsilon}\ P^{\delta}R$ Lax Beck–Chevalley（定理 。）在卷积稳定性条件下给出 ($)^{\delta+\epsilon}$ ！ ！ (！)。

我们在此不表述一般性的抽象定理，因为确切的假设取决于所选择的 ϵ-支撑集语义（安全半径、HDR 或 Wasserstein）。

伴随作为首要安全保证

尽管伴随构造的失败使我们无法将水平态射视为“完美”的关系，但推前与拉回之间的伴随仍然存在。在松弛框架中，这一伴随成为系统安全性的首要定义。

命题 14.15（松弛框架中的伴随）。 即使在水平复合具有子函子性的松弛逻辑框架中（即 $(g\circ f)_! \leq g_!\circ f_!$），单个 态射 f 的运算也构成一个伽罗瓦连接：

$$f_!R \leq S \iff R \leq f^*S$$

注释 14.16。 这种伴随关系的持续存在至关重要。正如概率模型（定理 20.10）中所确立的，这种等价关系为“压力测试”提供了逻辑上的依据。它保证，只要检查枢纽投资组合 x 是否位于原像 f^*S 中，就足以确保所得的辐射投资组合 $f(x)$ 落在 S中，即使 f 存在噪声或不完美。

松弛 Frobenius：泄漏的成本

在严格装备（如 $\mathbb{HS}$）中，弗罗贝尼乌斯互反律是一个相等关系： $f_!(R\wedge f^*S) = f_!R\wedge S$。这意味着，在重新实现之前对投资组合进行合规筛选，与之后再进行筛选完全相同。

在松弛逻辑框架中，风险或质量的“泄漏”（如 HSP-r 模型中所见）会破坏这种相等关系。它被单向包含关系所取代，而这种关系决定了安全的运算顺序。

命题 14.17 (松弛 Frobenius / 保守过滤)。 在松弛逻辑框架中，上游筛选严格比下游筛选更为保守：

$$f_!(R\wedge f^*S) \ \leq\ f_!R\wedge S$$

证明。令 $(y,z) \in f_!(R\wedge f^*S)$。那么存在 x使得 $(x,z) \in R\wedge f^*S$且 $f(x) = y$。由于 $(x,z) \in R$，我们有 $(f(x)\ z)$ $=(y,z) \in f_!R$。由于 $(x,z) \in f^*S$，我们有 $(f(x)\ z)$ $=(y,z) \in S$。因此 $(y,z) \in f_!R\wedge S$。

在宽松设定下（例如 HSP-r），包含是严格的，因为概率推前 $f_!^{\epsilon}$会“泄漏”质量：满足 R 和 f^*S 且各自具有风险预算的枢纽投资组合，在复合前推下可能无法满足联合预算；而辐射投资组合则可能在事后“碰巧”满足 S。 □

直观理解。 术语 $f_!(R\wedge f^*S)$ 表示由枢纽投资组合导出的辐条投资组合集合，这些投资组合必定 满足 S（预先验证）。术语 $f_!R\wedge S$ 表示事后碰巧满足 S 的辐条投资组合集合。

在宽松系统（例如概率系统）中，存在一些“幸运”结果：具有10%的失效风险的枢纽投资组合生成了一个合规的辐条（被右侧接受），但若经过严格的上游检查（左端），原本会被拒绝。为维护有效的审计轨迹，框架必须强制执行左端（上游筛选），以防止这种“尾部风险泄漏”。

15 对齐的证据

15.1 草图：扩展到非薄 2-胞腔

上述公理化框架假设的是一个**薄双范畴**，其中任意给定同态集 $\mathbb{D}_v(A,\ B)$ 中的垂直箭头构成一个偏序集。这一点体现在主模型 $\mathbb{HS}$ 中：2-胞腔只是包含关系 $Graph(g) \circ R \subseteq S \circ Graph(f)$。如果这样的2-胞腔存在，它就是唯一的，仅表示重新实现是否保持对齐。

然而，这简化了金融现实中的实际情况。对齐可能是二元的；但对齐的验证几乎从来不是。对齐程度通过连续度量指标来衡量——例如跟踪误差、因子载荷差异和费用预算——投资组合也不只是“已对齐”，而是“跟踪误差为 35 个基点的已对齐”。

在这个特定情形中，可以用一族关系 R_ϵ 替换二元对齐关系 R ，并以跟踪误差容差 ϵ 为索引。然而，对于更复杂的对齐关系，这种临时拼凑的解就不尽如人意了；在这种情况下，最好能以更系统的方式组织验证数据。

因此，一个自然的扩展方向是纳入**非薄**（或“非局部偏序”）2-胞腔。这样，框架便能对如下情形建模：对于重新实现而言，存在多种不同的方式与某种对齐兼容。

非薄 2-胞腔 α 可以表示这种兼容性的特定定量度量或方法。例如，考虑两种不同的最优重新实现策略， α_1 （使费用最小化）和 α_2 （使跟踪误差最小化）。两者或许都满足相同的对齐包含关系，但代表着不同且不等价的过程。在非薄框架中， α_1 和 α_2 可以是填充同一个方形的不同 2-胞腔。

为适应这一点，公理化框架将作如下修改：

1. **移除　薄性：** 取消双范畴是薄的这一假设。

2. **2-胞腔同态集：** 对于任意由 1-态射构成的方形（f, g, R, S），填充该方形的 2-胞腔 α 将构成一个集合 （或者在“局部偏序”模型中构成一个新的偏序集），而不再只是一个布尔事实。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle R}\,\vdots & \Downarrow \alpha & \vdots\,{\scriptstyle S} \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \xrightarrow[g]{} & D \end{array}$$

3. **复合与交换：** 这一变化要求为这些 2-胞腔的水平复合和垂直复合引入明确的公理。关键的是，在薄 HS 模型中自动成立的**交换律**，将成为一条非平凡公理，必须明确满足。

15.2 通过跨度双范畴构造的“证据”2-胞腔

现在，我们简要介绍刚才所述非薄框架的一个具体实例，它是最适合实际应用的候选项。

我们用**跨度**范畴取代关系范畴。我们假设环境范畴$\mathcal{E}$ 具有拉回（例如**Top** 或**CompHaus**，与正文中的真映射保持一致）。

作为证据跨度的垂直态射

在这个更丰富的框架中，从许可空间 A 到 B 的垂直态射（对齐）不是 $A \times B$的子集，而是 $\mathcal{E}$中的一个**跨度**：

$$A \xleftarrow{p} E \xrightarrow{q} B$$

解释：

- E 是**证据空间**（或对齐证书空间）。
- 一个点 $e \in E$ 是具体的见证，证明投资组合 $p(e) \in A$ 与投资组合 $q(e) \in B$对齐。
- 通过取联合像，可以恢复薄模型中的物理对齐关系$\langle p, q \rangle(E) \subseteq A \times B$。

例15.1（带证据的跟踪误差）。设 A为基金空间，B 为基准。设

$$E = \{(a, b, \delta) \in A \times B \times \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \|g_A(a) - g_B(b)\| \leq \delta\}.$$

投影映射 $p(a, b, \delta) = a$和 $q(a, b, \delta) = b$用于验证投资组合，而第三个分量δ 保留了对齐程度。这样我们就能区分“勉强对齐”和“完美对齐”。

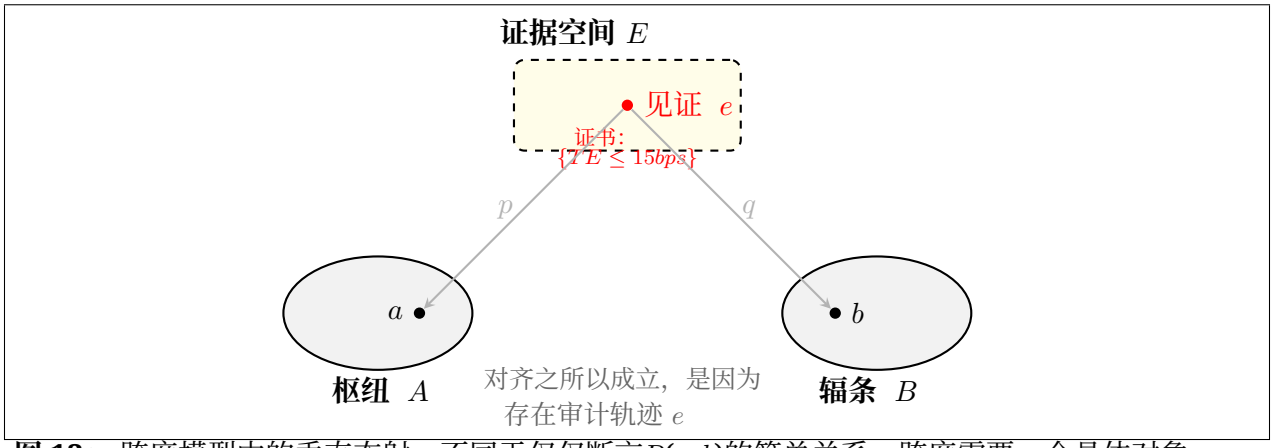


图 13： 跨度模型中的垂直态射。不同于仅仅断言$R(a, b)$的简单关系，跨度需要一个具体对象 e（即证据），它通过投影来识别其连接的特定中心与辐射型投资组合。

通过拉回进行复合

垂直复合对齐的传递性建模。假设我们有证据 E 表明 A与B对齐，以及证据 F 表明 B 与 C对齐：

$$A \xleftarrow{p_1} E \xrightarrow{q_1} B \quad \text{and} \quad B \xleftarrow{p_2} F \xrightarrow{q_2} C$$

复合垂直态射是**拉回** $E \times_B F$：

$$E \times_B F = \{(e, f) \in E \times F \mid q_1(e) = p_2(f)\}$$

解释： 复合对齐 $A \dashrightarrow C$ 的见证由一对见证元 (e, f) 组成，它们在 B中的中间投资组合处相匹配。这将“无虚构投资组合”这一要求形式化：我们必须在 B 中成功识别出一个实际的投资组合，来弥合这一间隙。

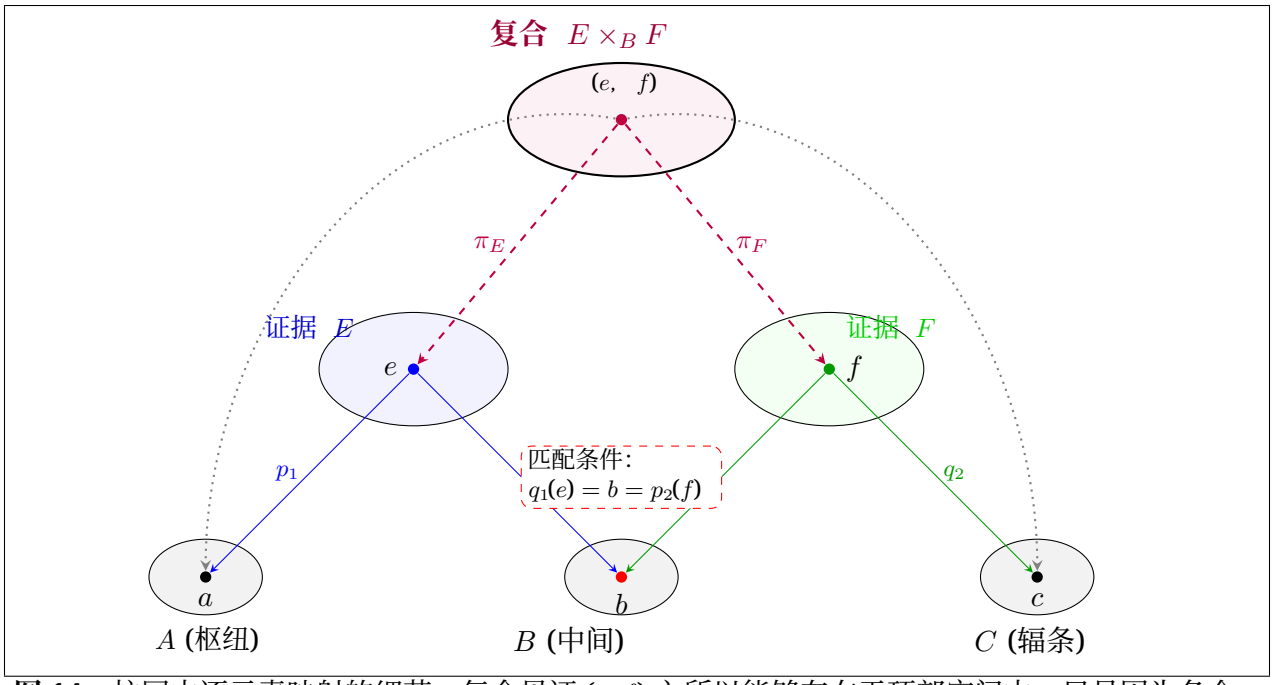


图 14：拉回中逐元素映射的细节。复合见证 (e, f) 之所以能够存在于顶部空间中，只是因为各个见证元 e与 f 映射到同一个中间投资组合b。投影映射 π_E 与 π_F 从该复合中恢复原始证据。

双范畴 $\mathbb{S}$pan$(\mathcal{E})$

我们按如下方式构造双范畴 $\mathbb{S}$**泛**$(\mathcal{E})$：

1. **对象：**允许的投资组合空间 $A, B, \ldots$（$\mathcal{E}$ 的对象）。2. **水平态射：**连续映射 $f\colon\ A \to B$（重新实现）。注意，水平范畴 $\mathbb{D}_h$ 就是 $\mathcal{E}$ 本身。3. **垂直态射：**跨度 $S = (A \xleftarrow{p_S} E_S \xrightarrow{q_S} C)$。
4. **2-胞腔（证据变换）：**2-胞腔 α 在标准意义上是一个跨度态射。

注意，定义跨度的复合需要 $\mathcal{E}$ 中的拉回。

动机：在薄框架中，一个2-胞腔断言："如果 x 经由 S与 z 对齐，那么 $f(x)$经由 T与 $g(z)$对齐。"在本框架中，2-胞腔 α 充当**证据转换器**。它接收枢纽投资组合的对齐证书，并系统地将其转换为辐条投资组合的对齐证书。

这对于**审计轨迹**至关重要。仅仅知道ETF篮子是合规的还不够；我们需要一个映射 α，能够直接从共同基金的对齐报告推导出ETF的对齐报告。

作为全子范畴的水平态射

为了将标准的重新实现整合到垂直结构中，我们使用**伴随**构造。任何水平映射 $f\colon A \to B$ 都会导出一个垂直跨度（其图）：

$$\mathrm{Graph}(f) := (A \xleftarrow{\mathrm{id}} A \xrightarrow{f} B)$$

这使我们能够将水平重新实现视为对齐的一种特殊情形（“完美确定性对齐”）。水平态射完全嵌入跨度结构这一事实，确保我们在需要时可以统一处理“重新实现”和“对齐”，同时为用户保留二者在方向上的区别。

技术权衡：弱结合性

从关系转向跨度引入了一层代数复杂性。关系构成结合代数（集合满足 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$），而跨度构成一个**双范畴**。拉回仅在同构意义下满足结合律：

$$(E \times_B F) \times_C G \cong E \times_B (F \times_C G)$$

对于实际的投资组合系统，这意味着需要处理相干同构（记账工作）。正文中的薄 $\mathbb{HS}$ 模型省略了这部分复杂性，以便专注于拓扑适当性；不过，要管理对齐报告的数据结构，全自动化的“证据引擎”很可能需要基于跨度的双范畴结构。

示例：CIO 流水线中的证据跨度

为具体说明构造过程，考虑第 12 节中的三阶段流程管线：一个首席投资官模型投资组合 $x \in K_{\mathrm{CIO}}$ 被重新实现为行业模型 $y = f(x),\ \in K_{\mathrm{Sec}}$随后又被重新实现为客户投资组合 $z = g(y) \in K_{\mathrm{Client}}$。

在关系（精简）设定中，K_{CIO} 与 K_{Sec} 之间的对齐约束是一个闭关系 $R \subseteq K_{\mathrm{CIO}} \times K_{\mathrm{Sec}}$，其编码内容例如“跟踪误差为 $\leq$ 50基点”。2-胞腔是二元的：要么是 $(x,\ y) \in R$，要么不是。

在跨度设定中，我们用一个跨度替换 R

$$K_{\mathrm{CIO}} \xleftarrow{\pi_1} E_R \xrightarrow{\pi_2} K_{\mathrm{Sec}}$$

其中 E_R 是证据空间：由三元组 $(x,\ y,\ c)$ 构成的集合，其中 c 是一个**合规证明**——一种数据结构，用于记录跟踪误差 $\|g_A(x) - g_B(y)\|$、费用差额、计算日期以及所使用的求解器参数。投影 $\pi_1,\ \pi_2$ 可还原中心与辐射型投资组合。

假设第二个对齐跨度 S 表示 K_{Sec} 与 K_{Client}之间的费用预算约束，其证据空间 E_S 记录费用计算和预算证明。通过拉回形成复合跨度$S \circ R$：

$$E_{S \circ R} \ = \ E_R \times_{K_{\mathrm{Sec}}} E_S \ = \ \{(x, y, c_1, z, c_2) : \pi_2(x, y, c_1) = \pi_1'(y, z, c_2)\}$$

的一个元素 $E_{S \circ R}$ 是一个复合审计轨迹：一份跟踪误差证明 c_1 将首席投资官与行业连接起来，并与一份费用预算证明 c_2 将行业与客户连接起来，二者在共同的中间投资组合处汇合 y。这正是证据账本（附录D）将存储的数据结构。薄框架仅记录$(x,\ z)$ 是否满足复合约束；跨度框架则记录每个阶段使用了哪些证明，以及它们通过哪个中间投资组合进行复合。

15.3 Beck–Chevalley 与 Frobenius

在基线 $\mathbb{HS}$ 框架中，Beck–Chevalley 律和 Frobenius 律被表示为集合（关系）的等式。在 $\mathbb{S}$**跨度(**$\mathcal{E}$**)** 框架中，这些定律转变为**自然同构**，存在于跨度之间。这一转变对软件实现意义重大：这意味着我们可以在不丢失信息的情况下，以结构化方式转换流程管线不同阶段之间的审计轨迹。

以下结果是标准的。

定理 15.2（一般方形的 Lax Beck–Chevalley 条件）。 给定 $\mathcal{E}$ 中由水平态射（连续映射）构成的交换方块：

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & B \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ C & \xrightarrow[h]{} & D \end{array}$$

使得 $f \circ g = h \circ f'$。

对于任意垂直态射（对齐跨度） $S:\ B \dashrightarrow Z$，存在一个规范的 *2*-胞腔（跨度的态射） α：

$$\alpha : f'_!(g^* S) \Longrightarrow h^*(f_! S)$$

现在考虑一个由水平重新实现构成的交换方块，它是 拉回 中的 $\mathcal{E}$ （这是定义 8.2 中“逐点笛卡尔”条件的类比）。在跨度框架中，Beck–Chevalley 条件断言，对于 B： 上的任意垂直对齐 S，证据空间之间存在同构

$$f'_!\, g^* S \cong h^*\, f_! S$$

操作含义： 假设 S 表示对 B的基准约束 .

- 左端（$f'_!\ \ g^* S$）表示：“将基准约束拉回到 A （预对齐），在那里寻找对齐证据，然后将该证据推送到 C。”
- 右侧（$h^*\, f_!\ S$）表示：“将基准约束推送到 D （后对齐），然后拉回检查 C的重新实现是否满足该约束。”

该同构保证，通过“早期验证”过程（左端）生成的对齐证书可以无损地 转换为“后期验证”过程（右侧）的对齐证书。审计轨迹在重新实现的格中得以保留。

弗罗贝尼乌斯互反律（过滤后证据的保留）。 对于一个水平态射f ： $A \to B$ ，以及 A上的垂直对齐 R 和 B上的 S ，Frobenius 律描述了筛选与重新实现之间的相互作用：

$$f_!(R \times_A f^* S) \cong f_! R \times_B S$$

操作含义：

- **左端（先筛选，再重新实现）：** 我们在 A中找到满足对齐 R 且其重新实现满足 S 的投资组合。我们将这些组合证据打包并推送至 B。
- **右侧（重新实现后再筛选）：** 我们取得证据，证明 A 满足 R，将其推送到 B，并将其与独立证据配对，以证明结果满足 S。

在关系模型中，这是一个关于允许的投资组合集合保持不变的陈述。在跨度模型中，同构明确构造了复合见证。它告诉我们，重新实现后无需从头重新运行对齐检查 S；我们基本上可以从枢纽分析中“沿用”该见证。

16 人格索引的中心辐射式

本节将构建一种 $\mathbb{HS}$ 演算的变体，其中每个“对象”都是由人物画像基空间索引的一族允许的投资组合空间。形式上，我们在一个固定的紧豪斯多夫人物画像空间 B 上方的切片中工作（年龄段、客户细分群体、生命周期状态等）。对象是显示映射 $p : K \to B$，其纤维 $K_b \subseteq \Delta^{n(b)}$ 均为闭的允许的投资组合空间。水平态射是关于 B的连续逐纤维重新实现；垂直态射是闭的人格索引的对齐关系。所有相干性结果（闭推前、伴随、Beck–Chevalley、Frobenius）都逐纤维提升，因此也在整体上成立。

直观理解是， B 是一个投资者画像空间。例如：

- B 是一个年龄范围，例如闭区间 $[25, 95]$。这可用于建模目标日期滑行路径（参见 [63]），以体现这样的要求：重新实现与对齐规范必须与投资者年龄增长过程中滑行路径内投资组合的演变方式相兼容。

- B 是一个乘积空间，同时包含投资者的年龄和受教育程度。

- $B = [0, 1]$ 是两个现有枢纽投资组合之间的插值参数。给定 K_0， $K_1 \subseteq \Delta^n$，定义 $K_t = (1-t)K_0 + tK_1$（闵可夫斯基组合；由于两个加项都是紧集，因此在 Δ^n 中闭）。这一族 $K = \bigsqcup_{t\in[0,1]} K_t$ 是按角色索引的对象，任意 $t \in (0, 1)$ 都定义了一个在两个端点策略之间进行插值的“虚拟枢纽”——使客户能够持有介于两个现有产品之间的投资组合，而无需从头设计新的枢纽。

除非另有说明，全文假设 B 为紧豪斯多夫空间。这符合若干关键应用场景（年龄闭区间、有限的人口统计因子、总财富等），也再次使适当性成为自动满足的性质。实际上， B 通常是一个简单空间。

虽然下文的主要应用涉及连通的 B，但有限（因而离散）的情形也很常见——例如，一系列按风险等级索引的模型投资组合。数学上微不足道；组织层面则不然。

16.1 人格索引的允许空间

定义 16.1（人格索引对象）。 固定一个紧豪斯多夫基空间 B。人格索引的允许投资组合空间是一个连续映射 $p\colon K \to B$，满足 K 是 $B \times \Delta^n$的闭子集，其中 n，并且对每个 $b \in B$，其纤维

$$K_b \;=\; \{x \in \Delta^n \mid (b, x) \in K\}$$

是 Δ^n的闭子集。我们常以 $K = \bigsqcup_{b\in B} K_b$ 作启发式记法。

解释。 对于每个人物画像 b （例如年龄 b）， K_b 是在该人物画像的基线约束下的允许区域。 b 中的连续性使约束（上限、预算、流动性）能够沿人口统计维度平滑变化。

引理 16.2（紧致性）。 若 B 是紧豪斯多夫空间且 $K \subseteq B \times \Delta^n$ 是闭集，则 K 是紧空间，且投影 $p\colon\ K \to B$ 是真映射。

设 $p_i\colon\ K_i \to B$ 与 $q_j\colon\ L_j \to B$ 为 B 上的对象。

定义 16.3（ B上的水平态射）。 水平态射 $f : K_1 \to K_2$ 在 B 上是一个连续映射，并满足 $p_2 \circ f = p_1$。等价地，它是一个族 $\{f_b : K_{1,\,b} \to K_{2,\,b}\}_{b\in B}$，由连续重实现构成，并随 b连续变化。

定义 16.4（B上的垂直态射）。垂直态射（由 B索引的对齐关系）从 K_1 到 L_1 是一个闭子集

$$R \subseteq K_1 \times_B L_1 = \{(x,z) \in K_1 \times L_1 \mid p_1(x) = q_1(z)\},$$

即一个闭的逐纤维关系 $R_b \subseteq K_{1,\,b} \times L_{1,\,b}$。

水平复合和垂直（关系）复合均在 B 上计算。我们将

$$\mathrm{Graph}_B(f) = \{(x, f(x)) \in K_1 \times_B K_2\}$$

记作 B 上一个水平映射的图。

命题 16.5（紧基底上的自动真性）。设 B 为紧豪斯多夫空间。对于任意水平态射 $f\colon K_1 \to K_2$ 在 B 上的对象 $p_i\colon K_i \to B$，如 §16.1所述，映射 f是真映射。此外，对于任意对象 $r\colon M \to B$，乘积映射

$$f \times_B \mathrm{id}_M\colon K_1 \times_B M \longrightarrow K_2 \times_B M$$

是真映射，因此是闭映射。

定义 16.6（在 B 上的拉回和推前）。给定 $f\colon K_1 \to K_2$ 在 B 上以及一个闭关系 $S \subseteq K_2 \times_B M$，定义

$$f^*S = \{(x,w) \in K_1 \times_B M \mid (f(x), w) \in S\}.$$

给定一个闭关系 $R \subseteq K_1 \times_B M$，定义其推前

$$f_!R = (f \times_B \mathrm{id}_M)(R) \subseteq K_2 \times_B M.$$

定理 16.7（在 B 上推前的闭性）。若 B 是紧豪斯多夫空间，$f\colon K_1 \to K_2$ 是水平态射，且 $R \subseteq K_1 \times_B M$ 是闭关系，则 $f_!R$ 在 $K_2 \times_B M$中是闭的。

证明概要。由 §16.1，K_i 和 M 都是紧空间；因此纤维积 $K_1 \times_B M$ 是紧的，且 R是紧的。映射 $f \times_B \mathrm{id}_M$ 是连续的，因此它将紧集 R 映射到 $K_2 \times_B M$的紧（因而闭）子集。

16.2 索引双范畴 $\mathbb{HS}/B$ 及其定律

定义 16.8（双范畴 $\mathbb{HS}/B$）。对象：展示映射 $p\colon K \to B$，如 §16.1所述。水平态射：在 B 上的连续映射。垂直态射：在 B 上的纤维积内部的闭关系。一个方形的 2-胞

$$\begin{array}{ccc} K_1 & \xrightarrow{\;f\;} & K_2 \\ {\scriptstyle R}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S} \\ L_1 & \xrightarrow[\;g\;]{} & L_2 \end{array} \qquad \text{(all over } B\text{)}$$

当且仅当适当的纤维积中包含 $\mathsf{Graph}_B(g) \circ R \subseteq S \circ \mathsf{Graph}_B(f)$ 时存在。

注意，与 $\mathbb{HS}$一样，$\mathbb{HS}/B$ 是瘦的。

命题 16.9（伴随 $f_! \dashv f^*$ 在 $\mathbb{HS}/B$）。 对于任意水平 $f:\ K_1 \to K_2$ 以及闭关系 $R \subseteq K_1 \times_B M,\ \ S \subseteq K_2 \times_B M,$

$$R \ \subseteq\ f^* S \quad \Longleftrightarrow \quad f_! R \ \subseteq\ S.$$

定义 16.10（ B上的逐点笛卡尔方块）。 在B上的一个水平态射交换方块,

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\ g\ } & L \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ K' & \xrightarrow[\ h\ ]{} & L', \end{array} \qquad f \circ g = h \circ f',$$

若对每个 $b \in B$ 以及每一对满足 $f_b(y) = h_b(z)$的$(y,\ z) \in L_b \times K'_b$，都存在 $x \in K_b$ 满足 $g_b(x) = y$ 且 $f'_b(x) = z$，则称其为逐点笛卡尔 的。

定理 16.11（ $\mathbb{HS}/B$中的 Beck–Chevalley）。 对于B 上的一个逐点笛卡尔水平态射方块以及任意闭关系 $R \subseteq L \times_B M,$

$$f'_!\, g^* R \ =\ h^*\, f_! R.$$

定理 16.12（ $\mathbb{HS}/B$中的弗罗贝尼乌斯互反律）。 对于一个水平态射 $f:\ K_1 \to K_2$ 以及闭关系 $R \subseteq K_1 \times_B M$、 $S \subseteq K_2 \times_B M,$

$$f_!\big(R \cap f^* S\big) \ =\ f_! R \ \cap\ S.$$

注释。 证明是对 HS 中证明逐字逐句的逐纤维适配：紧致性（由紧B 以及对象的闭性保证）使适当性自动成立；推前保持闭性；逐元素的集合追踪在每个纤维中都完全相同，因而在整体上也成立。

16.3 基底示例 B 和建模模式

(1) 目标日期滑行路径。 $B = [b_{\min}, b_{\max}] \subset \mathbb{R}$（年龄）。令 $K \subseteq B \times \Delta^n$ 表示依年龄变化的上限（例如，股票上限随年龄连续递减）。水平 $f : K \to K'$ 在 B 上的映射可实现按年龄划分的“主动→交易所交易基金”映射，其优化参数（跟踪容差、费用预算）随 b连续变化。垂直关系（跟踪、因子预算）在 $K_b \times K'_b$中逐纤维定义。

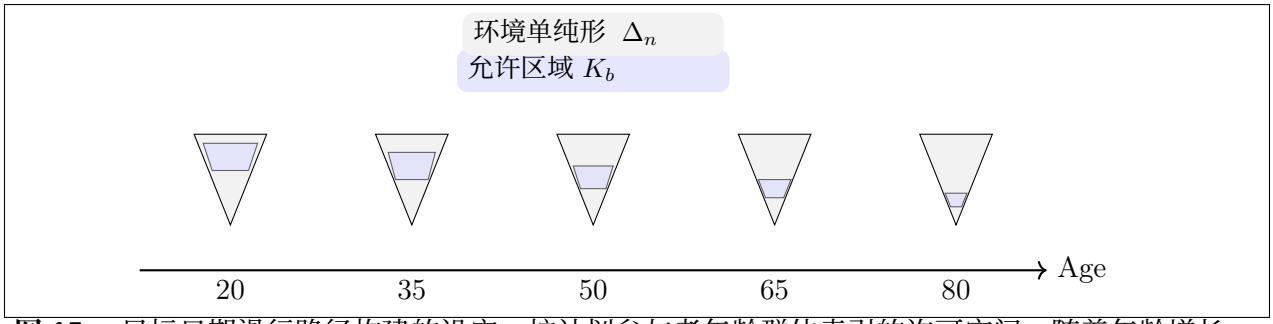


图 15： 目标日期滑行路径构建的设定：按计划参与者年龄群体索引的许可空间。随着年龄增长，允许区域 K_b 会缩小并向下移动（降低风险），同时始终严格位于环境单纯形内部。

(2) 年龄 $\times$ 受教育程度。 $B = [b_{\min}, b_{\max}] \times E$，其中 E 是有限离散集合（例如，{高中、大学、研究生}）。有限 E 是紧的；因此 B 是紧的。关于$e \in E$ 分段常数且关于年龄连续的特征满足这些假设；所有定律均可在 E上逐分量应用。

(3) 年龄 $\times$ 财富。 $B = [b_{\min}, b_{\max}] \times [w_{\min}, w_{\max}] \subset \mathbb{R}^2$（年龄 $\times$ 财富水平）。在标准生命周期投资组合理论中（默顿 [48], 萨缪尔森 [59]），最优资产配置是以下因素的函数：投资者的投资期限（年龄）和当前财富——通过相对风险厌恶递减、最低生活保障线或住房因素等机制产生影响。令 $K \subseteq B \times \Delta^n$ 表示年龄与财富的联合约束：例如，股票上限可能随年龄增长而降低（降低风险），而另类资产配置则可能随财富增加而提高（投资非流动性投资工具需要达到较高的最低投资额）。水平态射 $f : K \to K'$ 在 B 上实现重新实现，使其在两者上均连续： b （年龄）和 w （财富）；垂直对齐关系在 $K_{(b,w)} \times K'_{(b,w)}$上逐纤维定义。两个紧区间的积是紧豪斯多夫空间，因此第16 节的所有结果均适用。

(4) 非可缩基空间。非可缩性不会妨碍演算；起作用的是紧致性。不过，实际应用场景还比较推测性。

- $B = S^1$ **(支出季节性)：**年度支出模式大致呈周期性——秋季支付学费、春季缴纳税款、冬季节假日开支——因此，“一年中的时节”这一参数自然取值于圆周 $S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$。一个家庭 $K \subseteq S^1 \times \Delta^n$ 对季节性的现金与久期目标进行编码（例如，在大额资金流出之前的几个月提高现金配置），其约束会在年末边界处连续衔接，而不会在十二月/一月之间出现不连续性。所有相干律都在 S^1 上逐纤维成立。

- $B = S^1$ **(投资周期状态)：**战术资产配置通常取决于经济在反复出现的状态周期中所处的位置。例如，在增长—通胀时钟（参见格里尔 [33]）中，经济在四个象限之间轮转——复苏、扩张、滞胀、收缩——建议的因子倾斜（价值与成长、久期、大宗商品）会随周期连续变化。将状态参数建模为 $b \in S^1$ 可以体现这种周期性：“收缩后”状态与“复苏前”状态相邻，二者之间没有边界不连续性。族 $K \subseteq S^1 \times \Delta^n$ 由此对依赖状态的允许配置进行编码，而重新实现（例如，从战略配置部分转为战术配置部分）会随状态参数连续变化。

- B **有限连通图**（一维 CW 复形）： 顶点表示离散状态——职业阶段（学生、在职、失业、退休）、产品生命周期阶段（推出、成长、成熟、衰退）或计划状态（积累、支付、转存）——边则表示它们之间允许的过渡。允许存在环：员工可以在“在职”和“失业”之间多次往返，产品也可以在重新定位后再次进入成长阶段。在标准 CW 拓扑下，任何有限图都是紧豪斯多夫空间。展示映射 p： $K \to B$ 为每个状态 v 指定一个允许配置的纤维 $K_v \subseteq \Delta^n$，并为每条边指定一个连续的中间配置族，在两端纤维之间进行插值（用于建模过渡滑行路径）。相干性结果（伴随、Beck–Chevalley、Frobenius）仍然成立，因为它们只取决于 B的紧致性，而与其同伦类型无关。

定义 16.13 (重新索引)。 给定 $u : B' \to B$ 和 $p : K \to B$，定义拉回

$$u^*K \;=\; \{(b', x) \in B' \times \Delta^n \mid (u(b'), x) \in K\} \xrightarrow{\;p'\;} B',$$

一个位于 B'上的对象。水平态射和垂直态射沿着 u 通过纤维积进行拉回。这使得$B \mapsto \mathbb{HS}/B$ 成为一个拟函子$(\mathbf{Top}_{\mathrm{cpt,\ Haus}})^{\mathrm{op}} \to \mathbf{DblCat}$(参见纤维化/显示映射；比较[62, 65])。

投资组合解读。 汇总或细化角色属性，会引发约束、映射和对齐的函子性重索引，这在不同细分方案之间迁移时很有用。

16.4 跨世代约束

考虑按角色索引的投资组合空间的一个关键原因是，仅考虑单个投资组合的约束往往并不足够。通常需要一“系列”投资组合满足跨投资组合约束。 $\mathbb{HS}/B$ 框架让我们能够对此进行形式化描述。

例如，对于按退休年份 r索引的一系列目标日期基金，通常需要施加跨批次约束。考虑一项关于滑行路径陡峭程度的约束：随着日历时间推进 Δ， r年份基金在年龄 b 时的资产配置与$(r+\Delta)$年份基金在年龄 $b+\Delta$ 时的资产配置之间的差异不得超过 ϵ。

标准切片类别将垂直态射限制在纤维积 $K \times_B L$上，迫使对齐的投资组合映射到完全相同的基点 b。这使我们无法对关联不同人物画像的约束进行建模，例如这些跨批次约束。为解决这一问题，我们对 $\mathbb{HS}/B$中的垂直态射进行推广。

定义 16.14（关于 B 的广义垂直态射）。 设 $p : K \to B$ 和 $q : L \to B$ 为对象（显示映射）。垂直态射是一个有序对 (r, R)，其中：

1. $r \subseteq B \times B$ 是基空间上的闭关系（例如，“时间移位”关系 $r = \{(b, b+\Delta) \mid b \in [0, T-\Delta]\}$）。

2. $R \subseteq K \times L$ 是全空间上的闭关系。

3. **相容性：** 关系 R 覆盖于 r 之上。也就是说，对于每个 $(x, y) \in R$，其基点对 $(p(x), q(y))$ 必须属于 r。

例 16.15（滑翔路径陡峭度约束的表述）。 设 $x_b^{(t)}$ 表示年份 t 在年龄 b时的资产配置。光滑性约束要求 $|x_b^{(t)} - x_{b+\Delta}^{(t)}| \le \epsilon$。这是一个关系 R，覆盖了年龄轴 B上的移位关系 $r = \{(b, b+\Delta)\}$。由于 R和 r是闭的，广义态射的垂直复合保留闭性（采用与引理4.5相同的论证，并逐纤维应用）。

切片 $\mathbb{HS}/B$ 的标准相干律（Beck–Chevalley、Frobenius）在将垂直态射限制于纤维积 $K \times_B L$时成立。对于允许跨纤维关系的广义态射，相干律要求对基空间关系 r 与展示映射之间的相互作用作出额外假设。在滑翔路径情形下，当平移映射 $b \mapsto b+\Delta$ 是 B的真自映射时，这些条件得以满足。

16.5 总结

通过用人物画像索引的展示映射 $p : K \to B$ 替代单空间 $K \subseteq \Delta^n$，并在切片 $\mathbb{HS}/B$ 中开展工作，我们得到一种演算，其中每个 $\mathbb{HS}$ 概念都纤维化于人物画像之上。当 B 紧豪斯多夫时（这是许多分割的一项自然条件），适当性再次自动成立，推前保持闭性，伴随、Beck–Chevalley 和 Frobenius 逐字成立，且逐一适用于各个人物画像。

这支持生命周期投资路径、人口统计条件化，甚至不可收缩的人设基空间（圆/图），而无需更改证明，只需调整环境记账方式。它还支持滑行路径设计中的实际考量，尤其是跨投资组合（即跨批次）约束。

17 DOTS 投资组合系统

这个变体框架基于 David Jaz Myers 的一项建议。其思路很简单：不再为每个枢纽固定一根辐条——这正是 $\mathbb{HS}$ 框架要求进行确定性重新实现时所做的 f——而是定义一个允许的辐条菜单，让投资组合经理从中选择。选择可能涉及定性判断、客户偏好，或难以形式化的约束；关键在于菜单本身是良定义的、组合方式合理，并且可以在菜单层面验证合规性，而不是针对单个选择进行验证。这就是 DOTS 方法（见 [44], [51]）。本节仅概述该理论。

原始操作以集值重新实现取代确定性重新实现。给定一个对齐关系 R，用于规定对所需重新实现的约束（如第 5.2 节所述），我们对一个“状态”进行操作——该状态是表示当前投资组合全集的闭子集——并得到一个新的闭子集，表示允许结果的菜单：

$$K \odot R := \{\, y : \exists x \in K,\ (x, y) \in R \,\}.$$

正如我们将看到的，这统一了筛选器、预算和优化器，将其视为代数运算；它支持通过非对称幺半积进行并行组装；并将策略蓝图提升为运算子运算。当存在唯一优化器时，DOTS 会坍缩为 $\mathbb{HS}$，所有 $\mathbb{HS}$保证均适用。否则，DOTS 会保留并揭示路径依赖，以便对其进行管理、审计，并在可能的情况下加以消除。

17.1 DOTS 装备

薄双范畴

用以下数据定义 DOTS：

- **对象：** 单纯形 Δ^n, $n \geq 0$。
- **水平箭头：** 连续映射 $f\colon\ \Delta^n \to \Delta^m$。
- **垂直箭头：** 闭关系 $R \subseteq \Delta^n \times \Delta^m$。
- **2-胞腔：** 包含关系 $\mathrm{Graph}(g) \circ R \subseteq S \circ \mathrm{Graph}(f)$。

复合在水平方向上采用普通函数复合，在垂直方向上采用关系复合。薄性（仅有包含关系）使代数推理接近基本的集合运算 [62, 32]同时仍支持完整的推前、拉回和弗罗贝尼乌斯互反律演算。

我们也可以像之前一样，将闭的可许可子集 $K \subseteq \Delta^n$ 定义为对象，但为简单起见，目前采用上述定义。

作为松弛态射的状态与作用

在 Δ^n 上的一个状态是一个闭子集 $K \subseteq \Delta^n$，视为一个松弛态射 $\Delta^0 \Rightarrow \Delta^n$。给定一个闭状态 $K \subseteq \Delta^n$ 和一个闭关系 $R \subseteq \Delta^n \times \Delta^m$，其作用为推前

$$K \odot R := \{\, y \in \Delta^m : \exists x \in K,\ (x, y) \in R \,\}.$$

命题 **17.1** (作用定律)。 对于闭集 K 和闭关系 R、S，以下结论成立：

(a) 闭性： $K \odot R$ 是闭集。

(b) 幺元性： $K \odot \Delta_{\Delta^n} = K$，其中 Δ_{Δ^n} 是 Δ^n上的恒等关系。

(c) 结合律：$(K \odot R) \odot S = K \odot (S \circ R)$，其中 $S \circ R$ 表示标准关系复合（从右到左：先应用 R，再应用 S）。

(d) 保序性： $K \subseteq K'$ 蕴含 $K \odot R \subseteq K' \odot R$。

(e) 投影算子：若 $R = \{(x, x) : x \in E\}$ 且 E 为闭集，则 $K \odot R = K \cap E$ 且$(K \odot R) \odot R = K \odot R$。

证明。 闭性：设 $S := (K \times \Delta^m) \cap R$。 $K \times \Delta^m$ 与 R 在 $\Delta^n \times \Delta^m$中均为闭集，而 $\Delta^n \times \Delta^m$是紧的；因此 S 是紧的。投影π_y: $S \to \Delta^m$ 是连续的，故$\pi_y(S) = K \odot R$ 是紧的且为闭集。

结合律：我们直接计算：

$$(K \odot R) \odot S = \{z : \exists y \in \Delta^m, \exists x \in K, (x, y) \in R, (y, z) \in S\}$$

$$= \{z : \exists x \in K, (x, z) \in S \circ R\} = K \odot (S \circ R).$$

投影算子：如果 $R = \{(x,\ x) : x \in E\}$，且 E 为闭集，那么

$$K \odot R = \{x \in \Delta^n : \exists x' \in K, (x', x) \in R\} = K \cap E.$$

幂等性由 $(K \cap E) \cap E = K \cap E$ 得出。 □

注释 17.2（金融映射）。 (a)闭性 意味着菜单在投资组合空间中对极限保持稳定：极限点不会产生幻影辐条。(b) 幺元性 表达的是“无为则无变”。(c)结合律 表示我们可以先通过 R 作用，再通过 S 作用；或者等价地，通过复合约束 $S \circ R$ 作用。(d) 保序性 指出，扩大枢纽只会扩展菜单。(e) 投影算子 用于建模幂等筛选器，例如环境、社会和治理、流动性或可接受性筛选器。

注释 17.3（推广水平态射）。 尽管作用 $K \odot R$ 是通过垂直复合定义的，但它发挥着广义水平转移的函数性作用。在主要的 HS 框架（第 5.2 节）中，我们寻求一个确定性重新实现 $f : K \to L$，使其满足 R。此处，对象 $K \odot R$ 表示所有可能的重新实现所构成的空间——实质上是一个“云”或“菜单”，其中包含约束 R 所允许的辐条投资组合。

因此，DOTS 作用将第 11.3 节中的“可行域”概念代数化，使我们能够在最终选择之前操作潜在辐条的集合。

注释 17.4（确定性切片与回归 HS 的桥梁）。 如果 $R = \mathrm{Graph}(f)$ 对于连续的f: $\Delta^n \to \Delta^m$，则 $K \odot R = f(K)$，由于 K 是紧集，因此它是闭集。因此，只要某个作用退化为一张图（例如，存在唯一优化器），我们就回到了原始的 $\mathbb{HS}$ 理论，并继承其所有保证。

注释 17.5（非确定性与选择）。 一般情况下，若 $K \odot R$ 不是一张图，实现菜单选择意味着要为 K中的每个枢纽投资组合，从菜单中连续地 选择一个辐射投资组合，例如通过某种优化过程。定理 11.10 保证在实际情形下这是可行的。

注释 17.6（DOTS 与 HSP-r 的比较）。 比较 DOTS 方法与随机 HSP-r 框架（第 18 节）颇有启发。

- **HSP-r（分布）：** 模型未受控的方差（例如求解器噪声、流动性滑点）。系统生成一个分布，我们要求几乎所有结果都符合规定。

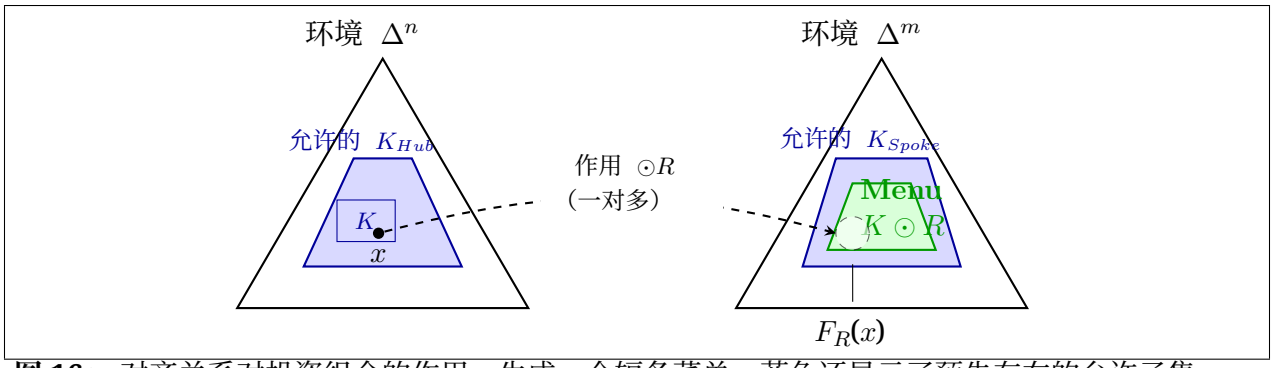


图 16： 对齐关系对投资组合的作用，生成一个辐条菜单。蓝色还显示了预先存在的允许子集。

- **DOTS（菜单）：**模型受控的选择（例如人类管理者裁量权、制度选择）。系统生成一组选项，我们要求保留选择能力。

理想情况下，流程管线在设计阶段使用 DOTS——缩小可许可策略的菜单范围——在执行阶段使用 HSP-r，对选定策略的含噪实施进行建模。设计关乎选择；执行关乎噪声。两者需要不同的数学方法。

然而，这两个框架之间的间隙并不像这种区分所暗示的那样泾渭分明。在实践中，“设计”阶段涉及求解器运行，其输出本身就带有噪声；而“执行”阶段则涉及人工覆盖，与其建模为随机扰动，不如建模为菜单选择。这两个框架彼此互补，但单独来看都无法涵盖完整的流程管线——算子的形式体系通过抽象地处理复合、却不说明其组成部分是确定性的、集值的还是随机的，隐含地承认了这一点。

注释 17.7（多中心对齐）。 上述厄米组合处理的是由多个输入构建一条辐条：例如，核心—卫星接线图接收两个枢纽空间，并生成一个输出。DOTS 可以自然地处理这种情况。另一种截然不同且更棘手的情况是：一条辐条必须同时与多个独立的 枢纽保持对齐——例如，一个投资组合必须同时跟踪由独立团队管理的区域股票基准和全球固定收益基准。这是一个多目标对齐问题。该辐条的约束集是来自各枢纽的拉回的交集，而交集的可行性并无保证。当前框架并未声称能普遍解决这一问题，但确实提供了精确表述问题的工具：交集 $\bigcap_j f_j^* S_j$ 是良定义的闭集（每个拉回都是闭集，而有限个闭集的交集仍为闭集），因此问题归结为非空性——这是框架提出但无法解决的可行性问题。

17.2 编码频繁出现的投资组合关系

我们列出实践中反复使用的典型闭关系，并说明如何对其进行编码。全文重点在于明确每项建模选择，从而让下游使用者清楚了解其数学性质（闭性、凸性）。

跟踪与敞口关系

设 g_A: $\Delta^n \to \mathbb{R}^k$ 和 g_B: $\Delta^m \to \mathbb{R}^k$ 为连续暴露度映射（资产类别、因子或风险贡献）。定义

$$R_{\mathrm{track},\epsilon} := \big\{(x,y) : \|g_A(x) - g_B(y)\|_2 \le \epsilon\big\},$$
$$R_{\mathrm{fac}\le b} := \big\{(y,z) : (Fy)_j - z_j \le b_j \ \text{ for all } j\big\}.$$

根据 g_A, g_B 的连续性以及欧几里得球的闭性，可得闭性。

费用、流动性与容量

在费用、日均交易量和头寸规模映射连续的情况下，我们设定

$$R_{\mathrm{fee}\le\tau} := \{(y,y) : \mathrm{Fee}(y) \le \tau\},$$
$$R_{\mathrm{liq}} := \{(y,y) : \mathrm{ADV}(y) \ge \mathrm{ADV}_{\min},\ y_i \le c_i\ \forall i\}.$$

这些是投影算子（次恒等算子），因此是幂等的，且彼此之间的顺序无关。

税务与换手率

假设每一步的已实现收益和换手率模型均为连续模型，定义

$$R_{\mathrm{tax}\le\theta} := \{(x,y) : \mathrm{RealizedGain}(x,y) \le \theta\},$$
$$R_{\mathrm{turn}\le\kappa} := \{(x,y) : \|y - x\|_1 \le \kappa\}.$$

单纯形中的 ℓ_1 球是闭集；如果税务批次模型有限且聚合连续，则已实现收益约束也是闭集。

优化生成的对应

设 F: 对于每个固定的 x, $\Delta^n \times \Delta^m \to \mathbb{R}$ 在 y 中连续，且可行集紧。对于闭可行集 E （例如流动性面），定义对应

$$\Gamma_F := \big\{(x,y) : y \in \operatorname*{arg\,min}_{y' \in \Delta^m \cap E} F(x,y')\big\}.$$

那么 Γ_F 是闭集。如果对于所有 x, $F(x,\cdot)$ 在 E 上严格凸，则该对应是一个图 Graph(*f*)，且作用是确定的。

17.3 幺半群模板

在 DOTS 范式中，幺半群模板用于编码多输入布线模式。每个模板由一个输入配置、一组内部关系和一个输出接口构成；在输入状态上评估模板后，会返回一个菜单。这种形式化体系描述了投资组合构建中实现模块化和可复用性的简明框架。

核心—卫星

为说明厄米组合的实际效用，我们定义一个可复用的连线图 Φ，用于**核心—卫星**策略。在运算子视角下（见 [43]），Φ 是一个元数为 2 的运算：它接受两个允许的枢纽空间（输入），并生成一个允许的总投资组合空间（输出）。

输入如下：

- $K_{\text{核心}} \subseteq \Delta^n$：高容量、低费用的许可空间（例如指数基金枢纽）。
- $K_{\text{卫星}} \subseteq \Delta^m$：高 Alpha、集中化的许可空间（例如对冲基金枢纽）。

连线图 Φ 封装了将这些独立投资组合分层组合成统一策略的逻辑。它由一个权重参数 $w \in [0,1]$（核心部分配置）和一个全局约束关系 R_{global}定义。复合方式如下：

$$\Phi(K_{\text{core}}, K_{\text{sat}}) \;=\; (K_{\text{core}} \otimes K_{\text{sat}}) \odot R_{\text{mix},w} \odot R_{\text{global}}$$

这里，$R_{\text{mix},w}$ 是创建复合投资组合 $y = w \cdot x_c + (1-w) \cdot x_s$的结构关系，而 R_{global} 表示无法在子组合层面检查的投资组合层面约束，例如总费用上限或投资组合层面波动率上限。

我们将 Φ 视为一个“黑箱”电路，它将两个输入连接在一起（图示17）。该框架的优势在于，K_{core} 和 K_{sat} 可以替换为任何其他有效对象（例如，将指数基金替换为 ETF篮子），而无需重新设计编码在 Φ中的合规逻辑。

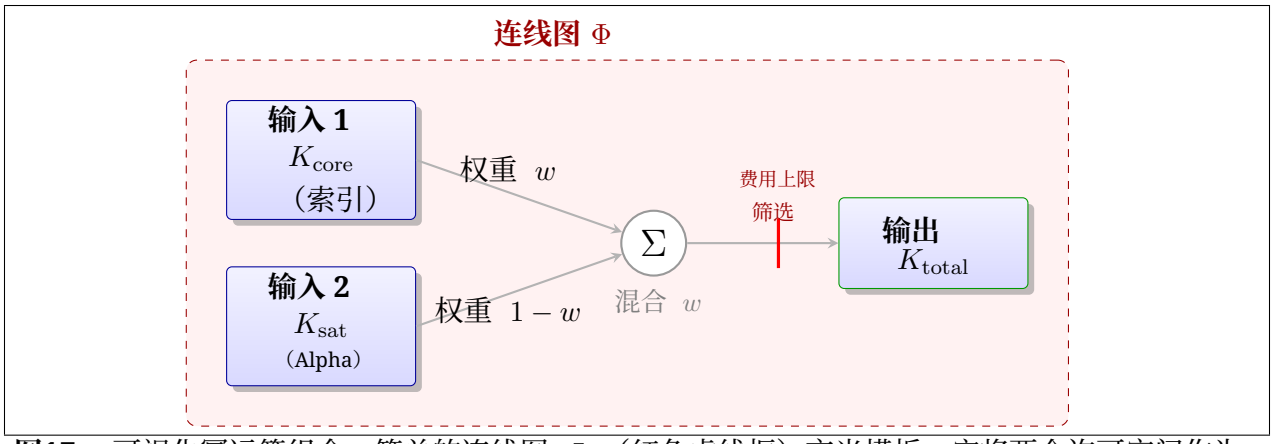


图17： 可视化幂运算组合。简单的连线图 Φ （红色虚线框）充当模板。它将两个许可空间作为输入（K_{core}，K_{sat}），根据结构关系对其进行混合，应用全局约束（费用上限），并输出由此产生的总投资组合菜单。

带上限的混合

输入。 $K_A \subseteq \Delta^{n_A}$、$K_B \subseteq \Delta^{n_B}$。混合关系 R_{blend} 编码预算及其到辐射端领域的映射；费用和容量投影器用于实施运营限制。当优化器不唯一时，该模式揭示了顺序发挥作用的位置。

滑行路径转换

输入。 按时间索引的枢纽 K_t。该模板通过换手率和税务约束将 K_t 连接到 K_{t+1}，并跟踪辐条日期基准。结果是由有效的下一步辐条组成的菜单。

17.4 DOTS Beck–Chevalley 与 Frobenius

考虑交换方块

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n & \xrightarrow{g} & \Delta^p \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \Delta^m & \xrightarrow[h]{} & \Delta^q \end{array}$$

与之前一样，若对所有满足 $f(y) = h(z)$ 的 $y \in \Delta^p$, $z \in \Delta^m$，都存在 $x \in \Delta^n$ 使得 $g(x) = y$ 且 $f'(x) = z$（通俗地说：无需创建新对象即可使该方形成为拉回），则称其为 逐点笛卡尔 。

将关系上的拉回和推前定义为

$$g^*(R) := \{(x,z) : (g(x), z) \in R\}, \qquad f_!(R) := \{(y,z) : \exists x,\ f(x) = y,\ (x,z) \in R\}.$$

定理 17.8 (DOTSBeck–Chevalley)。 考虑许可空间（对象）之间连续映射构成的交换方块：

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n & \xrightarrow{g} & \Delta^p \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \Delta^m & \xrightarrow[h]{} & \Delta^q \end{array}$$

如果该方形是逐点笛卡尔的，且所有映射都是真映射（在紧定义域上自动成立），那么对于任意闭对齐关系 $R \subseteq \Delta^p \times Z$（其中 Z 是紧豪斯多夫参数空间），以下关系相等成立：

$$f'_!(g^* R) \;=\; h^*(f_! R).$$

证明。 我们将验证这些关系作为 $\Delta^m \times Z$ 的子集时相等。
($\subseteq$) 令 $(y,z) \in f'!\ (g^*R)$。根据推前的定义，存在 $x \in \Delta^n$ 使得 $f'(x) = y$ 且 $(x,z) \in g^*R$。后者意味着 $(g(x)\ z) \in R$。令 $w = g(x)$。由该方形的交换性可得，$f(w) = f(g(x)) = h(f'(x)) = h(y)$。结合 $f(w) = h(y)$ 与 $(w,z) \in R$ 可推出 $(h(y)\ z) \in f_!R$。根据拉回的定义，这就得到 $(y,z) \in h^*(f_!R)$。

($\supseteq$) 令 $(y,z) \in h^*(f_!R)$。则 $(h(y)\ z) \in f_!R$，这意味着存在 $w \in \Delta^p$ 使得 $f(w) = h(y)$ 且 $(w,z) \in R$。由于该方形是逐点笛卡尔的，存在 $x \in \Delta^n$ 使得 $g(x) = w$ 且 $f'(x) = y$。将 $w = g(x)$ 代入关系条件，可得 $(g(x)\ z) \in R$，这意味着 $(x,z) \in g^*R$。由于 $f'(x) = y$，我们得出 $(y,z) \in f'_!(g^*R)$。 □

定理 17.9 (DOTS Frobenius)。 设 $f\colon\ \Delta^n \to \Delta^m$ 是一个连续映射（重新实现）。对于任意闭关系 $R \subseteq \Delta^n \times Z$（*Hub*约束）和 $S \subseteq \Delta^m \times Z$（*Spoke*约束），若 Z是紧的，

$$f_!\big(R \cap f^* S\big) \;=\; f_! R \;\cap\; S.$$

证明。（$\subseteq$）设（y, z）$\in f_!$（$R \cap f^*S$）。存在 $x \in \Delta^n$使得 f（x）$= y$且（x, z）$\in R \cap f^*S$。这意味着（x, z）$\in R$且（x, z）$\in f^*S$。根据拉回的定义，（f（x）z）$\in S$，因此（y, z）$\in S$。由于 f（x）$= y$且（x, z）$\in R$，我们也有（y, z）$\in f_!R$。因此（y, z）$\in f_!R \cap S$。
($\supseteq$) 令 $(y,z) \in f_!R \cap S$。那么 $(y,z) \in S$，并且存在 $x \in \Delta^n$，使得 $f(x) = y$，且 $(x,z) \in R$。由于 $f(x) = y$，条件 $(y,z) \in S$ 蕴含 $(f(x)\ z) \in S$，这意味着 $(x,z) \in f^*S$。因此，$(x,z) \in R \cap f^*S$。结合 $f(x) = y$，我们得到 $(y,z) \in f_!(R \cap f^*S)$。 □

当 BC 和 Frobenius 失效时

如果方形不是逐点笛卡尔的（缺少原像），或者某个映射失去真性（对象不是闭集），基变换就可能失效。如果事后强制对像取闭包，Frobenius 也会失效；因为拓扑闭包不能对交集或复合进行分配。在金融领域，这会表现为幻影辐条以及依赖顺序、难以调试的意外情况。

17.5 案例研究：端到端流程管线

每个案例都说明：(i) 输入，(ii) 关系及其顺序，(iii) 确定化的节点，(iv) 保证等式（BC、Frobenius），以及 (v) 计算说明。目的是明确哪些步骤可以交换，哪些步骤体现了真正的选择。

带费用和因子预算的多管理者混合

输入。 $K_A \subseteq \Delta^{n_A}$, $K_B \subseteq \Delta^{n_B}$ （闭集）。
关系。 $R_{\mathrm{blend}} \subseteq (\Delta^{n_A} \oplus \Delta^{n_B}) \times \Delta^{m}$，费用上限投影算子 $R_{\mathrm{fee}\le\tau}$，因子投影算子 $R_{\mathrm{fac}\le b}$。这里， $\oplus$表示单纯形的直和（将两个独立的权重向量并置到一个更高维空间中）， $\otimes$ 表示许可空间 $K_A \times K_B$ 的积。菜单为

$$K^\star = (K_A \otimes K_B) \odot R_{\mathrm{blend}} \odot R_{\mathrm{fee}\le\tau} \odot R_{\mathrm{fac}\le b}.$$

确定化。 如果混合操作求解的是严格凸规划，则将 R_{blend} 替换为 Graph(f_{blend})；随后，根据 Frobenius，费用投影算子和因子投影算子与 f_{blend}可交换。
计算。 $R_{\mathrm{fac}\le b}$ 和 $R_{\mathrm{fee}\le\tau}$ 通常是多面体的； R_{blend} 通常是锥的（二阶锥规划）。使用消元法推导 $K^\star$，或采用采样与凸包法进行外逼近，同时保留包含证书。

带换手率门控的税务感知型ETF转换

输入。 遗留状态 $K_{\mathrm{legacy}} \subseteq \Delta^{n}$。
关系。 $R_{\mathrm{turn}\le\kappa}$、 $R_{\mathrm{tax}\le\theta}$、跟踪$R_{\mathrm{track},\ \epsilon}$。流程管线如下：

$$K^\star = K_{\mathrm{legacy}} \odot R_{\mathrm{turn}\le\kappa} \odot R_{\mathrm{tax}\le\theta} \odot R_{\mathrm{track},\epsilon}.$$

顺序。 如果 $R_{\mathrm{track},\ \epsilon}$ 是函数性的（具有唯一优化器），则 Frobenius 定理允许将投影算子移到它的另一侧。否则，运算顺序体现了实际选择：“换手率优先”还是“税务优先”会产生不同的菜单。**实践**。 在跟踪之前应用流动性投影算子，以避免不可行优化器；记录精确的运算顺序以供审计。

因子中性化叠加层

输入。 $K_{\mathrm{base}} \subseteq \Delta^{n}$。
关系。 针对因子敞口和最大总名义金额的叠加关系；费用投影算子。输出为

$$K^\star = K_{\mathrm{base}} \odot R_{\mathrm{hedge}} \odot R_{\mathrm{fee}\le\tau}.$$

确定化。 对残余敞口和名义金额施加严格凸惩罚项时， R_{hedge} =图（f_{hedge}）。根据 Frobenius，费用过滤可以在 f_{hedge} 之前或之后进行，而不改变菜单。

基准感知定制

输入。 客户枢纽 $K_{\text{client}} \subseteq \Delta^n$；基准映射 $b\colon\ \Delta^n \to \Delta^m$。
关系。 围绕 $b(x)$ 的跟踪带；环境、社会和治理投影算子；流动性投影算子。菜单的读取顺序为

$$K^\star = K_{\text{client}} \odot \mathrm{Graph}(b) \odot R_{\text{track},\epsilon} \odot R_{\text{ESG}} \odot R_{\text{liq}}.$$

基变换。 如果后续因子映射与 b 逐点笛卡尔交换，基变换允许跨映射重新排序检查，而不改变菜单。

17.6 一个简单示例

设置
枢纽 Δ^2，带有约束 $x_1 \le 0.6$（一个闭面）。辐条 Δ^2，带有费用映射 $\mathsf{Fee}(y) = 10y_1 + 5y_2 + 0y_3$（基点）。敞口映射 $g_{\mathcal{A}},\ g_{\mathcal{B}}$ 均按两个投资组合分层汇总权重；单位协方差下的跟踪容差为 $\epsilon = 0.05$ 。

关系
$R_{\text{track},\epsilon} = \{(x, y)\colon\ \|g_A(x) - g_B(y)\|_2 \le 0.05\},\quad R_{\text{fee}\le 6} = \{(y, y)\colon\ \text{费用}(y) \le 6\}$。

菜单
通过在面内的 21×21 格上采样枢纽，并以步长 0.01 枚举辐条格点，使用跟踪球进行筛选，来计算 $K \odot R_{\text{track},\epsilon}$。与费用投影算子（幂等）求交，以获得最终菜单。如果优化器不唯一，先应用费用上限时，结果会明显缩小。通过添加 $\alpha \|y\|_2^2$ 及 $\alpha > 0$，使优化器唯一，从而确定化该作用。

第三部分概率论

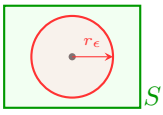
随机基础

水平态射是**紧 Feller 核** $P : X \rightsquigarrow Y$

“有界输入会产生有界的概率质量。”

1. 安全半径

鲁棒安全（几何）



概念： 度量集中
数学： $d(f(x)\ S^c) \geq r_\epsilon$
优点： 快速（$O(1)$ 检查）
缺点： 保守
用途： 实时复制

2. 最高密度区域

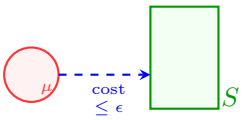
鲁棒安全（概率）



概念： 机会约束
数学表达式： $\mathrm{supp}_\epsilon(P) \subseteq S$
优点： 精确（最紧集合）
缺点： 速度慢（$O(e^d)$）
用途： 复杂/非凸

3. 传输（校正）

经济安全（成本）



概念： 经济成本
数学： $W_1(P, \mathcal{P}_S) \leq \epsilon$
优点： 可处理“近失事件”
缺点： 需要线性规划/二次规划
用途： 交易预算

关键洞见： 几何方法 (1，2) 验证——
证可能性；传输 (3) 计算补救措施。

18 概率中心辐射理论

18.1 动机

这一变体框架基于 Greg Zitelli 的建议，将基础拓扑理论加以扩展，以涵盖优化为近似的、非确定性的或受“零测集”例外影响的实际情形。其底层范畴结构仿照第一部分，但数学基础发生了显著转变——从点集拓扑转向无穷维分析 [2],集值分析 [8, 58], 与测度论 [14, 12]。因此，概率论在技术上比基础理论复杂得多。这并非仅仅是表述问题；这些复杂性是真实存在的。

从审计到风险管理

在理想化的 $\mathbb{HS}$ 框架中，我们假定投资组合再实现是确定性的。在下文所发展的分级扩展（ HSP-r，定义 18.1）中，我们将看到，任何可能结果，无论多么不可能，原则上都可以出于审计目的加以追踪。然而，生产环境往往需要一种概率视角：

1. **随机求解器：** 现实约束可能是非凸的，因此需要能够产生结果分布的启发式求解器。2. **尾部风险与核心行为：** 策略不应因“十亿分之一”的求解器故障或极端尾部事件而失效。我们需要一种形式化体系，能够忽略低于指定概率阈值（风险预算）的事件。3. **风险价值（VaR）：** 合规规则通常是概率性的（例如，“损失在 L 的情况下不得超过，置信度为 99%”）。

为了对这些现象建模，我们将范畴扩展为一种水平态射具有非确定性的范畴，并让 2-胞腔携带一个“风险预算”参数 ϵ。

通俗地说，情况是这样的：确定性重新实现会将每个枢纽投资组合映射到唯一一个辐条投资组合。随机重新实现则会将每个枢纽投资组合映射到辐条投资组合上的一种概率分布。问题“辐条是否与枢纽对齐？”由此变成“辐条是否以足够高的概率与枢纽对齐？”——答案取决于容差参数 ϵ，它量化了可接受的尾部风险程度。下文的数学工具（波兰空间、紧 Feller 核、Chapman–Kolmogorov 复合）旨在使这个问题精确化，并确保答案在多个阶段的复合过程中保持正确。觉得这些工具过于繁复的读者不妨记住，它们的目的很朴素：以一种在复合下保持稳定的方式，定义“几乎总是合规”的含义。

18.2 分级双范畴 HSP-r

我们定义了一个基于**紧 Feller 核** 的双范畴，并配备 ϵ-支撑集语义。与追踪所有可能性的严格审计框架不同，**HSP-r** （枢纽辐射风险）追踪系统在既定容差范围内的“有效”行为。

定义 18.1 （HSP-r 数据）。 $[0,1)$-**分级双范畴 HSP-r** （枢纽辐射风险）由以下部分组成：

- **对象：** 波兰空间 X （可分、完全可度量的拓扑空间，配备其博雷尔 σ代数）。

- **水平态射：紧 Feller 核** $P:\ X \rightsquigarrow Y$（第 18.3节）。
- **垂直态射：闭关系** $R \subseteq X \times Z$。
- **水平复合：**Chapman–Kolmogorov 复合。给定核 $P: X \rightsquigarrow Y$和 $Q:\ Y \rightsquigarrow Z$，其复合 $(Q \circ P):$ $X \rightsquigarrow Z$ 定义为

$$(Q \circ P)(x, C) \;=\; \int_Y Q(y, C)\, P(x, dy)$$

对任意可测的 $C \subseteq Z$。

- **垂直复合：**标准关系复合 $S \circ R \;=\; \{(x,\ z):\ \exists y,\ (x,\ y)\ \in R$ 和 $(y,\ z)\ \in S\}$。

- **水平单位：**由 $\delta_{\mathrm{id}}(x,\ C)\ =\mathbf{1}_C(x)$ 定义的 Dirac（确定性）核 $\delta_{\mathrm{id}}:\ X \rightsquigarrow X$ 。

- **垂直单位：**对角关系 $\Delta_X = \{(x, x)\ \mid x \in X\}$。

- **2-胞腔（ϵ-分次）：**给定一个核 $P:\ X \rightsquigarrow Y$ 以及公共基 Z 上的闭关系 $R \subseteq X \times Z$, $S \subseteq Y \times Z$, 一个 **风险等级为** $\epsilon \in [0, 1)$ 的、填充该方形的 2-胞腔

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{P}{\rightsquigarrow} & Y \\ {\scriptstyle R}\,\vdots\downarrow & & \vdots\downarrow{\scriptstyle S} \\ Z & = & Z \end{array}$$

当且仅当 $R \subseteq P^{*,\epsilon} S$ 时存在，即对每一个 $(x, z)\ \in R$:

$$P(x,\ S_z)\ \geq\ 1 - \epsilon \tag{3}$$

其中 $S_z = \{y \in Y:\ (y, z)\ \in S\}$ 表示 S 的 z-切片。等级 ϵ 的 2-胞腔自动也是任意等级 $\epsilon' > \epsilon$ 的 2-胞腔。
一个具有不同底核 $Q:\ Z \rightsquigarrow W$ 的一般方形，

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{P}{\rightsquigarrow} & Y \\ {\scriptstyle R}\,\vdots\downarrow & & \vdots\downarrow{\scriptstyle S} \\ Z & \underset{Q}{\rightsquigarrow} & W \end{array}$$

在风险等级 ϵ 容许一个 2-胞腔，若对每一个 $(x, z)\ \in R$:

$$\int_W P(x,\ S_w)\, Q(z, dw)\ \geq\ 1 - \epsilon \tag{4}$$

解释：从各自的边缘核中独立抽取结果 $y \sim P(x, \cdot)$ 与 $w \sim Q(z, \cdot)$，则在乘积测度 $P(x, \cdot)$ $\otimes\, Q(z, \cdot)$ 下，对 (y, w) 落在 S 中的概率至少为 $1 - \epsilon$。（独立性假设已内置于乘积测度之中；在实践中，这要求不同流水线阶段的求解器噪声互不相关。）当 $Q = \delta_g$ 为狄拉克核时，(4) 退化为 $P(x, S_{g(z)})\ \geq 1 - \epsilon$；若再附加 $P = \delta_f$，则退化为 $(f(x)\ g(z))\ \in S$，从而恢复确定性的 $\mathbb{HS}$ 条件。

Com2-胞腔的位置。 风险预算在复合下可加地 累积 :

1. **水平复合**（流程管线的各阶段）：若左方块在层级 δ 有一个 2-胞腔，而右方块在层级 ϵ有一个 2-胞腔，则复合方块在层级 $\delta+\epsilon$ 有一个 2-胞腔（定理20.5）。具体而言，两阶段流水线的风险受限于各阶段风险之和。

2. **垂直复合**（堆叠对齐约束）：若上方块在层级δ 有一个 2-胞腔，且下方块在层级 ϵ有一个 2-胞腔，则复合方块（其关系为垂直复合关系 $T\circ R$和 $U\circ S$）在层级 $\delta+\epsilon$有一个 2-胞腔。

   证明概要。考虑两个共享中间核 Q 的可垂直复合方块： $Z\rightsquigarrow W$。上方块的核为 P: $X\rightsquigarrow Y$，关系为 $R\subseteq X\times Z$、 $S\subseteq Y\times W$，并在层级δ有一个 2-胞腔。下方块的核为 Q': $V\rightsquigarrow V'$，关系为 $T\subseteq Z\times V$、 $U\subseteq W\times V'$，并在层级 ϵ有一个 2-胞腔。复合方块的核为 P （上方）、核为 Q' （下方），关系为 $T\circ R$ 和$U\circ S$。

   设 $(x,v)\in T\circ R$，由 z见证，其中 $(x,z)\in R$且 $(z,v)\in T$。在 $Y\times W\times V'$ 上引入辅助三重积测度 $P(x,\cdot)\otimes Q(z,\cdot)\otimes Q'(v,\cdot)$。顶部2-胞腔给出 $\Pr_{P\otimes Q}[(y,w)\in S]\geq 1-\delta$，底部2-胞腔给出 $\Pr_{Q\otimes Q'}[(w,v')\in U]\geq 1-\epsilon$。由三重积上的并集界:

$$\Pr_{P\otimes Q\otimes Q'}\big[(y,w)\in S \text{ and } (w,v')\in U\big] \;\geq\; 1-(\delta+\epsilon).$$

   在该事件上， $y\in S_w$且 $w\in U_{v'}$，因此 $y\in(U\circ S)_{v'}$。对 w 边缘化：$\Pr_{P\otimes Q'}[(y,v')\in U\circ S]\geq 1-(\delta+\epsilon)$，此即复合的2-胞腔条件。

3. **单位2-胞：** 对于任意关系 $R\subseteq X\times Z$，单位方块（顶端为狄拉克核 δ_{id}，两侧均为 R）在风险等级 $\epsilon=0$ 下允许一个2-胞，因为对于每个 $(x,z)\in R$， $\delta_{\mathrm{id}}(x,R_z)=\mathbf{1}_{R_z}(x)=1$。

此定义将确定性理论 $\mathbb{HS}$ 嵌入为“零风险”极限（$\epsilon=0$）。 $\mathbb{HS}$ 中的水平态射在**HSP-r**中变为狄拉克核，即确定性核。

18.3 紧 Feller 核：建模不完美优化

我们将水平态射限制为**紧 Feller 核**。这确保系统在扰动下保持稳定，且概率质量的“大部分”仍留在紧区域内，从而使 ϵ-支撑集成为良定义的紧集。

定义 18.2 （Feller 性质）。 若马尔可夫核 $P(x,dy)$ 满足：对于每个有界连续函数 ϕ，映射 $x\mapsto\int\phi(y)P(x,dy)$ 连续，则称其为**Feller**。

解释：输入（枢纽）的微小变化会导致输出（辐条）分布的微小变化。这是确定性情形中连续性的类比。

定义 18.3 (紧性). 核 P 是**紧** 的，如果对每个紧 $K\subseteq X$ 和 $\delta>0$，存在紧 $L\subseteq Y$，使得 $P(x,L)\geq 1-\delta$ 对所有 $x\in K$成立。

解释： 这保证有效的有界输入以高概率产生有效的有界输出。概率质量不会“逃逸到无穷远”。这类似于确定性情形下的适当性。

例 18.4（紧性失效：无界杠杆）。 考虑一个允许卖空但不设总敞口限额的优化问题。如果求解器检测到套利机会，解序列 $\{y^{(k)}\}$ 可能发散（$w_A \to +\infty$，$w_B \to -\infty$）。描述该解的概率质量会逃逸。对于任意紧子集 L，$\lim_{k\to\infty} P(x,\ L) = 0$。这违反了紧性，证实无界求解器不是有效的态射。

注释 18.5。 Feller 条件和紧性条件很自然，因为它们恰好推广了确定性理论所依赖的连续性和适当性。对于给定的生产求解器，这些条件是否可检查 则是另一个问题。大多数商业优化器不会公开足够的内部结构，因而无法通过解析方法验证 Feller 性质；可以通过实证测试（扰动输入，观察输出分布）来检验，但这并非证明。坦诚地说，HSP-r 框架为行为良好的随机处理流程提供了正确的目标分布 规范；而验证特定实现是否符合该规范，在大多数情况下仍然只能依靠实证。

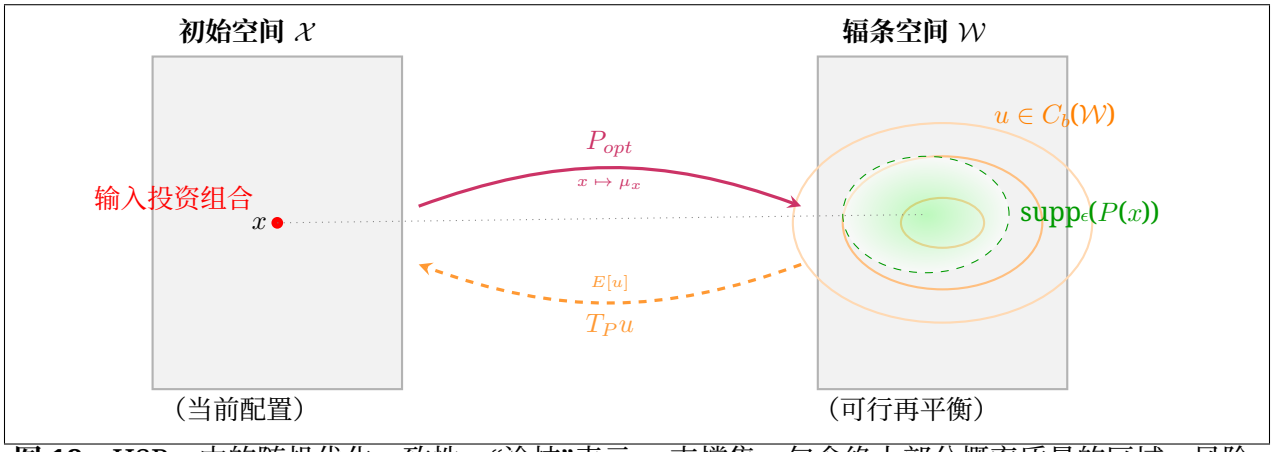


图 18： HSP-r 中的随机优化一致性。“涂抹”表示 ϵ-支撑集：包含绝大部分概率质量的区域。风险预算会舍弃该区域之外的尾部事件。

例 18.6（生产环境优化器：**Gurobi**）。标准混合整数规划求解器是不连续的（不是 Feller）。要在 HSP-r 中使用它们，我们通过向目标函数添加噪声 $\sigma\xi$ 来应用随机平滑（其中 $\sigma > 0$ 是噪声幅度，ξ 是标准随机变量，例如高斯变量）。

$$P(x, dy) = \text{Law}\left(\text{argmin}_{y\in K}\left[C(x,y) + \sigma\xi\right]\right)$$

虽然这会产生一个拓扑支撑集可能无限的核（如果 ξ 是高斯变量），但 ϵ- **支撑集**会紧密集中在最优解格周围。HSP-r 框架允许我们忽略延伸至可行域边界的高斯尾部，并将求解器视为在某个置信区间内实际上是“尖锐”的。

示例 18.7（生产优化器：**Axioma**）。 同样，经过平滑处理的 Axioma 核 P_σ 是紧的，因为仅做多预算约束是紧的。虽然严格的拓扑支撑集是整个单纯形（由于对阿尔法信号进行了高斯平滑），但 ϵ-支撑集正确地识别出了“最有可能”的投资组合。

18.4 概率运算：两种方法

为了在概率设定下定义拉回和推前运算，我们必须确定一个能够刻画概率质量“主体部分”的几何对象。我们探讨两种方法：测度集中 和最高密度区域。在推导结果之前，我们先介绍并比较这两种方法。

第一种方法（由 Greg Zitelli 提出）将安全区域建模为一个以求解器期望输出为中心的度量球。这种方法依赖于基础的集中不等式。当存在全局最优解且误差通常为次高斯时，这种方法适用于生产求解器（例如 Gurobi、Axioma）。

定义 18.8（中心核与安全半径）。设 $P : X \rightsquigarrow Y$ 是度量空间 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 之间的一个紧 Feller 核。假设 P是确定性中心映射 $f : X \to Y$（例如无噪声解）的扰动。对于风险预算 $\epsilon > 0$，**安全半径** r_ϵ 是一个满足以下条件的标量：

$$P(x, B(f(x), r_\epsilon)) \geq 1 - \epsilon \quad \text{for all } x \in X$$

其中 $B(c, r) = \{y \in Y \mid d_Y(c, y) \leq r\}$ 表示闭度量球。

注释 18.9（通过集中不等式推导）。如果求解器误差有界或为次高斯，r_ϵ 可以通过解析方法推导。例如，对于有界扰动，使用霍夫丁不等式 [36]，，或对乘积空间使用塔拉格朗日集中不等式 [66]，，通常可得到按 $r_\epsilon \propto \sqrt{\ln(1/\epsilon)}$缩放的半径。这样便以一个全局参数取代了 HDR 方法中复杂的密度积分。

第二种方法追踪精确的密度等高线。

定义 18.10 (ϵ-最高密度区域)。设 Y是一个波兰空间，$P(x, \cdot)$ 是定义在 Y 上的概率测度，且具有连续密度函数 ρ_x。**ϵ-最高密度区域（ϵ-HDR）**记作 $\text{supp}_\epsilon(P(x))$，是包含概率质量 $1 - \epsilon$的密度超水平集：

$$\text{supp}_\epsilon(P(x)) := \{y \in Y \mid \rho_x(y) \geq \lambda_\epsilon\}$$

其中 $\lambda_\epsilon = \sup\{\lambda \geq 0 \mid P(x, \{y \mid \rho_x(y) \geq \lambda\}) \geq 1 - \epsilon\}$。

注释 18.11。如果密度 ρ_x 没有平坦区域（即，对于所有 c，水平集 $\{y \mid \rho_x(y) = c\}$ 的测度均为零），那么 λ_ϵ 就是满足质量条件且使其取等号的唯一阈值。

注释 18.12（生产求解器的稳定性）。对于 **经高斯平滑的 Gurobi**示例（示例 18.6），添加高斯噪声 $\sigma\xi$ 通常会在最优格点周围形成准凹（单峰）密度。这确保了 ϵ-HDR 是紧凸集的有限并集（在松弛情形下则是单个凸集），并随输入连续变化 x。类似地，对于 **Axioma**，信号平滑确保 α 景观足够规则，使 HDR 保持稳定。与交集定义不同，HDR 对离散和连续误差模型都具有稳健性。

计算可处理性。在 HDR 方法中，计算由求解器定义的分布的基于密度的 ϵ-支撑集（例如，带有随机扰动的凸优化问题），需要通过数值积分或蒙特卡罗采样来描绘高密度区域的边界。在维度为 d 时，这属于 $O(e^d)$。相比之下，安全半径方法只需计算欧几里得距离 $d(f(x) \quad S_z^c)$。对于多面体约束（金融领域常见），这是一个标准的凸投影问题，可在多项式时间内求解。

架构影响。 对于安全半径方法，在附录 D 所述的系统架构中，验证工作器 现在可以是无状态的，且完全基于几何。它无需像 HDR 方法那样模拟数千次求解器运行来估算失效概率。相反，它会向求解器接口 查询确定性解 $f(x)$ 以及预先校准的利普希茨常数／方差参数，以确定 r_ϵ。随后，它会针对存储在态射注册表中的约束执行几何包含性检查。

特征	**安全半径**	**最高密度区域**
几何	对称度量球（球面）	不规则密度等高线
验证成本	**低** （多项式时间距离检查）	**高** （数值积分或采样）
精度	**保守** （近似）	**精确** （可能的最小集合）
复合	**线性**（三角不等式）	**复数** （卷积稳定性）
理想应用场景	实时生产软件	理论分析 or low-维度模型

表2: 安全半径与最高密度区域（HDR）方法的比较 es

在投资组合复制场景中，通常首选安全半径方法。以下是一些示例：投资组合构建可能会产生不规则的概率分布（多峰或“肾形”），从而不得不使用 HDR 方法。

最小持仓规模（“分裂峰”） 这是机构系统中多峰分布最常见的成因。

- 约束: 一项规则要求，只要持有某项资产，其占投资组合的比例就必须至少达到一定水平（例如，“持有 0% 或 $\geq 2\%$”）。这项规则很常见，可避免产生交易成本高昂的“零碎”头寸。
- Th情景: 优化器希望为某只股票分配 1.0% 的理想权重。
- 由此产生的分布:

  – 由于 1.0% 不符合规则，随机求解器（或带有输入噪声的求解器）会“摇摆不定”。– 在 50% 的运行中，权重会向下 取整至 0%。– 在 50% 的运行中，权重会被强制向上 取整至 2%。

- 为什么度量集中会失效:

  – 该分布的“平均值”或“中心”为 1%。– 以 1% 为中心的度量球表明，1% 是有效且安全的持仓。– 实际上，1% 明确属于禁止范围。最高密度区域（HDR）正确地识别出两个彼此分离的安全岛（0 和 $2+$），而度量球则涵盖了两者之间的“死亡谷”。

税务感知型转换（“肾形”或“香蕉”）这种情景会形成非凸、弯曲型分布，通常称为香蕉形或肾形。

- 约束： 将最大跟踪误差（椭球约束）与最高已实现资本利得税预算（线性或分段线性约束）相结合。
- 情景： 你正将旧投资组合转向新的目标分布。你希望尽可能缩短与目标分布的距离，但对可能产生的税费设有严格上限。
- 由此产生的分布： – 求解器尝试卖出资产，以买入新的目标分布。– 达到税务上限后，为了在不卖出高成本基础股票的情况下进一步接近目标分布，求解器开始买入不会触发税费的“代理”资产（高度相关的替代资产）。– 随着相关性变化，解的有效前沿会绕开税务障碍而弯曲。

- 度量集中为何失效： – 有效解的集合会绕开“昂贵”的税务事件而弯曲。– 以均值为中心的度量球会穿过税务约束违规区域。– HDR 会以肾形正确地绕开障碍，排除高税费中心区域。

状态切换信号（“分岔”）这会生成高度分离的多峰分布。

- 约束：一种充当二元开关的量化信号。例如：“如果波动率< 15，杠杆为 150%；如果波动率 > 15，杠杆为 100%。”
- 情景：当前市场波动率的测量值恰好为 15.0，但存在测量噪声（± 0.1）。

- 由此产生的分布： – 输入数据中的微小扰动会导致求解器在两个截然不同的投资组合（高杠杆与低杠杆）之间剧烈切换。– 输出分布中有两个密集的解簇，它们在欧几里得空间中相距甚远。

- 度量集中性为何失效：

  – 这两个云的均值是一个杠杆率为125%的投资组合。– 然而，该策略从不允许125%的杠杆率。– 度量球会将这个杠杆率为125%的投资组合判定为“安全”，从而在审计中造成假阳性。

多空总敞口限额（“空心壳”） 这会产生“中心”为空的分布。

- 约束： 基金必须保持净敞口精确为 0%（美元中性），同时在总敞口上限为 200% 的约束下，最大化对特定因子的暴露度。
- 情景： 求解器将头寸推至总敞口约束的绝对上限，以最大化 Alpha。
- 由此产生的分布： – 这些解基本都位于由总敞口上限定义的球面的“表面”（边界）上。– 随机噪声会沿着球面移动解，而不是将其推向球心。
- 度量集中为何失效：

  – 分布在球面上的点的期望值（均值）位于球内（总敞口较低）。– 虽然均值在技术上“有效”（满足上限），但它与求解器的实际行为不同，后者始终位于边界上。度量球假定内部存在概率质量，而实际上并不存在，因此高估了解的稳定性。

19 概率运算：安全半径

在详细阐述这两种方法之前，我们先说明其中的核心权衡。安全半径方法（本节）用一个以期望输出为中心的度量球 $B(f(x)\ r_\epsilon)$ 来替代求解器的输出分布。从几何角度看，这种方法简洁明了：球在闵可夫斯基和运算下可以复合，风险预算线性累积，而且 Frobenius 律以紧致的几何相等关系成立。其代价是采用了球形假设——误差球具有对称性，因此对于非球形分布（如双峰求解器、香蕉形税务约束），要么无法捕捉，要么只能通过保守的过度近似来处理。

最高密度区域（HDR）方法（第 20 节）用实际分布中最小的高概率区域取代球。这种方法能够适应分布的形状，但也有代价：复合需要满足卷积稳定性条件（命题 20.8），而 Frobenius 律也从相等关系退化为单向包含。两侧之间的差异代表了尾部风险泄漏 ——即投资组合尽管满足机会约束，却仍然带有残余尾部风险。对于多阶段流程管线，这种不对称性正是为何应在中间阶段优先采用鲁棒约束（安全半径或几何弗罗贝尼乌斯），并将 HDR 留作终端诊断的原因。第20.2 节将在介绍这两种方法之后，详细比较它们。

19.1 安全半径方法

定义 19.1（概率拉回）。 给定一个以 f 为中心、安全半径为 r_ϵ 的核 P，以及一个关系 $S \subseteq Y \times Z$，**ϵ-拉回** 用于识别“深度”合规的枢纽：

$$P^{*,\epsilon}S = \{(x,z) \in X \times Z \mid d_Y(f(x), S_z^c) \geq r_\epsilon\}$$

其中， $S_z = \{y \mid (y,z) \in S\}$ 是允许的辐条切片，而 $d_Y(y,A) = \inf_{a\in A} d_Y(y,a)$ 是到某个集合的距离。

解释：如果枢纽投资组合 x 的预期重新实现 $f(x)$ 位于允许的辐射区域 S_z 内部足够深处，使其到边界的距离（S_z^c）超过安全半径，则该投资组合被视为安全。从几何角度看，这确保了 $B(f(x)\ r_\epsilon) \subseteq S_z$。

定义 19.2（概率推前）。给定一个以 f 为中心、具有安全半径 r_ϵ 的核 P，以及一个关系 $R \subseteq X \times Z$，ϵ-**推前** 传播安全缓冲区：

$$P_!^\epsilon R = \overline{\bigcup_{(x,z)\in R} (B(f(x), r_\epsilon) \times \{z\})} \subseteq Y \times Z$$

解释： $P_!^\epsilon R$ 只是 R 的确定性像 [60] 与半径为 r_ϵ 的误差球的闵可夫斯基和。它通过最坏情况偏差 r_ϵ来膨胀确定性投影 f（R）。它回答了这样一个问题："辐射投资组合可能落在哪里？"

注释 19.3。沿恒等态射的拉回和推前不再是平凡的。当中心映射为恒等映射 $f = \mathrm{id}_X$ 时，这些运算分别对应于按安全半径 r_ϵ 进行的度量侵蚀和膨胀：

- **拉回（侵蚀/内平行集）：** ϵ-拉回确定允许区域 S 内部足够深的点，使其即使经过规模为 r_ϵ 的最坏情况扰动后仍然有效：

$$\mathrm{id}^{*,\epsilon} S = \{(x,z) \in X \times Z \mid d(x, S_z^c) \geq r_\epsilon\} = \{(x,z) \mid B(x, r_\epsilon) \subseteq S_z\}$$

- **推前（膨胀/闵可夫斯基和）：** ϵ-推前通过安全球扩大有效关系 R，表示由"抖动" r_ϵ 所能到达的所有位置：

$$\mathrm{id}_!^\epsilon R = R \oplus B(0, r_\epsilon) = \overline{\bigcup_{(x,z)\in R} (B(x, r_\epsilon) \times \{z\})}$$

19.2 风险的复合与积累

为了分析多阶段流程管线（例如 Hub $\to$ Model $\to$ Spoke），我们必须确定安全半径如何在复合过程中积累。累积函数的选择决定了逐步审计与端到端审计之间的逻辑关系。

定义复合安全半径

设 $P\colon X \rightsquigarrow Y$ 和 $Q\colon Y \rightsquigarrow Z$ 是分别以 f_P 和 f_Q 为中心、安全半径分别为 r_P 和 r_Q 的紧 Feller 核。假设中心映射 f_Q 是 L-利普希茨连续的。

顺序风险预算表示误差在最坏情况下的累积：

$$r_{seq} \ = \ L r_P + r_Q$$

然而，在许多高维投资组合应用中，误差并不相关（例如，随机平滑产生的正交高斯噪声）。在这种情况下，线性预算过于保守。因此，我们定义一个符合误差项独立性的**复合安全半径**。

定义 19.4（二次合成）。我们根据误差的独立性，定义核 $Q \circ P$ 的二次复合半径 r_{quad}：

$$r_{quad} = \sqrt{(L r_P)^2 + r_Q^2}$$

由于 $\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b$ 对于非负实数（两边平方），我们有 $r_{quad} \leq r_{seq}$。

组合性：线性复合（最坏情况误差累积）

定理 19.5（安全半径运算的复合，确定性情形）。设 $f\colon X \to Y$和 $g\colon Y \to Z$为确定性映射。设r_f、$r_g > 0$分别为与 f和g 相关联的安全半径。假设 g 是 L-利普希茨连续的。概率运算的复合遵循风险预算的线性性，因此得到以下保守包含关系：

*1.*推前复合（保守风险包络）：详细的顺序传播包含在标量近似之中：

$$g_!^{r_g}\left(f_!^{r_f} R\right) \subseteq (g \circ f)_!^{Lr_f + r_g} R$$

2. 拉回复合（保守验证）：标量近似采用的验证标准比顺序检验更严格：

$$(g \circ f)^{*, Lr_f + r_g} S \subseteq f^{*, r_f}\left(g^{*, r_g} S\right)$$

证明。**1. 推前：**设 $z \in g^{r_g}_!\,(f^{r_f}_!\, R)$。根据定义，存在一个中间点$y \in f^{r_f}_!\, R$，使得 $d_Z(z,\ g(y)) \le r_g$。由于 $y \in f^{r_f}_!\, R$，存在一个枢纽 x，使得$(x,\ \cdot) \in R$，且$d_Y(y,\ f(x)) \le r_f$。我们计算 z 到复合中心 $g(f(x))$的距离：

$$\begin{aligned} d_Z(z, g(f(x))) &\le d_Z(z, g(y)) + d_Z(g(y), g(f(x))) \\ &\le r_g + L \cdot d_Y(y, f(x)) \quad \text{(by Lipschitz property)} \\ &\le r_g + L r_f \end{aligned}$$

因此，z位于球 $B_Z(g(f(x))\ Lr_f + r_g)$中，这意味着 $z \in (g \circ f)^{Lr_f + r_g}_!\, R$.

2. 拉回：设$(x, w) \in (g \circ f)^{*, Lr_f + r_g} S$。这意味着大球 $B_Z(g(f(x))\ Lr_f + r_g)$ 完全包含在安全集合 S_w 中。我们必须证明$(x, w) \in f^{*, r_f}(g^{*, r_g} S)$。这要求对于所有 $y \in B_Y(f(x)\, r_f)$，球 $B_Z(g(y)\, r_g)$ 都包含在 S_w 中。设 y 为任意一点，使得$d_Y(y, f(x)) \le r_f$。设 z 为任意一点，使得 $d_Z(z, g(y)) \le r_g$。根据三角不等式和利普希茨条件，我们已在上文证明：

$$d_Z(z, g(f(x))) \le r_g + L r_f.$$

由于复合球包含于 S_w, $z \in S_w$ 中。因此，对于每个可能的中间 y，每个由此产生的 z 都是安全的。序贯条件得以满足。 □

定理 19.6（安全半径运算的复合，概率情形）。设 $P\colon X \rightsquigarrow Y$和 $Q\colon Y \rightsquigarrow Z$ 是紧 *Feller* 核。假设 P以 f_P为中心，安全半径为 r_P，且 Q 以 f_Q 为中心，安全半径为r_Q。假设中心映射 f_Q 是 L-利普希茨连续的。我们将复合核 $Q \circ P$定义为以 $f_Q \circ f_P$为中心，复合安全半径为 $r_{seq} = L r_P + r_Q$。

概率运算满足以下保守性包含关系：

1. 推前复合（风险包络）：序贯安全区域包含于复合安全包络中：

$$Q_!^{r_Q}\left(P_!^{r_P} R\right) \subseteq (Q \circ P)_!^{r_{seq}} R$$

2. 拉回复合（验证安全性）：复合验证是序贯验证的一种保守代理：

$$(Q \circ P)^{*, r_{seq}} S \subseteq P^{*, r_P}\left(Q^{*, r_Q} S\right)$$

证明。**1. 推前包含**：回顾一下，概率推前 $P^{r_P}!\,R$ 是球 $B_Y(f_P(x)\ r_P)$ 的并集。设 z 是序贯推前 $Q^{r_Q}!\,(P^{r_P}!\,R)$ 中的一个元素。这意味着 z 属于某个球 $B_Z(f_Q(y)\,r_Q)$，其中的 y 本身属于某个球 $B_Y(f_P(x)\ r_P)$。利用 f_Q 的利普希茨性质，球 $B_Y(f_P(x)\ r_P)$ 的像包含于 $B_Z(f_Q(f_P(x))\ Lr_P)$ 中。该像与误差预算 r_Q 的闵可夫斯基和包含于半径为 $Lr_P + r_Q$ 的球中。因此，$z \in B_Z(f_Q(f_P(x))\ Lr_P + r_Q)$，从而验证了该包含关系。

2. 拉回包含：令 $(x, w) \in (Q \circ P)^{*,r_{seq}} S$。这意味着整个球$B_Z(f_Q(f_P(x))\ Lr_P + r_Q)$都包含在安全切片 S_w 中。我们需要证明 x 在序贯意义上有效。序贯有效性要求，对于任意可能的中间结果 $y \in B_Y(f_P(x)\ r_P)$，由 Q 产生的结果 z 都是安全的。所有此类可达的 z 都包含在以 r_P-球的像为中心的r_Q-球并集中：

$$\mathcal{Z} = \bigcup_{y \in B_Y(f_P(x), r_P)} B_Z(f_Q(y), r_Q).$$

如确定性情形所示，$\mathcal{Z} \subseteq B_Z(f_Q(f_P(x))\ Lr_P + r_Q)$。由于较大的复合球是安全的（包含于 S_w 中），子集 $\mathcal{Z}$ 也安全。因此，顺序检验通过。 □

组合性：二次合成（独立误差）

采用二次定义使我们能够为复合系统推导出更紧的界。这带来了一个在结构上很重要的性质：序贯验证是端到端验证的保守代理。

这些结果要求下游中心映射 f_Q 满足一项额外的结构条件，以确保其不会使输出空间中的方向发生坍缩。

定义 19.7（度量开映射性）。度量空间之间的映射 $f_Q : Y \to Z$ 是 **ℓ-余Lipschitz**（或**度量开且常数为** $\ell > 0$），若对所有 $y \in Y$ 与 $r > 0$：

$$f_Q(B_Y(y, r)) \supseteq B_Z(f_Q(y), \ell r).$$

余Lipschitz常数满足 $\ell \le L$（利普希茨常数），当 f_Q 为等距变换的标量倍数时取等。

我们定义**覆盖半径**：

$$r_{cov} \;=\; \ell r_P + r_Q$$

它衡量序贯风险管所保证的可达范围。由于 $\ell \le L$，我们有 $r_{cov} \le r_{seq}$。注释 19.8（度量开映射性的金融学解释）。利普希茨常数 L界定误差的最大放大（即总杠杆），而余Lipschitz常数 ℓ 界定最小放大：模型空间中的一个单位扰动在辐条空间中至少产生 ℓ 单位的位移。对于线性重新实现 $f_Q(y) = Ay + b$，我们有 $L = \sigma_{\max}(A)$ 与 $\ell = \sigma_{\min}(A)$（即 A 的最大奇异值与最小奇异值）。

条件 $\ell > 0$ 意味着求解器是非退化的——它不会压缩输出空间中的任何方向。完全复制（$\ell = L = 1$）、杠杆策略（$\ell = L = |\lambda|$）以及雅可比矩阵满秩的任何优化器都满足这一条件。如果求解器将高维模型空间映射到存在秩亏的低维辐条空间，则这一条件不成立；例如，某种策略完全忽略某些资产类别，导致模型扰动无法到达某些输出方向。在这类退化情况下，序贯审计管无法覆盖整个复合球，以下结果需要作出调整（例如，将复合球限制在f_Q的像上）。

定理 19.9 (松函子性：风险集中)。 假设中心映射 f_Q 是 ℓ-余利普希茨的（定义 19.7），并假设 $r_{quad} \le r_{cov}$，其中 $r_{quad} = \sqrt{(Lr_P)^2 + r_Q^2}$ 是二次复合半径，而 $r_{cov} = \ell r_P + r_Q$ 是覆盖半径。（当 L/ℓ 的条件数 f_Q 适中时，这一条件成立；对于病态映射则可能不成立。）概率推前满足以下包含关系：

$$(Q \circ P)_!^{r_{quad}} R \;\subseteq\; Q_!^{r_Q}\left(P_!^{r_P} R\right)$$

证明。 我们必须证明，复合风险包络（半径为 r_{quad} 的球）中的每个点都被序贯风险管覆盖。在整个证明过程中，我们使用以下既定假设 $r_{quad} \le r_{cov} := \ell r_P + r_Q$。

设 $(z,\ w) \in (Q \circ P)^{r_{quad}}_!\, R$。根据推前的定义，存在 x，使得 $(x,\ w) \in R$，且 $d_Z(z,\ f_Q(f_P(x))) \le r_{quad}$。

我们通过寻找 $y' \in B_Y(f_P(x)\ r_P)$ 且满足 $d_Z(z,\ f_Q(y')) \le r_Q$，来给出属于 $Q^{r_Q}_!\,(P^{r_P}_!\ R)$ 的一个见证。

考虑闵可夫斯基和管 $\mathcal{T} = \bigcup_{y \in B_Y(f_P(x)\ r_P)} B_Z(f_Q(y)\, r_Q)$。这是像 $I = f_Q(B_Y(f_P(x)\ r_P))$ 的 r_Q-邻域。根据 f_Q 的余利普希茨性质（定义 19.7），$I \supseteq B_Z(f_Q(f_P(x))\ \ell r_P)$。在赋范空间中，点到闭球的距离满足 $d(z, B(a,r)) = \max(0, \|z-a\| - r)$；这可由三角不等式推出：对于任意 $y \in B(a,r)$，都有 $\|z-a\| \le \|z-y\| + r$，且该界由 $y = a + r(z-a)/\|z-a\|$ 取得。我们的投资组合权重空间是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸子集，且采用诱导范数，因此该公式适用。因此：

$$d_Z(z, I) \;\le\; d_Z(z, B_Z(f_Q(f_P(x))\ \ell r_P)) \;=\; \max\!\big(0,\ d_Z(z,\ f_Q(f_P(x))) - \ell r_P\big) \;\le\; \max(0,\, r_{cov} - \ell r_P) = r_Q.$$

因此，存在 $w_0 \in I$，使得 $d_Z(z, w_0) \le r_Q$。由于 $w_0 \in I = f_Q(B_Y(f_P(x)\ r_P))$，存在$y' \in B_Y(f_P(x)\ r_P)$，使得 $f_Q(y') = w_0$。于是 $d_Z(z, f_Q(y')) \le r_Q$，并且由于$(x, w) \in R$且$d_Y(y', f_P(x)) \le r_P$，我们有 $y' \in P^{r_P}_!\ R_w$，将 z置于 Q^{r_Q}中！$(P^{r_P}_!\ R)$。 □

定理19.10 (保守顺序验证)。 假设与上文相同的余利普希茨假设（$r_{quad} \le r_{cov} = \ell r_P + r_Q$）。通过顺序审计意味着通过复合审计：

$$P^{*,r_P}\,(Q^{*,r_Q} S) \;\subseteq\; (Q \circ P)^{*,r_{quad}} S$$

证明。 设（$x,\ w$）是一对通过序贯验证（左端）的对象。顺序条件要求最坏情况管

$$\mathcal{T} \;:=\; \bigcup_{y \in B_Y(f_P(x), r_P)} B_Z(f_Q(y), r_Q) \;\subseteq\; S_w.$$

我们必须证明 $B_Z(f_Q(f_P(x))\, r_{quad}) \subseteq S_w$。该管 $\mathcal{T}$是像集 $I = f_Q(B_Y(f_P(x)\ r_P))$ 的 r_Q 邻域。根据 f_Q 的余利普希茨性质（定义 19.7），$I \supseteq B_Z(f_Q(f_P(x))\ \ell r_P)$。对于任意满足 $d_Z(z, f_Q(f_P(x))) \le r_{quad} \le \ell r_P + r_Q = r_{cov}$ 的 z，由三角不等式可得 $d_Z(z, I) \le \max(0, r_{quad} - \ell r_P) = r_Q$，因此 $z \in \mathcal{T}$。所以 $B_Z(f_Q(f_P(x))\, r_{quad}) \subseteq \mathcal{T} \subseteq S_w$。 □

定义选择指导选择线性复合还是二次复合，取决于求解器误差的性质：

- **使用线性复合（$Lr_P + r_Q$）的情况：** 错误具有系统性或相关性（例如，两个阶段都依赖同一个有偏风险模型），或者需要针对对抗条件提供严格的监管保证。在这种情况下，包含关系变为等式，审计是精确的，但成本高昂。

• **使用二次合成（$\sqrt{\cdots}$）的情况：**错误由彼此独立的随机过程驱动（例如，蒙特卡洛噪声、独立的求解器随机种子）。这种机制支持审计安全性：逐步验证每个步骤是实现全局合规的充分条件，因此系统可以将中间检查解耦，而不会损害端到端安全性。

关于安全半径方法的最后几点说明 安全半径方法需要预先支付"复杂性税"（计算利普希茨常数 L），以换取之后计算上的简便（检查$d(x,\ y) \leq r$）。不过，在许多实际情况下——尤其是定制和复制——我们可以直接假设 $L = 1$，如下文注释所述。

注释 19.11（将 L解释为金融杠杆）。 在安全半径方法中，重新实现映射 $f\colon K_{Hub} \to K_{Spoke}$ 的利普希茨常数 L 具有直接的金融解释：它表示该变换的**敏感度** 或**总杠杆** 。

回顾利普希茨连续性的定义：

$$\|f(x) - f(x')\| \leq L \cdot \|x - x'\|$$

令 $\delta = x - x'$ 表示枢纽投资组合中的扰动或"误差"（例如输入噪声）。令$\Delta = f(x) - f(x')$表示辐射投资组合中由此产生的偏差。不等式表明：

$$\frac{\|\Delta\|}{\|\delta\|} \leq L$$

因此， L界定了 输出偏差与输入偏差之比。我们区分三种情形：

1. **降低风险 / 抑制（$L < 1$）：** 考虑一种将资产转为现金或进行大幅分散化（缩小方差）的映射。其输出比输入更稳定。安全半径收缩（$r_{spoke} < r_{hub}$），这意味着该过程会自然吸收上游误差。

2. **单位变换 / 直通（$L \approx 1$）：** 考虑对索引进行简单的重新托管或只做多复制。输入权重出现 1% 的误差，输出权重就会恰好出现 1% 的误差。安全半径保持不变。

3. **杠杆化 / 放大（$L > 1$）：** 考虑一种对枢纽信号应用杠杆因子$\lambda > 1$ 的策略（例如，源自标准模型的 130/30 基金）。

$$f(x) \approx \lambda x \implies \|\lambda x - \lambda x'\| = |\lambda| \|x - x'\|$$

在这里， $L = \lambda$。枢纽信号中 1% 的误差会被放大为辐条中 λ% 的误差。为保持相同的置信水平，安全半径必须扩大（$r_{spoke} = \lambda \cdot r_{hub}$）。

19.3 安全半径方法的相干律

定理 19.12 （安全保证（单向伴随））。 设 P 为一个具有安全半径 r_ϵ的中心核。对于任意闭关系 R 和 S，我们有以下单向蕴含：

$$P^{\epsilon}_{!} R \subseteq S \implies R \subseteq P^{*,\epsilon} S$$

证明。 假设包含关系 $P^{\epsilon}_{!} R \subseteq S$。令 (x, z) 为 R 中的任意元素。根据概率推前的定义：

$$B(f(x), r_\epsilon) \times \{z\} \subseteq P^{\epsilon}_{!} R$$

根据假设 $P_!^\epsilon R \subseteq S$，可得：

$$B(f(x), r_\epsilon) \times \{z\} \subseteq S$$

这意味着，对于每个 $y \in B(f(x)\ r_\epsilon)$，有序对 $(y,\ z)$ 属于 S。用切片来表述，这意味着整个球都包含在允许的切片中：

$$B(f(x), r_\epsilon) \subseteq S_z$$

半径为 r_ϵ 的闭球包含在某个集合中，这一条件等价于球心到该集合补集的距离至少为 r_ϵ。因此：

$$d_Y(f(x), S_z^c) \geq r_\epsilon$$

根据概率拉回的定义，这意味着 $(x,\ z) \in P^{*,\ \epsilon} S$。

还需处理由 $P_!^\epsilon R$ 定义中的闭包所产生的极限点。如果 $(y,\ z)$ 是 $\bigcup_{(x,\ z') \in R} B(f(x)\ r_\epsilon) \times \{z'\}$ 的极限点（必然是 $z' = z$ 最终成立的情形），而非并集本身中的元素，那么存在一个序列 $(y_n,\ z) \to (y,\ z)$，使得对于某个 $(x_n,\ z) \in R$，有 $y_n \in B(f(x_n)\ r_\epsilon)$。由于 $P_!^\epsilon R \subseteq S$，每个 $y_n \in S_z$。因为 S 是闭集，所以切片 S_z 是闭集，因此 $y \in S_z$。由此，对于极限点，单向蕴含关系也成立。□

注释 19.13（为何逆命题不成立）。 与定理 $f_! \dashv f^*$ 7.7中的确定性伴随不同，随机版本只能给出单向蕴含。逆命题不成立，是因为在 $P_!^\epsilon$的定义中取闭包，可能引入一些极限点，而这些点并非由 R 中的任何元素见证：一对 $(y,\ z)$ 可能属于 $P_!^\epsilon R$ （通过极限序列），但不存在任何枢纽 x 同时满足 $(x,\ z) \in R$和$y \in B(f(x)\ r_\epsilon)$。

定理 19.14 （Beck–Chevalley / 早期审计安全性）。 考虑一个投资组合变换的交换方块：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{P} & Z \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ Y & \xrightarrow[Q]{} & W \end{array}$$

假设 g 和 h 是确定性聚合映射，且 P、Q 是以f_P、f_Q为中心、安全半径分别为 r_δ、r_ϵ的随机核。假设该方块在中心上交换（$h \circ f_P = f_Q \circ g$），且$h$ 是 L-利普希茨连续的。若下游风险预算满足 $r_\epsilon \geq L \cdot r_\delta$，则：

$$P_!^\delta(g^* R) \subseteq h^*(Q_!^\epsilon R)$$

证明。 设 $(y, w) \in P_!^\delta(g^* R)$。根据定义，存在 $x \in X$，使得：1. $(x, w) \in g^* R \implies (g(x)\ w) \in R$。2. $y \in B(f_P(x)\ r_\delta)$。

我们必须证明 $(y, w) \in h^*(Q_!^\epsilon R)$，这要求 $(h(y)\ w) \in Q_!^\epsilon R$。而这又要求存在一个元素 $z \in Y$，使得 $(z, w) \in R$，并且 $h(y) \in B(f_Q(z)\ r_\epsilon)$。

令我们选择 $z = g(x)$。由 (1) 可知 $(z, w) \in R$。接下来需要验证距离条件。我们知道 $d_Y(y, f_P(x)) \leq r_\delta$。应用映射 h：

$$d_W(h(y), h(f_P(x))) \leq L \cdot d_Y(y, f_P(x)) \leq L \cdot r_\delta$$

利用中心的交换性，$h(f_P(x)) = f_Q(g(x)) = f_Q(z)$。因此：

$$d_W(h(y), f_Q(z)) \leq L \cdot r_\delta$$

根据稳定性假设 $r_\epsilon \geq L \cdot r_\delta$，我们有：

$$d_W(h(y), f_Q(z)) \leq r_\epsilon$$

因此 $h(y) \in B(f_Q(z)\ r_\epsilon)$，这意味着 $(h(y)\ w) \in Q_!^\epsilon R$。 □

定理 19.15 (Frobenius / 保守过滤)。 设 P 为一个安全半径为r_ϵ的中心核。对于闭关系 R 和 S：

$$P_!^\epsilon(R \cap P^{*,\epsilon} S) \subseteq P_!^\epsilon R \cap S$$

证明。 设 (y, z) 是左端中的一个元素。这意味着存在 x 使得：1. $(x, z) \in R$2. $(x, z) \in P^{*,\epsilon} S \implies B(f(x)\ r_\epsilon) \subseteq S_z$ 3。 $y \in B(f(x)\ r_\epsilon)$

由 (1) 和 (3) 可立即得出 $(y,\ z) \in P_!^\epsilon R$。由 (2) 和 (3)，由于 y 位于球内，且该球包含于 S_z，因此可得 $y \in S_z$，进而有 $(y,\ z) \in S$。因此，$(y,\ z)$ 位于交集中。

□

20 概率运算：最高密度区域

安全半径方法用一个球替代分布。HDR 方法则保留分布，并提出这样一个问题：概率质量大部分实际落在哪里？分布 $P(x,\ \cdot)$ 的 **ϵ-最高密度区域**是包含至少 $1-\epsilon$ 概率质量的最小闭集。对于具有连续密度的分布，这是一个超水平集 $\{y:\ \rho_x(y) \geq \lambda_\epsilon\}$ ——即密度最高的区域。由此得到的“安全区域”会根据分布的实际形状进行调整：对于各向异性求解器噪声，它呈细长形；对于离散约束求解器，它呈双峰形；对于税收约束转移，它呈香蕉形。这种适应性的代价在于复合性：与度量球不同，最高密度区域不能通过简单相加进行复合，而 Frobenius 律仅以包含关系成立。

20.1 定义

定义 20.1（概率拉回）。 给定 $P\colon\ X \rightsquigarrow Y$ 和 $S \subseteq Y \times Z$， **ϵ-拉回**可识别以高概率成功的枢纽：

$$P^{*,\epsilon}S = \{(x,z) \in X \times Z \mid P(x, S_z) \geq 1-\epsilon\}$$

定义 20.2（概率推前）。 给定一个紧 Feller 核 $P\colon\ X \rightsquigarrow Y$和一个关系$R \subseteq X \times Z$， **$\epsilon$-推前** 会传播安全区域：

$$P_!^\epsilon R = \overline{\bigcup_{(x,z)\in R} (\mathrm{supp}_\epsilon(P(x)) \times \{z\})} \subseteq Y \times Z$$

注释 20.3（操作含义）。 $P_!^\epsilon R$ 为辐条定义了**规范安全区域** 。它回答了这样一个问题：“如果枢纽 x 有效，生成的辐射投资组合将以较高置信度落在哪里？”通过跟踪 HDR，我们排除了尾部事件（离群值），否则这些事件会将可达集合扩展到整个空间，使审计失去意义。

注释 20.4。 同样，沿恒等态射进行拉回和推前并非平凡操作。当核 P 表示围绕恒等映射的噪声时，这些运算对应于机会约束和鲁棒区域：

- **拉回（机会约束）：** ϵ-拉回选取满足约束S 且概率至少为 $1-\epsilon$ 的输入：

$$P^{*,\epsilon}S = \{(x,z) \in X \times Z \mid P(x, S_z) \geq 1-\epsilon\}$$

- **推前（鲁棒安全区域）：** ϵ-推前是所有 ϵ-支撑集的并集的闭包，表示由有效输入生成的所有“可能”结果的集合：

$$P_!^\epsilon R = \overline{\bigcup_{(x,z)\in R} (\mathrm{supp}_\epsilon(P(x)) \times \{z\})}$$

ϵ-拉回和 ϵ-推前运算可以协调组合，因此可以逐步分析多阶段流程管线（例如，枢纽 $\to$ 模型 $\to$ 客户），同时持续追踪累积风险。

定理 20.5（ ϵ-拉回的复合）。 设 $P\colon\ X \rightsquigarrow Y$ 和 $Q\colon\ Y \rightsquigarrow Z$ 是紧 *Feller* 核。对于任意闭关系 $S \subseteq Z \times W$ 和风险预算 $\delta, \epsilon \geq 0$，若满足 $\delta + \epsilon < 1$:

$$P^{*,\delta}\left(Q^{*,\epsilon}S\right) \ \subseteq\ (Q \circ P)^{*,\delta+\epsilon}S$$

证明。 设 (x, w) 是嵌套拉回 $P^{*,\delta}(Q^{*,\epsilon}S)$ 中的任意元素。我们必须证明，复合核以至少 $1-(\delta+\epsilon)$ 的概率将 x 映射到目标集 S_w。

步骤 1：分析内层拉回。 定义 Y 中“成功”中间状态的集合：

$$A := \{y \in Y \mid (y, w) \in Q^{*,\epsilon}S\} = \{y \in Y \mid Q(y, S_w) \geq 1-\epsilon\}$$

For 对于任意 $y \in A$，核 Q 以高概率将 y 映射到目标切片 S_w。

步骤 2：分析外层拉回。 条件 $(x, w) \in P^{*,\delta}(Q^{*,\epsilon}S)$ 表明， x以至少 $1-\delta$ 的概率映射到集合 A：

$$P(x, A) \geq 1-\delta$$

步骤 3：计算复合核。 复合核 $(Q \circ P)$ 将 x 映射到 S_w 的概率由 Chapman–Kolmogorov 积分给出：

$$(Q \circ P)(x, S_w) = \int_Y Q(y, S_w)\, P(x, dy)$$

我们将此积分拆分为成功集合 A及其补集 A^c上的积分：

$$= \int_A Q(y, S_w)\, P(x, dy) + \int_{A^c} Q(y, S_w)\, P(x, dy)$$

由于概率非负，我们可以将第二项下界设为 0。对于第一项，我们知道，对所有 $y \in A$， $Q(y, S_w) \geq 1-\epsilon$。因此：

$$\int_A Q(y, S_w)\, P(x, dy) \geq \int_A (1-\epsilon)\, P(x, dy) = (1-\epsilon)P(x, A)$$

利用界 $P(x, A) \geq 1-\delta$，可得：

$$(Q \circ P)(x, S_w) \geq (1-\epsilon)(1-\delta) = 1-\epsilon-\delta+\epsilon\delta$$

由于 $\epsilon, \delta \geq 0$，项 $\epsilon\delta$ 为非负数。将其舍去仍保持不等式：

$$(Q \circ P)(x, S_w) \geq 1-(\epsilon+\delta)$$

根据概率拉回的定义，这意味着 $(x, w) \in (Q \circ P)^{*,\delta+\epsilon}S$。 □

定理 20.6（复合 ϵ-推前）。 设 $P: X \rightsquigarrow Y$ 和 $Q: Y \rightsquigarrow Z$ 为紧 *Feller* 核。假设最高密度区域（*HDR*）满足卷积稳定性条件：

$$\mathrm{supp}_{\delta+\epsilon}((Q \circ P)(x)) \subseteq \overline{\bigcup_{y \in \mathrm{supp}_\delta(P(x))} \mathrm{supp}_\epsilon(Q(y))}$$

那么对于任意闭关系 $R \subseteq X \times W$：

$$(Q \circ P)_!^{\delta+\epsilon} R \subseteq Q_!^\epsilon \left(P_!^\delta R\right)$$

证明。 设 $(z, w) \in (Q \circ P)^{\delta+\epsilon}_! R$。根据推前是支撑集并集的闭包这一定义，存在一个序列 $\{(z_k, w_k)\}_{k=1}^\infty$，其收敛到 (z, w)；其中，对每个 k，都存在一个枢纽 x_k，使得 $(x_k, w_k) \in R$，且 $z_k \in \mathrm{supp}^{\delta+\epsilon}((Q \circ P)(x_k))$。

我们对序列中的每一项应用卷积稳定性条件。对每个 k:

$$z_k \in \mathrm{supp}_{\delta+\epsilon}((Q \circ P)(x_k)) \subseteq \overline{\bigcup_{y \in \mathrm{supp}_\delta(P(x_k))} \mathrm{supp}_\epsilon(Q(y))}.$$

这意味着 (z_k, w_k) 位于集合的闭包中

$$\mathcal{S} := \bigcup_{(x,w') \in R} \bigcup_{y \in \mathrm{supp}_\delta(P(x))} \left(\mathrm{supp}_\epsilon(Q(y)) \times \{w'\}\right).$$

我们注意到，定理陈述右侧的集合 $Q_!^\epsilon(P_!^\delta R)$，根据定义就是 $\mathcal{S}$ 的闭包。由于对于所有 k，$(z_k, w_k) \in \mathcal{S}$，且该序列收敛于 (z, w)，因此可得 $(z, w) \in \mathcal{S} = Q_!^\epsilon(P_!^\delta R)$。

□

注释 20.7。 将 HDR 方法中“简单”的集合论包含关系与安全半径方法中“复杂”的算术运算协调起来，很有启发性。HDR 表述中并未缺少这种复杂性（利普希茨常数 L）；它隐含在像集的几何结构中。

卷积稳定性条件 我们刚刚看到，推前的复合依赖于最高密度区域（最高密度区域）在卷积下的行为。为了确保风险预算线性相加（即复合过程的风险以 $\delta+\epsilon$ 为界），我们要求满足卷积稳定性条件。该条件断言，端到端过程（$Q \circ P$）的“可能”结果包含在通过串联“可能”的中间步骤所生成的结果集合中。它可以防止概率质量在复合过程中漂移到分布的“尾部”，否则这一现象会使审计轨迹失效。

虽然这一条件并不适用于任意概率测度（尤其是多峰测度），但下述命题给出了充分条件。

命题 20.8 (卷积稳定性的充分条件)。 以下各情形均满足卷积稳定性条件：

1. 对数凹加性噪声。若 $P(x, \cdot)$ 具有对数凹密度，且 $Q(y, \cdot)$ 作为加性噪声发挥作用——即输出形式为 $y+\xi$，其中 ξ 与 y 相互独立，且具有对数凹密度——那么复合核 $(Q \circ P)(x, \cdot)$ 是对数凹密度的卷积，因此也是对数凹的（由普雷科帕–莱因德勒不等式可得，见 [56], [42], [28]）。对于对数凹测度，ϵ-HDR 是凸超水平集，而凸超水平集的闵可夫斯基和包含卷积在合并阈值处的超水平集。概率质量下界 $Pr(\xi \in A_\delta + B_\epsilon) \geq 1 - (\delta + \epsilon)$ 始终成立（由并集界论证可得）。然而，更强的 HDR 包含关系 $HDR_{1-(\delta+\epsilon)} \subseteq A_\delta + B_\epsilon$ 还需要额外的集中性：对于高斯噪声和次高斯噪声，该关系可以得到验证（此时对于显式半径的球，$Pr(\xi \in B) \geq 1 - \epsilon$ 成立），但仅凭对数凹性无法推出这一结论。对于一般的对数凹噪声，只能确立概率质量下界；在应用中应针对具体噪声模型检查 HDR 包含关系（详情见附录 B.5）。

2. 紧支撑。 若核 $P(x, \cdot)$ 和 $Q(y, \cdot)$ 具有紧支撑，则根据支撑直径的次可加性，该条件成立：$\mathrm{supp}(Q \circ P) \subseteq \bigcup_y \mathrm{supp}(Q(y, \cdot))$ 其中，并集取遍 $y \in \mathrm{supp}(P(x, \cdot))$，而仅限于 ϵ-HDRs 会进一步收紧包含关系。

证明。 参见附录 B.5。 □

在生产环境中，这些条件涵盖了主要的使用场景：

1. **高斯平滑求解器：**当求解器通过加性高斯噪声进行平滑处理时（例如，对 Gurobi 应用高斯输入扰动 [35]，如示例 18.6所示），所得的概率密度是对数凹的，因此适用命题 20.8的情况 (1)。

2. **信号正则化：** 在 Axioma 等系统中 [57],，优化被表述为针对正则化输入的连续二次规划，映射 $x \mapsto P(x, \cdot)$ 可避免原始混合整数规划所具有的分岔和不连续特征。密度函数 ρ_x 的稳定性确保 ϵ-HDR 连续演变，从而防止会破坏稳定性的“质量逃逸”。

3. **有界误差：** 如果误差核 P 和 Q 具有紧支撑（例如，跟踪误差带较窄时的均匀噪声），则适用命题 20.8的情形 (2)。

注释 20.9（失效模式）。 如果求解器严格呈多峰特征，则该条件不成立（例如，原始混合整数规划求解器因数值噪声而在两个不同的行业之间来回切换）。在这种情况下，卷积可能会使复合分布的最高密度落在对应于各个步骤模态之间“谷地”的区域。卷积稳定性不成立，正确地将这种求解器行为标记为审计不安全。

在概率设定中，我们以单向安全保证取代严格的类别等价。我们不再证明上游检查与下游检查完全相同（$=$），而是证明上游检查具有保守性（$\Longrightarrow$）。这确保系统可能会拒绝某些有效投资组合（第一类错误），但绝不会批准无效投资组合（第二类错误），从而满足风险管理系统的首要要求。

定理 20.10 （安全保证（单向伴随））。 设 $P : X \rightsquigarrow Y$ 是一个紧 *Feller* 核。概率推前与拉回满足以下单向蕴含：

$$P_!^\epsilon R \subseteq S \implies R \subseteq P^{*,\epsilon} S$$

证明。 假设关系 $P_!^\epsilon R \subseteq S$ 满足包含关系。我们必须证明，对于任意一对 $(x,\ z) \in R$，其合规概率足够高。

令 $(x,\ z)$ b e 是 R 中的任意元素。根据概率推前的定义 rd:

$$P_!^\epsilon R = \overline{\bigcup_{(x',z') \in R} (\mathrm{supp}_\epsilon(P(x')) \times \{z'\})}$$

由于并集是其闭包的子集，因此：

$$\mathrm{supp}_\epsilon(P(x)) \times \{z\} \subseteq P_!^\epsilon R \subseteq S$$

这意味着，对于每个 $y \in \mathrm{supp}_\epsilon(P(x))$，有序对 $(y,\ z)$ 都属于 S。因此，整个 ϵ-HDR 包含在 S 的 z-切片内：

$$\mathrm{supp}_\epsilon(P(x)) \subseteq S_z := \{y \in Y \mid (y, z) \in S\}$$

现在我们计算概率质量。根据定义 18.10，ϵ-HDR 的构造使其包含的概率质量至少为 $1 - \epsilon$：

$$P(x, \mathrm{supp}_\epsilon(P(x))) \ \geq \ 1 - \epsilon$$

（当密度没有平坦区域时相等；参见定义 18.10之后的注释。）根据概率测度的单调性，由于 supp_ϵ（P（x））$\subseteq S_z$：

$$P(x, S_z) \geq P(x, \mathrm{supp}_\epsilon(P(x))) \geq 1 - \epsilon$$

这个不等式 $P($ $x, S_z) \geq 1 - \epsilon$ 正是（x, z）$\in P^{*,\epsilon} S$的条件。因此，$R \subseteq P^{*,\epsilon} S$。 □

注释 20.11（审计蕴含）。 本定理保证，若我们将辐条的**安全区域**约束在许可集合 S之内，则实际上保证**合规概率** 至少为 $1-\epsilon$。请注意，逆蕴含对最高密度区域并不成立：集合S_z 可能包含99%的概率质量，却排除特定的高密度峰值，从而不满足包含条件$\text{supp}_\epsilon \subseteq S_z$。然而，就风险管理而言，上文所证明的正向蕴含才是关键，因为它确保几何检查是概率检查的保守代理。

定理 20.12 (早期审计安全性（修正的 Beck–Chevalley）)。 考虑由紧 *Feller* 核 P, Q 和确定性映射 g, h 构成的交换方块。假设该方块在分布意义下交换（$h_\# P(x) = Q(g(x))$）。如果我们使用更严格的风险预算 $\delta \le \epsilon$ 在上游验证对齐，并且求解器满足逐点稳定性条件：

$$\forall x \in X, \quad h(\text{supp}_\delta(P(x))) \subseteq \text{supp}_\epsilon(Q(g(x))),$$

则：

$$P_!^\delta(g^* R) \subseteq h^*(Q_!^\epsilon R).$$

证明。 我们逐元素进行验证。设 (z, k) 是上游推前 $P_!^\delta(g^* R)$ 中的任意元素。根据推前的定义，存在一个枢纽投资组合 $x \in X$（或者存在一个收敛至该组合的序列，此时我们对该序列应用此论证），使得：

1. 枢纽满足拉回约束：$(x, k) \in g^* R$。
2. 辐条位于安全区域：$z \in \text{supp}_\delta(P(x))$。

由 (1) 可得 $(g(x), k) \in R$。令 $y = g(x)$。因此 $(y, k) \in R$。

根据 (2)，我们将映射 h 应用于元素 z。由于 $z \in \text{supp}_\delta(P(x))$，因此 $h(z) \in h(\text{supp}_\delta(P(x)))$。回顾 g 是确定性的这一事实，现在我们调用逐点稳定性假设：

$$h(\text{supp}_\delta(P(x))) \subseteq \text{supp}_\epsilon(Q(g(x))) = \text{supp}_\epsilon(Q(y)).$$

因此，$h(z) \in \text{supp}_\epsilon(Q(y))$。由于 $(y, k) \in R$，有序对 $(h(z), k)$ 由有效输入 y生成，并且位于由此得到的 ϵ-支撑集中。因此 $(h(z), k) \in Q_!^\epsilon R$。根据拉回的定义，这意味着 $(z, k) \in h^*(Q_!^\epsilon R)$。 □

定理 20.13 (保守过滤（修正的 Frobenius）)。 设 $P : X \rightsquigarrow Y$ 是一个紧 *Feller* 核，其转移测度 $P(x, \cdot)$ 具有连续密度。对于闭关系 R, S，若我们筛选枢纽以确保满足某些合规条件 ($\delta = 0$)，则所得安全区域包含于以下交集中：

$$P_!^\epsilon \left(R \cap P^{*,0} S \right) \subseteq P_!^\epsilon R \cap S$$

证明。 设 (y, z) 是左侧集合 $P_!^\epsilon \left(R \cap P^{*,0} S \right)$ 中的一个元素。这意味着存在一个枢纽x，使得：

1. $(x, z) \in R$2. $(x, z) \in P^{*,0}S$3. $y \in \text{supp}_\epsilon(P(x))$

由 (1) 和 (3) 可立即得出 $(y,\ z) \in P_!^\epsilon R$（根据推前的定义）。剩下只需证明 $(y,\ z) \in S$。

根据 (2)，条件 $(x,\ z) \in P^{*,\ 0}S$蕴含 $P(x,\ S_z) \geq 1 - 0 = 1$。因此，测度 $P(x,\ \cdot)$ 完全集中在闭集 S_z 上（几乎处处）。令 ρ_x 为 $P(x,\ \cdot)$ 的连续密度。由于 $\int_{S^c}$

$_z \rho_x(u)du = 0$ 且 S_z^c 是开集，因此对所有 $u \in S_z^c$，$\rho_x(u) = 0$。

现在考虑 (3) 中的元素 y。根据 ϵ-HDR 的定义，$y \in \{u \mid \rho_x(u) \geq \lambda_\epsilon\}$。对于任意 $\epsilon < 1$，阈值 λ_ϵ 必定严格为正。为说明这一点，注意到 ρ_x 是连续的，且$P(x, \cdot)$ 具有紧性，因此超水平集 $\{u \mid \rho_x(u) \geq \lambda\}$ 是闭集，并且根据紧性，当 $\lambda > 0$ 时包含在某个紧集中。若 $\lambda_\epsilon = 0$，则 $\text{supp}_\epsilon(P(x)) = \text{supp}(P(x))$，其总质量为 $1 > 1 - \epsilon$；但 ϵ-HDR 是质量为 $\geq 1 - \epsilon$的最小超水平集，因此当 $\epsilon > 0$时，$\lambda_\epsilon > 0$。由于$\rho_x(y) \geq \lambda_\epsilon > 0$，$y$ 不能属于密度为零的区域。因此，$y \notin S_z^c$，这意味着 $y \in S_z$。最后，$y \in S_z \iff (y, z) \in S$。我们已证明 $(y, z) \in P_!^\epsilon R$ 且 $(y, z) \in S$，因此交集成立。

□

定理 20.14（几何弗罗贝尼乌斯互反律 / 压力测试安全性）。设 $P\colon\ X \rightsquigarrow Y$ 是一个紧 *Feller* 核。定义几何拉回（或压力测试拉回） $P^{\dagger,\ \delta}S$ 为满足以下约束的所有枢纽的集合：其整个 δ-安全区域都满足该约束：

$$P^{\dagger,\delta}S := \{(x, z) \in X \times Z \mid \text{supp}_\delta(P(x)) \subseteq S_z\}$$

若上游验证风险预算 δ 比下游构造风险预算 ϵ 更严格或同样严格（即 $0 < \delta \leq \epsilon$），则：

$$P_!^\epsilon \left(R \cap P^{\dagger,\delta}S\right) \ \subseteq \ P_!^\epsilon R \cap S$$

证明。设 $(y,\ z)$ 是左端的任意元素。根据推前的定义，存在一个枢纽 x 使得：

1. $(x, z) \in R$2. $(x, z) \in P^{\dagger,\delta}S \implies$ s
upp$_\delta(P(x)) \subseteq S_z$3. $y \in \text{supp}_\epsilon(P(x))$

由 (1) 和 (3) 可立即推出 $(y,\ z) \in P_!^\epsilon R$。现在必须证明 $(y,\ z) \in S$。

回顾一下，ϵ-HDR (supp$_\epsilon$) 定义为包含概率质量$1-\epsilon$的最小闭集。由于我们假设了 $\delta \leq \epsilon$，因此要求上游检查所覆盖的概率质量比例（或相同比例）高于下游构造。根据最高密度区域的嵌套性质：

$$\delta \leq \epsilon \implies \text{supp}_\epsilon(P(x)) \subseteq \text{supp}_\delta(P(x))$$

将此与条件 (2) 结合：

$$y \in \text{supp}_\epsilon(P(x)) \subseteq \text{supp}_\delta(P(x)) \subseteq S_z$$

因此 $y \in S_z$，这意味着 $(y,\ z) \in S$。 □

注释 20.15（操作性解释）此公式验证了将“压力测试”或“鲁棒优化”用作概率安全性的替代指标是合理的。它以几何检查（“95%置信椭球内的所有结果是否都满足规则？”）取代积分检查（“失效概率是 $< 5\%$吗？”）。

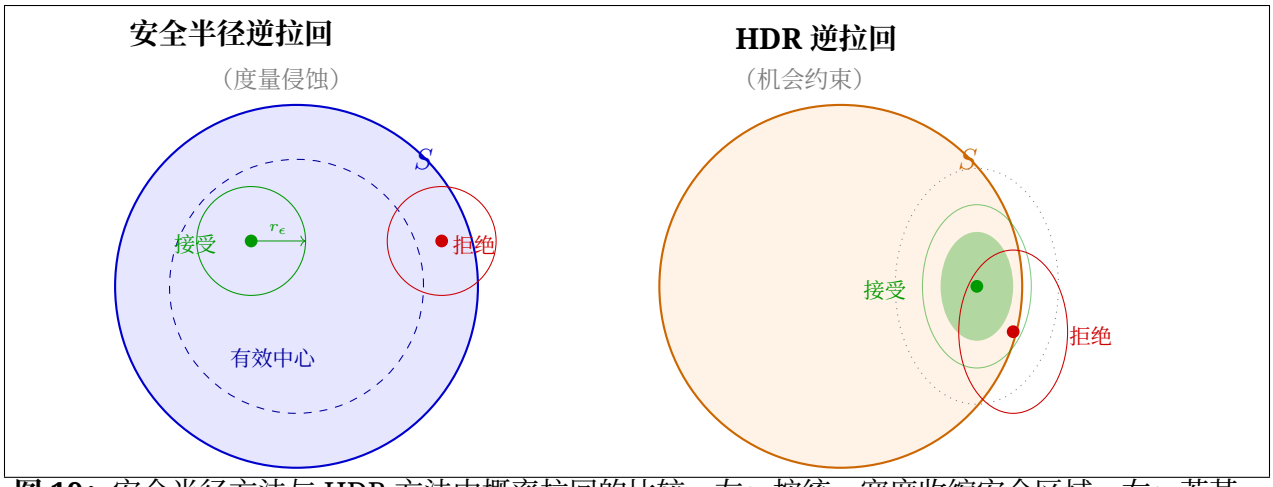


图 19：安全半径方法与 HDR 方法中概率拉回的比较。左：按统一宽度收缩安全区域。右：若某点的概率质量大部分落在 S内，则该点有效。

在实践中，这为在上游使用**区间算术**或**鲁棒优化**提供了依据。如果我们验证“最坏情况可能情景”（ δ-HDR 的边界）满足约束，就能保证最终投资组合符合要求，前提是我们的验证预算 δ 至少与构造预算 ϵ一样保守。

注释20.16（处理原子和不连续密度）。定理20.13 的证明依赖于连续密度的存在， ρ_x 以通过反证法进行论证。然而，在实际投资组合构建中，概率分布往往包含**原子**（狄拉克 δ 函数），尤其是在边界值处（例如，某项资产的权重恰好集中在0% 的概率质量）。

在这种情况下，应将 ϵ-HDR 的定义（定义 18.10）推广为包含至少 $1-\epsilon$质量的最小闭集。在此推广下，定理 20.13 的证明可作如下调整：若 $(x,z) \in P^{*,0}S$，则 $P(x,S_z) = 1$，因此测度的支撑集完全包含在闭集 S_z内。因此，任何质量为 $\geq 1-\epsilon$ （其中 $\epsilon < 1$）的闭集都必须包含于 S_z中，因为移除 S_z^c 中的任何点都不会损失概率质量。因此，即使对于含有原子的分布，安全保证仍然稳健。定理 20.14（几何弗罗贝尼乌斯）同样可以推广，因为其证明仅依赖于嵌套关系 $\text{supp}_\epsilon \subseteq \text{supp}_\delta$，而该关系对推广后的定义仍然成立。然而，复合定理（定理 20.5 和 20.6）依赖于 HDR 基于密度的结构，具体而言是卷积稳定性条件，因此不能自动推广到含有原子的分布。

20.2 安全半径与 HDR 方法的组合安全性

风险的不对称性：度量与测度

这两种方法在组合安全性方面存在结构性不对称，具体而言，体现在 Frobenius 律上。

- **安全半径（几何）：**逻辑是对称的。在上游验证对齐可确保整个误差球都满足约束。因此，运算顺序无关紧要（半径的线性性除外），风险预算也可以统一处理。

- **最高密度区域（概率）：**由于“尾部风险泄漏”，该逻辑失效。在确定性理论（定理 9.1）中，弗罗贝尼乌斯互反律是一个**相等**：$f_!(R \cap$

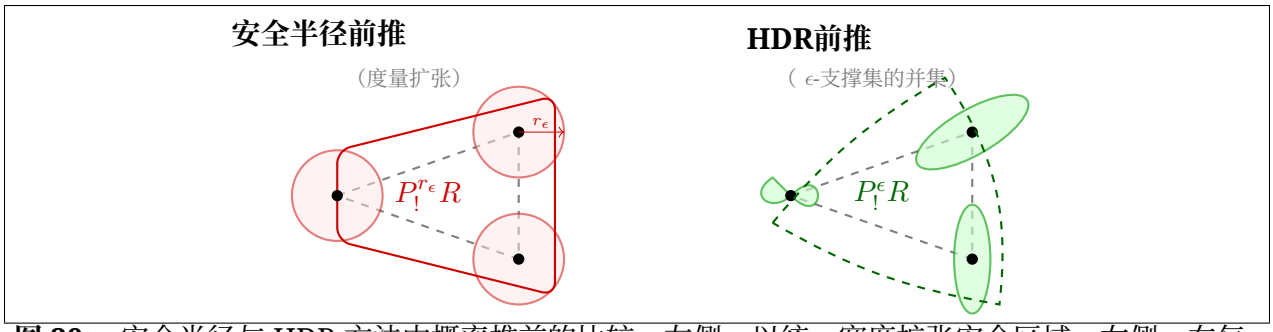


图 20： 安全半径与 HDR 方法中概率推前的比较。左侧：以统一宽度扩张安全区域。右侧：在每个点都遵循核分布的形状。

$f^* S) \;=\; f_! R \cap S$。然而，在概率设定（定理 20.13）中，它只是一个**包含**：

$$P_!^{\epsilon}(R \cap P^{*,0} S) \;\subseteq\; P_!^{\epsilon} R \cap S$$

这是一个严格子集这一事实意味着这两种工作流程并不等价。右侧的集合（构造后筛选）更大，因为它接受任何失效概率仅仅较小（$< \epsilon$）的投资组合。左侧的集合（构造前筛选）更小，因为它保守地拒绝失效概率任何 非零的枢纽。这两个集合之间的差异代表**泄漏**：尽管存在 5% 的尾部风险，仍通过机会约束的投资组合。与后续步骤（尤其是涉及杠杆的步骤）组合时，这种被忽略的尾部风险不会消失；它会传播并可能扩大，从而使审计轨迹失效。

为弥补这一间隙，并恢复“行动菜单”所要求的严密审计轨迹 $K \odot R$ （见第17节），我们从机会约束转向鲁棒约束。利用几何弗罗贝尼乌斯定律（定理20.14），我们用几何检查（“整个 ϵ-HDR 是否安全？”）取代概率检查（“失效是否不太可能？”）。这种方法将不确定集视为一个实体对象，防止尾部事件“泄漏”到下游优化步骤中。对于多阶段流水线的中间阶段，在数学上，鲁棒优化优于机会约束。

- 机会约束会问：“失效概率是否低于 5%？”这会导致概率泄漏，破坏审计轨迹。

- 鲁棒约束会问：“‘95% 可能’区域内的所有结果是否都满足规则？”

通过使用后者（定理20.14），我们将概率问题重新转化为几何问题。我们定义一个“形状”（ ϵ-HDR），它包含大部分可能的结果，并将该形状视为不得触碰约束边界的实体对象。这确保“行动菜单” $K \odot R$ 在复合过程中保持其完整性。

21 基于传输的安全性

安全半径和 HDR 方法分别简化了问题的一侧——前者假设误差几何呈球形，后者将成功归结为质量阈值。两者都没有使用对投资组合经理而言最重要的语言：成本。实际的投资组合转换涉及**合规成本**。

- 如果求解器输出的分布 $P(x)$ 在技术上不合规（例如，99% 的概率质量位于约束集内，1% 的尾部位于约束集外），那么当风险预算为 $\epsilon < 0.01$ 时，HDR 方法可能会将其整体拒绝。
- 然而，如果这 1% 的尾部仅在边界之外 1 个基点处，那么纠正它的经济成本可以忽略不计。

为此，我们可以使用**Wasserstein度量**（或土方距离）来定义概率运算，该度量来自最优传输理论（参见 [67, 13]）。**符号说明：**在 Wasserstein 框架中，风险预算 ϵ 表示运输成本（Wasserstein度量中的距离），而不是概率阈值，这与上文安全半径和 HDR 部分中的含义不同。这里的预算表示使投资组合达到合规状态所需的最大预期换手率。

直观地说：设想求解器生成了一个结果分布，其中一小部分结果落在约束集之外。HDR 方法关注的是“有多少概率质量位于外部？”Wasserstein 方法关注的则是“它超出边界多远？将其移回内部需要付出多少成本？”从传输视角看，尾部仅超出边界 1 个基点的分布几乎可以视为合规——即便 HDR 方法在风险预算较紧时会拒绝它。这种重新表述——从失效概率转向纠正成本——使 Wasserstein 方法很适合习惯从换手率和交易成本角度思考的从业者。

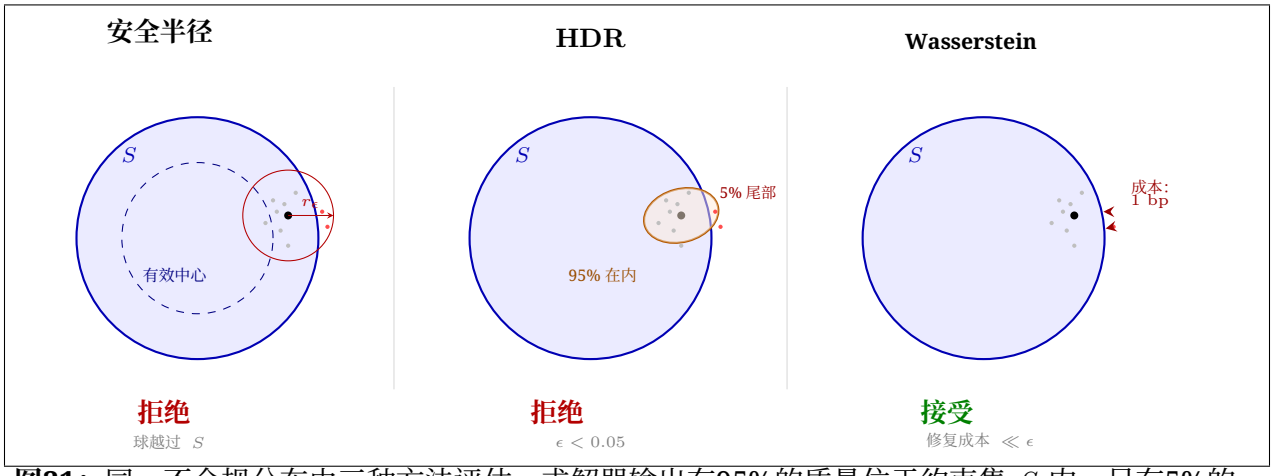


图21：同一不合规分布由三种方法评估。求解器输出有95%的质量位于约束集 S 内，另有5%的尾部仅略微超出边界。安全半径将其拒绝（度量球突破 S）。HDR将其拒绝（尾部超出风险预算 $\epsilon < 0.05$）。Wasserstein方法予以接受：“校正”这两个离群值——将其移回内部——的成本可以忽略不计。

定义 21.1（Wasserstein安全性）。设 $(Y,\ d)$ 为一个波兰空间。设 $\mathcal{P}_1(Y) = \{\mu \in \mathcal{P}(Y) : \int_Y d(y,\ y_0)\ d\mu(y) < \infty$ 对某个（因而对所有） $y_0 \in Y\}$ 表示具有

有限一阶矩。设 $\mathcal{P}_S = \{\nu \in \mathcal{P}_1(Y) : \text{supp}(\nu) \subseteq S\}$ 对应于闭约束集 $S \subseteq Y$。对于核 $P(x, \cdot) \in \mathcal{P}_1(Y)$ 及预算 $\epsilon \geq 0$，枢纽 x 是**Wasserstein 合规** 的，如果：

$$W_1(P(x,\cdot), \mathcal{P}_S) := \inf_{\nu \in \mathcal{P}_S} W_1(P(x,\cdot), \nu) \leq \epsilon$$

其中 W_1 是 1-Wasserstein 距离。

请注意，对于紧空间上的紧 Feller 核（也就是我们所处的情形），有限矩条件自动成立。

直观理解： 这衡量的是"到最近有效分布的距离"。它回答了这样一个问题："平均而言，需要进行多少交易（换手率），才能将含噪求解器输出 $P(x)$ 映射到有效流形 S上？"

21.1 概率运算

与先前的方法不同，Wasserstein 框架将垂直范畴从空间上的关系（$R \subseteq X \times Y$）提升到了概率测度上的关系。不过，我们可以将其投影回基空间上的"风险画像"：

定义 21.2（Wasserstein 逆推）。给定一个核 $P\colon X \rightsquigarrow Y$和一个约束 $S \subseteq Y \times Z$，**ϵ-Wasserstein 逆推** 为：

$$P_W^{*,\epsilon} S = \{(x,z) \in X \times Z \mid W_1(P(x), \mathcal{P}_{S_z}) \leq \epsilon\}$$

定义 21.3（Wasserstein 推前）。设 $P\colon X \rightsquigarrow Y$ 是一个紧 Feller 核，$R \subseteq X \times Z$ 是一个闭关系。**ϵ-Wasserstein 推前** 定义为概率空间 $\mathcal{P}(Y)$ 与 Z 的积的一个子集：

$$P_{!W}^{\epsilon} R = \{(\nu, z) \in \mathcal{P}(Y) \times Z \mid \exists x \in X \text{ s.t. } (x,z) \in R \text{ and } W_1(P(x), \nu) \leq \epsilon\}$$

与几何方法不同，Wasserstein 推前返回一个分布集合。元素 $(\nu, z) \in P_{!W}^{\epsilon} R$ 表示一个实际投资组合分布 ν，它是在运输成本预算 ϵ 范围内满足枢纽要求 z 的有效实现。

注释 21.4（序列化推前）。在数据库实现中（见附录D），存储无限多个概率分布并不可行。因此，应存储一个具有代表性的分布样本，每个分布均由一组有限参数描述（例如均值向量和协方差矩阵）。

为什么 Wasserstein 推前必须返回分布 几何方法（安全半径、HDR）与运输方法（Wasserstein）之间的结构性差异，反映了鲁棒安全 与经济安全之间的区别。

- **几何方法（鲁棒安全）：** 安全半径和 HDR 定义（第 18.4 节）回答了这个问题："求解器是否可能输出违反约束的结果？"这是一次二元最坏情况检查。因此，推前将随机核 $P(x)$投影到它的**支撑集**（ Y的子集）：

$$P_!^{\epsilon} R \subseteq Y \times Z$$

我们舍弃密度信息，因为单点故障就会使 se 失效 t.

- **Wasserstein 方法（经济安全）：** 瓦瑟斯坦定义（本节）回答了这个问题：“修复违反约束的期望成本是多少？”这依赖于坎托罗维奇–鲁宾斯坦积分：

$$W_1(\mu,\nu) = \inf_{\pi} \int_{Y\times Y} d(y,y')\, d\pi(y,y')$$

此计算需要完整的概率测度 μ。几何支撑集相同的两个核，其传输成本可能存在巨大差异。

因此，为了保留跨复合计算“修复成本”所需的数据，推前必须映射到测度空间 $\mathcal{P}(Y)$ 中：

$$P^{\epsilon}_{!W} R \subseteq \mathcal{P}(Y) \times Z$$

将其压缩为点集会破坏质量信息，从而无法应用传输成本的三角不等式（定理21.6中使用）。

21.2 相干性与复合

Wasserstein方法具有良好的复合性质，这些性质都源自三角不等式：

定理 21.5（Wasserstein 拉回复合）。设 $P\colon X \rightsquigarrow Y$ 和 $Q\colon Y \rightsquigarrow Z$ 为紧 *Feller* 核。假设映射 $y \mapsto Q(y)$ 关于 W_1 度量是 L-利普希茨的（即，$W_1(Q(y)\ Q(y')) \le L d_Y(y,\ y')$）。对于任意风险预算 δ、$\epsilon \ge 0$ 以及任意闭关系 $S \subseteq Z \times M$（其中 M 是紧豪斯多夫空间；我们记作 M，以避免与 *Wasserstein* 下标 W 冲突），我们有松函子性，即概率拉回满足以下包含关系：

$$P^{*,\delta}_{W}\left(Q^{*,\epsilon}_{W} S\right) \subseteq (Q\circ P)^{*,L\delta+\epsilon}_{W} S$$

证明。令 $(x,m) \in P^{*,\delta}_{W}(Q^{*,\epsilon}_{W} S)$。根据定义，$W_1(P(x)\ \mathcal{P}_A) \le \delta$，其中 $A = \{y \in Y \mid (y,m) \in Q^{*,\epsilon}_{W} S\}$。集合 A 是满足 $W_1(Q(y)\ \mathcal{P}_{S_m}) \le \epsilon$的中间投资组合 y 的集合。由于$W_1(P(x)\ \mathcal{P}_A) \le \delta$，存在一个支撑在 A 的闭包上的概率测度 μ，使得$W_1(P(x)\ \mu) \le \delta$。

我们为复合核构造一个合规分布。对于每个 $y \in$supp(μ)，由于$y \in A$，我们有 $W_1(Q(y)\ \mathcal{P}_{S_m}) \le \epsilon$。（集合 A 是闭集：映射 $y \mapsto W_1(Q(y)\ \mathcal{P}_{S_m})$ 连续，因为 Q 是 Feller，且 $\nu \mapsto W_1(\nu, \mathcal{P}_{S_m})$ 在 $\mathcal{P}(Y)$ 上是 1- 利普希茨的，因此 A 是连续函数 $^-$ 的 $[0,\epsilon]$ 原像。所以 $A = A$。）这意味着存在一个支撑在S_m 上的测度 ν_y，使得 $W_1(Q(y)\nu_y) \le \epsilon$。定义复合目标测度 $\Gamma = \int_Y \nu_y\, \mu(dy)$，其中可测选择 $y \mapsto \nu_y$ 的存在性由库拉托夫斯基–里尔-纳尔泽夫斯基定理保证，该定理应用于闭值对应 $\Phi\colon y \mapsto \{\nu \in \mathcal{P}_{S_m}\colon W_1(Q(y)\ \nu) \le \epsilon\}$。（此对应在 $\mathcal{P}(Y)$ 上的弱拓扑中是闭值的，因为 W_1 是下半连续的；并且它是可测的，因为 Q 是 Feller，且 $(y,\nu) \mapsto W_1(Q(y)\ \nu)$ 是博雷尔的。）由于每个 ν_y 都支撑在 S_m上，Γ 支撑在 S_m上。

现在，我们对实际复合输出 $(Q\circ P)(x)$ 与 Γ 之间的距离进行界定：

$$\begin{aligned} W_1((Q\circ P)(x),\Gamma) &= W_1\left(\int Q(y)P(x,dy), \int \nu_y \mu(dy)\right) \\ &\le W_1\left(\int Q(y)P(x,dy), \int Q(y)\mu(dy)\right) + W_1\left(\int Q(y)\mu(dy), \int \nu_y\mu(dy)\right) \end{aligned}$$

利用 Q 的 L-利普希茨性质以及 W_1 的联合凸性（即 $W_1(\int \mu_y\, d\alpha(y),\ \int \nu_y\, d\alpha(y)) \le \int W_1(\mu_y, \nu_y)\, d\alpha(y)$）：1. 第一项的上界为 $L \cdot W_1(P(x),\ \mu) \le L\delta$。2. 第二项的上界为 $\int W_1(Q(y)\nu_y)\mu(dy) \le \int \epsilon\, \mu(dy) = \epsilon$。

因此，$W_1((Q \circ P)(x),\ \Gamma) \le L\delta + \epsilon$。由于 $\Gamma \in \mathcal{P}_{S_m}$，这意味着 $(x,\ m) \in (Q \circ P)^{*\ L\delta+\epsilon}_{W} S_{\cdot}$。 □

定理*21.6*（*Wasserstein*推前复合）。设 $P\colon X \rightsquigarrow Y$ 和 $Q : Y \rightsquigarrow Z$ 是紧 *Feller* 核。假设核 Q 在概率测度空间 $\mathcal{P}(Y)$ 上诱导一个 L-利普希茨映射，其中度量采用 *Wasserstein*度量。记 $\mu Q := \int Q(y, \cdot)\, d\mu(y)$ 为测度 μ 通过核 Q的推前（即 *Chapman–Kolmogorov* 积分），则 *Lipschitz* 条件可写为 $W_1(\mu Q, \nu Q) \le L W_1(\mu, \nu)$。对于任意风险预算 $\delta, \epsilon \ge 0$ 以及任意关系 $R \subseteq X \times M$（本证明不使用 R 的闭性；保留该假设是为了与框架保持一致），风险预算的顺序应用满足以下在线性复合预算中的包含关系：

$$Q^{\epsilon}_{!W}\left(P^{\delta}_{!W} R\right) \subseteq (Q \circ P)^{L\delta+\epsilon}_{!W} R$$

其中，$Q^{\epsilon}_{!W}$ 通过映射 $\mu \mapsto \mu Q$作用于测度集合 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(Y)$.

证明。设 (γ, m) 是序贯推前 $Q^{\epsilon}_{!W}(P^{\delta}_{!W} R)$ 的一个元素。根据测度集合上的推前定义，存在一个中间分布 $\nu \in \mathcal{P}(Y)$，使得：

1. $(\nu,\ m) \in P^{\delta}_{!W} R$。
2. $W_1(\nu Q,\ \gamma) \le \epsilon$。

由 (1)，根据 $P^{\delta}_{!W} R$ 的定义，存在一个枢纽 $x \in X$，使得：

(a) $(x, m) \in R$.

(b) $W_1(P(x), \nu) \le \delta$.

我们必须证明 (γ, m) 属于复合推前 $(Q \circ P)^{L\delta+\epsilon}{}_{!W}\ \ R$。这需要证明复合核的输出 $(Q \circ P)(x) = P(x)Q$ 与分布 γ 之间的距离不超过 $L\delta + \epsilon$。

我们对 Wasserstein 度量应用三角不等式：

$$W_1(P(x)Q, \gamma) \le W_1(P(x)Q, \nu Q) + W_1(\nu Q, \gamma)$$

根据假设，Q 关于测度是 L-利普希茨的（即 $W_1(\mu Q,\ \nu Q) \le L W_1(\mu,\ \nu)$），我们使用 (b) 对第一项进行界定：

$$W_1(P(x)Q, \nu Q) \le L \cdot W_1(P(x), \nu) \le L\delta$$

使用 (2) 对第二项进行界定：

$$W_1(\nu Q, \gamma) \le \epsilon$$

结合这些结果：

$$W_1((Q \circ P)(x), \gamma) \le L\delta + \epsilon$$

由于 $(x,\ m) \in R$，这证实了 $(\gamma,\ m) \in (Q \circ P)^{L\delta+\epsilon}{}_{!\ W}\ \ R$。 □

21.3 伴随、Lax Beck–Chevalley 与 Frobenius

定理 21.7（Wasserstein 安全伴随）。 设 $P:\ X \rightsquigarrow Y$ 是表示随机再实现的紧 *Feller* 核。对于闭集 $S \subseteq Y$，令 $\mathcal{C}\sqcap\nabla\rceil_\delta(S) \subseteq \mathcal{P}(Y)$ 表示可传输至 S 且预期换手成本至多为 δ的分布集合：

$$\mathcal{C}\sqcap\nabla\rceil_\delta(S) := \{\nu \in \mathcal{P}(Y) \mid W_1(\nu, \mathcal{P}_S) \le \delta\}$$

当 S 是一个关系 $S \subseteq Y \times Z$时，我们将 $\mathcal{C}\sqcap\nabla\rceil_\delta(S_z)$ 记作应用于切片 $S_z = \{y : (y, z) \in S\}$的校正集。对于任意风险预算 ϵ、$\delta \ge 0$以及任意闭关系 R和 S，若 R 的 ϵ-推前包含于 S按切片定义的 δ-校正集，则 R 满足 S的 δ-拉回：

$$P^{\epsilon}_{!W} R \ \subseteq\ \{(\nu, z) \in \mathcal{P}(Y) \times Z : \nu \in \mathcal{C}\sqcap\nabla\rceil_\delta(S_z)\} \implies R \ \subseteq\ P^{*,\delta}_{W} S$$

证明。 假设按切片定义的包含成立：对于每个 $(\nu, z) \in P^{\epsilon}_{!W} R$，都有 $\nu \in \mathcal{C}\sqcap\nabla\rceil_\delta(S_z)$。令 (x, z) 为 R中的任意元素。我们必须证明 $(x, z) \in {P^*}_{,W}{}^{\delta} S$。

考虑求解器在 x处输出的特定分布，记作 $\mu = P(x)$。Wasserstein 距离具有自反性，因此 $W_1(P(x),\ \mu) = 0$。由于 $0 \le \epsilon$，有序对 (μ, z) 满足属于 Wasserstein 推前的条件 $P^{\epsilon}_{!W} R$(定义 21.3)。

根据我们的包含假设，$\mu \in \mathcal{C}\sqcap\nabla\rceil_\delta(S_z)$，即，

$$W_1(\mu, \mathcal{P}_{S_z}) \le \delta$$

代入 $\mu = P(x)$，我们得到：

$$W_1(P(x), \mathcal{P}_{S_z}) \le \delta$$

这正是 Wasserstein 逆推 ${P^*}_{,W}{}^{\delta} S$ 的定义（定义 21.1）。因此，$(x, z) \in {P^*}_{,W}{}^{\delta} S$。

□

注释 21.8（解释：交易前合规的经济学依据）。 本定理指出，若我们将枢纽投资组合限制为“原始”求解器输出与规则的距离在δ 以内者（${P^*}_{,W}{}^{\delta} S$），则可保证最终实际投资组合能够以至多 δ 的交易成本加以修复（“校正”）。这将抽象的概率界转化为交易台的具体预算。

我们通过与确定性情形的类比，将此称为“安全性伴随”（定理 7.7），其中推前-拉回关系是真正的伽罗瓦连接。此处的蕴含是单向的：逆命题不成立，因为该假设涉及一个一致的 对所有分布的界ν 在 ϵ-推前中，而不仅仅是核输出 $P(x)$ 本身。正向足以用于交易前合规：验证该充分条件即可保证下游可修复性。

请注意，在此推论中，推前中的参数 ϵ 是无关紧要的（证明只用到$\epsilon \ge 0$，而它总是成立的）。实质内容是 δ校正包含：控制保证力度的是修正预算 δ。

定理21.9（Wasserstein松弛Beck–Chevalley）。 考虑一个由核和映射构成的交换方形，其中聚合映射 $h:\ Y \to W$ 是 L-利普希茨的。假设该方形在 *Wasserstein*度量下以容差 γ 交换：

$$W_1(Q(g(x)), h_{\#}P(x)) \le \gamma \quad \textit{for all } x.$$

则对于任意上游风险预算 $\delta \ge 0$，上游验证的推前包含于下游构造：

$$h_{!W}\left(P^{\delta}_{!W}(g^* R)\right) \ \subseteq\ Q^{L\delta+\gamma}_{!W} R$$

其中 $h_{!W}$ 表示测度推前 $h_{\#}$ 下的集合论像： $h_{!W}(\mathcal{M}) = \{h_{\#}\mu : \mu \in \mathcal{M}\}$。

证明。 设（ν， w）是集合 $P^{\delta}_{!W}(g^{*}R)$ 的一个元素。根据 Wasserstein 推前$P^{\delta}_{!W}$ 和拉回 g^{*}的定义，存在一个枢纽 $x \in X$ ，使得：

1. $(x, w) \in g^{*}R \implies (g(x), w) \in R.$
2. $W_1(P(x), \nu) \leq \delta.$

我们必须证明，推前测度 $\rho = h_{\#}\nu$ 属于 $Q^{L\delta+\gamma}{}_{W}{}^{!}{}^{R}$。设 $z = g(x)$。由（1）可得（z， w）$\in R$。现在我们估计目标求解器输出 $Q(z)$ 到ρ之间的 Wasserstein 距离：

$$\begin{aligned} W_1(Q(z), \rho) &= W_1(Q(g(x)), h_{\#}\nu) \\ &\leq W_1(Q(g(x)), h_{\#}P(x)) + W_1(h_{\#}P(x), h_{\#}\nu) \quad \text{(Triangle Inequality)} \\ &\leq \gamma + L \cdot W_1(P(x), \nu) \quad \text{(Commutativity + Lipschitz Property of } h) \\ &\leq \gamma + L\delta \end{aligned}$$

因此， （ρ， w）是在修正预算 $L\delta + \gamma$内对 z的有效实现。 consequently， （ρ， w） $\in Q^{L\delta+\gamma}_{W}{}^{!}{}^{R}$。 □

注释 21.10（解释：早期审计安全性）。 该定理规定了对上游策略进行审计的有效性。它告诉我们，在枢纽上验证策略是有效的，但必须在下游调整容差。如果聚合逻辑 h 具有杠杆 $L > 1$（例如，130/30 策略），则枢纽层级允许的任何“误差余量”或误差 δ 都会被放大。术语 γ 表示下游求解器的**不可约噪声**。为确保下游检查不会错误地标记有效投资组合，其容差必须扩大到 $L\delta + \gamma$。

定理 21.11 (Wasserstein-弗罗贝尼乌斯互反律)。 设 $P : X \rightsquigarrow Y$ 是一个紧 *Feller* 核。对于任意闭关系 R、 S 和风险预算 $\epsilon \geq 0$:

$$P^{\epsilon}_{!W}(R \cap P^{*,0}_{W} S) \subseteq P^{\epsilon}_{!W} R \cap \{(\nu, z) \in \mathcal{P}(Y) \times Z : \nu \in \mathcal{C} \sqcap \nabla\rceil_{\epsilon}(S_z)\}$$

证明。 设 (ν, z) 是左端的一个元素。存在一个满足以下条件的枢纽 x ：

1. $(x, z) \in R$2. $(x, z) \in P^{*}{}_{,W}{}^{0} S \implies P(x)$ 支撑在 S_z 上。 3. $W_1(P(x), \nu) \leq \epsilon$。

由 (1) 和 (3)， $(\nu, z) \in P^{\epsilon}{}^{!}{}_{W} R$。由 (2)，由于 $P(x)$ 完全支撑在 S_z 上，因此它属于有效分布集合 $\mathcal{P}_{S_z}$。 ν 到有效集合的距离不超过到 $P(x)$ 的距离：

$$W_1(\nu, \mathcal{P}_{S_z}) \leq W_1(\nu, P(x)) \leq \epsilon$$

因此 $\nu \in \mathcal{C} \sqcap \nabla\rceil_{\epsilon}(S_z)$，从而证明了包含关系。 □

这种不对称性——$\epsilon = 0$ 在拉回方面采用严格条件， ϵ 而在推前方面采用一般条件——反映了操作序列：拉回条件 $P^{*}{}_{,W}{}^{0} S$ 要求精确合规（输入投资组合必须已经确定性地满足约束），而推前预算 ϵ 允许输出中存在受控偏差。

注释 21.12。 Wasserstein 框架的主要定理建立在两个值得审视的假设之上：关于核的 Lipschitz 条件，以及距离本身的可计算性。Lipschitz 条件（$W_1(Q(y)\ Q(y')) \leq L \cdot d(y,\ y')$）使风险预算能够以线性方式而非组合方式复合——没有这一条件， $L\delta + \epsilon$ 界会发生退化。但是，对于给定求解器，要验证这一条件，就必须了解该求解器对扰动的敏感度，而这正是商业优化器通常不会公开的信息。与此同时， W_1 计算是一个线性规划，其维度随所涉及分布的支撑集而扩展；对于高维单纯形上的连续分布，这一问题只能进行近似，而不能精确求解。该框架是正确的；问题在于其实践中能否获得其输入。我们推测，这些输入通常可以被界定 （通过扰动分析获得 L 的上界，通过采样近似 W_1），并且这些界足以使组合保证仍然具有实用价值，尽管会较为保守。

注释 21.13（解释：鲁棒过滤）。 该定理验证了采用“合规修正”工作流程的合理性：严格筛选输入，使我们能够接受仅仅“足够接近”的输出。左侧的集合表示“优化前过滤”（选择完全 安全的枢纽 x ）。右侧的集合表示结果：投资组合分布 ν 可能并不完美（由于求解器噪声 ϵ），但可以保证**与合规修正相距** ϵ 。这样一来，系统便可以接受求解器输出中的轻微偏差，因为这些偏差在经济意义上可以忽略不计，并且很容易修正。

21.4 在实践中计算校正

Wasserstein 表述相较于基于密度的 HDR 方法具有计算优势。虽然计算高维密度切片的体积较为困难（$O(e^d)$），但计算到凸集的运输成本可以归结为标准优化。

我们利用以下简化方法（见 [67], 第 6 章）。如果运输成本由度量 d （例如， L_1 换手率）定义，并且 S 是一个 闭集 ，则分布 μ 到支撑于 S 的分布集合的 1-Wasserstein 距离 **可简化为到该集合的期望距离**：

$$W_1(\mu, \mathcal{P}_S) = \mathbb{E}_{y\sim\mu}[\inf_{z\in S} d(y, z)]$$

（最优耦合会将每个点投影到 S 中离它最近的点；直观而言，已经位于S 内的质量无需付出任何移动成本。闭性保证最近点的存在，而标准结果则保证可测选择的存在。当 S 额外满足凸性时，投影是唯一且非扩张的，从而简化计算。）这样一来，我们便可以采用**蒙特卡洛投影** 工作流来估算“校正”（修复投资组合所需的预期换手率），而不必求解完整的最优传输问题。

算法：修正预算估计器 要验证枢纽投资组合 x 是否满足 Wasserstein 拉回 $P^*,\ {}_W{}^\epsilon S$ （即“预期修复成本是否为 $\leq \epsilon$? ”）：

1. **采样：** 从求解器核 $P(x)$ 中抽取 N 个样本 $\{y_1, \ldots, y_N\}$。这些样本代表潜在的原始辐射投资组合（合规筛选前）。
2. **投影（治愈方法）：** 对于每个样本 y_i，计算达到约束集 S所需的最小换手率。这就是投影问题：

$$c_i = \min_{z\in\mathbb{R}^m} \|z - y_i\|_1 \quad \text{subject to } z \in S$$

如果 S 是多面体的（由线性约束 $Az \leq b$定义），那么这就是一个标准的**线性规划**。当 S 是多个凸约束集的交集时，Dykstra 交替投影算法 [16] 提供了一种高效的迭代方法。

3. **聚合：** 计算风险的蒙特卡罗估计：

$$\hat{W}_1 \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} c_i$$

ˆ 4. **检查：** 如果 $W_1 \leq \epsilon$，枢纽 x 已获批准。

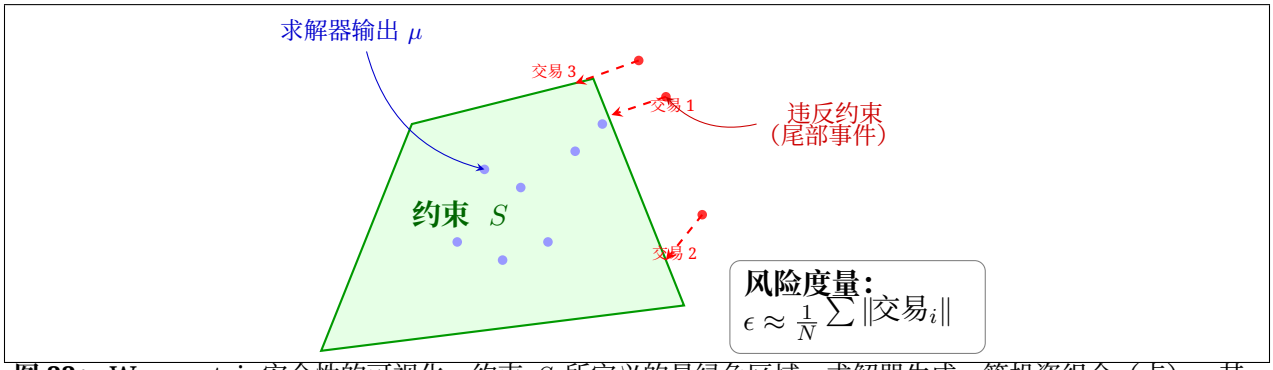


图 22： Wasserstein安全性的可视化。约束 S 所定义的是绿色区域。求解器生成一簇投资组合（点）。其中一些落在区域之外（红色）。Wasserstein 风险 ϵ 是期望成本（红色虚线箭头的平均长度），用于“校正”违反约束。

ˆ注释 21.14（将修复措施付诸实施）. 若检查失败（$W_1 > \epsilon$），投影向量$z_i - y_i$ 即提供**边际敏感度**。修复成本相对于枢纽位置 $\nabla_x \hat{}W_1$ 的梯度可反馈至上游构造过程（经由链式法则与包络定理），使枢纽管理者能够“转向”，避开会引发高下游换手率的脆弱约束。

为执行选择 $p = 2$ （市场冲击）

在Wasserstein度量中设定 $p = 1$，关注的是“校正”违规所需的投资组合换手率。对于规模适中的投资组合（定制化场景中通常如此），可以合理地假设交易成本随换手率线性变化。对于大型投资组合，这一点不再成立，因为大额交易会产生不成比例的市场冲击。当复制的“辐条”相对于其“枢纽”变得非常大时，这一点便可能变得相关。

尽管任意 $p > 1$ 都能提供惩罚大额交易所需的凸性，但就交易前执行分析而言，专门设定 $p = 2$ 更为可取。这一选择从三个不同方面，使运输成本的数学性质与标准金融理论及计算基础设施相一致：

1. 经济模型：线性价格冲击 在机构金融中，标准执行成本模型（例如Almgren–Chriss [3], 受 Kyle [40]的线性价格冲击所启发）假设价格随交易规模线性变动。若 $\Delta P \approx \lambda \cdot$ 规模，则总执行成本按二次方增长：

$$\text{Total Cost} \approx \text{Size} \times \Delta P \approx \lambda \cdot (\text{Size})^2$$

设定 $p = 2$ 于Wasserstein度量（W_2）意味着成本函数正比于 d（x， y）^{2},，这与该二次成本结构相符（参见 [3]）。 p 的其他取值将意味着非标准冲击模型（例如， $p = 1.5$ 意味着平方根冲击定律），这些模型在一般资产类别中较少使用。

2. 计算架构：二次规划（QP）现代投资组合构建几乎完全建立在均值—方差优化之上，其数学形式是二次规划（最小化 $x^T \Sigma x$）；参见 [34]。

- **若 $p = 2$：** 运输成本是一个二次项（d^2）。将其纳入标准风险模型，可保留优化问题的二次规划结构。因此，可以使用快速、稳定且标准的工业级求解器（如 Gurobi、Mosek）。

- **若 $p \neq 2$：** 该问题不再属于二次规划类别。对于 $p = 1$，它会简化为线性规划；对于其他 p 值，则会成为一般凸优化问题，需要专用锥规划求解器。无论哪种情况，成本项都不再符合风险模型的二次结构，因此与标准均值—方差优化器输入不相容。参见 [15]。

3. 风险兼容性（方差）金融风险通常以方差（标准差的平方）来衡量，它具有 L_2 几何。通过设置 $p = 2$，我们可以用与“市场风险”（波动率）相同的几何单位来衡量“执行风险”（流动性）。这样便能构建统一效用函数，直接对各项风险求和：

$$\text{Total Penalty} = \text{Risk Penalty}(\sigma^2) + \text{Trading Penalty}(\text{Impact}^2)$$

使用 $p \neq 2$ 会导致敏感度的单位不匹配，使跟踪误差与执行成本之间的权衡更加复杂。

22 随机核的估计与存储

在工业实践中，重新实现映射 f 很少是闭式函数；它通常由数值求解器（如 Gurobi、Axioma、Mosek）在复杂约束集上执行定义。要使概率框架（HSP-r）具备可操作性，我们需要制定具体流程，以估计、存储和验证核 $P(x)$。

本节详细介绍使用标准工业优化工具估计核 $P(x)$ 的方法、在证据账本中高效序列化这些核的方案，以及高斯近似不足时的关键失效模式。

22.1 估计核 $P(x)$

首要的计算挑战在于近似概率测度 $\mu = P(x)$，该测度表示噪声条件下求解器的输出分布。根据可用的计算预算和求解器访问方式的性质，我们区分三种方法。

22.1.1 随机平滑（蒙特卡洛方法）

该方法是对费勒核定义的直接数值实现。它将确定性求解器视为黑箱，并通过输入扰动诱导出一个分布。

- **技术：** 令 $\mathcal{S}(x)$表示输入 x对应的确定性求解器输出。我们通过向输入（例如，协方差矩阵 Σ 或阿尔法向量 α）加入噪声 $\epsilon \sim \mathcal{N}(0,\ \Sigma_{\text{噪声}})$来扰动输入，并运行求解器 N次，从而定义该核。经验测度如下：

$$P(x) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{\mathcal{S}(x+\epsilon_i)} \tag{5}$$

- **混合整数规划（MIP）中的实现：**对于 Gurobi 等离散求解器，由于格的离散性质，简单的输入扰动可能不足以探索解空间。要恰当地诱导该核，需要采用两种特定策略：

  1. **目标扰动：** 我们向线性目标向量 c添加无穷小的随机噪声。这实际上打破了优化景观中的对称性，促使求解器探索目标函数的平坦区域，而这些区域原本会被剪枝。

  2. **随机平局决胜：** 通过改变内部随机种子参数（例如 Gurobi 种子），我们可以改变分支定界树中的平局决胜规则。这样便能生成不同的有效叶节点（最优或近似最优的整数解），而无需修改问题定义。

- **权衡：** 尽管该方法在数学上严谨，且能够捕捉真实的非凸性（例如税收断崖），但与基准优化相比，其计算成本呈线性增长，为 $O(N)$。

22.1.2 解池方法（单次近似）

对于混合整数规划求解器，可以利用分支定界树结构，在不重复执行的情况下近似求出核。

• **配置：** 现代求解器允许保留搜索过程中找到的次优解。例如，将 Gurobi 配置为 PoolSolutions=N 和 PoolSearchMode=2，会强制求解器有效地遍历整个搜索树，以找到 N 个最佳的不同解。

• **解释：** 解集 $\{y_1, \ldots, y_N\}$ 从解池中提取出来，构成了 $P(x)$ 的经验支撑集。这实际上界定了 $K \odot R$ DOTS 框架（第 17 节）中所述的“行动菜单”，无需多次独立运行，即可揭示允许区域的局部几何结构。

22.1.3 敏感性分析（局部高斯近似）

对于纯凸优化问题（例如不含基数约束的标准均值—方差优化），解析导数能够提供计算成本低廉的近似。

• **技术：** 通过查询求解器的灵敏度报告（具体而言，是拉格朗日乘子或对偶值），我们可以构建目标函数的局部二次近似。

• **近似：** 核 $P(x)$ 近似为高斯分布 $\mathcal{N}(\mu, \Sigma_H)$，其中协方差 Σ_H 由目标函数在最优点处的海森矩阵的逆推导得出。

• **权衡：** 此方法的开销为 $O(1)$，但对于非凸问题（MIPs）则完全不适用，因为它无法捕捉解空间不连通的特性。

22.2 高效表示与存储

一旦分布 $P(x)$ 被估计，就必须将其序列化到证据账本中（见附录 D）。存储 N 原始高维投资组合向量既低效又不透明。我们提出四种存储模式，并根据问题的拓扑复杂度选择适当的格式。

存储格式	描述	使用场景
高斯 (μ, Σ)	仅存储均值向量和协方差矩阵。	单峰凸问题。
高斯混合（高斯混合模型）	存储 k 均值和协方差：$\sum w_i \mathcal{N}(\mu_i, \Sigma_i)$。	混合整数问题（MIPs）。
分位数向量	存储第 5、50 和 95 百分位数的资产权重。	报告与可视化。
凸包（顶点）	存储定义解多面体的顶点投资组合。	鲁棒安全（安全半径）。

表 3：随机核的高效序列化格式。

建议： 对于 HSP-r 框架的一般实现，**高斯混合模型（GMM）**在压缩与保真度之间提供了最优平衡，因为它能够捕捉离散投资组合约束所特有的多模态分布。

22.3 高斯假设的结构性失效

尽管为了计算方便，人们很容易将 $P(x)$ 简化为单峰高斯分布，但在金融工程中，这一假设在结构上存在风险。现实约束

常常会以单个高斯分布无法表示的方式“截断”“掏空”或“扭曲”概率质量。以下各节将详细介绍三种典型失效模式——约束贴合（第23.2节）、由最小持仓规模导致的分裂峰（第23.1节），以及税务高效转换产生的香蕉形前沿（第23.3节）——它们分别以截然不同的结构性方式违背了高斯假设。

23 处理离散约束

虽然 $\mathbb{HS}$ 的核心理论依赖凸性和连续性来确保适当性与稳定性，但现实中的投资组合构建主要受离散约束支配。这些约束——从监管规定的交易单位到税收门槛——会在重新实现映射 f 中引入非凸性和不连续性。本节详细说明这些约束造成的具体失效模式，以及概率 HSP-r 框架如何调整以应对这些问题。

23.1 “分裂峰”：最小持仓规模

机构资产管理中一个普遍存在的约束是**最小头寸规模**规则。该规则禁止持有“零碎”头寸，因为这类头寸在交易或维护方面的运营成本较高。

理论表述

令 w_i 为权重　　资产 i 的比例。该约束的正式定义为若干区间的不相交并集：

$$w_i \in \{0\} \cup [L, U] \quad \text{where } 0 < L \leq U \leq 1 \text{ (e.g., } L = 2\%, \, U = 10\%)$$

这破坏了许可空间 K 的凸性。如果 $x = 0$ （有效）且 $y = 2\%$（有效），那么它们的凸组合 $0.5x + 0.5y = 1\%$ 将严格无效。

求解器行为（分岔）

考虑这样一种情景：某项资产的“理想”（无约束）最优权重为 $w^* = 1.0\%$。

- 确定性求解器必须做出明确选择：要么向下取整至 0%，要么强制提高至 2%。这一决策往往不稳定，会因输入数据的微小变化而反转。
- 随机求解器（使用随机平滑）会生成**双峰分布**。输出为 0% 的概率约为 50%；输出为 $\approx 2\%$ 的概率也约为 50%。

高斯失效与虚假均值

用单个高斯模型近似这种双峰分布——这是风险模型中常见的简化做法——会得出定性上完全错误的答案。

- **失效之处：** 该分布的均值为 $\approx 1\%$。高斯模型会将概率质量集中在 1%。
- **幻影投资组合：** 这会在证据账本中生成一个“幻影投资组合”。风险系统记录的“可能”结果为 1
- **解决方案：** 系统必须使用**高斯混合模型（GMM）**或粒子表示来存储这个核。这样便能正确识别两个彼此分离的可行区域（位于 0 和 2），以及它们之间的禁区间（0，2）。

23.2 “空心壳”：总敞口限额

以因子（如价值或动量）为优化目标的策略往往会自然而然地追求最大杠杆。为控制风险，需应用**总敞口上限**。

理论表述

设允许的杠杆受 G 限制。该约束为 L_1 球：

$$\sum_i |w_i| \leq G \quad (\text{e.g., } G = 200\%)$$

虽然该集合是凸的，但它与目标函数的相互作用会引发一种称为“约束贴合”的拓扑问题。

求解器行为（流形集中）

如果阿尔法信号很强，优化器就会将投资组合推至约束的绝对极限，以最大化暴露度。

- 解 y^* 不位于可行集内部，而是位于边界 ∂K上。
- 在受到扰动（输入噪声）时，解不会向中心移动（去杠杆）；而是沿着约束曲面的“表层”滑动。

•**维度坍缩：** 从数学上看，概率质量集中在一个低维流形上（半径为 G的球面）。

高斯失效与空心内部

- **失效之处：** 如果我们对分布在球面上的点拟合高维高斯分布，均值向量 μ 将位于球心。

- **影响：** 球心代表的投资组合，其总敞口低于 任何实际观测值。高斯模型意味着求解器偶尔会降低杠杆（向内移动）。

- **风险：** 这会低估“拥挤”风险。实际上，投资组合始终处于最大杠杆状态。高斯风险模型会低估触发追加保证金通知的概率，因为它假设较安全、杠杆较低的内部区域存在概率质量。

- **解决方法：** 必须使用**流形学习** 技术来表示核，或者直接存储原始粒子，以捕捉内部是“空心”的这一事实。

23.3 “香蕉”：税务高效转换

转换管理是指将投资组合从遗留状态 x 转移至目标状态 z ，同时最小化跟踪误差，并将已实现税款控制在预算 T以下。

理论表述

约束 ts将椭球（跟踪误差）与分段线性函数（税费）相结合 ：

$$(y-z)^T \Sigma (y-z) \leq \epsilon^2 \quad \text{and} \quad \sum \text{RealizedGain}(y_i) \leq T$$

关键的是，亏损对应的税函数为零（除非允许收割），而收益对应的税函数为线性函数，这在可行空间中形成了一个“折点”。

求解器行为（曲率）

求解器尝试卖出遗留资产以买入目标分布。

- **阶段 1：** 卖出亏损资产或收益较低的资产。
- **阶段 2（税务上限墙）：** 触及税务上限 T。无法卖出高收益遗留资产。
- **阶段 3（替代）：** 为了进一步降低跟踪误差，开始买入“代理”资产——与目标分布高度相关、但目前并未持有的股票（因此不会产生税务）。
- **结果：** 随着相关结构发生变化，解的“有效前沿”会绕开高昂的税务屏障弯曲，其形状在蒙特卡洛文献中常被称为“香蕉形”。

高斯失效与虚假合规

- **失败之处：**高斯分布由椭球等高线定义，而椭球等高线本质上是凸的。
- **违反约束：**将椭球拟合到香蕉形状上，会迫使椭球覆盖曲线内部的“空洞”。
- **实际情况：**曲线内部的空间对应于违反税务预算的投资组合（它们代表直接交易，而不是代理交易）。
- **解决方法：**高斯模型会将高税负投资组合判定为“可能的结果”。系统必须采用**最高密度区域（HDR）**方法（第20.1节），该方法会自然地将安全区域环绕非凸障碍，从而排除税务违规区域。

23.4 DOTS：菜单驱动的替代方案

虽然概率 HSP-r 框架（第18节）通过量化求解器不稳定性的风险来管理离散约束，**双歌剧理论系统（DOTS）** [44] 则通过量化选择来管理这些约束。面对最小持仓规模等非凸性时，往往不存在单一的“最优”投资组合，或者其结果并不稳定。DOTS 通过将重新实现视为生成有效选项 f 的 $K \to K'$一种**作用**，而非一个函数，来解决这个问题；该作用会生成一份**菜单**，列出有效选项。

作用算子

我们不强迫求解器选取单个点 y（这可能是无效的平均值），而是将对齐关系 R 对枢纽状态 K 的作用定义为重新实现。

定义 23.1（行动菜单）。设 $K \subseteq \Delta^n$ 为枢纽空间，$R \subseteq \Delta^n \times \Delta^m$ 为对齐关系（例如约束）。**行动菜单**记作 $K \odot R$，是所有允许的辐条投资组合的集合：

$$K \odot R := \{y \in \Delta^m \mid \exists x \in K \text{ such that } (x, y) \in R\}$$

在离散约束中的应用

考虑 **最小头寸规模** 约束（第 23.1节），其中持仓必须为0% 或 $\geq 2\%$。

- **标准优化器：** 返回 1%（无效），或在 0% 和 2% 之间随机切换。
- **DOTS 作用：** 集合 $K \odot R$ 明确是**不连通的**。它包含两个有效分支：

$$K \odot R = \{\text{Portfolios with } w_i = 0\} \cup \{\text{Portfolios with } w_i \geq 2\%\}$$

“作用”不会做出决策；它呈现 有效的决策空间，供投资组合经理或算法的下一阶段使用。

约束的运算子复合

DOTS 的强大之处在于它能够安全地复合这些菜单。复杂约束通过使用**连线图运算子**将较简单的约束“连接”起来构建而成。

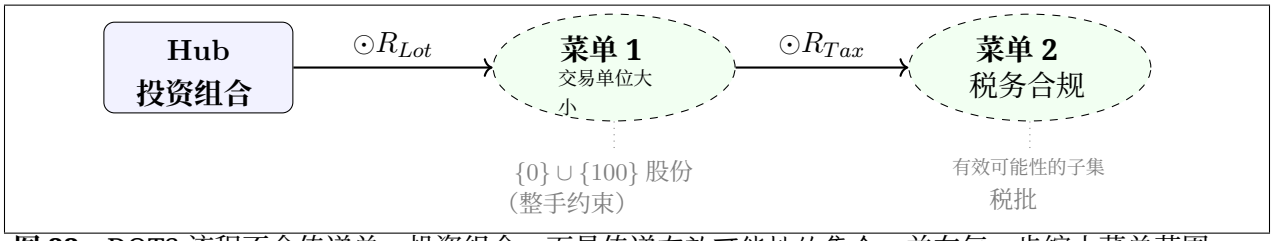


图 23： DOTS 流程不会传递单一投资组合，而是传递有效可能性的集合，并在每一步缩小菜单范围。

“设计与执行”的分离

这一框架将工业职责分离正式化：

1. **设计阶段（DOTS）：** “语义核心”计算行动菜单 $K \odot R$。这是一种集值运算，用于识别所有理论上有效的投资组合（例如，整手的所有有效整数组合）。2. **选择阶段（人类/求解器）：** 选择函数 s：$K \odot R \to$ 辐条从菜单中选出一个特定的投资组合。3. **执行阶段（HSP-r）：** 对选定的投资组合进行交易，并通过概率核对执行噪声建模。

将**菜单生成**（通过集合处理非凸性）与**选择**（通过优化处理偏好）分开，可以避免求解器试图对两个不同的有效选项取平均值所带来的陷阱。

24 流动性导向的投资组合构建

本节将框架的三个层次——基本双范畴 $\mathbb{HS}$、DOTS菜单演算和 Wasserstein 输运模型——应用于在现有投资组合中加入非流动性或半流动性资产配置这一问题。本文的背景设定是一位投资者持有公开市场流动性投资组合，并希望纳入私募资产（私募股权、私人信贷、实物资产、基础设施），同时满足总体流动性要求、容量约束和交易成本预算。关于非流动性溢价的基础理论 [5, 6, 52, 1]、具有比例交易成本的最优投资组合再平衡 [20, 21], 以及非流动性约束下的投资组合选择 [7, 45] 均为下文的构造提供了依据。

经济背景借鉴了 [54], 中的分析，该分析区分了流动性作为属性——即在资产上进行交易的成本高低——与流动性作为实质：可自由重新配置的财富部分。该分析指出，私人资产溢价由八个组成部分构成（纯非流动性溢价、风险溢价、担保价值、信息成本、交易复杂性、资产负债表租金、控制阿尔法，以及较低表观波动率等抵消项 [30]）。优化方面则借鉴了 [53]中的均值—方差框架。

24.1 基本框架中的流动性约束

假设枢纽空间是一个公开市场投资组合 $K_{\text{pub}} \subseteq \Delta^n$，而辐射端领域 Δ^m 既包括原有的流动性资产，也包括一组非流动性或半流动性投资载体（私募股权基金、私募信贷载体、区间基金等）。辐条可行空间 $K_{\text{blend}} \subseteq \Delta^m$ 纳入了混合投资组合的基准可行性约束。

流动性要求会施加进一步的结构。我们建立三类约束模型，每类约束都定义了 Δ^m 的一个闭子集：

(i) 总流动性不足上限。 令 $\mathcal{I} \subseteq \{0, \dots, m\}$ 对非日度流动性资产进行索引。约束

$$L_\alpha := \left\{ y \in \Delta^m : \sum_{i \in \mathcal{I}} y_i \leq \alpha \right\}$$

将非流动性资产的总权重限制在 $\alpha \in (0,\ 1)$ 以内。这是与 Δ^m 相交的闭半空间，因此构成闭凸多面体。监管方面的例子包括美国证券交易委员会的规则22e-4，该规则将投资组合流动性划分为不同档位。

(ii) 头寸规模与容量约束。 对于每项非流动性资产 $i \in \mathcal{I}$，令 $c_i > 0$ 为容量上限，用以反映该资产可获得的交易规模，或投资者相对于基金规模的最大承诺额。约束

$$C := \{ y \in \Delta^m : y_i \leq c_i \ \forall\, i \in \mathcal{I} \}$$

这同样构成闭凸多面体。在私募市场中，这些上限源于基金认购上限、联合投资限额或内部集中度政策。

(iii) 维持性交易成本上限。 令 $\tau_i \geq 0$ 为资产 i 的预期单位年度再平衡成本（包括买卖价差、市场冲击以及任何基金层面的赎回费用）。该约束

$$M_\kappa := \left\{ y \in \Delta^m : \sum_{i=0}^{m} \tau_i \, y_i \leq \kappa \right\}$$

将预期年度维护成本限定为 κ 个基点。这是与第 $R_{\text{fee}\le\tau}$ 节中的 17.属于同一类型的加权费用投影器

流动性约束再实现的允许辐条空间为

$$K_{\text{liq}} := K_{\text{blend}} \cap L_\alpha \cap C \cap M_\kappa,$$

它是一个闭（因此是紧的） Δ^m 的凸子集，因此是 $\mathbb{H}$中的有效对象 $\mathbb{S}$.

接下来通过第 11 节的优化框架构建流动性约束再实现。沿用该节的记号，设 $(V,\ \|\cdot\|_V)$ 是一个有限维定量属性空间（例如资产类别敞口），并设 $g_{\text{pub}}\colon K_{\text{pub}} \to V$和 $g_{\text{liq}}\colon K_{\text{liq}} \to V$是连续属性映射，用于表示每个投资组合在 V中的特征。设 $u\colon V \to \mathbb{R}$ 是一个连续目标函数（例如扣除费用后的预期收益）。对于枢纽投资组合 $x \in K_{\text{pub}}$ 和候选辐射投资组合 $y \in K_{\text{liq}}$，定义组合目标函数

$$F_{\text{liq}}(x,y) := \|g_{\text{pub}}(x) - g_{\text{liq}}(y)\|_V^p - \lambda\, u(g_{\text{liq}}(y)),$$

其中， $p > 1$ 控制属性不匹配的惩罚程度， $\lambda \ge 0$ 则设定目标函数相对于跟踪的权重。若 $\|\cdot\|_V$ 严格凸（例如内积范数），g_{liq} 是仿射且单射的，并且u 严格凹，则 $F_{\text{liq}}(x,\cdot)$关于 y 严格凸；根据定理 11.6，对于每个 $x \in K_{\text{pub}}$，都存在唯一优化器 $y^*(x)$，由此得到的映射 $f_{\text{liq}}(x) := y^*(x)$是 $\mathbb{HS}$ 中的连续（因此为真）水平态射 $f_{\text{liq}}\colon K_{\text{pub}} \to K_{\text{liq}}$。

注释 24.1（与公开市场部分的对齐）。 除了重新实现枢纽之外，我们通常还要求辐射投资组合的流动部分跟踪 枢纽。令 $\pi_{\text{liq}}\colon \Delta^m \to \Delta^n$ 投影出流动权重（由 $1 - \sum_{i\in\mathcal{I}} y_i$ 重新归一化）。跟踪关系

$$R_{\text{track},\epsilon} := \{(x,y) \in K_{\text{pub}} \times K_{\text{liq}} : \|g_{\text{pub}}(x) - g_{\text{pub}}(\pi_{\text{liq}}(y))\|_2 \le \epsilon\}$$

是闭集，因此可以按照通常方式将其作为对齐约束施加（第 4节）。沿重新实现 f_{liq} 进行的推前和拉回，随后会将这一跟踪要求传播到整个中心—辐射树中。

24.2 DOTS：带有流动性和容量筛选的菜单

DOTS框架（第 17节）特别适用于非流动性资产配置，原因有二：

（a）私人资产配置通常涉及离散且依赖判断的决策——选择哪只基金、哪个年份、承诺多少——这些决策产生的是可行辐射投资组合的菜单，而非唯一最优解。

（b）流动性和容量约束充当幂等筛选算子，缩小菜单范围，这正是DOTS演算中投影算子的作用。

作为投影算子的流动性与容量

与第17节一样，总非流动性上限和容量约束定义了对角（投影算子）关系：

$$R_{\text{liq},\alpha} := \{(y,y) : y \in L_\alpha\},$$
$$R_{\text{cap}} := \{(y,y) : y \in C\},$$
$$R_{\text{maint},\kappa} := \{(y,y) : y \in M_\kappa\}.$$

每个都是幂等的（$K \odot R \odot R = K \odot R$），且对于自身与顺序无关（命题17.1（e））。

带流动性门槛的核心—卫星模板

由 [4] 形式化的核心—卫星架构，在第17节的代数簇模板中可以自然扩展。令

- $K_{\text{核心}} \subseteq \Delta^n$ 为流动性公开市场枢纽，
- $K_{\text{卫星}} \subseteq \Delta^p$ 为非流动性卫星资产集合（例如，由一组私人信贷基金和私募股权年份池构成），
- $w \in [0,1]$ 为流动性核心的目标配置，
- $R_{\text{混合关系 }w}$表示通过核心配置 $y_{\text{核心}} \in K_{\text{核心}}$ 和卫星配置 $y_{\text{卫星}} \in K_{\text{卫星}}$，构建复合投资组合 $y = w \cdot y_{\text{核心}} + (1-w) \cdot y_{\text{卫星}}$的关系。

因此，流动性约束菜单为

$$K^\star = (K_{\text{core}} \otimes K_{\text{sat}}) \odot R_{\text{mix},w} \odot R_{\text{liq},\alpha} \odot R_{\text{cap}} \odot R_{\text{maint},\kappa}.$$

这些投影算子从两端收窄菜单：$R_{\text{liq},\ \alpha}$ 强制执行总量上限，R_{cap} 强制执行反映基金容量的头寸级限制，而$R_{\text{maint},\ \kappa}$ 强制执行持续成本预算。根据命题17.1(a)，$K^\star$ 是闭集。

市场冲击意识

对于投资者持仓相对于可用容量较大的资产，在实现和持续再平衡过程中产生的市场冲击是一项首要考量 [40, 3]。令日均交易量$_i$ 表示资产 i的日均成交量（对于私人投资载体，则表示定期申购／赎回容量）。市场冲击感知约束

$$R_{\text{impact}} := \{(y, y) : y_i \cdot W_{\text{total}} \le \beta_i \cdot \text{ADV}_i \ \forall\, i \in \mathcal{I}\}$$

其中，W_{total} 是投资组合总价值，β_i 是参与率上限；该约束同样是一个对角投影算子。它确保辐射投资组合能够在不扰动市场的情况下实现，并可应用于 DOTS 流程管线中的任意环节。

注释24.2（确定化）。如果混合关系$R_{\text{mix},\ w}$ 与严格凸目标函数（例如，最小化跟踪误差加正则项）相结合，则对于每个输入都有唯一解，因此可确定化为一个连续映射的图。根据弗罗贝尼乌斯互反律（定理17.9），流动性投影算子随后与该映射可交换：在优化前或优化后进行筛选会得到相同结果。这在实践中很重要，因为它允许在运行优化器之前，根据容量对非流动性资产集合进行预筛选。

注释 24.3（DOTS框架中的私人资产溢价）。 在 [54]中识别出的私人资产溢价八个组成部分——纯非流动性溢价、风险溢价、担保价值、信息成本、交易复杂性、资产负债表租金、控制阿尔法和抵消项（参见 [38, 23]中的实证分解）——可以视为K_{sat}中卫星对象的属性。DOTS 菜单 $K^\star$ 体现了应用所有筛选器后，投资者能够获取这些组成部分的哪些组合。具体而言，控制阿尔法（组成部分 7）仅适用于容量约束和治理结构允许持有集中且非流动的头寸的投资者——这一条件由 R_{cap} 与 R_{impact}的相互作用所编码。

24.3 Wasserstein：交易成本预算

Wasserstein 框架（第21节）在流动性情境下获得了直接的金融解释。回顾一下，在概率论（第18节）中，重新实现被建模为一个随机核 $P\colon\ K_{\text{pub}} \rightsquigarrow K_{\text{liq}}$ 它将每个枢纽投资组合 x 映射为一个概率分布$P(x)$，该分布覆盖辐条投资组合，反映求解器噪声和执行不确定性。Wasserstein安全条件 $W_1(P(x)\ \mathcal{P}_S) \le \epsilon$ 进而衡量将实际投资组合调整至合规状态所需的预期换手率，使其满足约束集 S。对于非流动性资产配置，这种换手成本高昂，因此 Wasserstein 预算在实践中会成为约束条件。

资产加权运输成本

标准的 Wasserstein 距离 [68, 26] 采用单纯形上的欧几里得（或 ℓ_1）度量。在考虑流动性的情形下，应将其替换为一种交易成本加权度量，以反映不同资产之间再平衡成本的差异：

$$d_\tau(y, y') := \sum_{i=0}^{m} \tau_i \, |y_i - y'_i|,$$

其中，$\tau_i \ge 0$ 是资产 i 的单位交易成本（包括半价差、市场冲击以及任何赎回费用或认购费用）。对于流动性资产，τ_i 较小（大型股股票的成本为几个基点）；对于非流动性资产，τ_i 则可能很高（私人信贷的成本为数十或数百个基点；对于有锁定期的私募股权承诺，成本实际上是无限的）。

由此得到的加权 Wasserstein 距离

$$W_{1,\tau}(\mu, \nu) := \inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} \int d_\tau(y, y') \, d\pi(y, y')$$

继承了第21节中使用的所有结构性质：它是 $\mathcal{P}_1(\Delta^m)$上的度量，满足三角不等式，并具有 Kantorovich–Rubinstein 对偶。第21节（定理21.6–21.11）的复合、伴随与相干定理仍然成立，只需将 d_τ 全文中的非加权度量替换为该度量。

交易前合规：退出成本

在将资本投入非流动性配置之前，谨慎的投资者会问：如果情况发生变化，要付出多大成本才能清算并回到完全流动性投资组合？（[45]的非流动性折价分析在单资产情境下提出了同样的问题。）这正是 Wasserstein 安全检查。令 $S_{\text{liq}} := \{y \in \Delta^m :\ \ y_i = 0\ \forall i \in \mathcal{I}\}$ 为单纯形的“仅含流动性资产”面。对于随机重新实现核 $P\colon\ \ K_{\text{pub}} \rightsquigarrow K_{\text{liq}}$，从枢纽投资组合 x 退出的成本为

$$\text{ExitCost}(x) := W_{1,\tau}(P(x),\, \mathcal{P}_{S_{\text{liq}}}),$$

在加权度量 d_τ下，将已实现的辐条分布传输到仅流动性资产面所需的最小期望交易成本。交易前合规检查要求$\text{ExitCost}(x) \le \epsilon_{\text{exit}}$ 对所有 $x \in K_{\text{pub}}$成立。按定义21.1的记号，此即 ϵ_{exit}-Wasserstein 拉回条件 $K_{\text{pub}} \subseteq P^*_{,\,W}{}^{\epsilon_{\text{exit}}} S_{\text{liq}}$（所用度量为 d_τ）。Wasserstein 伴随（定理21.7）进而保证：在枢纽层级验证该条件，等价于验证任意Hub约束的推前落在 ϵ_{exit}-校正集内（相对于 S_{liq}）。

多期维护预算

投资组合维护——在非流动性头寸被消耗或上调估值时，将其再平衡回目标权重——会持续产生交易成本。 [29] 的动态交易框架表明，最优再平衡"瞄准目标前方"，以预判未来成本；下文的 Wasserstein 复合定理提供了一种互补的、基于预算的方法。将一个 T期再平衡过程建模为随机核链 P_1，……， P_T，其中每个 P_t 表示在第 t期末对投资组合进行再平衡的求解器。令 ϵ_t 为分配给第 t期再平衡的Wasserstein 预算，并令 L_t 为 P_t 关于 d_τ 的利普希茨常数（衡量某一期的执行噪声被下一期放大的程度）。Wasserstein 复合定理（定理21.6）给出预算为 $L\delta+\epsilon$的单步宽松包含。迭代可知：两个阶段后的预算为 L_2（$L_1\epsilon_0+\epsilon_1$）$+\epsilon_2 = L_2L_1\epsilon_0 + L_2\epsilon_1+\epsilon_2$；按归纳法，整条链的累积Wasserstein 预算以 $\sum_{t=1}^{T}\big(\prod_{s=t+1}^{T} L_s\big)\cdot\epsilon_t$为上界。这使投资者得以有原则地设定每期再平衡容差 ϵ_t ，从而使累积期望维护成本保持在多期预算之内。

对于半流动性投资工具（例如，具有季度赎回窗口的区间基金，或具有定期流动性的私募信贷基金），利普希茨常数 L_t 随赎回日程而变化： L_t在可进行赎回的期间较小（再平衡相对便宜），而在锁定期较大（再平衡需要以折价进行二级市场交易）。

注释 24.4（与非流动性溢价的联系）. 加权传输成本 d_τ 将非流动性溢价内生化到合规框架中。具有较高 τ_i 的资产对退出成本和维护预算的贡献不成比例，从而约束对该资产的可行配置。在均衡中，投资者需要更高的预期收益，以证明消耗更大份额的Wasserstein 预算是合理的——这正是 [54]的纯非流动性溢价；参见 [6] 和 [20]中的基础均衡分析。用于分析这一权衡的均值—方差框架发展于 [53], ，其中非流动性溢价被推导为放松交易成本约束的边际成本。

注释 24.5（选择合适的框架层）。这三个层面分别处理流动性导向的构建中的不同方面：

- $\mathbb{HS}$ **（基础）：** 静态结构。定义可行空间，确保适当性，并连贯地传播约束。用于初始投资组合设计和监管合规核验。

- **DOTS（菜单）：** 设计阶段的酌情选择。在作出承诺之前，对有效非流动性配置菜单进行建模。当私人资产选择涉及判断、年份分散化或管理人选择时使用。

- **Wasserstein（传输）：** 执行阶段成本。用于量化维持合规所需的持续成本，以及退出头寸的成本。可用于交易前分析、维护预算和压力测试。

结论

我们已经证明，投资组合重新实现的组合结构——即构成现代投资组合管理的变换链、对齐检查和约束传播——可以用初等范畴论和点集拓扑进行严格的形式化。关键洞见在于架构设计：正确的对象是紧空间（而非开子集或单纯形的任意子集）；一旦确立这一点，态射所需的适当性便会自动成立。其余一切——伴随、相干性和路径无关性——都是由此得出的结果。

1. 将对象视为允许的空间：对象是允许的投资组合空间 K，定义为环境单形 Δ^n 的闭子集。这直接对基准约束进行建模。2. 自动满足适当性：由于 K 是紧空间 Δ^n 的闭子集，因此 K 是紧的。这确保所有水平态射 $f: K_1 \to K_2$ （连续映射）都自动是真映射。3. 相干框架 $\mathbb{HS}$：这种自动满足的适当性至关重要：推送操作 $f_!$ 保持闭性（定理 7.4）。因此，双范畴 $\mathbb{HS}$ 得以良定义，且所有复合律（伴随、 Beck–Chevalley 、 Frobenius ）均成立。4. 从优化构造：我们证明了（定理 11.6），用于投资组合重新实现的实用优化方法（例如费用最小化）能够自然地在闭定义域 K 上构造连续映射 f ——这正是 $\mathbb{HS}$ 的对象和态射。5. 失败分析：我们证明，放宽对闭对象的要求（例如使用开内部）会破坏适当性，并严重破坏所有相干性性质（定理 10.3），从而证明了我们这一定义的合理性。

技术上的关键洞见在于，将**对象定义为紧空间**（ Δ^n的闭子集）后，**态射的适当性**便成为必然结果，而非额外条件。这既简化了框架，又强化了其结论：它提供**合成相干性**和**路径无关性**；**逻辑对偶**（伴随）；以及**边界稳定性**（适当性）。

$\mathbb{HS}$ 该框架支持：

- **多阶段投资组合构建**，并确保其一致性。
- **非线性定制建模**：原生支持对复杂的优化类任务进行建模，例如“将此主动投资组合替换为低费用／税务高效的被动篮子”。
- **灵活验证**：可在任意阶段检查对齐情况。

无需引入新的数学理论。创新完全体现在模型中——具体而言，主张这些特定的对象和态射适用于该领域，并指出，拓扑学和范畴论中的标准结果一旦得到恰当应用，便能带来工业投资组合管理所需、却一直未能实现的相干性。

注释 24.6。 读者若通读第三部分的证明，会发现，即便是技术要求最高的论证——瓦瑟斯坦逆推复合中的可测选择、卷积稳定性命题中的积分分裂，以及复合费勒核的 $\epsilon/2$ 紧性论证——

一旦定义确立，便都是标准工具的应用：三角不等式、利普希茨收缩、Kuratowski–Ryll-Nardzewski。唯一真正不显而易见的建模决策，是安全半径复合定理中的余利普希茨假设（度量开映射性）；其关键在于认识到，利普希茨连续性只能控制误差放大，却无法保证覆盖。本应如此。若这些定理并非或多或少都是定义的必然推论，那么定义就是错的。本文的难点——如果说有什么难点的话——在于架构：在于如何选择对象、态射和 2-胞腔，使标准结果能够表达应用所需的内容。

第二部分和第三部分中发展的扩展，旨在弥合基础理论与工业实践之间的差距：一种用于带有自主叠加层的投资组合定制的**菜单驱动理论**(DOTS，第17节）；一种用于大规模实时复制的**概率论**(HSP-r，第18节）；以及一个整合全部三个层次的**流动性敏感框架**(第24节）。

批判性观点与局限

数学框架与工业实现之间的差距确实存在。若不明确说明困难所在就呈现上述定理，那是不诚实的。

来自应用范畴论的异议

1. **薄性限制表达能力：**将结构限制为**薄**双范畴（其中 2-胞腔是唯一的包含关系），会丢弃定量元数据。将对齐视为二元状态，无法原生地建模合规程度（例如跟踪误差幅度）。要捕捉这一点，需要更丰富的**跨度**模型（第15节），但这会引入双范畴相干同构的复杂性。

2. **概率情境下伴随的缺失：**在随机扩展（HSP-r）中，伴随的构造会失败，因为从水平态射到垂直关系的映射并非严格函子（这是松弛复合所致）。因此，无法将函数视为“完美”关系，并迫使系统将 $f_!$ 和 f^* 视为原始谓词变换器。

3. **严格 Beck–Chevalley 的限制性：**严格路径独立条件要求交换方块满足逐点笛卡尔（定义8.2）。这意味着点上的满射性（不存在缺失的原像），而这一条件在有损聚合管道中往往无法满足。因此，在一般情况下，只有“松弛”条件（审计安全性）能够提供保证。

来自量化金融的异议

1. **精确推前的计算难解性：**尽管 $f_!R$ 在理论上是闭集，但计算其显式边界需要进行量词消去，在高维情况下难以处理（$N \approx 500$）。实际实现必须依赖第13节所述的蒙特卡洛近似或凸可行性检验。

2. **交换性的组织障碍：** 可交换方形（Bellman一致性）的数学要求意味着公司内部必须采用统一效用函数。现实中，不同的交易台——例如税务部门与模型部门——各自遵循相互冲突的投资授权，而运算顺序往往是一项不可约化为数学琐事的业务决策。该框架能够诊断出非交换性，却无法解决由此产生的组织政治问题。

3. **结构约束下的高斯失效：** 如第18节所述，为提高存储效率而用高斯分布近似求解器输出，在“约束贴合”（空心壳层）或“分裂峰”（最小持仓规模）等结构上重要的情景中会失效。为确保有效性，该框架需要采用粒子表示或高斯混合模型。

4. **离散约束会破坏连续性：** 拓扑基础依赖于 f 的连续性。涉及离散逻辑的现实约束（例如交易单位大小或固定交易成本）对这一假设构成挑战。尽管平滑估计量（示例 18.6）能在极限情况下恢复连续性，但潜在的离散断崖仍是剩余运营风险的来源。

未来方向：对齐的对偶演算

定理 $f_! \dashv f^*$ 中确立的伴随 7.7 指向一个更深层的结构性洞见： 可实现性 与 合规之间的逻辑对偶。这种关系由 **Chu 空间** [55]理论予以形式化描述。

在 $\mathbb{HS}$ 框架中，我们优先采用拓扑的 视角。我们将许可空间 K 视为主要对象，并将重新实现 $f: K_1 \to K_2$ 视为资产集合之间的正向变换。

Chu 理论视角引出了对偶 观点：将“对齐关系”系统视为主要对象。我们不再追问投资组合如何沿流程管线移动，而是探讨对齐的条件 如何在算子 $f_!$ 和 f^*作用下变换。

- **原始视图（向前传播）：** 我们通过$f_!$ 向前推送对齐关系，以确定允许的下游关系集合（即，精确刻画哪些辐条投资组合可以由已对齐中心实现）。

- **对偶视图（向后验证）：** 我们通过f^* 向后拉取对齐关系，以确定所需的上游关系集合（即，精确刻画哪些枢纽投资组合能够满足下游约束）。

这种数学对偶性映照出——而且我们推测，它在一定程度上也解释了——机构金融中**职责分离**的实践。投资组合构建团队在原始定义域中运作，设计映射 f 以转换资产；合规与风险团队则在对偶定义域中运作，定义投资组合必须遵循的对齐关系 S。这两个群体的推理方式不同，并非组织安排上的偶然，而是因为他们所处的确实是对偶的数学结构。“能够构建什么”与“必须满足什么”之间的张力，并非机构设计的缺陷，而是受托义务的结构性内涵。

在这种对偶演算中，重新实现过程充当谓词变换器：它允许将适用于辐条（由合规部门定义）的下游规则 S 严格转换为针对枢纽的上游约束 f^*S （由投资组合经理执行）。这确保目标端的逻辑要求能够自动且正确地施加于枢纽。

虽然基础理论中的伴随 $f_! \dashv f^*$ 已经充分描述了这种情况，但用 Chu 空间的语言重新表述理论，或许能更顺畅地形式化投资组合构建与合规验证之间的相互作用。这一想法的严谨发展有待未来研究。

未来方向：合成概率与支撑函子

尽管本研究通过对波兰空间上的费勒核进行明确分析（第 18节），为概率中心辐射框架（HSP-r）奠定了基础，但范畴概率领域的最新进展表明，

一种自然的推广是可能的。Fritz 等人提出的 马尔可夫范畴理论 [25],将概率分布和核完全视为对称幺半范畴中的态射，从而抽象掉底层的测度论细节。

未来的工作可以探索用这种综合方法替代第18 节的解析定义。具体而言，从随机求解器推导出“安全区域”或“行动菜单”的操作，可以形式化为一个**支撑函子**

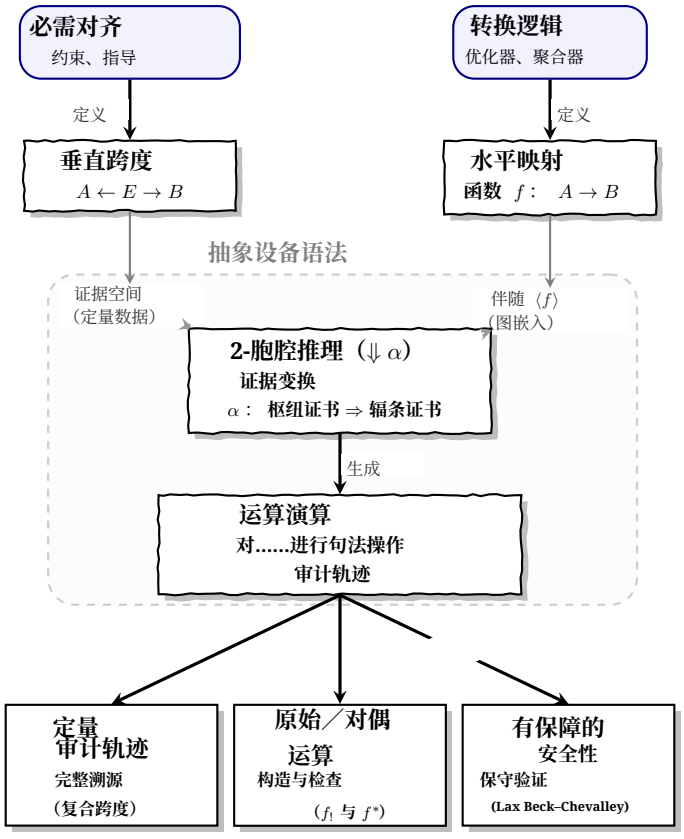
$$\mathrm{Supp}_\epsilon : \mathbf{Stoch} \to \mathbf{Rel}$$

它将随机核范畴映射到关系范畴。这一形式化体系将使风险预算的相干性结果（定理 20.5和 20.6）能够作为自然变换推导出来，从而将审计逻辑与资产空间的特定拓扑解耦。

请注意，这一视角为审计所必需的“确定性”提供了结构性定义。我们不必检查数值方差，而可以将重新实现态射 f 定义为确定性的，当且仅当它与复制映射（余乘法） Δ交换，即 $\Delta \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta$。

即使仍处于波兰空间上的费勒核这一范围内，综合框架也可能为第 18 节中一个棘手的问题提供概念上的启示：存在多个“拉回”和“推前”的定义，而每个定义仅在松弛意义下满足函子性和伴随性（见第 14.5 节和附录 A.3）。它还可能使我们能够根据吉里单子来解释“Wasserstein 推前”（见第21节），（参见 [31]）。

当然，不可能完全消除工程细节——资产空间的拓扑、核的正则性以及距离度量的选择都很重要。但合成方法提供了一种将这些细节封装在支撑函子的定义中的方式，从而能够模块化地设计投资流程：无需重写审计逻辑即可替换求解器。


必需对齐
约束、指导
转换逻辑
优化器、聚合器
定义
定义
垂直跨度
$A \leftarrow E \rightarrow B$
水平映射
函数 f： $A \rightarrow B$
抽象设备语法
证据空间
（定量数据）
伴随〈f〉
（图嵌入）
2-胞腔推理（$\Downarrow \alpha$）
证据变换
α： 枢纽证书 $\Rightarrow$ 辐条证书
生成
运算演算
对……进行句法操作
审计轨迹
定量
审计轨迹
完整溯源
（复合跨度）
原始／对偶
运算
构造与检查
（$f_!$ 与 f^*）
有保障的
安全性
保守验证
(Lax Beck–Chevalley)

参考文献

[1] Viral V. Acharya 和 Lasse Heje Pedersen。考虑流动性风险的资产定价。《金融经济学杂志》，77(2):375–410，2005年。[2] Charalambos D Aliprantis 和 Kim C Border。《无穷维分析：搭便车指南》。Springer，第3版，2006年。[3] Robert Almgren 和 Neil Chriss。投资组合交易的最优执行。《风险杂志》，3(2):5–39，2001年。[4] Noël Amenc、Philippe Malaise 和 Lionel Martellini。重新审视核心 — 卫星投资：相对风险管理的动态模型。《投资组合管理杂志》，31(1):64– 75，2004年。[5] Yakov Amihud。非流动性与股票收益：截面与时间序列效应。《金融市场杂志》，5(1):31–56，2002年。[6] Yakov Amihud 和 Haim Mendelson。资产定价与买卖价差。《金融经济学杂志》，17(2):223–249，1986年。[7] Andrew Ang、Dimitris Papanikolaou 和 Mark M. Westerfield。含非流动性资产的投资组合选择。《管理科学》，60(11):2737–2761，2014年。[8] Jean-Pierre Aubin 和 Hélène Frankowska。集值分析。Birkhäuser，1990年。[9] Jean Bénabou。双范畴导论。载于《中西部范畴研讨会报告》。Springer，1967年。[10] Claude Berge。拓扑空间：兼论多值函数、向量空间与凸性。Oliver and Boyd，爱丁堡，1963年。[11] Dimitri P Bertsekas。非线性规划。Athena Scientific，1999年。[12] Patrick Billingsley。概率测度的收敛。威利，第2版，1999年。[13] Jose Blanchet、Yang Kang 和 Karthyek Murthy。稳健的Wasserstein轮廓推断及其在机器学习中的应用。《皇家统计学会杂志：*B*辑（统计方法学）》，81(5):879–930，2019年。[14] Vladimir I Bogachev。测度论，第I–II卷。Springer，2007年。[15] Stephen Boyd 和 Lieven Vandenberghe。凸优化。剑桥大学出版社，2004年。[16] James P. Boyle 和 Richard L. Dykstra。一种求希尔伯特空间中凸集交集上的投影的方法。载于 Richard L. Dykstra、Tim Robertson 和 Farroll T. Wright 编，《序约束统计推断进展》，《统计学讲义》第37卷，28–47页。Springer，纽约，1986年。[17] Aurelio Carboni 和 Robert F C Walters。笛卡尔双范畴 I。《纯粹与应用代数杂志》，49:11–32，1987年。[18] Charles Castaing 和 Michel Valadier。凸分析与可测多值函数，《数学讲义》第580卷。施普林格出版社，柏林，1977年。

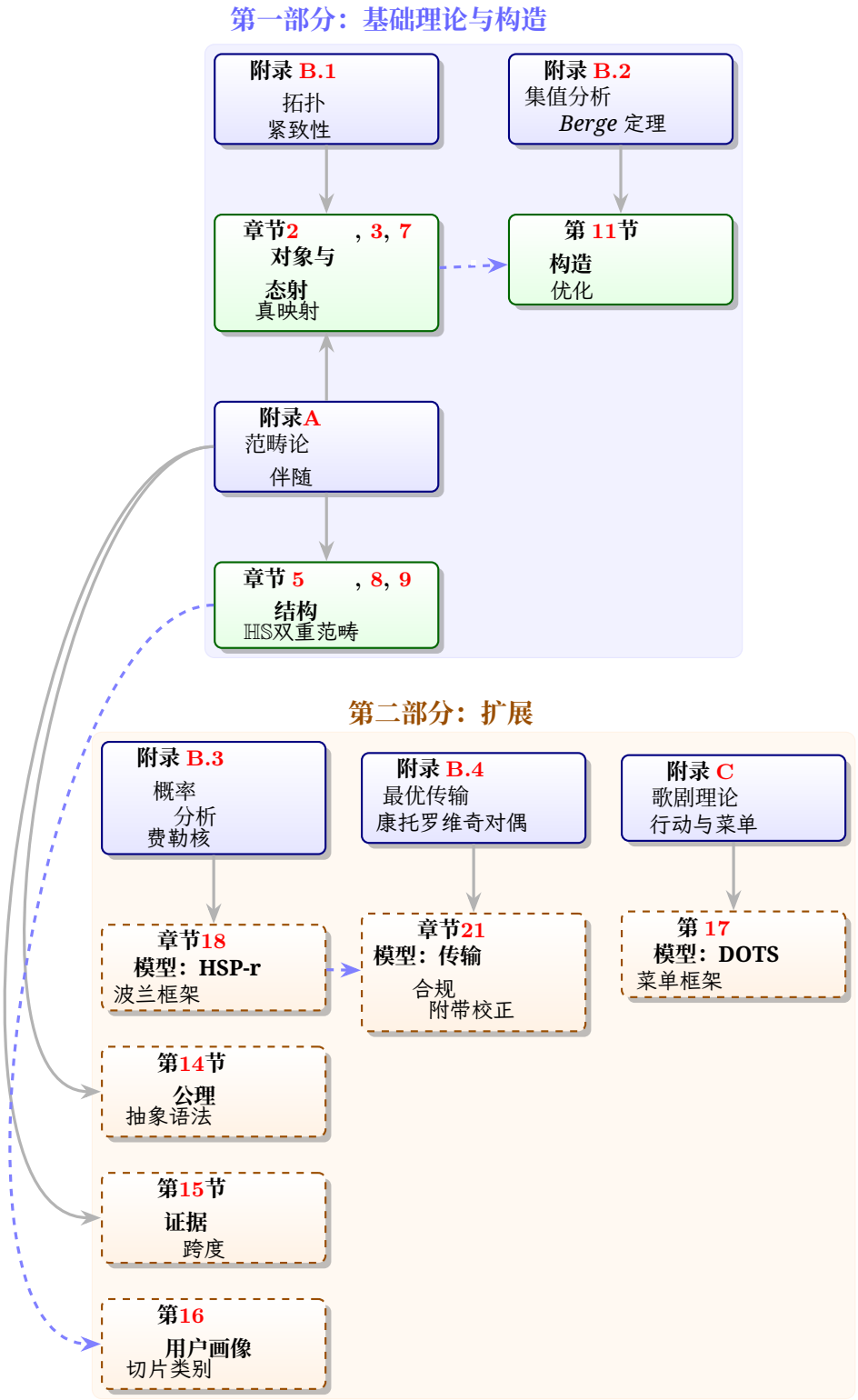
[19] Robin Cockett 和 Stephen Lack。限制范畴与部分映射范畴。理论计算机科学，270:223–259，2002年。[20] George M. Constantinides。含交易成本的资本市场均衡。《政治经济学杂志》，94(4):842–862，1986年。[21] Mark H. A. Davis 和 Andrew R. Norman。含交易成本的投资组合选择。运筹数学，15(4):676–713，1990年。[22] Eugene F Fama 和 Kenneth R French。股票与债券收益中的共同风险因子。《金融经济学杂志》，33(1):3–56，1993年。[23] Francesco Franzoni、Eric Nowak 和 Ludovic Phalippou。私募股权业绩与流动性风险。《金融学杂志》，67(6):2341–2373，2012年。[24] Peter J Freyd 和 Andre Scedrov。范畴与寓范，《北荷兰数学文库》第39卷。北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1990年。[25] Tobias Fritz。关于马尔可夫核、条件独立性与充分性的合成方法。数学进展，370:107239，2020年。[26] Alfred Galichon。经济学中的最优传输方法。普林斯顿大学出版社，2016年。[27]Crispin Gardiner。随机方法：自然科学与社会科学手册。Springer，第4版，2009年。[28] Richard J. Gardner。布伦-明可夫斯基不等式。美国数学会通报，39(3):355–405，2002年。[29] Nicolae Gârleanu 和 Lasse Heje Pedersen。利用可预测收益并考虑交易成本的动态交易。《金融学杂志》，68(6):2309–2340，2013年。[30] Mila Getmansky、Andrew W. Lo 和 Igor Makarov。对冲基金收益中序列相关与非流动性的计量经济模型。《金融经济学杂志》，74(3):529–609，2004年。[31] Michèle Giry。概率论的范畴论方法。载于 Bernhard Banaschewski 编，拓扑学与分析学的范畴论方面，《数学讲义》第915卷，68–85页。Springer，柏林、海德堡，1982年。[32] Marco Grandis 和 Robert Paré。双范畴中的极限。范畴拓扑与微分几何笔记，45(3):193–240，2004年。[33] Robert J. Greer。资产类别究竟是什么？《投资组合管理杂志》，23(2):86–91，1997年。[34] Richard C Grinold 和 Ronald N Kahn。主动投资组合管理：创造超额收益并控制风险的定量方法。麦格劳-希尔，第3版，2019年。[35] Gurobi Optimization, LLC。*Gurobi* 优化器参考手册，2024年。11.0版。[36] Wassily Hoeffding。有界随机变量之和的概率不等式。美国统计学会杂志，58(301):13–30，1963年。[37] Olav Kallenberg。现代概率论基础。Springer，第2版，2002年。

[38] Steven N. Kaplan 和 Antoinette Schoar。私募股权业绩：收益、持续性与资本流动。《金融学杂志》，60(4):1791–1823，2005年。[39] Kazimierz Kuratowski 和 Czeslaw Ryll-Nardzewski。关于选择子的一般定理。《波兰科学院通报》，数学、天文学与物理学系列，13:397–403，1965年。[40] Albert S. Kyle。连续拍卖与内幕交易。《计量经济学》，53(6):1315–1335，1985年。[41] F. William Lawvere。基础中的伴随性。Dialectica，23(3-4):281–296，1969年。[42] László Leindler。关于赫尔德不等式的某个逆命题。Acta Scientiarum Mathematicarum，33:217–223，1972年。[43] Tom Leinster。《高阶多运算子与高阶范畴》。伦敦数学会讲义系列第298卷。剑桥大学出版社，2004年。[44] Sophie Libkind 和 David Jaz Myers。迈向系统的双重多运算子理论，2025年。[45] Francis A. Longstaff。最优投资组合选择与非流动性证券的估值。《金融研究评论》，14(2):407–431，2001年。[46] Harry Markowitz。投资组合选择。《金融学杂志》，7(1):77–91，1952年。[47] Garth P. McCormick。可因式分解的非凸规划全局解的可计算性：第一部分——凸低估问题。《数学规划》，10(1):147–175，1976年。[48] Robert C. Merton。不确定性下的生命周期投资组合选择：连续时间情形。《经济学与统计学评论》，51(3):247–257，1969年。[49] Attilio Meucci。《风险与资产配置》。施普林格金融教材，2022年。[50] Ernest Michael。连续选择。一。《数学年刊》，63(2):361–382，1956年。[51] David Jaz Myers。Dots讲座系列。Topos Institute，2024年。[52] Luboš Pástor 和 Robert F. Stambaugh。流动性风险与预期股票收益。《政治经济学杂志》，111(3):642–685，2003年。[53] Wesley Phoa。均值—方差优化的进一步应用。《投资组合管理杂志》，50(8):250–259，2024年。[54] Wesley Phoa。流动性、非流动性、私募资产与资本配置。《投资组合管理杂志》，51(8):92–108，2025年。[55] Vaughan Pratt。Chu 空间及其作为并发对象的解释。载于《计算机科学逻辑》，《计算机科学讲义》第1043卷，第392–405页。施普林格，1995年。[56] András Prékopa。对数凹测度与函数。Acta Scientiarum Mathematicarum，34:335–343，1971年。[57] Qontigo。Axioma投资组合优化器：技术参考手册，2024年。SimCorp。[58] R Tyrrell Rockafellar 和 Roger J-B Wets。《变分分析》。施普林格，1998年。

[59] Paul A. Samuelson。通过动态随机规划进行生命周期投资组合选择。《经济学与统计学评论》，51(3):239–246，1969年。[60] Rolf Schneider。《凸体：布伦-闵可夫斯基理论》。剑桥大学出版社，第2版，2014年。[61] William F Sharpe。资本资产价格：风险条件下市场均衡的理论。《金融学杂志》，19(3):425–442，1964年。[62] Michael Shulman。框架双范畴与幺半纤维化。《范畴论及其应用》，20(18):650–738，2008年。[63]Sandeep Singh。关于目标日期共同基金的证据。《金融服务评论》，25(3):235–262，2016年。[64] David I Spivak。函子数据迁移。《信息与计算》，217:2–31，2012年。[65] Ross Street。2-范畴中的纤维化与 Yoneda 引理。载于《数学讲义》，第420卷。施普林格，1974年。[66] Michel Talagrand。乘积空间中的测度集中与等周不等式。《高等科学研究所数学出版物》，81:73–205，1995年。[67] Cédric Villani。《最优传输主题》，《研究生数学》系列第58卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2003年。[68] Cédric Villani。《最优传输：新与旧》，《数学基础原理》系列第338卷。施普林格出版社，柏林，2009年。[69] R J Wood。伴随与贝克–切瓦利条件。载于《美国数学学会范畴论会议论文集，悉尼》，1990年。[70] Günter M. Ziegler。《多面体讲义》。施普林格出版社，纽约，1995年。

前提条件与系统架构

数学依赖关系


第一部分：基础理论与构造
附录 B.1
拓扑
紧致性
附录 B.2
集值分析
Berge 定理
章节2 , 3, 7
对象与
态射
真映射
第 11节
构造
优化
附录A
范畴论
伴随
章节 5 , 8, 9
结构
HS双重范畴
第二部分：扩展
附录 B.3
概率
分析
费勒核
附录 B.4
最优传输
康托罗维奇对偶
附录 C
歌剧理论
行动与菜单
章节18
模型：HSP-r
波兰框架
章节21
模型：传输
合规
附带校正
第 17
模型：DOTS
菜单框架
第14节
公理
抽象语法
第15节
证据
跨度
第16
用户画像
切片类别

A 范畴论预备知识

本附录介绍理解第一部分所提出的枢纽—辐条（$\mathbb{HS}$）框架所需的最基本范畴论背景。我们只关注正文中用到的特定结构：范畴、函子、伴随和薄双范畴（也称为框架双范畴或装备）。

A.1 范畴与函子

定义 A.1（范畴）。一个**范畴** $\mathcal{C}$ 由以下部分构成：

1. 一组**对象**，记作 A，B，C，.....
2. 对于每一对对象 A，B，都有一个**态射**（或箭头）集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\ B)$，记作 $f:A \to B$。
3. 复合运算 $\circ$：对于 $f:\ A \to B$ 和 $g:\ B \to C$，存在一个复合$g \circ f:\ A \to C$。

复合必须满足结合律，并且每个对象 A 都必须具有一个恒等态射 id_A，使得 $f \circ id_A = f$和 $id_B \circ f = f$。

定义 A.2（函子）。函子 $F:\ \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是范畴之间的保结构映射。它将每个对象 $A \in \mathcal{C}$ 映射到一个对象 $F(A) \in \mathcal{D}$，并将每个态射 $f:\ A \to B$ 映射到一个态射$F(f):\ F(A) \to F(B)$，使得：

- $F(id_A) = id_{F(A)}$
- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

伴随被广泛认为是范畴论中最重要的概念。它描述了两个函子之间的一种特定关系：在不同的数学背景下，这两个函子分别为彼此的问题提供“最佳逼近”或最优解。

定义 A.3（伴随）。设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 为范畴。两个函子 $L:\ \mathcal{C} \to \mathcal{D}$（**左伴随**）和 $R:\ \mathcal{D} \to \mathcal{C}$（**右伴随**）构成一个伴随，记作 $L \dashv R$，当且仅当它们的态射集（同态集）之间存在自然同构：

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L(X), Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, R(Y))$$

对于所有对象 $X \in \mathcal{C}$ 和 $Y \in \mathcal{D}$。

Int阐释： 这个同构表明以下两者之间存在一一对应：

- 从近似对象 $L(X)$ 到范畴 $\mathcal{D}$ 中辐条 Y 的态射 .
- 从范畴 $\mathcal{C}$ 中枢纽 X 到近似对象 $R(Y)$ 的态射。

特殊情形：伽罗瓦连接在**薄**双范畴的特定语境中（其中范畴是偏序集，态射是大小关系 $\leq$），伴随简化为**伽罗瓦连接**。同构条件转化为一对逻辑蕴含：

$$L(x) \leq y \iff x \leq R(y)$$

这是在整个 $\mathbb{HS}$ 框架中用于关联不同投资组合空间中的对齐检查的形式。

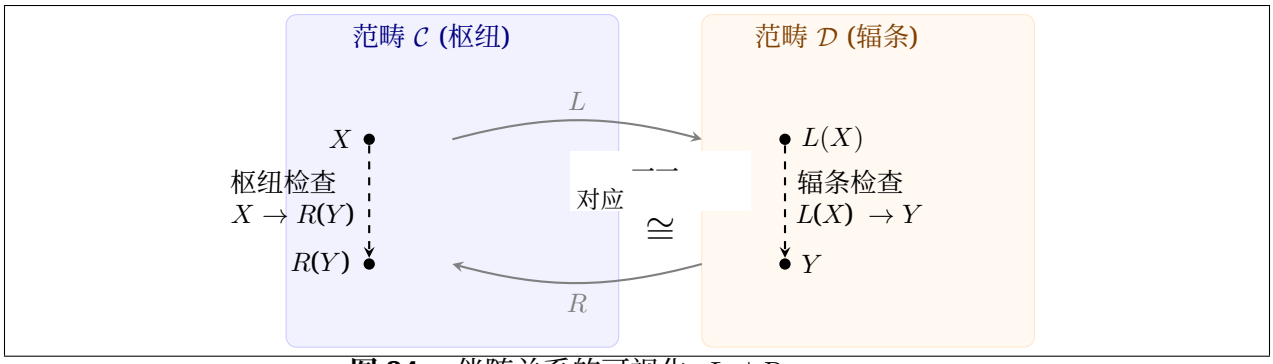


图 24： 伴随关系的可视化 $L \dashv R$。

A.2 双范畴

双范畴通过允许两种不同类型的态射来推广范畴 [9, 32]。这对于区分函数性的变换（重新实现）与关系性的约束（对齐）至关重要。

定义 A.4 (双范畴)。一个**双范畴** $\mathbb{D}$ 由以下部分组成：

1. **对象：** $A, B, C, \ldots$
2. **水平态射：** $f\colon A \to B$ （构成一个范畴 $\mathbb{D}_h$）。
3. **垂直态射：** $R\colon A \nrightarrow B$ （构成一个范畴 $\mathbb{D}_v$，通常其结合律较弱）。
4. **2-胞腔：** 如下形式的方形：

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle R}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S} \\ C & \xrightarrow[g]{} & D \end{array}$$

由一个 2-态射 α占据。

在我们的语境中，双范畴的复杂性大大降低，因为关系非真即假。

定义 A.5 （薄双范畴）。 如果对于任意由水平态射和垂直态射构成的边界，填入该方形的 2-胞腔至多只有一个，则称双范畴为**薄的** （或局部偏序的）。这种结构与加框双范畴 或装备 [62]的概念密切相关。

A.3 松弛函子与序结构

第三部分中的概率扩展（具体而言，第 B.3 节）要求对标准范畴论作出放宽。当“相等”被“近似”或“包含”取代时，函子就变成**松弛的**。

定义 A.6 (序范畴)。 序范畴（或称 2-偏序集）是一种范畴 $\mathcal{C}$ ，其中每个同态集 $\mathrm{Hom}(A, B)$ 都是偏序集 $(P, \leq)$，且复合是保序的。在我们的语境中，垂直态射构成序范畴，其中的顺序表示关系或风险概况的包含关系。

定义 A.7 (Lax函子)。 设 $\mathcal{C}$ 是一个标准范畴，且 $\mathcal{D}$ 是一个序范畴。Lax函子[1] $F\colon\ \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 将对象和态射映射为满足以下条件的对象和态射：

1. $F(id_A) \leq id_{F(A)}$(次幺性) 2. $F(g \circ f) \leq F(g)$ $\circ F(f)$ (次合成性)

与投资组合构建的相关性：在 HSP-r 模型中，将再实现映射 f 映射为其推前算子 $f_!$ 的映射是一个Lax函子。

$$(Q \circ P)^{\epsilon}_{!} \leq Q^{\epsilon}_{!} \circ P^{\epsilon}_{!}$$

这个不等式体现了**顺序审计的保守性**。端到端复合过程（$Q \circ P$）的风险包络包含于由各阶段包络复合得到的风险包络（右侧）。换言之，顺序审计（分别检查各个阶段）比复合审计更保守：通过顺序检验意味着通过复合检验，反之则不然。这正是我们需要的安全保证——顺序审计可能会拒绝有效投资组合（第一类错误），但绝不会批准无效投资组合（第二类错误）。

[1]我们的约定遵循 [62]：Lax 函子满足 $F(g \circ f) \leq F(g) \circ F(f)$。一些作者称之为反松弛；具体采用哪种称谓取决于顺序的方向。在我们的设定中，$\leq$ 表示关系的集合论包含关系（或风险包络的包含关系），“Lax”这一称谓符合这样的解释：复合推前包含于顺序推前。

B 拓扑、集值分析与概率

本附录概述了建立 $\mathbb{HS}$ 对象的良定义性以及 HSP-r（随机）扩展的收敛性质所需的一般拓扑、集值分析和测度论背景。

B.1 拓扑与真映射

定义 B.1 （紧致性）。 若 X 的每个开覆盖都存在有限子覆盖，则称拓扑空间 X 是**紧**的。根据海涅–博雷尔定理，欧几里得空间中的子集 $\mathbb{R}^n$ 是紧的，当且仅当它是闭集且有界。

定义 B.2 （真映射）。 连续映射 $f\colon X \to Y$ 若每个紧子集 $K \subseteq Y$ 的原像 $f^{-1}(K)$ 在 X 中都是紧集，则称其为**真** 映射。

定理 B.3 （适当映射的闭映射定理）。 若 $f : X \to Y$ 是局部紧豪斯多夫空间之间的真映射，则 f 是闭映射：X 中任意闭集的像在 Y 中都是闭集。

B.2 集值分析与优化

对corres的研究 pondences及其连续性性质是优化理论的核心 [8, 58] .

定义 B.4 (对应). 一个**对应**（或多值函数） Φ: $X \rightrightarrows Y$ 将每个 $x \in X$ 映为一个子集 $\Phi(x) \subseteq Y$。

定义 B.5 (上半连续性). 对应 Φ在 x_0 处是**上半连续**（UHC）的，如果对每个包含 $\Phi(x_0)$的开集 V，存在 x_0 的一个邻域 U，使得对所有 $x \in U$都有$\Phi(x) \subseteq V$。

定理 B.6 (贝尔热最大值定理). 设 X 与 Y 为拓扑空间，$f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$为连续目标函数，且 $C : X \rightrightarrows Y$ 为可行集的对应，该对应是连续的（既上半连续又下半连续）并具有紧值。定义值函数 $v(x) = \min_{y \in C(x)} f(x, y)$ 以及解对应 $M(x) = \{y \in C(x) \mid f(x, y) = v(x)\}$。则：

1. 值函数 v 连续。
2. 解对应 M 是上半连续且取紧值的。

参见 *[10]* 或 *[2]* 以获取详细证明。对于可变约束集，相应的结果要求对应 $x \mapsto C(x)$ 是连续的（上半连续且下半连续）；参见迈克尔选择定理（定理*11.10*），该定理适用于只需要连续选择，而不需要整个解集连续性的情形。

B.3 波兰空间与随机核

对于该框架的概率扩展，我们依赖波兰空间的性质 [12, 14,37]。

定义 B.7 （波兰空间）。 波兰空间是可分、完全可度量的拓扑空间。示例包括 $\mathbb{R}^n$、可分巴拿赫空间，以及赋予弱拓扑 [2] 的波兰空间上的概率测度空间。

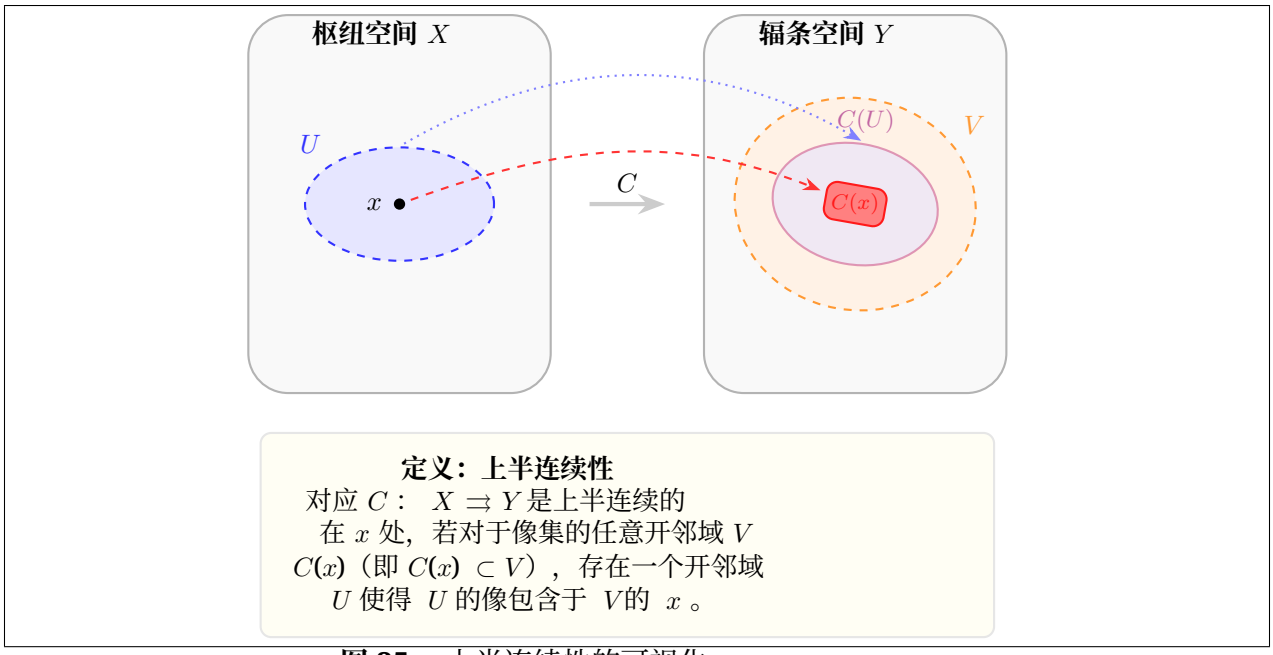


图 25： 上半连续性的可视化。

定义 B.8 （马尔可夫核）。 从 X 到 Y 的马尔可夫核（或概率核）是一个函数 $P\colon X \times \mathcal{B}(Y) \to [0,1]$，满足：

1。对于每个固定的 $x \in X$，映射 $A \mapsto P(x,\ A)$ 是 Y上的概率测度。

2. 对于每个固定的可测集 A，函数 $x \mapsto P(x,\ A)$ 是可测的 e.

定义 B.9 （Feller 性质）。 若马尔可夫核 P满足：对于每个有界连续函数 $g\colon Y \to \mathbb{R}$，函数 $x \mapsto \int_Y g(y)P(x,\ dy)$ 在 X上连续，则称其为 **Feller** （或连续）核。

定理 B.10 （Portmanteau定理）。 设 Y为波兰空间，且 μ_n、μ 为 Y上的博雷尔概率测度。以下条件与弱收敛 $\mu_n \Rightarrow \mu$等价：

1. $\lim_{n\to\infty} \int_Y f\, d\mu_n = \int_Y f\, d\mu$ 对所有有界连续函数 $f\colon Y \to \mathbb{R}$均成立。*2.* li m sup$_{n\to\infty} \mu_n(F) \le \mu(F)$ 对所有闭集 $F \subseteq Y$均成立。*3.* liminf$_{n\to\infty} \mu_n(G) \ge \mu(G)$ 对所有开集 $G \subseteq Y$均成立。

推论 B.11 (闭集上质量的上半连续性)。 设 $P\colon X \rightsquigarrow Y$ 是一个费勒核。对于任意闭集 $F \subseteq Y$，函数 $\phi(x) = P(x, F)$ 在 X上是上半连续的。

证明。 由于 P是 Feller，若 $x_n \to x$属于 X，则 $P(x_n, \cdot) \Rightarrow P(x, \cdot)$ 弱收敛。根据 Portmanteau定理的条件（2），lim sup$_{n\to\infty} P(x_n, F) \le P(x, F)$。这就是上半连续性的定义。该性质保证闭关系的随机拉回是闭的。 □

定义 B.12 （紧 Feller 核）。 若 Feller 核 $P\colon X \times \mathcal{B}(Y) \to [0,1]$ 满足以下条件，则称其为**紧的**：对于每个紧子集 $C \subseteq X$ 和每个 $\epsilon > 0$，都存在一个紧子集 $P_{\epsilon,\ C} \subseteq Y$ 使得

$$P(x, P_{\epsilon,C}) \ge 1 - \epsilon \quad \text{for all } x \in C.$$

这一条件确保当输入被限制在紧区域内时，核不会“将质量泄漏到无穷远处”，这相当于连续映射的适当性的随机类比。关于此情境下可测选择子的存在性，请参见 [18]。

定理 B.13 (Prokhorov 定理)**.** 设 Y 为波兰空间，并令 $\mathcal{P}(Y)$ 表示 Y 上配备弱收敛拓扑的博雷尔概率测度空间。子集 $\Gamma \subseteq \mathcal{P}(Y)$在弱拓扑中相对紧，当且仅当它是紧的：见 *[12]*。在费勒核的语境中，这表明若 P 是紧 *Feller* 核，则对任意紧集 $C \subseteq X$，测度集 $\{P(x,\cdot) \mid x \in C\}$ 在 $\mathcal{P}(Y)$ 中相对紧。

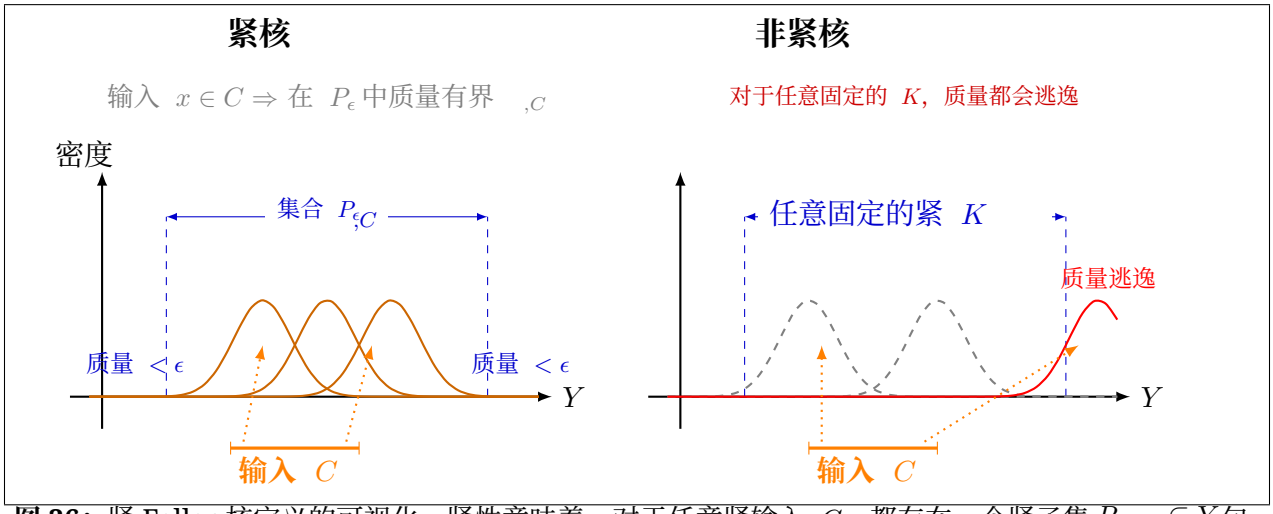


图 26： 紧 Feller 核定义的可视化。紧性意味着，对于任意紧输入 C，都存在一个紧子集 $P_{\epsilon,\ C} \subseteq Y$包含大部分概率质量。右侧面板展示了失败的情形：输入始终留在 C中，但概率质量却漂移至无穷远处。

紧 Feller 核的复合，按照概率转移函数的标准复合来定义；在随机分析中，这称为查普曼–科尔莫哥洛夫方程 [27]。给定一个核 $P\colon X \rightsquigarrow Y$和一个核 $Q\colon Y \rightsquigarrow Z$，它们的复合 $Q\circ P\colon X \rightsquigarrow Z$ 定义为对第二个核关于第一个核所定义的测度积分：

$$(Q \circ P)(x, C) = \int_Y Q(y, C) P(x, dy)$$

对于任意可测集 $C \subseteq Z$。直观而言，这表示一个两步随机过程：首先，系统按照分布 $P(x,\ \cdot)$从状态 x 转移到中间状态 y；随后，系统按照 $Q(y,\ \cdot)$从 y 转移到最终集合 C。现在我们证明，这一运算保留了框架所要求的结构性质。

定理 B.14 （紧 Feller 核的复合）。设 X、Y、Z 为波兰空间。设 $P\colon X \rightsquigarrow Y$ 和 $Q\colon Y \rightsquigarrow Z$ 为紧 *Feller* 核。那么，复合核 $Q \circ P$ 是一个紧 *Feller* 核。

证明。 **Feller 性质**：我们必须证明，对于任意 $h \in C_b(Z)$，函数 $x \mapsto \int_Z h(z)(Q \circ P)(x, dz)$ 是连续的。根据复合核的定义，该积分可改写为迭代积分：

$$\int_Z h(z)(Q \circ P)(x, dz) = \int_Y \left(\int_Z h(z) Q(y, dz) \right) P(x, dy)$$

定义 $g(y) = \int_Z h(z)Q(y,dz)$。由于 Q 具有 Feller 性质，且 h 是有界连续函数，因此 g 是 Y 上的有界连续函数（即 $g \in C_b(Y)$）。于是，该表达式可简化为 $\int_Y g(y)P(x,dy)$。由于 P 具有 Feller 性质，且 $g \in C_b(Y)$，该积分随 x 连续变化。因此， $Q \circ P$ 具有 Feller 性质。

紧性（普罗霍罗夫式论证）：设 $K \subseteq X$ 为紧集且 $\epsilon > 0$。由于 P 具有紧性，存在一个紧集 $M \subseteq Y$，使得:

$$\sup_{x \in K} P(x, M^c) < \frac{\epsilon}{2}$$

由于 Q 具有紧性且 M 为紧集，存在一个紧集 $L \subseteq Z$，使得:

$$\sup_{y \in M} Q(y, L^c) < \frac{\epsilon}{2}$$

现在，考虑复合核对任意 $x \in K$ 赋予 L^c 的质量:

$$\begin{aligned}(Q \circ P)(x, L^c) &= \int_Y Q(y, L^c) P(x, dy) \\ &= \int_M Q(y, L^c) P(x, dy) + \int_{M^c} Q(y, L^c) P(x, dy)\end{aligned}$$

对于第一项，对所有 $y \in M$， $Q(y, L^c) < \epsilon/2$，因此该积分有界于 $\epsilon/2 \cdot P(x, M) \leq \epsilon/2$。对于第二项，该积分有界于 $1 \cdot P(x, M^c) < \epsilon/2$。因此，对所有 $x \in K$，$(Q \circ P)(x, L^c) < \epsilon$，从而证明了紧性。

□

B.4 最优传输与 Wasserstein 距离

第 21 节中的概率框架依赖于最优传输理论（参见 [67]），以量化将概率分布转变为合规状态的成本。

定义 B.15（Wasserstein 距离）。设 (X, d) 为一个波兰空间。对于 $p \in [1, \infty)$，两个概率测度 $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$ 之间的 p-Wasserstein 距离定义为:

$$W_p(\mu, \nu) := \left(\inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} \int_{X \times X} d(x,y)^p \, d\pi(x,y) \right)^{1/p}$$

其中 $\Pi(\mu, \nu)$ 是 $X \times X$ 上边缘分布为 μ 和 ν 的耦合（联合分布）集合。

Wasserstei n 距离 W_1（其中 $p = 1$）通常称为**土方距离** .

- **物理直觉：** 想象概率分布 μ 是一堆单位质量的土，而 ν 是一个容量为单位容量的目标孔。$W_1(\mu, \nu)$ 表示将土从 μ 移至 ν 并填满目标孔所需的最小功，其中功 = 质量 × 距离。

- **金融直觉（换手成本）：** 在投资组合构建的语境中，若 μ表示随机求解器的含噪输出，而 ν 表示合规的投资组合分布，则 $W_1(\mu, \nu)$表示将投资组合再平衡至合规所需的最小换手量（以美元或百分比计）。与欧几里得距离（对平方误差求和）不同， W_1 随交易规模线性变化，因而成为交易成本的自然度量。

定理 B.16 (Kantorovich–Rubinstein 对偶性)。 对于 $p = 1$， *Wasserstein* 距离具有如下对偶表示:

$$W_1(\mu, \nu) = \sup \left\{ \int_X f \, d\mu - \int_X f \, d\nu : f \text{ is 1-Lipschitz} \right\}$$

这种对偶性对于计算至关重要。它意味着，验证 Wasserstein安全性等价于检查所有利普希茨“测试函数”（风险因子）的期望。如果每个具有单位敏感度的风险因子的期望值都接近目标分布，则该投资组合是安全的。

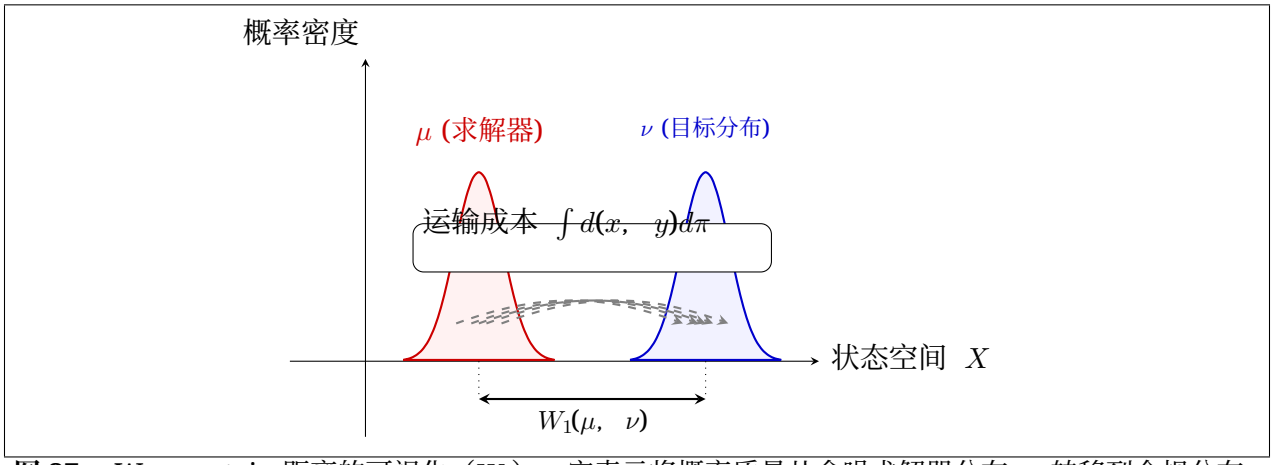


图 27： Wasserstein 距离的可视化（W_1）。它表示将概率质量从含噪求解器分布 μ 转移到合规分布 ν 所需的最小“功”。

注释 B.17（计算说明：求解器复杂度）。 第 21.4 节中的 Wasserstein 安全检查计算依赖于将蒙特卡洛样本投影到有效约束集 S上。Wasserstein 度量中顺序 p 的选择决定了该投影问题所属的数学类别，进而影响计算吞吐量。

- **情况 $p = 1$ （线性交易成本）：** 对买卖价差或固定佣金建模时，投影会最小化 L_1 范数 $\|z - y\|_1$。如果约束集 S 是多面体的（由线性不等式 $Ax \leq b$定义），那么该问题就是一个线性规划（*LP*）。现代线性规划求解器（例如单纯形法或内点法）具有很高的计算吞吐量，对于典型的投资组合维度（$N \approx 500$），每秒可完成数万次投影。

- **案例 $p = 2$ （执行风险 / 市场冲击）：** 在对二次市场冲击进行建模时（遵循 Kyle 的 λ，参见 [40]），投影会使欧几里得距离的平方最小化$\|z - y\|_2^2$。这构成一个二次规划（*QP*）。这是工业实现的首选方案，因为它与标准均值-方差优化具有完全相同的数学结构。因此，它可以使用投资组合构建技术栈中已有的相同高性能求解器（例如 OSQP、Gurobi），从而确保高吞吐量和数值稳定性。

- **一般情况 $p \neq 1$: 2：** 对于非标准冲击模型（例如，$p = 1.5$ 平方根冲击），投影需要使一般的 L_p 范数最小化。这通常需要二阶锥规划（*SOCP*）或通用凸优化求解器。与 LP 或 QP 求解器相比，这些方法会产生显著的计算开销；如果在蒙特卡洛模拟的内层循环中使用，还可能造成瓶颈。

B.5 卷积稳定性证明（命题 20.8）

证明。 对于 (1)：我们要求核 $Q(y, \cdot)$ 作为加性噪声发挥作用——也就是说，输出分布具有如下形式：$y+\xi$ 其中 ξ 与 y 相互独立，且具有对数凹密度 ρ_ξ。（这是求解器噪声的自然模型：优化器以 y 为目标，并产生 y 加上随机扰动。）在这一

假设下，记 ρ_Y为 $P(x,\cdot)$ 的密度，则复合密度是一个真正的卷积：$\rho_Z(z) = \int \rho_\xi(z-y)\rho_Y(y)\,dy$。普雷科帕–莱因德勒不等式 [56, 42]（综述另见 [28]）表明，当 ρ_Y 和 ρ_ξ 都是对数凹的时，该卷积也是对数凹的。对于对数凹密度，其 α-超水平集 $\{z:\ \rho(z) \geq \alpha\}$ 是凸集。

还需证明 $\text{supp}^{\delta+\epsilon}(\rho_{Q\circ P}) \subseteq A+B$，其中 $A = \text{supp}^{\delta}(P(x))$ 和 $B = \text{supp}^{\epsilon}(\rho_\xi)$ 均为凸紧集。

步骤 *1*：外部密度界 $A+B$。令 λ_δ 和 λ_ϵ 分别表示 ρ_Y 和 ρ_ξ 的 HDR 密度阈值，使得 $A = \{\rho_Y \geq \lambda_\delta\}$ 和 $B = \{\rho_\xi \geq \lambda_\epsilon\}$。对于任意 $z \notin A+B$ 及任意 y，有 $y \notin A$ 或 $z-y \notin B$。将卷积积分拆分为：

$$\begin{aligned}\rho_Z(z) &= \int_{y\in A} \rho_Y(y)\,\rho_\xi(z-y)\,dy \;+\; \int_{y\notin A} \rho_Y(y)\,\rho_\xi(z-y)\,dy \\ &< \lambda_\epsilon \int_{y\in A} \rho_Y(y)\,dy \;+\; \lambda_\delta \int_{y\notin A} \rho_\xi(z-y)\,dy \;\leq\; \lambda_\delta + \lambda_\epsilon,\end{aligned}$$

其中，第一项使用了 $z-y \notin B$（因此对于 $y \in A$，有 $\rho_\xi(z-y) < \lambda_\epsilon$），第二项使用了 $\rho_Y(y) < \lambda_\delta$，适用于 $y \notin A$。

步骤 *2*：概率质量下界。定义“逃逸事件” $E = \{z \notin A+B\}$。对于任意 $z \in E$ 及任意分解 $z = y + (z-y)$，必有 $y \notin A$ 或 $(z-y) \notin B$。根据并集界：

$$\Pr(Z \in E) \leq \Pr(Y \notin A) + \Pr(\xi \notin B) \leq \delta + \epsilon,$$

其中 $Y \sim P(x,\cdot)$，且 ξ是独立噪声。因此， $A+B$的概率质量至少为$1-(\delta+\epsilon)$。

步骤 *3*：卷积稳定性。由步骤 1 可知，超水平集 $C := \{z:\ \rho_Z(z) \geq \lambda_\delta + \lambda_\epsilon\} \subseteq A+B$。由步骤 2 可知，$\Pr(Z \in A+B) \geq 1-(\delta+\epsilon)$。特别地，$(A+B)^c$ 的质量至多为 $\delta+\epsilon$，并且根据步骤 1，在整个 $(A+B)^c$ 上，密度均低于 $\lambda_\delta + \lambda_\epsilon$。

若 $\Pr(C) \geq 1-(\delta+\epsilon)$，则 HDR 包含关系 $\text{supp}^{\delta+\epsilon}(\rho_Z) \subseteq A+B$ 成立（因为此时 HDR 阈值满足 $\lambda_{\delta+\epsilon} \geq \lambda_\delta + \lambda_\epsilon$，从而 $\text{supp}^{\delta+\epsilon}(\rho_Z) \subseteq C \subseteq A+B$）。这一质量条件在主要应用中成立：

- 高斯噪声：当 ρ_Y 和ρ_ξ 为高斯时， ρ_Z 为高斯，且 $\lambda_\delta + \lambda_\epsilon$ 相对于峰值密度较小，因此 C 几乎捕获了全部概率质量。
- 集中噪声：当噪声方差相对于高密度区域尺度较小时， $A+B$ 仅略大于 A，且密度在 $A+B$ 内部近乎恒定，因此 $\Pr(C) \approx \Pr(A+B) \geq 1-(\delta+\epsilon)$。

一般而言，应对所使用的具体噪声模型验证卷积稳定性条件。概率质量下界 $\Pr(Z \in A+B) \geq 1-(\delta+\epsilon)$（步骤 2）始终成立，并提供较弱的保证，即 $A+B$ 是有效的 $(\delta+\epsilon)$-置信区域；更强的 HDR 包含关系则需要上述额外的正则性。

对于一般（非加性）核，Prékopa–Leindler论证并不直接适用；需要联合密度 $(z,y) \mapsto \rho_Q(z \mid y)\,\rho_Y(y)$ 为对数凹，而这是更强的条件。

对于 (2)：根据支撑集包含关系，该包含关系显而易见。 □

C 一般 DOTS 框架

本附录概述了双歌剧理论系统（DOTS） [44, 51]的一般数学语法。正文通过投资组合空间和对齐关系实例化了这一理论，而其底层结构则是一种形式化体系，借助框架双范畴（又称前箭头装备）的语言来建模系统、状态和约束 [62]。

C.1 环境结构：加框双范畴

DOTS 框架运行于一种特定类型的双范畴中，在该双范畴里，水平态射（函数）可以视为垂直态射（关系）的特殊情形。

定义 C.1（加框双范畴／装备）。 加框双范畴（或装备）是一种满足以下结构公理的双范畴：

1. **垂直结构：** 垂直态射构成一个双范畴（若复合严格满足结合律，则构成一个 2-范畴） [9]。

2. **水平结构：** 水平态射构成一个范畴。3. **伴随与共伴随：** 对于每个水平态射 $f\colon A \to B$，都存在垂直态射 $f_*\colon A \nrightarrow B$ （伴随）和 $f^*\colon B \nrightarrow A$ （共伴随），它们在垂直定义域 [62] 中表示 f。这些结构实质上允许将函数“转换”为关系（其图）及其转置。

在**薄**装备中（如本文所用的装备），垂直结构是局部偏序的，这意味着平行的 2-胞腔唯一。这使双范畴相干律简化为简单的包含关系。

C.2 状态作为广义元素

在一般系统理论中，“状态”不仅是对象的某种性质，更是对有效配置的选择。我们使用广义元素将其形式化。

定义 C.2（状态）。 令 I 为水平范畴的幺半范畴单位对象（表示平凡系统）。对象 A上的一个**状态**是一个水平态射：

$$\sigma : I \to A$$

在基于集合的理论中， σ 确定了 A的一个子集（或子空间）。在逻辑的语境中，它表示 A上的一个谓词。

C.3 作用算子

DOTS 的核心逻辑是状态（水平数据）与约束（垂直数据）之间的相互作用。这被形式化为一种**作用**。

定义 C.3（作用 $\odot$）。 设 $\sigma\colon I \to A$ 是 A上的一个状态，并设 $R\colon A \nrightarrow B$ 是一个垂直态射（系统变换或约束）。 R对 σ的**作用** 记作 $\sigma \odot R$，定义为垂直范畴中的复合：

$$\sigma \odot R := R \circ \sigma_*$$

其中， $\sigma_* : I \nrightarrow A$ 是状态 σ的伴随。

作用 $\sigma \odot R$ 表示状态在关系 σ 下的像 R。它是 B 中所有可从 A 经由系统 R到达的有效输入配置对应的所有可能输出配置。这类似于数据库理论 [64]中的函子数据迁移概念。

C.4 幺半结构与并行性

为对由并行子系统组成的系统建模，该装备配备了对称幺半结构。

定义 C.4 （对称幺半双范畴）。若一个双范畴配备了张量积函子 $\otimes\colon\ \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 和单位对象 I，并满足水平与垂直复合的标准相干公理，则称其为**对称幺半**的。

这种结构为系统建模带来了两个关键性质：

- **并行状态：**若 σ_A 是 A 上的一个状态，且 σ_B 是 B 上的一个状态，则 $\sigma_A \otimes \sigma_B$ 是 $A \otimes B$ 上的一个状态。
- **并行动作：**作用算子在张量积上满足分配律：

$$(\sigma_A \otimes \sigma_B) \odot (R_A \otimes R_B) \cong (\sigma_A \odot R_A) \otimes (\sigma_B \odot R_B)$$

C.5 厄米组合

最后，复数系统通过将较简单的系统连接在一起构建而成。这可由**连线图运算子** [43, 44]形式化地描述。

定义 C.5 （连线图）。 连线图是对称幺半范畴底层代数簇中的一个态射。它规定了一种方法，通过复合和指标缩并，从局部关系的张量积 $R_1 \otimes \cdots \otimes R_k$ 构造出全局关系 R_{global} 。

在 DOTS 框架中，这些图示可利用可复用组件，以基于模板的方式构造复杂系统约束，确保局部作用（作用于子系统）能够协调组合，形成全局动作。

D 概念系统架构与工作流程

本附录将 HS 双范畴及其扩展的数学理论转化为高层软件架构。我们将介绍一种模块化系统，旨在支撑多阶段投资组合构建、连续对齐验证，以及变更的协调传播。

D.1 架构原则

系统围绕拓扑（许可空间和映射）与计算（数值求解器）的分离进行设计。这种分离使系统能够在单一基础设施中支持多种语义模型（如第二部分所述）。

1. **范畴模式：** 数据库模式直接映射双范畴结构。它将对象（空间定义）、水平态射（重新实现配置）和垂直态射（对齐逻辑）作为一等实体存储。2. **求解器无关性：** 核心逻辑引擎基于抽象态射运行。实际执行（计算 $f(x)$ 或检查$(x, z) \in R$）则委托给可插拔的求解器层（支持凸优化、蒙特卡洛或离散搜索）。3. **证据持久化：** 遵循跨度模型（第15节），系统存储的不只是布尔型通过/失败结果，还会存储证据对象（审计轨迹），将特定的枢纽投资组合与辐条投资组合关联起来。

D.2 组件图

图 28 展示了模块化架构。该布局将语义逻辑集中于中央，执行层位于下方，持久化层位于右侧，从而确保数据和证据的清晰流动。

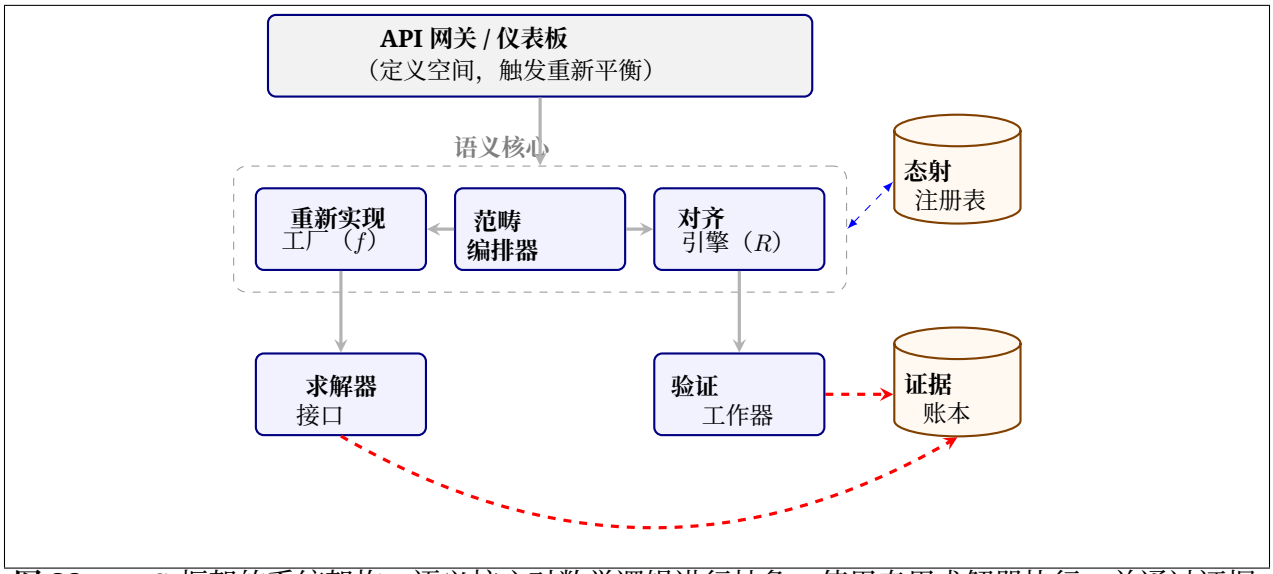


图 28： HS 框架的系统架构。语义核心对数学逻辑进行抽象，使用专用求解器执行，并通过证据账本保留持久的审计轨迹。范畴编排器协调重新实现工厂与对齐引擎；它基于抽象态射运行，并将数值执行委托给下层。

D.3 执行流

以下图表展示了特定的投资组合事件如何在投资组合构建（重新实现）过程的单个阶段中穿过这些架构组件。组合性保证了多阶段过程的有效性，因为每个阶段都会依次执行。

这些工作流程的规范很简单，几乎不值一提。真正复杂之处在于以工业规模执行这些流程——构建数百甚至数千个投资组合，通常涉及多阶段过程，并且需要满足同样多的对齐关系。临时拼凑的 流程在操作层面的复杂性可能呈几何级增长。这正是范畴论框架及其配套系统架构能够发挥重要组织作用的地方。

工作流 A：投资组合变更传播

当枢纽投资组合发生变更（$x \rightsquigarrow x'$）时，系统会通过工厂和对齐引擎并行执行各个分支，以确保安全后再提交变更。

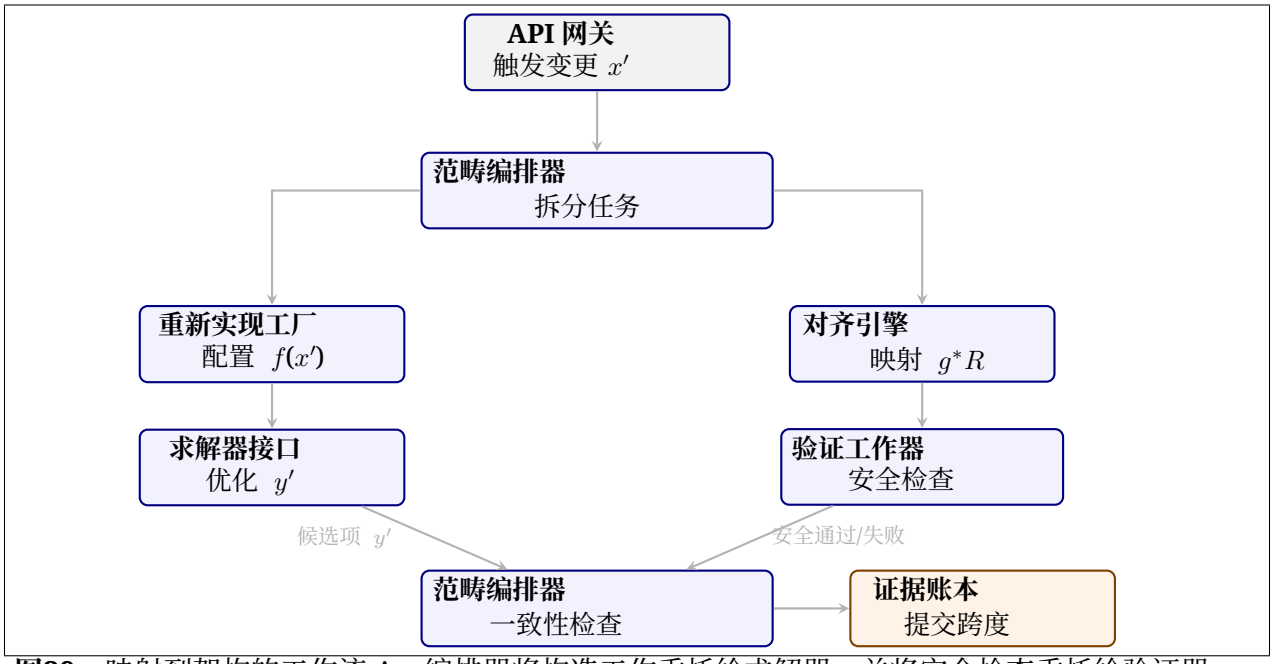


图29：映射到架构的工作流 A。编排器将构造工作委托给求解器，并将安全检查委托给验证器。只有在验证器通过松Beck–Chevalley条件确认枢纽变更安全后，才会提交辐条。

工作流B：对齐变更传播

定义新的约束（$R \rightsquigarrow R'$）后，系统会使用对齐引擎，计算原始蕴含（新菜单）和对偶蕴含（合规检查）。

工作流 C：构建新辐条

需要一系列新的投资工具时（K_{new}），系统会通过优化目标函数 u，并满足给定的结构对齐 R，来构建重新实现映射 f。

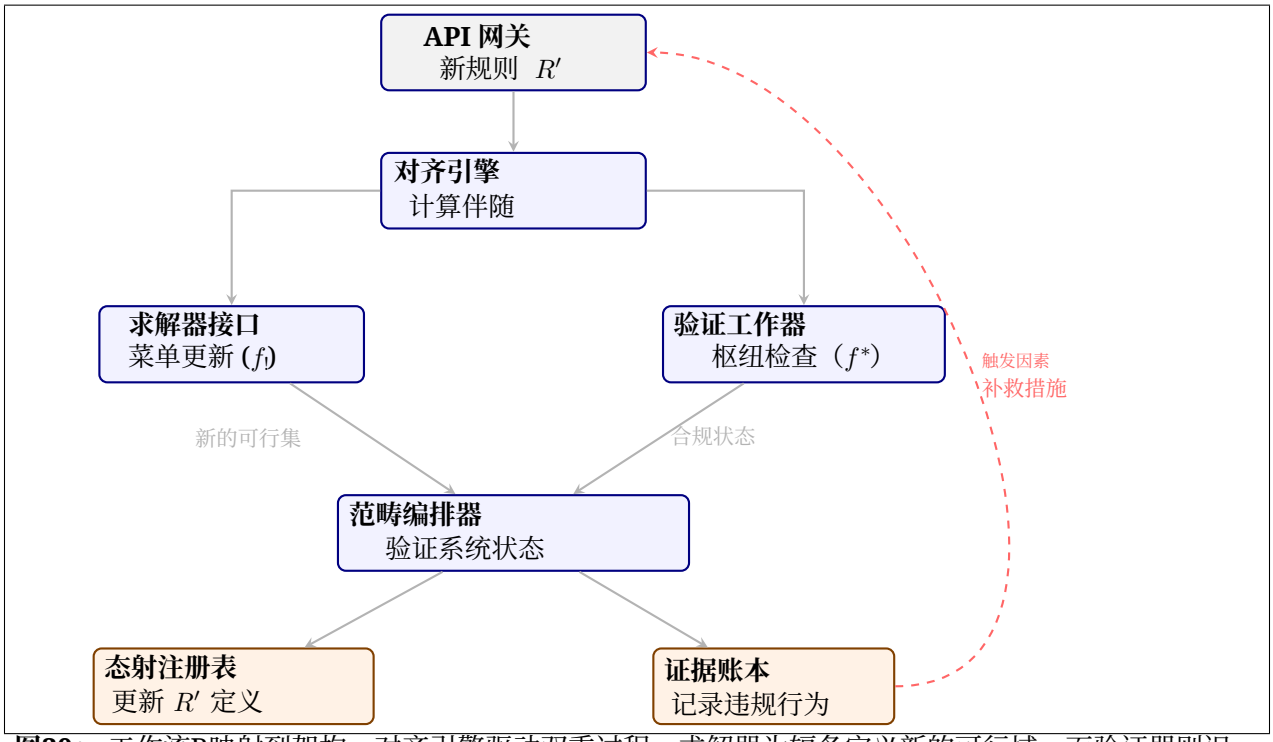


图30： 工作流B映射到架构。对齐引擎驱动双重过程：求解器为辐条定义新的可行域，而验证器则识别出故障的枢纽。

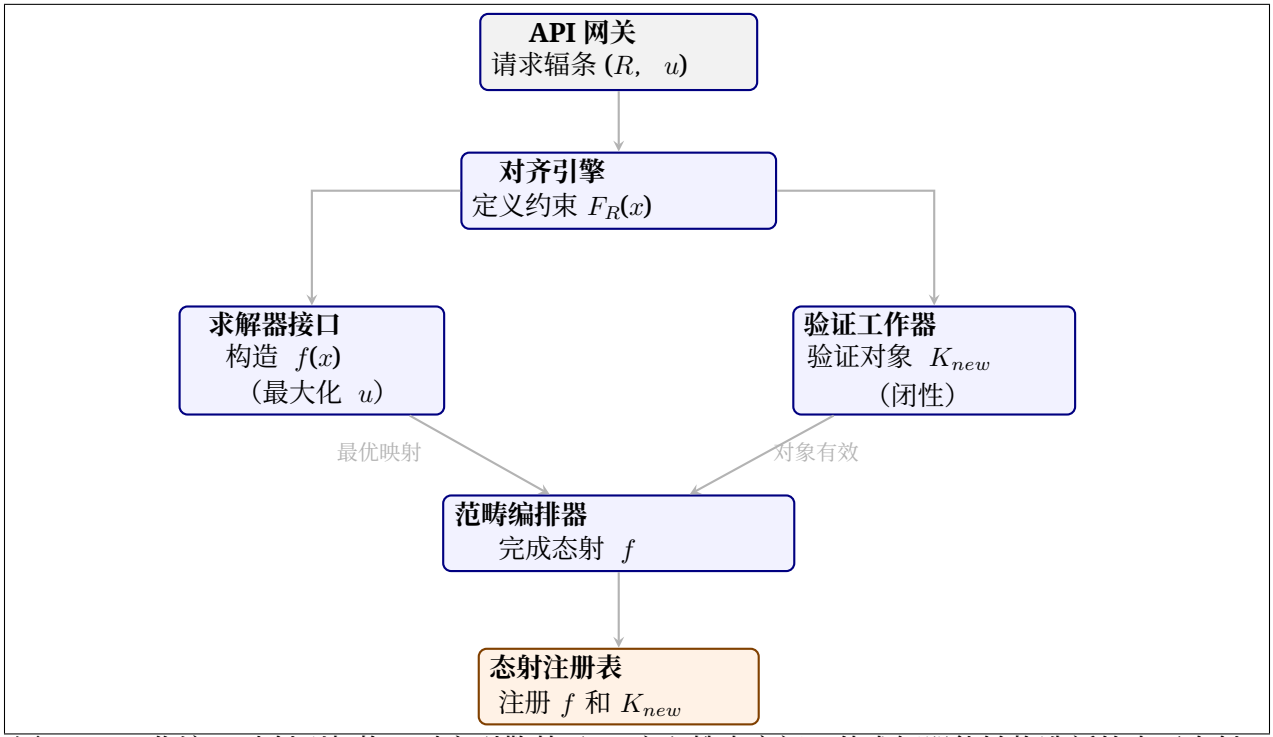


图 31： 工作流 C 映射到架构。对齐引擎基于 R定义搜索空间，使求解器能够构造新的水平态射 f，从而最大化目标函数 u（第 11.3 节）。

E 概念验证实现

本附录介绍两个轻量级软件实现，分别实现第 17 节的确定性 DOTS 框架（采用附录 D所述的系统架构），以及第三部分中的概率扩展。两者都是 Python 应用程序，配有交互式的基于浏览器的界面和自动化测试套件。

这些实现有三个目的：通过数值验证框架的相干律在确定性和概率设定下均成立；展示论文中描述的架构可以通过适度的工作予以实现；并提供交互式环境，帮助读者对涉及的运算建立几何直觉。

E.1 应用I：DOTS框架

第一个应用由一个数学引擎（dots_core.py，约 500 行）和一个交互式界面（dots_app.py，约 400 行）组成，并配有 28 项自动化测试。它作用于 2-单纯形 Δ^2 （三种资产），并以步长 0.01 进行格点枚举（5,151 个点），用于所有集值计算。

已实现。以下组件已实现：

- **单纯形与许可空间**（定义2.2，定义2.4）：格点枚举、约束谓词、重心坐标到笛卡尔坐标的可视化。
- **三种具体关系**（第17.2节）：跟踪关系 $R_{\mathrm{track}\,\epsilon}$、费用上限投影算子$R_{\mathrm{fee}\le\tau}$和换手关系 $R_{\mathrm{turn}\le\kappa}$。
- **DOTS 作用** $K \odot R$ （命题17.1）：基于格的菜单计算，包括单点纤维 $F_R(x)$ 。
- **拉回** f^*S （定义6.1）和**推前**$f_!\ R$ （定义6.4）。
- **关系的**垂直复合。
- **确定化**通过 ℓ^2-正则化（第17.6节）：给定正则化参数 $\alpha > 0$，选择每个纤维中的最小范数元素。
- **相容性验证**：自动检查全部五条作用定律（命题17.1）、Frobenius 互反律（定理17.9）和 Beck–Chevalley（定理17.8）。
- **附录D 组件**：态射注册表、证据账本，以及用于实现工作流 A 的范畴编排器。

算例

核心演示使用以下参数实现了第17.6 节中的算例：

- **枢纽：** Δ^2，约束为 $x_1 \le 0.6$。</output>
- **辐条：** Δ^2（无约束）。
- **费用映射：** 费用$(y) = 10\,y_1 + 5\,y_2 + 0\,y_3$（基点）。
- **跟踪：** $R_{\text{跟踪}\ \epsilon}$ 恒等敞口映射（$g_A = g_B = \mathrm{id}$）。

- **费用上限：** $R_{\text{费用}\leq\tau}$，上限可调 τ。

使用默认参数 $\epsilon = 0.05$ 和 $\tau = 6$基点时，枢纽可行空间包含4,331个格点（步长为 0。01）。跟踪菜单 $K \odot R_{\text{track},\ 0。05}$ 包含4,485个辐条空间点（略多于枢纽空间，因为位于Hub约束边界之外的辐条仍可跟踪其附近的枢纽点）；与费用上限投影算子相交后，点数减至3,511个。菜单明显向资产3顶点收缩，证实了投影算子定律（命题 17.1(e)。

相容性验证

该测试套件在步长为 0。05 时，以数值方式验证五条作用定律和弗罗贝尼乌斯互反律：

(a) 闭性：菜单 $K \odot R$ 非空且良定义。(b) 幺元性：$K \odot \Delta_{\Delta^2} = K$（两侧各有 195 个格点）。(c) 结合律：$(K \odot R) \odot S = K \odot (S \circ R)$，使用 $R = R_{\text{track},\ 0.10}$ 和 $S = R_{\text{turn}\leq 0.3}$进行验证。(d) 保序性：$K \subseteq K'$ 蕴含 $K \odot R \subseteq K' \odot R$，使用 $K' = \Delta^2$进行验证。(e) 投影算子：$K \odot R_{\text{fee}\leq 6} = K \cap \{y :\ \text{费用}(y) \leq 6\}$，且点数相符。

弗罗贝尼乌斯互反律（定理 17.9）在 $f(x) = 0.8\,x + 0.2(\,_{13,13,13})$, $R \equiv R_{\text{track},0.10}$，以及 $S = R_{\text{turn}\leq 0.3}$ 在步骤 0.10 得到验证；$f_!(R \cap f^* S) = f_! R \cap S$ 两边产生相同的集合。

工作流 A 演示

附录 D 的七个组件均实例化为 Python 类：

论文组件	实现
态射注册表	MorphismRegistry：对象、h-态射、v-态射
证据账本	EvidenceLedger：带时间戳的审计条目
范畴编排器	Categorical编排器.workflow_a()
重新实现工厂	可配置的可调用对象 $f :\ \Delta^n \to \Delta^m$
对齐引擎	通过 R.contains_pairs() 进行关系成员资格测试
求解器接口	对 $f(x')$ 进行直接求值
验证工作器	检查 $(x',\ y') \in R$

工作流 A 按照附录 D 所述流程进行：收到枢纽变更 $x \mapsto x'$后，编排器会计算一个候选辐条、检查安全性、提交或拒绝，并记录一个证据片段。交互式界面允许用户逐步查看此工作流并检查审计轨迹。

E.2 应用 II：概率框架

第二个应用实现了第三部分中的三种概率方法：第 19 节的安全半径、ϵ-HDR（定义 18.10），以及第 21 节的基于Wasserstein输运的方法。它由一个数学引擎（`prob_core.py`，约 350 行）和一个交互式界面（`prob_app.py`，约 400 行）组成，并配有 28 项自动化测试。它采用与应用I相同的 2-单纯形 Δ^2 和基于格的方法。

范围

该实现具体化了：

- **随机核**在 Δ^2 上（定义18.1）：三种核类型——高斯、双峰（“分裂峰”）和弯曲型（“香蕉”）——各自建模为投影到单纯形的样本生成器。

- **安全半径**（第19节）：对 r_ϵ 作经验计算，作为（$1-\epsilon$）—距离分位数、度量侵蚀、闵可夫斯基膨胀，以及半径在线性界$Lr_P + r_Q$与二次界 $\sqrt{(Lr_P)^2 + r_Q^2}$下的复合。

- **HDR**（定义18.10）：单纯形晶格上的核密度估计、密度阈值计算，以及 ϵ—高密度区域集合的提取。

- **Wasserstein输运**（定义21.1）：逐样本 L^1 修复成本、均值 W_1 到约束集的距离，以及基于预算的合规性检查。

- **失效模式场景**（第23节）：分裂峰（第23.1节）与香蕉形（第23.3节）。

- 三**方比较**：在同一情景下并排评估这三种方法。

- **复合**：序贯核的半径按线性和二次方式积累。

未包含。HSP-r 的完整范畴结构（2-胞腔、松弛函子）、人格索引范畴、卷积稳定性证明、空心壳场景以及生产环境中的最优输运求解器。

随机核

每个核 $P(x, \cdot)$ 都表示为一个蒙特卡洛采样器：给定枢纽点 $x \in \Delta^2$，该核通过向 x 添加噪声并投影回单纯形，在 Δ^2 上返回 N 个样本。实现了三种形状：

(a) 高斯：各向同性噪声 $x + \sigma\xi$, $\xi \sim \mathcal{N}(0, I)$，投影到 Δ^2。这会产生单峰、近似对称的分布。(b) 双峰：两个高斯分布的混合，权重各为 50%，沿第一坐标方向偏移，用于模拟第23.1节中的分裂峰。中心 $f(x)$ 位于两个模态之间的间隙中。(c) 香蕉：由 $x + (t, \kappa t^2 + \eta, -(t + \kappa t^2 + \eta))$ 生成的弯曲分布，其中 $t \sim \mathcal{N}(0, 3\sigma)$，用于模拟第23.3节中的税务感知型转换。

这三种形状旨在具体说明为什么三种合规方法之间的选择很重要：对于 (a)，三种方法的结论一致；而对于 (b) 和 (c)，安全半径方法会变得不必要地保守。

安全半径

安全半径 r_ϵ是通过经验计算得出的，即 $\{\|y_i - f(x)\|_2$ 的 $(1-\epsilon)$ 分位数： $y_i \sim P(x)\}$。在 $\sigma = 0.03$ 和 $\epsilon = 0.05$处加入高斯噪声时，实现得到 $r_{0.05} \approx 0.074$。对于双峰核，半径会扩大到 $r_{0.05} \approx 0.098$；对于香蕉核，则扩大到 $r_{0.05} \approx 0.124$——尽管高密度区域很紧，球仍必须扩大以涵盖延伸的尾部。

度量侵蚀实现了内平行集：若约束点 z 周围距离在 r 以内的所有格点都属于约束集，则该点得以保留。对于权重约束 $x_1 \leq 0.4$ （步长为 0.02 时有 861 个格点），侵蚀后的集合在高斯核下缩减为 798 个点，在香蕉核下缩减为 700 个点。在香蕉形情形中，中心 f（x）落在侵蚀后的集合之外：尽管分布的高密度区域完全位于约束范围内，安全半径方法仍会排除该枢纽。

通过构造序贯核 P （高斯， $\sigma = 0.025$）和 Q（高斯， $\sigma = 0.020$），并采用 $L = 1$，验证了复合性质。各自的半径为 $r_P \approx 0.060$ 和 $r_Q \approx 0.049$。线性界给出 $r_{\text{comp}} = Lr_P + r_Q \approx 0.109$；二次界给出 $\sqrt{(Lr_P)^2 + r_Q^2} \approx 0.078$。实际复合半径（根据复合样本测得）约为 0.080，这证实二次界更紧，且两个界都是保守的。

ϵ-HDR

密度估计使用单纯形晶格上的高斯核密度估计（步长为 0.02，共 1,326 个点），带宽与核参数相匹配。密度阈值 λ_ϵ 为样本点处密度值的 ϵ分位数； ϵ-HDR 为 $\{y : \hat{\rho}(y) \geq \lambda_\epsilon\}$。

对于双峰核，HDR 能正确识别出两个不相交簇，分别围绕一个模态。相比之下，球会覆盖两个模态之间的间隙——该区域的密度几乎为零。将风险预算从 $\epsilon = 0.20$ （20%-HDR）缩减至 $\epsilon = 0.05$ （5%-HDR），会使 HDR 从 40 个格点缩减至 10 个，仅涵盖峰值核心区域。这种收缩体现了 ϵ-支撑集单调性性质的几何内容。

Wasserstein输运

Wasserstein-1修复成本的计算方式为 $W_1 = \frac{1}{N}\sum_i \min_{z \in S} \|y_i - z\|_1$：对于每个样本，通过在晶格上进行暴力搜索，找到约束集 S 中距离最近的点。采用 $\sigma = 0.03$ 处的高斯核和权重约束 $x_1 \leq 0.5$时，平均修复成本为 $W_1 \approx 0.015$ ，违反率约为 3%。

逐样本成本图揭示了违反约束集中出现的位置：超出权重上限的样本需要进行最大幅度的调整，而落在 S 范围内的样本修复成本为零。传输箭头——在接口中以有向线段的形式呈现，从每个违反约束的样本指向距离最近的合规点——让第21节中“违反合规的经济成本”这一解释变得直观可见。

三方比较

比较选项卡在相同情景下运行全部三种方法，并使用相同的 ϵ。结果揭示了它们在结构上的差异：

情景	安全半径	HDR	Wasserstein
高斯	安全（$r = 0.074$）	安全（21 个点）	已批准（$W_1 = 0.015$）
分裂峰	安全（$r = 0.100$）	安全（10 分）	已批准（$W_1 = 0.016$）
香蕉（$x_1 \leq 0.4$）	**已拒绝** ($r = 0.130$)	安全（27 分）	已批准（$W_1 = 0.020$）

在香蕉情景中，面对严格权重约束（$x_1 \leq 0.4$），安全半径球超出了侵蚀约束集，因此枢纽被拒绝。HDR 描绘的是弯曲分布的实际密度等高线，而非强行采用对称球，因此能够正确识别出高概率区域符合约束。Wasserstein方法通过衡量消除少数边界违规所需的平均成本，发现该成本远低于预算。这正是第23.3节所述的失效模式：对于非球形分布，安全半径方法虽然可靠，但过于保守。

E.3 观察

这两种实现带来了四点观测结果。

首先，尽管格点枚举方法较为朴素，但足以验证确定性框架中的每个代数恒等式，并展示每个概率概念。离散化误差受格点步长限制，且不会在复合运算中累积——这是理论所提供的闭性保证带来的结果。在生产环境中，格点方法会被凸优化和最优传输求解器取代，但支配求解器如何组合的代数结构仍保持不变。

其次，附录 D中的关注点分离原则可直接转化为代码模块化。在应用I中，关系基类实现了抽象垂直态射接口；具体关系则是其子类。在应用 II 中，随机核 数据类实现了抽象核接口（定义 18.1）；具体核的差异仅在于各自的采样函数。在这两种情况下，合规检查都针对抽象接口进行，无需知道当前使用的是哪种具体类型。

第三，概率实现具体体现了论文的主张：这三种方法在权衡空间中各占据不同的位置。安全半径的计算速度最快（只需计算一个分位数），也最容易组合（半径可以相加），但不适用于非球形分布。HDR 能适应形状，但需要进行密度估计并设置带宽参数。Wasserstein方法提供了具有金融意义的成本度量，但需要针对约束集进行最近邻计算。像比较选项卡那样，在同一情景下运行这三种方法，用户便能判断何时采用较简单的方法就足够，以及何时并非如此。

第四，可视化界面让理论的几何内容变得具体可感。观察费用上限收紧时菜单如何缩小（应用I），或看到 HDR 如何描绘出弯曲的轮廓，同时安全球延伸至禁区（应用 II），都能带来直观的理解，补充形式证明。这对于向不熟悉范畴论或测度论的投资组合经理介绍该框架，尤其有用。

术语表

作用 (⊙) DOTS框架中的基本算子，用于将关系约束作用于状态。它通过该关系生成所有可从有效输入到达的可能输出的集合。（参见命题 17.1，第 17 节，附录 C）

伴随（$f_! \dashv f^*$） 两个函子（或算子）之间的一种关系，其中一个是另一个的最优近似。在此框架中，它正式关联推前（$f_!$）与拉回（f^*）运算，指出在辐条空间中验证约束 S，在逻辑上等价于在枢纽空间中验证拉回后的约束 f^*S。（参见定理 7.7、定理20.10、定理 21.7）

对齐关系 双范畴中的一个垂直态射 $\mathbb{HS}$：两个许可空间乘积 $R \subseteq K_1 \times K_2$的闭子集，表示投资组合之间的约束或相容性条件。示例包括跟踪误差界限、资产类别敞口限制、因子敞口容差以及策略一致性要求。与函数不同，单个枢纽投资组合可以与多个辐条投资组合对齐，反之亦然。（参见第 4 节、第 5 节）

贝克–切瓦利条件 一种交换律，用于描述交换方块中推前与拉回运算复合之间的关系。严格条件意味着完全的路径无关性（运算顺序无关紧要），而松弛版本则作为“安全保证”，确保上游验证具有保守性。（参见命题 8.1、定理 8.4、定理17.8、定理 20.12）

贝尔热最大值定理 优化理论中的一项基础结果，它给出了最优解集合随参数连续变化的条件。该定理用于证明，对重新实施问题进行优化会构造出一个良定义的连续水平态射。（参见定理 11.6，附录 B）

卷积稳定性 概率推送的连贯复合所需满足的条件。它确保复合过程中的“可能”结果包含在串联各中间步骤的可能结果所生成的集合中，从而防止概率质量泄漏到尾部。（参见定理 20.6）

退出成本 实现的投资组合分布与最近的完全流动投资组合之间的 Wasserstein 距离。它衡量清算所有非流动性头寸所需的预期换手率。（参见第 24.3节）

对应（多值函数） 一个映射 $\Phi\colon\ X \rightrightarrows Y$，它为每个输入 x 指定 Y的一个子集。在此框架中，对应表示投资组合的可行集，或在做出特定选择之前可选方案的“菜单”。（参见附录 B）

DOTS（系统双幺半群理论）该框架的扩展，用于建模这样一种系统：单个枢纽投资组合映射到一份允许的辐条投资组合“菜单”，而非单一的确定性结果。（参见第 17 节，附录 C）

双范畴（$\mathbb{HS}$）由对象（许可空间）、水平态射（重新实现）和垂直态射（对齐关系）构成的范畴结构。它可以同时对函数变换和关系约束进行建模。（参见第5节，附录A）

费勒核一种将连续有界函数映射为连续有界函数的随机核。在概率扩展（HSP-r）中，水平态射以紧 Feller 核建模，以确保在扰动下的稳定性。（参见第18.2节，附录B.3）

弗罗贝尼乌斯互反律一条逻辑定律，指出在优化前筛选资产全集，与先进行优化、再筛选结果，得到的有效集合相同（$f_!(R \cap f^* S) = f_! R \cap S$）。在概率情境下，这一规律表现为一种包含关系，并保证保守过滤。（参见定理 9.1、定理17.9、定理 20.13）

最高密度区域（HDR）一种基于概率密度、通过选取包含指定概率质量（例如 $1-\epsilon$）的最小闭集，来定义概率分布“有效支撑集”的方法。它定义了随机求解器的“安全区域”。（参见定义 18.10、第 20.1节）

中心／辐射端该框架的组织隐喻。中心 投资组合是投资意图的来源（例如，由首席投资官定义的模型投资组合）；辐射端 投资组合则是在不同投资载体、资产全集或约束环境中对该意图的具体实现（例如交易所交易基金、税务管理型独立管理账户、目标日期基金）。这一数学结构将两者之间的转换形式化，并确保转换协调一致。（参见第 5节、第 12节）

Kantorovich–Rubinstein 对偶性 一个对偶定理，将对 Wasserstein 距离表示为在 1-利普希茨函数上所取期望的上确界。它使得“修复成本”能够借助风险因子被高效估计。（见附录 B.4）

马尔可夫核 一个函数 $P\colon X \times \mathcal{B}(Y) \to [0,1]$，作为一种随机映射，将 Y 上的概率测度指派给每个 $x \in X$。（见附录 B.3）

迈克尔选择定理 一个结果：具有闭凸值的下半连续对应容许连续选择。它确保即使从选项“菜单”中，也可选取连续重新实现映射。（见定理 11.10）

路径无关性 贝克–切瓦利条件的操作后果：若合规在上游阶段已得到验证，则无需在下游重新验证。等价地，执行重新实现与合规性检查的顺序不影响最终的有效投资组合集合。松弛版本（审计安全性）保证上游验证是保守的；严格版本要求逐点笛卡尔条件。（见命题 8.1、定理8.4、第 12节）

许可空间 双范畴中的一个对象 $\mathbb{HS}$：一个单纯形的闭子集 $K \subseteq \Delta^n$，表示满足给定约束条件的投资组合全集。闭性并非技术细节，而是防止出现幻影投资组合的条件；紧致性（由于 Δ^n 是紧的，因此自动成立）则使适当性不再需要额外条件。（参见第 2节）

人物画像 用于标记一族许可空间的参数，例如目标日期滑行路径中的年龄群体，或人口统计条件化方案中的客户细分群体。人物画像框架（$\mathbb{HS}/B$）将整个理论纤维化到人物画像的基空间 B 之上，因此所有结果（伴随、Beck–Chevalley、Frobenius）都逐个人物画像成立。（参见第 16节）

幻影投资组合 满足所有局部合规检查、但在枢纽空间中没有有效父对象的辐射投资组合。当许可空间不是闭集时，就会出现幻影：一个序列

有效投资组合收敛到许可集合之外的极限，而优化器以无可挑剔的数值精度生成了该极限。对 $\mathbb{HS}$中所有对象施加闭性要求，正是为了防止这种病态情况。（参见第 2节和第 7节）

逐点笛卡尔方块交换方块上的一项条件，确保对于每一对匹配的输出，定义域中都存在一个有效的公共原像。这是严格 Beck–Chevalley 定律的必要条件。（参见定义8.2，第16节）

波兰空间一种可分且完全可度量的拓扑空间。这类空间为概率扩展（HSP-r）提供必要的拓扑基础，以确保测度具有良好的性质。（参见第18节，附录B.3）

私人资产溢价投资者持有私人（非流动性）资产所要求的超额收益总额，可分解为八个组成部分：纯非流动性溢价、风险溢价、担保价值、信息成本、交易复杂性、资产负债表租金、控制阿尔法和抵消项。（参见第 24, [54]节）

Portmanteau定理一条基本定理，用于确立概率测度弱收敛的等价条件。该定理将求解器稳定性与安全区域的上半连续性联系起来。（参见定理B.10）

Prokhorov 定理 一个通过紧性刻画概率测度相对紧性的定理。它是紧 Feller 核定义的基础，确保质量不会逃逸至无穷远。（见附录 B.3）

真映射 一种连续映射，其中每个紧集的原像都是紧集。在 $\mathbb{HS}$ 中，这确保闭对齐关系的推前仍然闭，从而防止出现“幻影投资组合”。（见命题 7.3，附录B）

拉回（f^*）将辐条侧约束转换为轮毂侧约束的操作。给定一个重新实现 $f: K_1 \to K_2$ 以及辐条上的对齐关系 $S \subseteq K_2 \times K_3$，拉回 $f^*S = \{(x,\ z) : (f(x)\ z) \in S\}$ 是这样一组枢纽投资组合：其在 f 下的像满足 S。通俗来说：“哪些枢纽投资组合会自动生成合规的辐条？”（见第 7 节，定理 7.7）

推前（$f_!$）将轮毂侧约束传播到辐条侧的运算。给定一个重新实现 $f: K_1 \to K_2$ 以及枢纽上的一个对齐关系 $R \subseteq K_1 \times K_3$，推前 $f_!R = \{(f(x)\ z) : (x, z) \in R\}$ 是由对齐的枢纽投资组合产生的辐条投资组合集合。适当性保证，只要 $f_!R$ 是闭集，R 也是闭集。（参见第7节，定理7.4，定理7.7）

重新实现双范畴中的一个水平态射 $\mathbb{HS}$：许可空间之间的连续映射 $f: K_1 \to K_2$，表示将枢纽投资组合转换为辐条投资组合的确定性过程。典型的重新实现包括多目标优化、投资载体替换（最小跟踪误差或最大收益）以及机械替换（例如，将外国证券换成 ADR 等价物）。在 DOTS 扩展中，重新实现被推广为集值“菜单”；在 HSP-r 中，则推广为随机核。（参见第5节、第17节、第18节）

安全半径（r_ϵ）用于量化随机求解器相对于其确定性中心的最大偏差，使求解器输出落在半径为 r_ϵ 的度量球内，且具有

至少 $1-\epsilon$ 的概率。安全半径方法将求解器误差建模为对称且均匀的分布，从而能够快速进行几何验证，但代价是结果较为保守。与之相对，HDR 方法追踪精确的密度等高线。（参见第 18.4 节、第 19.1 节）

集值分析 研究对应及其解析性质的数学分支，为处理投资组合的“菜单”和约束稳定性提供严谨的理论基础。（见附录 B）

紧性 随机核的一种性质，表明概率质量实际上始终处于紧区域内。它是确定性映射适当性的随机类比。（见定义 B.12，第 18.3 节）

上半连续性（UHC） 对应的一种连续性性质。它确保有效投资组合的集合不会因输入的微小变化而“膨胀”或形状发生剧烈变化。（见附录B，注释11.14）

Wasserstein 距离（W_1） 一种度量，其定义为将质量从一个分布传输到另一个分布所需的最低成本。在基于传输的安全模型中，它量化了将不合规投资组合调整为合规所需的预期换手率。（参见第 21 节，附录 B.4）

索引

作用（$\odot$），第 17 节，命题 17.1 合规（作为对齐），注释 4.3 行动菜单，定义 23.1 合规修正，第21节 伴随（$f_! \dashv f^*$） $\mathbb{HS}$中的复合，定理 7.7 水平，第 5 节 $\mathbb{HS}/B$（用户画像）中的内容，第 16 节 算子的，第 17 节 $\mathbb{S}$跨度中的内容，第 15 节 概率性（风险累积），定理-概率性（安全保证），定理 20.10 注释 20.5 Wasserstein，第 21.7 节 垂直（关系），定义 4.4 对齐关系 Wasserstein（松弛），定理 21.6 定义，第 4 节 测度集中，第 19.1 节 垂直态射，第 5 节 约束 环境投资组合空间（Δ^n），第 2 节中的定义 跨批次，第 16 节 架构（系统），附录 D 全局（算子的），第 17 节 资产集，第 2 节中的定义 约束贴合，第 23.2 节，第 18 节 属性映射，第 11 节 卷积稳定性，定理 20.6 审计安全性，命题 8.1，第 12 节 核心-卫星策略，第 17 节，第 24.2 节 审计轨迹，第 6 节，第 15 节 对应（多值函数），附录 B Axioma，例 18.6 修正预算，第 21.4 节 香蕉（分布形状），第 23.3 节，第- DOTS（系统双幺半群理论），第 18 节第 17 节 贝克–切瓦利条件 动态交易，第 24.3 节 DOTS，定理 17.8 双范畴 松弛（审计安全性），命题 8.1 $\mathbb{HS}$（中心辐射），第 5 节中的定义 概率性（早期审计），定理 20.12 $\mathbb{HS}/B$（按角色索引），第 16 节中的定义 严格，定理 8.4，定理 14.9 HSP – r（风险），第 18.2 节中的定义 Wasserstein，定理 21.9 $\mathbb{S}$跨度（证据），第 15 节 Bellman一致性，定理 11.17 贝尔热最大值定理，定理 11.6，附-装备（加框双范畴），定义 14.3，附-录 B 录 C 双范畴（加框），第 14 节，附录 C ϵ-支撑集（HDR），定义 18.10 证据账本，附录 D，第 18 节 笛卡儿方 证据空间，第 15 节 逐点（在 $\mathbb{HS}$ 中），定义 8.2 关于用户画像， 第 16 节中的定义 因子分解，例 3.4 范畴论 费勒核 双范畴，第 5 节，附录 A 定义，第 18.2 节中的定义，第-薄范畴，第 5 节 B.3 节中的定义 闭性 紧性，对象的，第 2 节 推前的弗罗贝尼乌斯互反律，定理 7.4 DOTS，定理 17.9 垂直复合的，引理 4.5 几何（压力测试），定理 20.14 $\mathbb{HS}$中的紧致性，定理 9.1 许可空间的，第 2 节 概率性（保守过滤），定理 20.13 真性的作用，第 7 节，附录 B 伴随与共轭，定义 14.3 Wasserstein，定理 21.11

伽罗瓦连接，附录 A 高斯混合模型（GMM），第22.2节 滑行路径，第16节 映射的图，第5节 总敞口上限，第23.2节 Gurobi，例 18.6 豪斯多夫空间，命题 2.3 最高密度区域（HDR），定义 18.10，第20.1节 空心壳层（分布形状），第 23.2节，第 18 节 水平态射定义，第 3 节中的定义 关于用户画像，第16节中的定义 中心辐射（ℍ𝕊），参见双范畴 流动性不足折价，第 24.3 节 非流动性溢价，第24节，第 24.3 节 交换律，第 14节 Kantorovich–Rubinstein 对偶性，附录 B.4 中的定理 Lax Beck–Chevalley，命题 8.1 Lax函子，附录 A.3 杠杆（Lipschitz常数），注释 19.11 流动性约束，第17节，第24节 流动性感知投资组合构建，第24节 总流动性不足上限，第 24.1节 带流动性门槛的核心—卫星策略，第24节 按角色索引，定义见第 16 节 目标函数，第 11 节 代数簇，第 17 节 最优执行，第 24.2 节 最优传输，附录B.4，第 21 节 凸优化，第 13 节（用于重新实现）随机的，第 18 节 路径无关性，第 8 节、第 12 节 允许的投资组合空间（K），定义见第 2 节 人物画像（基空间 B），第 16 节 幻影投资组合，例 6.6，第 10 节、第 23.1 节 逐点笛卡尔，定义 8.2 波兰空间，第 18 节，定义见 B.3 节 Portmanteau定理，定理 B.10 定量属性投资组合空间，定义见第 11 节 交易前合规，第 21.3 节、第 24.3 节 私人资产溢价，第 24 节 Prokhorov 定理，B.3节中的定理 真映射定义，定义见第 7 节，附录 B 中的定义 水平态射，如命题 7.3 拉回（f^*）定义，定义 6.1 诊断性与处方性用途，第 12 节 HDR（ϵ-拉回），第 20.1 节 安全半径（ϵ-拉回），定义见第 19.1 节 Wasserstein，定义 21 推前（$f_!$）定义，定义 6.4 HDR（ϵ-推前），第 20.1 节 安全半径（ϵ-推前），定义见第 19.1 节 Wasserstein，定义 21.3 定量属性（V），第 11 节 随机平滑，例 18.6，第 22.1 节

.2

退出成本，第 24.3动态再平衡，第 24.3维护预算，第24.3市场冲击约束，第 24.2加权传输成本，第 24.3马尔可夫核，定义见第B.3菜单（DOTS），第 17迈克尔选择定理，定理11.10最小头寸规模，第 23.1闵可夫斯基和，第 19.1多中心对齐，第 17幺半结构，附录 C蒙特卡洛投影，第 21.4对象（允许的投资组合空间）定义，定义见第 2无效示例，第7.3

.1

比率约束（重新表述），第 7.3重新实现定义，第 3最优构造，定理 11.6关系，参见对齐关系

风险预算，章节18

安全半径，第19.1节中的定义 单纯形（Δ^n），第2节中的定义 切片范畴，第16节 求解器（接口），附录 D 跨度（证据），第15节 分裂峰（分布形状），第23.1节、第 18 节 辐条，第 3 节中的注释 状态（DOTS），第17节、附录 C 随机核，第 18 节、附录B.3 支撑函子，第 24.3 节 目标日期基金，第16节 双范畴的薄性，第5节 核的紧性，定义B.12，第18.3节中的定义 跟踪误差，第 15 节中的例、第 17 节 运输成本，第21节 二胞（2-胞腔）证据变换，第15节 包含于 $\mathbb{HS}$，第5节 风险价值（VaR），第 18 节 垂直态射定义，第4节中的定义 关于用户画像，第16节中的定义 虚拟枢纽（插值），第16节 Wasserstein 距离（W_1），第21节，附录B.4中的定义 连线图，第C节中的定义，图17