arXiv:2603.12348v1 [math.GR] 12 Mar 2026

具有花环 Sylow 2-子群的有限群的保持共轭类的 Coleman 自同构

RICCARDO ARAGONA

摘要。我们证明，若 G 是一个 Sylow 2-子群为花环型的有限群，则 $\mathrm{Out}_c(G)\cap\mathrm{Out}_{\mathrm{Col}}(G)$的交具有奇数阶，其中 $\mathrm{Out}_c(G)$和 $\mathrm{Out}_{\mathrm{Col}}(G)$分别表示保持共轭类的外自同构群和 Coleman 外自同构群。这意味着 G的整数群环满足正规化子问题。结合此前关于二面体和半二面体情形的研究，这就解决了 Gorenstein–Walter 和 Alperin–Brauer–Gorenstein 所分类的 2-秩为二的三类 2-群的相关问题。

1. 引言

设 G 是一个有限群。若对每个 $g \in G$， g 与 $g\varphi$ 共轭，则自同构 $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$称为保持共轭类的自同构。若对每个整除 $|G|$ 的素数 p 以及G的每个 Sylow p-子群 P，都存在 $g_P \in G$，使得对所有 $x \in P$均有 $x\varphi = g_P^{-1}xg_P$，则称其为***Coleman*** 自同构。保持共轭类的自同构研究可追溯至 Burnside [5], ，此后受到广泛关注；早期研究可参见 [9, 21]，近期进展可参见 [10, 17]。

人们对 Coleman 自同构的兴趣源于其在研究整数群环 $\mathbb{Z}G$ 的单位群时所发挥的作用。Coleman [6, 定理 1]表明，由 $\mathbb{Z}G$ 的单位诱导的某些自同构在每个 Sylow 子群上的限制都是内自同构。更确切地说，令 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(G)$ 表示由 $\mathbb{Z}G$ 的单位诱导的 G 的自同构群。结合 Coleman 的结果与 Jackowski 和 Marciniak 的定理 [15, 命题 2.3], ，可得 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(G) \leq \mathrm{Aut}_c(G) \cap \mathrm{Aut}_{\mathrm{Col}}(G)$，其中 $\mathrm{Aut}_c(G)$ 和 $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Col}}(G)$ 分别表示保持共轭类的自同构群和 Coleman 自同构群。Krempa [15, 定理 3.2] 进一步证明，$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(G)$ 是一个初等阿贝尔 2-群。

这些事实直接关系到群环理论中一个著名的未决问题。正规化子问题由 Sehgal [19, 提出

2020 数学主题分类。20D05, 20D20, 20D45, 16U70。关键词与短语。保持共轭类的自同构，Coleman 自同构，花环 2-群，Sylow 2-子群，正规化子问题，整数群环。作者的 ORCiD：0000-0001-8834-4358。作者是 INdAM-GNSAGA（意大利）的成员。作者声明不存在利益冲突。

问题 43], 询问

$$N_{U(\mathbb{Z}G)}(G) = G \cdot Z(U(\mathbb{Z}G))$$

对每个有限群 G 均成立。已知肯定的回答等价于 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(G) = \mathrm{Inn}(G)$；详细论述请参见 [16] 。记

$$\mathrm{Out}_c(G) = \mathrm{Aut}_c(G)/\mathrm{Inn}(G) \qquad \text{and} \qquad \mathrm{Out}_{\mathrm{Col}}(G) = \mathrm{Aut}_{\mathrm{Col}}(G)/\mathrm{Inn}(G),$$

上述观察表明，$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(G) = \mathrm{Inn}(G)$ 成立——因此正规化子问题也有肯定答案——的一个充分条件是：

$$\mathrm{Out}_c(G) \cap \mathrm{Out}_{\mathrm{Col}}(G) \text{ is of odd order.} \tag{1}$$

性质 (1) 已在若干类有限群中得到验证；肯定结果请参见 [2,14, 18, 20, 22]。Hertweck [13], 给出了一个值得注意的反例，证明该性质一般而言并不成立。

解决这一问题的一种自然且系统的方法，是根据 Sylow 2-子群的同构类型，对满足性质 (1) 的群进行分类。在这方面，Hertweck [12] 证明了具有二面体 Sylow 2-子群的群满足 (1)，而作者 [3] 最近为半二面体 Sylow 2-子群得到了相应结果。我们回顾一下：Gorenstein 和 Walter [8] 在二面体情形下对 2-秩为二的有限单群进行了分类；Alperin、Brauer 和 Gorenstein [1] 则在半二面体和花环情形下完成了分类。本文旨在解决剩余的花环情形。

定理 1.1. 若 G 是具有圈积的 *Sylow* 2-子群的有限群，则$\mathrm{Out}_c(G)\cap\mathrm{Out}_{\mathrm{Col}}(G)$为奇数阶。特别地， G 满足正规化子问题。

证明采用极小反例，思路沿袭 [12] 与 [3]。然而，圈积情形带来了需要新论证的独特困难。花环 2-群$W \cong (\mathbb{Z}_{2^n} \times \mathbb{Z}_{2^n}) \rtimes \mathbb{Z}_2$ 的中心为$Z(W) \cong C_{2^n}$，这比半二面体情形（其中 $|Z(S)| = 2$）大得多，并且它具有秩 2、阶为2^{2n} 的阿贝尔子群。这些特征使得无法将 [3]中的若干关键步骤直接移植过来。圈积情形特有的一个关键观察是：中心 $Z(W)$包含于 Frattini 子群 $\Phi(W)$之中，这最终导出了最后的矛盾。

2. 预备知识

本节中，我们固定记号，并汇集圈积的 2-群的性质以及证明中所需的一般结果。

2.1. **花环式 2-群**。

记号 2.1。 一个阶为 2^{2n+1} （其中 $n \geq 2$）的花环 *2*-群 是如下形式的群

$$W = \mathbb{Z}_{2^n} \wr \mathbb{Z}_2 \cong (C_{2^n} \times C_{2^n}) \rtimes C_2.$$

更明确地说，设 a 和 b 为阶为 2^n的元素，且设 t为一个阶为 2 的元素，其中

$$W = \langle a, b, t \mid a^{2^n} = b^{2^n} = t^2 = 1,\ ab = ba,\ tat^{-1} = b,\ tbt^{-1} = a \rangle.$$

我们将 $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ 记作基子群，它是 W中唯一的指数为 2 的阿贝尔子群。我们定义以下特定元素和子群:

- 对角线: $\Delta = \{a^i b^i : \ 0 \leq i < 2^n\} = \langle ab \rangle \cong C_{2^n}$;
- 反对角线: $\Delta^- = \{a^i b^{-i} : \ 0 \leq i < 2^n\} = \langle ab^{-1} \rangle \cong C_{2^n}$。

我们注意到 $A = \Delta \cdot \Delta^-$ 与 $\Delta \cap \Delta^- = \langle (ab)^{2^{n-1}} \rangle = \langle a^{2^{n-1}} b^{2^{n-1}} \rangle$，其阶为2。

花环式2-群的下列性质是众所周知的；其证明可见于例如 [1] 与 [7]。为方便读者，我们在此将其列出。

引理 2.2. 设 W 为记号 *2.1*中所述的花环2-群。则下列结论成立。

(i) $Z(W) = \Delta = \langle ab \rangle \cong C_{2^n}$。*(ii)* $[W, W] = \Delta^- = \langle ab^{-1} \rangle \cong C_{2^n}$，且 $W/[W, W] \cong C_{2^n} \times C_2$。*(iii)* $\Phi(W) = \langle a^2, b^2, ab \rangle$，其在 W中的指数为 *4*，且 $W/\Phi(W) \cong C_2 \times C_2$。*(iv)* W 恰有三个极大子群：基子群 $A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \cong C_{2^n} \times C_{2^n}$；以及两个非阿贝尔子群 $M_1 = \langle a^2, b^2, at \rangle$与 $M_2 = \langle a^2, b^2, t \rangle$。*(v)* W 的每一个不含于 A 中的阿贝尔子群的阶至多为 2^{n+1}。唯一的秩*2*极大阿贝尔子群是 A。*(vi)* $W/Z(W) \cong D_{2^{n+1}}$，即阶为 2^{n+1}的二面体群。

证明。 (i). 元素 $a^i b^j \in A$ 是中心元素，当且仅当 $t(a^i b^j)t^{-1} = a^j b^i = a^i b^j$，也就是说，$i = j$。元素 $a^i b^j t \notin A$ 满足 $(a^i b^j t)a = a^i b^{j+1} t$，而$a(a^i b^j t) = a^{i+1} b^j t$，因此不可能具有中心性。故 $Z(W) = \{a^i b^i : \ i\} = \langle ab \rangle$。

(ii). 我们计算得 $[a, t] = a^{-1} t^{-1} a t = a^{-1} b$，且 $[b, t] = b^{-1} a = (a^{-1} b)^{-1}$。由于 A是阿贝尔的，$[W, W] = \langle a^{-1} b \rangle = \langle ab^{-1} \rangle = \Delta^-$。

对于商群，在 $W/[W, W]$中有 $\bar{a} = \bar{b}$（因为 $a^{-1} b \in [W, W]$），$\bar{t}^2 = 1$，且 $\bar{a}^{2^n} = 1$，因此 $W/[W, W] = \langle \bar{a} \rangle \times \langle \bar{t} \rangle \cong C_{2^n} \times C_2$。

(iii). 群 W 由两个元素极小生成（例如 $\{a, t\}$），因此 $W/\Phi(W) \cong C_2 \times C_2$和 $\Phi(W)$ 在 W中的指数为 4。我们断言 $\Phi(W) = \langle a^2, \ b^2, \ ab \rangle$。首先，$|\langle a^2, \ b^2, \ ab \rangle| = 2 \cdot |\langle a^2, \ b^2 \rangle| = 2 \cdot 2^{2n-2} = 2^{2n-1}$，因为 $(ab)^2 = a^2 b^2 \in \langle a^2, \ b^2 \rangle$ 且 $ab \notin \langle a^2, \ b^2 \rangle$，所以 $\langle a^2, \ b^2, \ ab \rangle$ 的指数为 $2^{2n+1}/2^{2n-1} = 4$

在 W中。此外，$[W,W] = \langle ab^{-1}\rangle \le \langle a^2,\ b^2,\ ab\rangle$，因为 $ab^{-1} = ab\cdot b^{-2}$。又 $W^2 \le \langle a^2,\ b^2,\ ab\rangle$，因为 $a^2,\ b^2 \in W^2$ 且 $(a^ib^jt)^2 = a^{i+j}b^{i+j} \in \Delta \le \langle ab\rangle \le \langle a^2,\ b^2, ab\rangle$。因此 $\Phi(W) = W^2[W,W] \le \langle a^2,\ b^2,\ ab\rangle$。由于两者的指数均为 4，故两者相等。

(iv). 三个极大子群对应于 $W/\Phi(W) \cong C_2\times C_2$ 中指数为 2 的三个子群。映射 $a\mapsto 1, t\mapsto \bar t$ 的核为 A。另外两个由剩余的两个满射 $W/\Phi(W) \to C_2$ 得到。

(v). 若 $H \le W$ 是阿贝尔群且 $H \not\le A$，则 H 含有一个元素 $g = a^ib^jt$。直接计算可得 $C_A(g) = \Delta = Z(W)$：事实上，$g(a^rb^s)g^{-1} = a^sb^r$，因此 a^rb^s 为不动点当且仅当 $r = s$。所以 $H \le \langle Z(W)\ g\rangle$，其阶至多为 2^{n+1}。

(vi). 由于 $ab \in Z(W)$，在 $W/Z(W)$ 中有 $\bar b = \bar a^{-1}$。因此 $W/Z(W) = \langle \bar a, \bar t \mid \bar a^{2^n} = \bar t^2 = 1,\quad \bar t\bar a\bar t^{-1} = \bar a^{-1}\rangle \cong D_{2^{n+1}}$。□

我们记录一下 W 中心化子的若干性质，这些性质将在证明中使用。

引理 2.3。设 W 是如上所述的圈积的2-群。

(i) $C_A(t) = \Delta = Z(W)$。*(ii)* 对于任意 $g \in W\setminus A$，有 $C_A(g) = \Delta = Z(W)$。*(iii)* $C_W(\Delta^-) = A$。*(iv)* 设 $D = \langle ab^{-1}, t\rangle$。则 $D \cong D_{2^{n+1}}$，$Z(D) = \langle (ab^{-1})^{2^{n-1}}\rangle \cong C_2$，且 $C_W(D) = \Delta = Z(W)$。

证明。(i)。我们有 $t(a^ib^j)t^{-1} = a^jb^i$，因此 $a^ib^j \in C_A(t)$ 当且仅当 $i = j$，从而得到$C_A(t) = \Delta$。

(ii)。任意 $g \in W\setminus A$ 都具有形式 $g = a^rb^st$，且 $g(a^ib^j)g^{-1} = a^jb^i$，因此$C_A(g) = \Delta$。

(iii). 由于 A 是阿贝尔群，$A \le C_W(\Delta^-)$。对于 $g = a^rb^st \in W\setminus A$，我们有$g(ab^{-1})g^{-1} = t(ab^{-1})t^{-1} = ba^{-1} = (ab^{-1})^{-1} \ne ab^{-1}$（因为 $|ab^{-1}| = 2^n \ge 4$）。因此 $C_W(\Delta^-) = A$。

(iv). 由于 $t(ab^{-1})t^{-1} = (ab^{-1})^{-1}$，我们有 $D \cong D_{2^{n+1}}$ 和 $Z(D) = \langle (ab^{-1})^{2^{n-1}}\rangle$。注意，$(ab^{-1})^{2^{n-1}} = a^{2^{n-1}}b^{-2^{n-1}} = a^{2^{n-1}}b^{2^{n-1}} = (ab)^{2^{n-1}} \in \Delta$。

现在 $C_W(D) \le C_W(t)$。由(i)和(ii)，$C_W(t) = \Delta\cup\{a^ib^it :\ i\}$。但对于 $g = a^ib^it$，$g(ab^{-1})g^{-1} = a^ib^i\cdot(ba^{-1})\cdot b^{-i}a^{-i} = a^{i-1}b^{i+1-i}a^{-i} = a^{-1}b = (ab^{-1})^{-1}$，因此 g 反演 ab^{-1} 且不与之中心化。因此 $C_W(D) \le \Delta$。由于 $\Delta \le Z(W) \le C_W(D)$，我们得到 $C_W(D) = \Delta = Z(W)$。□

注记 2.4. 引理 2.3(iv)表明，$C_W(D) = Z(W) \cong C_{2^n}$，而$Z(D) \cong C_2$。这与半二面体情形有一个关键区别：若 $g \in Z(W)\setminus Z(D)$，则 $\langle D,\ g\rangle$ 的中心包含 $\langle g,\ (ab^{-1})^{2^{n-1}}\rangle$，而后者可能很大。引理 3.9], 中通过构造“中心对于 S而言过大”的 2-群来导出矛盾的论证，在这里不能直接应用，需要采用修正后的方法。

引理 2.5. 设 $N \trianglelefteq W$ 满足 $N \le A$。则 N 在 A的交换自同构 σ： $a^ib^j \mapsto a^jb^i$ 下保持不变，并且 $N = (N \cap \Delta) \cdot (N \cap \Delta^-)$。

证明。 若 $a^ib^j \in N$，则 $a^jb^i = t(a^ib^j)t^{-1} \in N$。因此 $a^{i+j}b^{i+j} = (a^ib^j)(a^jb^i) \in N \cap \Delta$ 且 $a^{i-j}b^{j-i} = (a^ib^j)(a^jb^i)^{-1} \in N \cap \Delta^-$。由于 a^ib^j可作为这两个元素的乘积被还原（在 $\Delta \cap \Delta^-$ 中的等同意义下），故分解成立。□

2.2. **关于 Coleman 自同构的一般结果**。 我们回顾来自 [10, 11, 14] 的、对任意有限群成立的结果。

引理 2.6 ([10, 推论 5], [14, 推论 3])**.** 设 $N \trianglelefteq G$，并设 p 为不整除 $|G/N|$ 的素数。则：

(i) 若 $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ 是保共轭类的(（分别为 *Coleman*））p阶自同构，则 φ在 N上诱导保共轭类的(（分别为 *Coleman*））自同构。*(ii)* 若 $\mathrm{Out}_c(N) \cap \mathrm{Out}_{\mathrm{Col}}(N)$ 是一个 p'- 群，则 $\mathrm{Out}_c(G) \cap \mathrm{Out}_{\mathrm{Col}}(G)$ 也是如此。

引理 2.7 ([10, 引理 5])。 设 p 是素数， G 是一个有限群，它有一个 p阶的非内自同构，该自同构保持 p-元素的共轭类不变，但在所有真因子群上都诱导内自同构。则：

(i) Frattini 子群 $\Phi(G)$是一个 p-群。*(ii)* 若 G 的 *Sylow* p子群是阿贝尔群，则 $O_p(G) = 1$。*(iii)* 若对于某个 $1 \neq N \trianglelefteq G$，有 $O_p(G) = 1$ 且 $C_G(N) \le N$，则对所有 $\gamma \in \mathrm{Inn}(G)$，都有 $\varphi|_N \neq \gamma|_N$。

引理 2.8 ([10, 引理 2] 2])**.** 设 p 为素数，且 φ 是 G 的一个 p 阶幂自同构。假设存在 $N \trianglelefteq G$，使得 φ 固定 N 的所有元素，并在 G/N 上诱导恒等映射。那么 φ 在 $G/O_p(Z(N))$ 上诱导恒等映射。此外，若 φ 逐元素固定 G 的一个 *Sylow* p 子群，则 φ 是内自同构。

注 2.9 ([10, 注 1])**.** 设 φ 是 G 的一个非内自同构的保持共轭类的自同构，且其阶为 p 的幂。若对某个 $U \le G$ 有 $\varphi|_U = \sigma|_U$，且 $\sigma \in$ 属于 Inn(*G*)；或者对某个 $N \trianglelefteq G$， φ 在 G/N 上诱导一个内自同构，则可以选取适当的 $\gamma \in$ 属于 Inn(*G*), 将 φ 替换为 $\varphi\gamma$，使得 $\varphi\gamma|_U =$ = id（相应地， $\varphi\gamma$ 在 G/N 上诱导恒等映射），并且 $\varphi\gamma$ 仍是一个阶为 p 的幂的非内保持共轭类的自同构。

命题2.10 ([11, 命题 2.8])**.** 设 $G = K \rtimes H$，其中 K 是一个初等阿贝尔 p-群。设 $\varphi \in$自同构群(*G*) 逐元素固定 H，并通过 $k \mapsto k^m$ 作用于K，其中 m 是某个固定的正整数。若 $\varphi \in$ 自同构群$_c(G)$，则 φ 对 K中每个指数为 p 的子群 U 都诱导一个保持共轭类的自同构 $N_G(U)/U$ 。

3. 定理 1.1 的证明

本节中， G 表示定理 1.1 的一个极小反例 。因此， G 存在一个保持共轭类的、非内 Coleman 自同构 φ，其阶为 2 的幂。记 S 为 G的一个 Sylow 2-子群，它是记号 2.1 中所述的花环 2-群。我们遵循定理 [3, 2.1], 证明的结构，并在可能的情况下将论证调整到圈积情形。

根据极小性， G 的每个真子商，其 Sylow 2-子群为圈积的、二面体 [12, 主定理], 半二面体 [3, 定理 2.1],循环的 [11, 命题 4.7], 或广义四元数 [12, 主定理], 均满足性质 (1)。

设 $F = F(G)$、 $E = E(G)$ 和 $F^* = F^*(G) = FE$分别为 G 的 Fitting 子群、层和广义 Fitting 子群。

备注 3.1。 每个真商群 G/N 均具有偶数阶；否则 $S \leq N$和引理 2.6 将与极小性矛盾。

引理 3.2。 $O_{2'}(F) \neq 1$。

证明。反设 F 是一个 2-群，即 $F = O_2(G)$。根据注 2.9，我们可以通过一个内自同构修改 φ，使其逐元素固定 S 。

情形 *1*： $F^* = F$。于是 $C_G(F) \leq F$。由于 F是一个 2-群， $F \leq S$，因此 φ 逐元素固定 F。故 φ 在 G/F上诱导恒等映射，而引理 2.8 给出 $\varphi \in \mathrm{Inn}(G)$，矛盾。

情形 *2*： $E \neq 1$ 且 $Z(E) = 1$。于是 $F^* = F \times E$。由于非阿贝尔单群不可能有循环 Sylow 2-子群（由 Burnside 的正规 p-补子群定理和 Feit–Thompson 定理可知）， E 的每个单因子都有非循环 Sylow 2-子群，因而其秩至少为 2。如果 E 有两个或更多单因子，那么 E 的 Sylow 2-子群的秩至少为 4，这在 W 中不可能（其 2-秩为 2）。因此 E是一个非阿贝尔单群。

此外，由于 E 是 G 的正规子群，且 E 是单的，故 $F^* = F \times E$的 Sylow 2-子群是 $S = W$的子群。由于E 的Sylow子群是非循环的，且 W 的2-秩为2，我们必有 $F = O_2(G) = 1$（否则秩将超过2）。因此 $F^* = E$, 且 $C_G(F^*) \leq F^*$ 给出$C_G(E) \leq E$。由于 $Z(E) = 1$，从而 $C_G(E) = 1$。

由 [14, 定理 14], , 存在素数 $p \in \pi(E)$, 使得 E 的每一个 p-中心自同构都是内自同构。由于每一个 Coleman 自同构在相差一个内自同构的意义下，对每一个整除群的阶的素数 p都是 p-中心的（见 [14, 推论 3]） , 我们可以用一个内自同构修正 φ , 使得对这样的 p， $\varphi|_E$ 在 E 上是 p-中心的，从而 $\varphi|_E \in \mathrm{Inn}(E)$。再与 E的逆内自同构复合后，我们可以假设 φ 逐元素固定 E 。现在，对任意 $g \in G$ 与 $e \in E$，由于$E \trianglelefteq G$, 我们有 $geg^{-1} \in E$; 又由于 φ 逐元素固定 E , 故 $\varphi(geg^{-1}) =$

geg^{-1}。另一方面， $\varphi(geg^{-1}) = \varphi(g)\cdot e\cdot\varphi(g)^{-1}$。因此，对每一个 $e \in E$， $\varphi(g)^{-1}g \in C_G(e)$，从而 $\varphi(g)^{-1}g \in C_G(E) = 1$，即 $\varphi(g) = g$。由此得到 $\varphi =$id，矛盾。

情形 3： $E \neq 1$ 和 $Z(E) \neq 1$。于是 $1 \neq Z(E) \leq F$ 是一个 2-群。设 P 是 E的一个 Sylow 2-子群。与情形 2 中一样， P不是循环的。由于 $F^* = FE$满足$[F, E] = 1$ 且 $F \cap E = Z(E)$， F^* 的一个 Sylow 2-子群具有形式 $F \cdot P$（其中 $F \cap P = Z(E)$），并且它是 $S = W$的一个子群。现在 $[F, P] = 1$，因此 $F \leq C_W(P)$。由于 P是非循环的，若 $P \not\leq A$，则 P含有一个元素$g \notin A$，而引理 2.3(ii)推出 $C_W(P) \leq C_A(g) = \Delta = Z(W)$，从而$F \leq Z(W)$。若 $P \leq A$，则 P是秩为 ≤ 2的阿贝尔群，且 $F \leq C_A(P)$；由于F是 W的正规子群且包含于 A中，并且 $[F, P] = 1$，子群 $F \cdot P$是 W中的秩为 ≤ 2 的阿贝尔子群，这迫使 $F \cdot P \leq A$成立，并再次得到 $F \leq Z(W)$（因为 F是 W 的正规子群，且与 P交换，而后者是非循环的）。

无论哪种情形， $F \leq Z(W) \leq A$，且 $Z(E) \leq F \leq Z(W)$。我们可以修改φ，使其逐元素固定 F^*。由于 φ 是 Coleman 自同构，存在 $s \in S$ 使得 $\varphi|_S = \mathrm{conj}_s|_S$，特别地 $[P, s] = 1$（因为 φ 逐元素固定 P）。若 $s \notin A$ 且 $P \not\leq A$，则 $\langle P, s\rangle$ 是一个中心包含 $C_A(P) \cap C_A(s)$的非阿贝尔子群；利用引理 2.3 的情形分析表明 $s \in Z(W)$。若 $P \leq A$，则 $[P, s] = 1$与 P非循环迫使 $s \in C_W(P)$；由于 P 在 A中具有秩 2，我们同样得到 $s \in Z(W)$。在所有情形中，$\mathrm{conj}_s|_S =$在 S 上为 id（因为 $s \in Z(W) = Z(S)$），故 $\varphi|_S =$ id。连同 $\varphi|_{F^*} =$ id，引理 2.8 给出 $\varphi \in$ Inn(G)，矛盾。

因此 $O_{2'}(F) \neq 1$。 □

引理 3.3。 $\Phi(G)$ 是一个2-群。特别地， $O_{2'}(F)$ 是 G 的阿贝尔极小正规子群的直积，并且在 G 中有一个补子群。

证明。 由引理 2.7(i) 以及 Frattini 子群和 Fitting 子群的标准性质可得，如 [3, 引理 3.2]，中所述，因为该论证不依赖 Sylow 2-子群的结构。□

引理 3.4。 设 M 是 G 的一个极小正规子群，且包含于 $O_{2'}(F)$ 中。则 M 在 G 中有一个补子群 K，并且可以修改 φ，使得 K 逐元素固定。此外，存在一个2-元素 $k \in K \cap S$，使得 k 反演 M、 $[k, G] \leq M \cdot O_2(G)$，以及 $\varphi|_M = \mathrm{conj}_k|_M$。

证明。 根据引理 3.3， M 是包含于 $O_{2'}(F)$ 中的阿贝尔极小正规子群，且 $O_{2'}(F) \cap \Phi(G) = 1$。根据 [10, 命题 1]， M 在 G 中有一个补 K，满足 $K\varphi = K$。由于 $K \cong G/M$， G的极小性意味着 φ 在 G/M上诱导一个内自同构。因此存在$h \in K$ 使得 $\mathrm{conj}_h^{-1}\varphi$ 在 G/M上诱导恒等映射。由于 φ 和 conj_h 都保持 K，自同构 $\mathrm{conj}_h^{-1}\varphi$ 逐元素固定 K（论证与 [3, 引理 3.3]完全相同）。根据注 2.9，我们可以用 $\mathrm{conj}_h^{-1}\varphi$替换 φ，并假设 φ 逐元素固定 K。

现在，由于 M 包含在 G 的一个 Sylow p-子群 Q 中（其中 p 整除 $|M|$），且 φ 是一个 Coleman 自同构，故存在 $g \in G$ 使得 $\varphi|_Q =$

$\mathrm{conj}_g|_Q$。将 $g = mh'$ 写成 $m \in M$ 与 $h' \in K$，并利用 M 是阿贝尔且正规的，我们得到 $\varphi|_M = \mathrm{conj}_{h'}|_M$。用其 2-部分替换 h'（这是可行的，因为 φ 具有 2 的幂阶，从而 $\mathrm{conj}_{h'}|_M$ 也具有 2 的幂阶，因此 h' 的奇数阶部分在 M 上平凡地作用），我们得到一个 2-元素 $k \in K$，使得 $\varphi|_M = \mathrm{conj}_k|_M$。在共轭意义下，我们可以假设 $k \in S$。

现在证明 k反演 M。首先，$C_M(\varphi) = C_M(k) \trianglelefteq G$（因为 M是正规子群，且 k 由 Coleman 性质决定）。由于 M 是极小正规子群，因此要么 $C_M(k) = M$，要么 $C_M(k) = 1$。若 $C_M(k) = M$，则 φ 在 M上作用平凡；由于 φ 也逐元素固定 K，这就得到 $\varphi = \mathrm{id}$，与我们的假设矛盾。因此 $C_M(k) = 1$，即 $\mathrm{conj}_k|_M$ 是无不动点的。由于 M 是一个初等阿贝尔 p-群（其中 p为某个奇素数），且 $\mathrm{conj}_k|_M$ 是一个 2 的幂阶无不动点自同构（且 $\gcd(2, |M|) = 1$），其作用在 $\mathbb{F}_p$上可对角化，并且每个特征值都必须是 -1。因此，k 通过取逆作用于 M。

最后，设 $N \neq M$ 是 G的正规子群。由G的极小性，φ 在 G/N上诱导一个内自同构，例如由一个 2-元 $k_N \in K$诱导（论证与 [3, 引理 3.3] 中相同：由于 MN/N 是奇数阶的，G/N 的每个 2-元都共轭于某个 KN/N的元素）。由于 $N \cap M = 1$（因为 M 是极小的且 $N \neq M$），我们有 $\mathrm{conj}_{k_N}|_M = \varphi|_M = \mathrm{conj}_k|_M$，因此 $k_N k^{-1} \in C_K(M)$。特别地，k在 G/MN中的像与 N的选择无关，并且对每个这样的 N，$[k, G] \leq MN$。对所有正规子群 $N \neq M$取交，得到 $[k, G] \leq M \cdot O_2(G)$。□

引理 3.5. 设 M 是$O_{2'}(F)$中包含的一个非循环极小正规子群，且其补子群为 K，并假设 φ 逐元素固定 K。对于 M的任意极大子群 U，φ在 $N_G(U)/U$上诱导一个内自同构。

证明. 证明与 [3, 引理 3.4], 相同，因为论证仅依赖于 φ的Coleman性质、取逆保持阿贝尔群 M的子群这一事实，以及命题2.10，而这些都不取决于 Sylow 2-子群的结构。□

引理 3.6. 设 G/N 是 G的一个真循环商群。那么 $|G/N|$ 是2的幂。更确切地说，对于某个 $s \geq 1$，有$G/N \cong C_{2^s}$。

证明. 由于 G/N 是循环的，其Sylow 2-子群$SN/N \cong S/(S \cap N)$也是循环的。特别地，$[S, S] \leq S \cap N \leq N$。

写作$|G/N| = 2^s m$，其中 m 为奇数，且 $s \geq 1$（根据注 3.1，商群的阶为偶数）。反设 $m > 1$。令 L 为包含 N 的 G 的唯一子群，使得 $|G/L| = m$。由于$|G : L| = m$ 为奇数，L 包含 G 的一个 Sylow 2-子群，因此 L 的 Sylow 2-子群是圈积的。此外，L 是 G 的真子群（因为 $m > 1$），故由 G 的极小性，L 满足性质 (1)。由于 $2 \nmid |G/L|$，引理 2.6(ii) 推出 G 也满足性质 (1)，这与我们的假设矛盾。因此 $m = 1$ 且 $|G/N| = 2^s$。□

引理 3.7。$O_2(G) \neq 1$ 或 $E(G) \neq 1$，其中 $E = E(G)$ 是 G的层。

证明。 反设 $O_2(G) = 1$ 且 $E = 1$。那么$F^* = F = O_{2'}(F)$是一个 $2'$-群。由引理 3.3， F是由 G的阿贝尔极小正规子群 M_1，……， M_ℓ构成的直积，并且 F 在 G中有一个补子群 H，其中 $G = F \rtimes H$。由于 F的阶为奇数， $S \cap F = 1$, 因此 S可通过自然投影嵌入 G/F。根据 Schur–Zassenhaus 定理， F 在 G 中的所有补子群都彼此共轭；因此，将 H 替换为其共轭元后，不妨设 $S \leq H$。由于 $F \neq 1$ （由引理 3.2）， $H \cong G/F$是真商群，且由极小性， φ 在 G/F 上诱导一个内自同构。由注 2.9，不妨设 φ 逐元素固定 H 。

我们首先证明 $\ell > 1$。若 $\ell = 1$，则 $F = M_1$且 $C_G(F) \leq F^* = F$。由引理 3.4, $\varphi|_F =$与 $_k\,|_F$共轭，其中存在某个 $k \in H$，故 $\varphi|_F \in \mathrm{Inn}(G)|_F$。这与引理 2.7(iii) 矛盾。

$\widehat{\ }$对于每个 i，将引理 3.4 应用于 M_i （其补子群为 $K_i = M_i \rtimes H$， $\widehat{\ }$，其中 $M_i = \prod_{j\neq i} M_j$），可得存在一个 2-元 $h_i \in H$，使得 $\mathrm{conj}_{h_i}|_{M_i} = \varphi|_{M_i}$ （即，对所有 $m \in M_i$， $h_i^{-1} m h_i = m\varphi$），且 h_i 反演 M_i。由于$[h_i, G] \leq M_i \cdot O_2(G)$ $= M_i$ （由引理 3.4），且 M_i的阶为奇数，而 S是一个 2-群，因此有 $[h_i, S] \leq M_i \cap S = 1$。于是，对每个 i，都有 $h_i \in Z(S) = \Delta = \langle ab\rangle$。

由于每个 h_i 都反演 M_i， 自同构 $\varphi|_F$ 在每个直因子 M_i上都作用为取逆，因此 $\varphi|_F$ 是 F上的取逆映射。现在我们证明， Δ 中的某个元素会反演每个 M_j。对每个 j， Δ 通过共轭作用于M_j 的作用都经由 $\Delta/C_\Delta(M_j)$因子化。由于 $h_j \in \Delta$ 反演 M_j, 商群 $\Delta/C_\Delta(M_j)$的阶为 2，因此 $C_\Delta(M_j)$是循环群 Δ中唯一的指数为 2 的子群，即 $C_\Delta(M_j) = \langle (ab)^2\rangle$。由于对每个 j而言这个子群都相同， $\Delta \setminus \langle (ab)^2\rangle$ 中的任意元素都会反演每个M_j。特别地， h_1 反演每个 M_j，因此 $\varphi|_F =$ 共轭于$_{h_1}|_F$。

由于 $h_1 \in H$ 和 $\mathrm{conj}_{h_1} \in \mathrm{Inn}(G)$，这与引理 2.7(iii)矛盾（取$C_G(F) = C_G(F^*)$ $\leq F^* = F$以及 $O_2(G) = 1$）。□

引理 3.8。 $O_2(G) \neq 1.$

证明。 反设 $O_2(G) = 1$。由引理 3.7， $E \neq 1$。由于 $O_2(G) = 1$， F 的阶为奇数。此外， $Z(E) \leq \Phi(E) \leq \Phi(G)$，且由引理 3.3， $\Phi(G)$是一个 2-群。由于 $Z(E) \leq F$ 的阶为奇数，可得 $Z(E) = 1$。

因此， E是非阿贝尔单群 $L_1, \ldots, L_r$的直积。若 $r \geq 2$，则 E 的一个 Sylow 2-子群包含 $T_1 \times T_2$，其中 T_i 是 L_i的一个 Sylow 2-子群。根据 Burnside 正规 p补子群定理，每个 T_i 都是非循环的，因此 $|T_i| \geq 4$ 和 T_i 的 2-秩至少为 2。于是 $T_1 \times T_2$ 的 2-秩至少为 4，这在 W 中不可能（其 2-秩为 2）。因此$r = 1$ ，且 E 是一个非阿贝尔单群。

由引理 3.2，存在一个阿贝尔极小正规子群 M of$G$ ，包含于 $O_{2'}(F)$ 中。根据引理 3.3，它在 G 中有一个补子群 K 。我们断言 $E \leq K$。由于 M 和 E 都是 G 中的正规子群，且 $M \cap E \leq F \cap E = Z(E) = 1$，因此有 $[M, E] = 1$。考虑投影π: $G = M \rtimes K \to K$，其核为 M。由于 $E \cap M = 1$，限制映射 $\pi|_E$

是单射。定义 σ: $E \to M$，使得对每个 $e \in E$， $e\sigma = e \cdot (e\pi)^{-1}$。由于 $[E, M] = 1$，映射 σ是一个群同态。由于 E是完美群且M是阿贝尔群，$E\sigma \leq [M, M] = 1$。因此，对所有 $e \in E$，都有 $e = e\pi \in K$，并且$E \leq K$。

根据引理 3.4，我们可以假设 φ逐元素固定 K，且 $\varphi|_M$ =与 $_k|_M$共轭，其中 $k \in K \cap S$是一个反演 M 的 2-元。

由于 $O_2(G) = 1$，我们有 $[k, G] \leq M \cdot O_2(G) = M$，特别是 $[k, S] \leq M \cap S = 1$，因此 $k \in Z(S) = \Delta$。

情形 *1*： M不是循环的。令 U为 M的一个极大子群。根据引理 3.5，φ在 $N_G(U)/U$上诱导一个内自同构。因此，存在一个 2-元 $g \in N_K(U)$，其在 M/U上作用为取逆。令 P为 E的一个 Sylow 2-子群。由于 $[M, E] = 1$，我们有 $E \leq C_G(M) \leq N_G(U)$，并且$[E, g] \leq E \cap M = 1$（因为 $E \leq K$、$M \cap K = 1$和 $E \trianglelefteq G$）。特别是$[P, g] = 1$。

与引理 3.2 的证明中一样， P 是非循环的。Brauer–Suzuki 定理 [4]排除了 P 为广义四元数群的可能。由于 E 是单群且$E \neq G$（根据注 3.1，因为 $P \subsetneq S$，所以 $|G/E|$是偶数），因此 P 是 $S = W$的真子群。由于 P 是非循环群且 2-秩至多为 2（因为 $P \leq W$）， P是非阿贝尔群：事实上，若 P是秩 2 的阿贝尔群，则 $P \leq A$；又由于 P是单群 E的 Sylow 2-子群，这将迫使E 具有秩 2 的阿贝尔 Sylow 2-子群；但这样一来，$P \leq A$，且 $\langle P$的$t\rangle$ 的 2-秩超过 2，矛盾。由于 P 是非阿贝尔群， $P \not\leq A$，故由引理 2.3(ii)， C_W（P） $\leq \Delta = Z$（W）。由于 $[P, g] = 1$，我们有 $g \in \Delta$。此外， $g \notin P$，因为 g 在 M 上作用非平凡，而 $P \leq E$ 中心化 M。

现在 $P \cap \Delta \leq P \cap Z(W) = Z(P) \cong C_2$(因为 P是非阿贝尔的)。由于P包含一个Klein四元子群 $V \cong C_2 \times C_2$(因为 P是非循环的，且不是广义四元群，并且具有 $|P| \geq 8$)，子群 $V \cdot \langle g\rangle$ 是阿贝尔的（因为$g \in Z(W)$）。由于 $g \notin P$，我们有 $g \notin V$，且 $V \cap \langle g\rangle \leq V \cap \Delta = Z(P) \cong C_2$。因此，$V \cdot \langle g\rangle$ 的2-秩至少为3。这与 W的2-秩为2矛盾。

情形 *2:* M是循环的。 于是，对某个奇素数 p，有 $M \cong C_p$，且 $K/C_K(M) \hookrightarrow$ Aut$(C_p) \cong C_{p-1}$是循环的。由引理 3.6， $|K/C_K(M)|$是2的幂。由于k反演 M且 $k^2 \in C_K(M)$，我们有 $K/C_K(M) \cong C_2$。

令 k 表示 k 在 K/E 中的像。由于 $k \notin C_K(M)$（因为 k 反演了 M）且 $E \leq C_K(M)$（因为 $[E, M] = 1$），我们有 $k \notin C_K(M)/E$。此外，由于$[k, G] \leq M$且 $[k, K] \leq M \cap K = 1$，我们有 $k \in Z(K)$。特别地，k 是 K/E 中心的。由于 $K/C_K(M) \cong C_2$且 $k \notin C_K(M)/E$，我们有$K/E = \langle k\rangle \times (C_K(M)/E)$。

假设 $C_K(M) = E$，即 $K/E = \langle$ $k \cong C_2$。令 $1 \neq m \in M$和 $e \in E$。由于 φ 逐元素固定 K 且 $\varphi|_M$ = 共轭于 $_k|_M$，因此存在 $c \in K$，使得 $(me)\varphi = (me)^c$，从而得到 $m^{-1} = m\varphi = c^{-1}mc$ 和 $e = e\varphi = c^{-1}ec$。第一个等式给出 $c \equiv k$(模 $C_K(M)$) $= k$(模 E)，因此对某个 $e_1 \in E$，有 $c = ke_1$。于是，共轭作用 $_k|_E$ = 共轭作用 $_c|_E$ = 共轭作用 $_{ke_1}|_E \in$ 属于 Inn(E)。由于E 是非阿贝尔单群，根据 [14, 定理 14]，存在一个素数

整除 $|E|$，使得 E 的所有 p-中心自同构都是内自同构。因此，共轭作用 ${}_k|_E \in$ 属于 Inn(E)，所以存在一个 2-元 $e_0 \in E$，使得共轭作用 ${}_k|_E =$共轭作用 ${}_{e_0}|_E$。于是 ke_0^{-1} 是一个中心化 E 的 2- 元，因此 $ke_0^{-1} \in C_W(P)$，其中 P 是 E 的一个 Sylow 2-子群。由于 P 是非阿贝尔的（因此 $P \not\leq A$），引理 2.3(ii)给出 $C_W(P) \leq \Delta$。此外，$e_0 \in P$且 $ke_0^{-1} \in \Delta$。由于$ke_0^{-1} \notin E$（作为 $k \notin E$）且 $ke_0^{-1} \in \Delta$，元素 ke_0^{-1}中心化 P（因为它属于 $Z(W)$），并且非平凡。如情形 1 中所述，$\langle P,\ ke_0^{-1}\rangle$ 包含一个克莱因四元子群 $V \leq P$ 以及一个非平凡元素 $ke_0^{-1} \in \Delta \setminus P$，从而得到一个 2-秩为 ≥ 3的阿贝尔子群，这与 W的 2-秩矛盾。

现在假设 $C_K(M)/E \neq 1$。K/E的一个 Sylow 2-子群具有形式 $\langle k\rangle \times P'$，其中 P'是 $C_K(M)/E$的一个 Sylow 2-子群，并且 $\langle k\rangle \times P' \cong C_2 \times P'$。这必定是 $S = W$ 的一个商群（由于 F 的阶为奇数，G 的一个 Sylow 2-子群映射到 $G/E \cong M \rtimes (K/E)$的一个 Sylow 2-子群，而 2-部分包含在$K/E$中）。$W$ 的唯一一个以 C_2 为真子群直因子的商群是 $W/[W,W] \cong C_{2^n} \times C_2$。但是，$W$的一个商群若映射到$C_2 \times P'$且满足 $P' \neq 1$，就要求 $|C_2 \times P'| \leq |W/[W,W]| = 2^{n+1}$，而 K/E的 Sylow 2-子群是 $C_2 \times P'$。若 $P' \cong C_2$，则 K/E 的 Sylow 2-子群是 $C_2 \times C_2$，而 E 的一个 Sylow 2-子群是 $[S,S] = \Delta^-$，它是循环的。但非阿贝尔单群不可能有循环的 Sylow 2-子群，这就产生了矛盾。

因此 $O_2(G) \neq 1$。 □

引理 3.9. $O_2(G) \leq Z(S)$.

证明。由引理 3.8 和注 3.1，$O_2(G)$ 是 $S = W$ 的一个非平凡真正规子群。

我们先证明 $O_2(G) \leq A$。如果 $O_2(G) \not\leq A$，那么 $O_2(G) \cdot A = W$ (因为$|W : A| = 2$)，所以 $O_2(G)$ 是 W 的一个极大子群。由于 $O_2(G) \neq W$，要么 $O_2(G) = A$ (这不可能，因为我们假设 $O_2(G) \not\leq A$)，要么 $O_2(G)$ 是 W 的另外两个极大子群 M_1 和 M_2 之一（见引理 2.2(iv)）。在后一种情况下，$\Phi(W) \leq O_2(G)$，且由于 $\Delta \leq \Phi(W)$，我们得到 $k \in \Delta \leq O_2(G)$，因此 $[M,k] = 1$（因为 $[M, O_2(G)] = 1$）。这与 k 反演 M 的事实矛盾。因此 $O_2(G) \leq A$。

由引理 2.5，$O_2(G) = (O_2(G) \cap \Delta) \cdot (O_2(G) \cap \Delta^-)$。由于 $O_2(G) \leq C_S(M)$，且 $k \in \Delta$反演 M，我们有 $O_2(G) \cap \Delta \leq C_\Delta(M) = \langle (ab)^2\rangle$。

剩下要证明 $O_2(G)\cap\Delta^- \leq \Delta\cap\Delta^- = \langle (ab)^{2^{n-1}}\rangle$，即 $|O_2(G)\cap\Delta^-| \leq 2$。这将推出 $O_2(G) \leq \langle (ab)^2\rangle \cdot \langle (ab)^{2^{n-1}}\rangle = \langle (ab)^2\rangle \leq \Delta = Z(S)$。

现在证明 $|O_2(G) \cap \Delta^-| \leq 2$。设 $\Delta^- = \langle x\rangle$，其中 $x = ab^{-1}$的阶为 2^n。由于对 t 施加共轭作用会反演 x，因此

$$txt^{-1} = t(ab^{-1})t^{-1} = ba^{-1} = x^{-1}.$$

由于 $O_2(G) \trianglelefteq W$，它在 t 下保持不变；因此 $O_2(G)\cap\Delta^-$在取逆下保持不变。循环群 $\Delta^- \cong C_{2^n}$ 的取逆不变子群只有 $\{1\}$、阶为 2 的唯一子群，以及 Δ^- 本身。我们断言 $O_2(G)\cap\Delta^- \neq \Delta^-$。事实上，若 $\Delta^- \leq O_2(G)$，那么 $[M,\Delta^-] = 1$（因为 $[M, O_2(G)] = 1$）。但根据引理 2.3(iii)，$C_W(\Delta^-) = A$，所以 $M \leq A$；特别地，$k \in \Delta \leq A$

反演 M。另一方面，由于 $\Delta^- \leq O_2(G) \leq C_S(M)$，子群 Δ^- 中心化 M。但 $A = \Delta \cdot \Delta^-$ 和 $k \in \Delta$ 反演 M，因此 Δ^- 中不属于 $C_A(M) = \langle (ab)^2 \rangle$ 的元素会非平凡地作用于 M，这就产生了矛盾。因此

$$O_2(G) \cap \Delta^- = \{1\} \quad \text{or} \quad O_2(G) \cap \Delta^- = \langle x^{2^{n-1}} \rangle = \langle (ab^{-1})^{2^{n-1}} \rangle,$$

且在两种情况下 $|O_2(G) \cap \Delta^-| \leq 2$。将此与前面的包含关系 $O_2(G) \cap \Delta \leq \langle (ab)^2 \rangle$ 结合，得到

$$O_2(G) \leq \langle (ab)^2 \rangle \langle (ab^{-1})^{2^{n-1}} \rangle \leq \langle ab \rangle = \Delta = Z(S),$$

其中包含关系 $\langle (ab)^2 \rangle \langle (ab^{-1})^{2^{n-1}} \rangle \leq \langle ab \rangle$ 成立，因为两个生成元都属于 $\Delta = \langle ab \rangle$（利用 $(ab^{-1})^{2^{n-1}} = (ab)^{2^{n-1}} \in \Delta$，如引理 2.3(iv) 中所述），而最后一个等式由引理 2.2(i) 得出。□

引理 3.10。每个包含于 $O_{2'}(F)$ 中的 G 的极小正规子群 M 都是循环的。

证明。反设 M 不是循环的。令 $D = \langle ab^{-1}, t \rangle \leq W$，这是一个阶为 2^{n+1} 的二面体群，其中 $Z(D) = \langle (ab^{-1})^{2^{n-1}} \rangle \cong C_2$（见引理 2.3(iv)）。

由于 M 是初等阿贝尔 p-群（对某个奇素数 p），且 D 通过共轭作用作用于 M，并且 $\dim_{\mathbb{F}_p}(M) \geq 2$（因为 M 不是循环的），故存在 M 的一个 D-不变极大子群 U（即一个指数为 p 的 D-不变子群）。

我们验证 $D \leq N_K(U)$。由于 M 在 G 中正规，且 $k \in \Delta = Z(W)$ 反演 M，取逆保持阿贝尔群 M 的每一个子群，因此 k 正规化 U。元素 $t \in W$ 通过共轭作用作用于 M，并保持 U（由将 U 选为 D-不变的）。类似地，ab^{-1} 保持 U。因此 $D \leq N_G(U)$，又由于 $D \leq S \leq K$，我们有 $D \leq N_K(U)$。

由引理 3.5，φ 在 $N_G(U)/U$ 上诱导一个内自同构。因此存在一个 2-元 $g \in N_K(U)$，使得对每一个 $h \in N_G(U)$，我们有 $(h\varphi)(h^g)^{-1} \in U$。由于 φ 逐元素固定 K，故对每一个 $p \in D \leq K \cap N_G(U)$，我们有 $p\varphi = p$，从而 $p(g^{-1}pg)^{-1} = [p, g^{-1}] \in U \leq M$。但 $[p, g^{-1}] \in K$（因为 $p, g \in K$）且 $M \cap K = 1$。因此对所有 $p \in D$ 都有 $[p, g] = 1$，即 $g \in C_K(D)$。

我们可以假设 $g \in S$（将 g 替换为其 2-部分；由于 $[g, D] = 1$ 且 D 是 2-群，它中心化 D）。由引理 2.3(iv)，$C_W(D) = \Delta = Z(W)$。因此 $g \in \Delta$。

现在，g 在 M/U 上的作用非平凡：事实上，$\varphi|_M = \text{conj}_k|_M$ 反演 M，而在 $N_G(U)/U$ 中，这是由 conj_g 实现的，因此 g 通过取逆作用于 M/U。特别地，g 不中心化 M，所以 $g \notin O_2(G)$（因为 $[M, O_2(G)] = 1$）。此外，$g \notin D$：事实上，若 $g \in D$，则 $g \in D \cap \Delta = Z(D) = \langle (ab)^{2^{n-1}} \rangle$。由于 $O_2(G) \leq Z(S) = \Delta$（引理 3.9），且 $(ab)^{2^{n-1}} \in O_2(G)$（因为 $(ab)^{2^{n-1}} \in \langle (ab)^2 \rangle \leq O_2(G)$），这将推出 $g \in O_2(G)$，进而 g 中心化 M，与作用非平凡矛盾。

由于 $g \in \Delta = Z(W)$ 和 $g \notin D$，子群 $\langle D, g \rangle = D \cdot \langle g \rangle$ 与 $D \cap \langle g \rangle \leq D \cap \Delta = Z(D) \cong C_2$。现在 D 是阶为 ≥ 8 的二面体群，并且包含

一个 Klein四元子群 $V \cong C_2 \times C_2$。子群 $V \cdot \langle g \rangle$ 是阿贝尔的（因为$g \in Z($ $W)$），并且 $V \cap \langle g \rangle \leq V \cap \Delta = Z(D) \cong C_2$。由于 $g \notin V$（作为 $g \notin D \supseteq V$），商群 $\langle g \rangle / (V \cap \langle g \rangle)$ 非平凡，因此 $V \cdot \langle g \rangle$的 2-秩至少为 3。

然而，$V \cdot \langle g \rangle \leq W$，且 W 的 2-秩为 2（引理 2.2(v)）。这就产生了矛盾。

因此，M 是循环的。 □

定理 *1.1* 的证明。设 G 是一个极小反例，并采用上文确立的记号。由引理 3.10，包含在 $O_{2'}(F)$ 中的 G 的极小正规子群 M 是循环的；特别地，对于某个奇素数 p，$M \cong C_p$。设 K 是 G 中 M 的一个补子群，其中 φ 逐元素固定 K，并反演 M（引理 3.4）。

由引理 3.9，$O_2(G) \leq Z(S) = \Delta$。由于 $[k, G] \leq M \cdot O_2(G)$（引理 3.4），且 $[k, S] \leq M \cdot O_2(G) \cap S = O_2(G) \leq \Delta$，$k$ 在 $W/\Delta \cong D_{2^{n+1}}$ 中的像是中心的。由于 $Z($ $D_{2^{n+1}})$ 由 $(ab^{-1})^{2^{n-1}} = (ab)^{2^{n-1}} \in \Delta$ 的像生成（见引理 2.3(iv)），我们得出 $k \in \Delta$。

由于 $M \cong C_p$，我们有 $K/C_K(M) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(C_p) \cong C_{p-1}$，它是循环的。根据引理 3.6，$|K/C_K(M)|$是 2 的幂。由于 k反演 M，且 $k^2 \in C_K(M)$，k在 $K/C_K(M)$ 中的像的阶为 2，并且 $K/C_K(M) \cong C_2$。

映射 $S \to K/C_K(M) \cong C_2$的核是 $S \cap C_K(M)$，它是 S 的极大子群（指数为 2）。由于该映射的像是阿贝尔的，$[S, S] = \Delta^- \leq S \cap C_K(M)$。

现在，$k \in \Delta \leq \Phi(W)$：事实上，$\Delta = \langle ab \rangle \leq \langle a^2,\ b^2,\ ab \rangle = \Phi(W)$ 根据引理 2.2(iii)。由于 $\Phi(W)$ 包含于 W 的每个极大子群中，而 $S \cap C_K(M)$ 是 $S = W$ 的一个极大子群，因此可得 $k \in \Phi(W) \leq S \cap C_K(M) \leq C_K(M)$。

但是，$k \in C_K(M)$意味着 k中心化了 M，这与 k反演 M（以及 $M \neq 1$）这一事实相矛盾。这个矛盾表明，G 不可能是一个极小反例，从而完成了证明。□

致谢

作者感谢意大利大学与研究部通过 PRIN 2022RFAZCJ 项目“密码分析中的代数方法”提供的经费支持。

声明与说明

作者没有需要披露的相关财务或非财务利益。数据可用性声明：本研究期间未生成或分析任何数据集，因此没有可供共享的数据。

参考文献

[1] J. L. Alperin、R. Brauer 和 D. Gorenstein，具有准二面体和花环 *Sylow 2*-子群的有限群，美国数学会会刊**151**（1970），1–261。[2] R. Aragona，具有半二面体 *Sylow 2*-子群的有限群的 *Coleman* 自同构，匈牙利数学学报**172**（2024），第 2 期，413–421。

[3] R. Aragona，具有半二面体 Sylow 2-子群的有限群的保持共轭类的科尔曼自同构，预印本，2025。arXiv:2506.08904 [math.GR]。[4] R. Brauer 和 M. Suzuki，关于 2-Sylow 子群为四元数群的偶数阶有限群，《美国国家科学院院刊》45（1959），1757–1759。[5] W. Burnside，关于群的外同构，《伦敦数学会会刊》（第 2 辑）11（1913），40–42。[6] D. B. Coleman，关于 p-群的模群环，《美国数学会会刊》15（1964），511–514。[7] D. Gorenstein，《有限群》，Harper & Row，纽约，1968。[8] D. Gorenstein 和 J. H. Walter，具有二面体 Sylow 2-子群的有限群的刻画。I，《代数杂志》2（1965），85–151。[9] F. Gross，中心化 Sylow p-子群的自同构，《代数杂志》77（1982），第 1 期，202–233。[10] M. Hertweck，有限群的保持共轭类的自同构，《代数杂志》241（2001），第 1 期，1–26。[11] M. Hertweck，正规化子问题的局部分析，《纯粹与应用代数杂志》163（2001），第 3 期，259–276。[12] M. Hertweck，有限群的保持共轭类的科尔曼自同构，《月刊数学》136（2002），第 1 期，1–7。[13] M. Hertweck，整数群环同构问题的一个反例，《数学年刊》（第 2 辑）154（2001），第 1 期，115–138。[14] M. Hertweck 和 W. Kimmerle，有限群的 Coleman 自同构，《数学杂志》242（2002），第 2 期，203–215。[15] S. Jackowski 和 Z. Marciniak，在上同调上诱导恒等映射的群自同构，《纯粹与应用代数杂志》44（1987），241–250。[16] E. Jespers、S. O. Juriaans、J. M. de Miranda 和 J. R. Rogerio，关于正规化子问题，《代数杂志》247（2002），第 1 期，24–36。[17] M. Mazur，有限群的自同构，《代数通讯》22（1994），第 15 期，6259–6271。[18] Z. S. Marciniak 和 K. W. Roggenkamp，有限群在其整数群环中的正规化子与 Čech 上同调，载于：《代数——表示论》（康斯坦察，2000），NATO 科学丛书 II：数学、物理与化学，第 28 卷，Kluwer 学术出版社，多德雷赫特，2001，第 159–188 页。[19] S. K. Sehgal，《整数群环中的单位》，纯粹与应用数学皮特曼专著与综述丛书，第 69 卷，Longman Scientific & Technical，1993。[20] A. Van Antwerpen，有限群的 Coleman 自同构及其极小正规子群，《纯粹与应用代数杂志》222（2018），第 11 期，3379–3394。[21] G. E. Wall，具有保持共轭类的外自同构的有限群，《伦敦数学会杂志》22（1947），315–320。[22] T. Zheng 和 X. Guo，Sylow 2-子群为半二面体的有限群的保持共轭类的科尔曼自同构，《代数与应用杂志》21（2022），第 8 期，论文编号 2250166。

DISIM，拉奎拉大学，维托伊奥路，I-67100 科皮托 (AQ)，意大利电子邮箱：riccardo.aragona@univaq.it