arXiv:2603.12371v1 [math.DG] 12 Mar 2026

带柱状边界流形上的狄利克雷特征值近似

ANUSHA BHATTACHARYA

Abstract. 我们证明，具有柱状边界的紧致黎曼流形上拉普拉斯–贝尔特拉米算子的狄利克雷特征值，可由流形上 (ε, ρ)-邻近图构造的截断图拉普拉斯算子的谱来近似。该近似在一类 $\mathcal{M}$ 流形上是一致的，这类流形由里奇曲率的界、单射半径的下界以及直径的上界刻画。我们证明，截断图拉普拉斯算子的第 k个特征值介于流形截断区域的第 k个狄利克雷特征值之间。当参数 ε, ρ 以及比值$\frac{\varepsilon}{\rho}$ 趋于零时，这些估计给出截断图拉普拉斯算子的特征值收敛到拉普拉斯–贝尔特拉米算子的狄利克雷特征值。

–

1. Introduction

谱几何中的一个基本问题，是利用有限离散模型逼近黎曼流形上拉普拉斯–贝尔特拉米算子的谱。给定从流形中抽取的有限点样本，一种自然的方法是在离散数据上构造加权图及其对应的图拉普拉斯算子。图拉普拉斯算子广泛应用于无监督学习任务，例如降维 [2, 10], 半监督学习 [3, 8] 和谱聚类 [16, 18]。在这些场景中，学习算法的收敛性取决于图拉普拉斯算子向拉普拉斯–贝尔特拉米算子的谱收敛。

现有关于谱收敛的结果大致可分为概率方法和确定性方法。对于按照流形上已知概率测度抽取的点，文献 [4, 12] 研究了图拉普拉斯算子依概率的谱收敛。对于带边界流形，Peoples 和 Harlim [17] 研究了狄利克雷特征值问题，并证明随着均匀抽样点数量增加，图拉普拉斯算子以高概率实现谱收敛。

已有多项研究 [1, 11, 15], 在确定性情形下建立了谱收敛。Burago、Ivanov 和 Kurylev [7] 证明，在截面曲率、单射半径和直径均有一致界的条件下，由紧致、无边界黎曼流形上的 ε-网构造的图拉普拉斯算子具有谱收敛性。随后，他们与作者合作的工作 [14]将这些方法推广到更广泛的一类黎曼流形，并以里奇曲率界取代截面曲率界。将这些谱逼近结果推广到带边界流形会带来额外挑战：边界邻域虽然体积很小，却可能显著影响相关的能量估计 [5]。Lu [13] 利用反射测地线和 [7]中的技术，推导出了带诺伊曼边界条件的拉普拉斯–贝尔特拉米算子的谱逼近。

本文利用流形的适当离散化上的截断图拉普拉斯算子，逼近带柱状边界的紧致黎曼流形上拉普拉斯–贝尔特拉米算子的狄利克雷谱。柱状边界在边界邻域内诱导出乘积结构，使我们能够构造出可控制边界附近能量估计的离散化。随后，我们可以应用 [7]中提出的谱逼近变分技术。

定义1. 设 (M, g) 是一个带边界 ∂M 的紧黎曼流形。若存在 M 中 ∂M 的一个邻域 U，使得 (U, g) 与乘积流形 $(\partial M \times [0, s_0],\, g_{\partial M} + dt^2)$ 等距，其中 $g_{\partial M}$ 表示 ∂M 上的诱导度量，t 表示 $[0, s_0]$ 上的坐标，则称 M 具有宽度为 $s_0 > 0$ 的柱状边界。

考虑由满足以下条件的、具有宽度大于 s_0 的柱状边界的 n 维光滑黎曼流形构成的 $\mathcal{M}$ 类：

$$|Ric| \leq \lambda, \quad diam \leq D, \quad \text{and} \quad inj \geq i_0$$

其中， inj 和 $diam$ 分别表示该流形的单射半径和直径。对于 $M \in \mathcal{M}$ 和 $t \leq s_0$，我们考虑截断区域

$$M_t = \{x \in M | d(x, \partial M) \geq t\}$$

其中， ∂M 表示 M的边界。

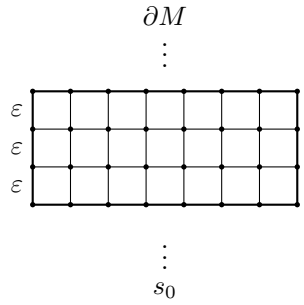
1.1. 离散化方案。 设 $\partial X_0 \subset \partial M$ 是边界的一个有限 ε-网，并令 ν 表示沿 ∂M的向内单位法向量场。我们沿法方向 ν将 ∂X_0 投影到 ∂M_t 上。具体而言，对于$t > 0$ ，我们定义

$$\partial X_t = \{\exp_x(t\nu_x) : x \in X_0\}.$$

我们注意到 $\partial X_t \subset \partial M_t$。 固定 $0 < t + \varepsilon < s_0$。我们在 M中构造一个 ε-网 X，如下所述。设 $X_{t+\varepsilon}$是 $M_{t+\varepsilon}$上的一个ε-网，它是通过将 $\partial X_{t+\varepsilon}$延拓到 $M_{t+\varepsilon}$的内部而构造的。对于满足 $t - k\varepsilon \geq 0$的 $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ，我们定义

$$X = X_{t+\varepsilon} \bigsqcup \partial X_{t+\varepsilon} \bigsqcup_{k:\, t-k\varepsilon>0} \partial X_{t-k\varepsilon}.$$

下图说明了圆柱区域 $\partial M \times [0, t]$的离散化。



引入层 $\partial X_{t+\varepsilon}$ 是为了使后续章节中介绍的函数的离散化在 ∂X_t上为零；这些函数的支集紧包含于 $M_{t+\frac{\varepsilon}{2}}$中。因此，所得的离散函数在截断图上满足狄利克雷边界条件。

定义 2 (ε， ρ)-邻近图）。给定任意 $0 < \varepsilon < 3\rho < t + \varepsilon < s_0$，有限图 $\Gamma^t_{\varepsilon,\ \rho}$ 以 1.1 中的顶点集 $X = \{x_i\}_{i=1}^N$ 和边集 e_{ij} 为基础，若满足以下条件，则称为 (ε， ρ)-邻近图:

- M 可以通过在 X 上作沃罗诺伊分解 $\{V_i\}_{i=1}^N$ ，划分为可测子集，使得 $V_i \subset B_\varepsilon(x_i)$ 和 $M = \bigcup B_\varepsilon(x_i)$，其中 $B_\varepsilon(x_i)$ 是 M 中以 x_i 为中心、半径为 ε 的球。
- 如果两个顶点 x_i 和 x_j 之间的黎曼距离小于 ρ.，则它们由边 e_{ij} 相连

- 测度定义于 $\Gamma^t_{\varepsilon,\ \rho}$: 令 $\mu_i = \text{vol}(V_i)$. X ，则可赋予其离散测度 $\mu = \sum_{i=1}^N \mu_i \delta_{x_i}$， 其中 δ_{x_i} 表示位于 x_i. 处的狄拉克测度
- 边上的权重: 设 ν_n 为欧几里得 n-空间中单位球的体积。赋予边 e_{ij}以下权重

$$w_{ij} = \frac{2(n+2)}{\nu_n \rho^{n+2}} \mu_i \mu_j.$$

注 1.1. 由于边界邻域与一个乘积圆柱等距，圆柱区域中的沃罗诺伊单元具有乘积结构。

具体而言，设 W_i^0表示 ∂M 上与 $x_i \in \partial X_0$对应的沃罗诺伊单元。然后，沿 ν将 W_i^0投影到 $\partial M_{t'}$上，定义 $W_i^{t'} = \exp(t'\nu(W_i^0))$，对所有满足 $t' = t - k\varepsilon > 0$的 $k \in \mathbb{N} \cup \{0, -1\}$ 均如此。于是，$\exp_{x_i}(t'\nu_{x_i})$在 M 中的相应沃罗诺伊单元为

$$V_i^{t'} = W_i^{t'} \times \left[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right].$$

该结构 边界附近的沃罗诺伊单元对于控制能量估计至关重要 .

空间 $L^2(X_t) = L^2(X_t,\ \mu)$ 上的内积定义为

$$\langle u, v\rangle = \langle u, v\rangle_{L^2(X_t)} = \sum_{x_i \in X_t} \mu_i u(x_i) v(x_i).$$

定义 3. 截断图拉普拉斯算子 Δ_t：$L^2(X_t) \to L^2(X_t)$ 定义为

$$(\Delta_t u)(x_i) = \frac{1}{\mu_i} \sum_{x_j \in X : x_i \sim x_j} w_{ij}\big(u(x_j) - u(x_i)\big).$$

我们注意到，$-\Delta_t$ 是作用于 $L^2(X_t)$上的自伴算子，且为半正定。

约定。我们将函数 u：$X_t \to \mathbb{R}$ 视为其在 X上的零延拓。特别地，当 $x_j \notin X_t$时，$u(x_j) = 0$。类似地，我们将 $L^2(M_t)$视为 $L^2(M)$的子空间，该子空间由在 M_t之外零延拓的函数组成。全文中，c_n 和 $C_{\mathcal{M}}$ 表示仅依赖于 n 和类$\mathcal{M}$的常数。

以下定理是本文的主要结果。它给出了截断图拉普拉斯算子的特征值与流形的适当截断区域上的狄利克雷特征值之间的双侧比较估计。

定理 1.2. 对于 $0 < \varepsilon < \rho < t < s_0$，考虑一个流形 $M \in \mathcal{M}$ 。令 $\lambda_k(M_{t+\varepsilon})$ 和 $\lambda_k(M_{t+2\varepsilon-\rho})$分别表示限制在 M 的截断区域 $M_{t+\varepsilon}$和 $M_{t+2\varepsilon-\rho}$ 上的拉普拉斯–贝尔特拉米算子的狄利克雷特征值，并令 $\lambda_k(\Gamma^t_{\varepsilon,\rho})$和 $\lambda_k(M_t)$表示 $-\Delta_t$ 和 $-\Delta_M$ 在狄利克雷边界条件下的特征值。那么，存在一个常数 $C_{\mathcal{M}} > 0$，使得对于任意 ρ、$\frac{\varepsilon}{\rho} < \frac{1}{C_{\mathcal{M}}}$，

$$\left(1 - C_{\mathcal{M},k}\left(\frac{\varepsilon}{\rho} + \rho\right)\right)\lambda_k(M_{t+2\varepsilon-\rho}) \le \lambda_k(\Gamma^t_{\varepsilon,\rho}) \le \left(1 + C_{\mathcal{M},k}\left(\frac{\varepsilon}{\rho} + \rho\right)\right)\lambda_k(M_{t+\varepsilon}).$$

定理中的比较估计表明，截断图拉普拉斯算子的特征值受流形上两个相近截断区域的狄利克雷特征值控制。在邻近图 $\Gamma^t_{\varepsilon,\ \rho}$中，参数 ε 控制点采样的密度，而 ρ 决定图中局部相互作用的尺度。随着这些参数减小，离散化变得更加精细，且支集位于 X_t 上的函数 (2.1) 的离散狄利克雷能量越来越能反映 M_t上的狄利克雷能量。因此，截断图拉普拉斯算子的特征值收敛到截断流形的狄利克雷特征值。

推论 1.3. 对于每个 $k \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_k(\Gamma^t_{\varepsilon,\rho}) \to \lambda_k(M_t) \quad as\ \varepsilon, \rho \to 0,\ \frac{\varepsilon}{\rho} \to 0.$$

截断区域 M_t 是通过从流形中移除宽度为 t 的边界层得到的。当 $t \to 0$时，这些区域穷尽 M。因此，M_t 上的狄利克雷特征值收敛到 M.上的狄利克雷特征值

命题 1.4. 对于每个 $k \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_k(M_t) \to \lambda_k(M) \quad as\ t \to 0.$$

证明思路。为证明定理 1.2，我们考虑流形在柱状半径范围内的截断，并应用 [7]中提出的谱近似技术。边界附近点采样方式的选择，确保了在存在柱状边界的情况下，沃罗诺伊单元仍能得到有效描述。此外，可以选择适当的截断，使离散化映射和插值映射均不与边界发生任何交互。

证明基于极小极大原理。我们在截断流形上构造一个离散化映射，从而将图上的离散狄利克雷能量与流形上的能量泛函联系起来。通过控制该离散化映射作用于 $-\Delta$的前 k个特征函数张成空间后的像上的瑞利商，我们得到截断图拉普拉斯算子的第 k个特征值的上界。

截断图拉普拉斯算子的第 k个特征值的下界，是通过一个插值映射得到的；该映射将函数从 $L^2(X_t)$提升到 $C^{0,\ 1}(M)$。这个映射近似于离散化映射的逆映射。我们建立了插值函数的导数与离散狄利克雷能量之间的估计。将瑞利商限制在插值映射作用于截断图拉普拉斯算子前 k 个特征函数张成空间所得的像上，并利用这些插值估计，

即可得到下界。随后，我们利用区域单调性，以及狄利克雷特征值在截断单调序列下的连续性，得到图狄利克雷特征值向流形的狄利克雷特征值谱收敛。

2. Preliminaries

本节介绍与图离散化相关的离散狄利克雷能量，并证明其对应于截断图拉普拉斯算子的二次型 Δ_t。这一联系使得可以利用类似于狄利克雷拉普拉斯-贝尔特拉米算子的变分刻画来研究 Δ_t 的特征值。

对于一个 (ε,ρ)-邻近图 $\Gamma^t_{\varepsilon,\rho}$，令 $E = E(\Gamma^t_{\varepsilon,\rho})$ 表示该图的有向边集合。在$L^2(E)$上，我们有如下内积:

$$\langle \xi, \eta \rangle = \frac{1}{2} \sum_{e \in E} w(e)\xi(e)\eta(e).$$

定义 4. 设 $u \in L^2(X)$。离散微分 $\delta u : E \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\delta u(e_{ij}) := u(x_j) - u(x_i).$$

相应的狄利克雷能量为

$$\|\delta u\|^2 = \frac{n+2}{\nu_n \rho^{n+2}} \sum_{x_i \sim x_j} \mu_i \mu_j \, |u(x_i) - u(x_j)|^2. \tag{2.1}$$

为了近似 M_t 上的狄利克雷特征值，我们考虑支集位于 X_t 的图上的函数，并将其在 X_t 外延拓为零。于是，两个端点都位于 X_t 外的边不会对离散狄利克雷能量作出贡献。因此，能量仅取决于与 X_t 相交的边，这自然体现了狄利克雷边界条件。

引理 2.1. 对所有 $u,\ v \in L^2(X_t)$,

$$\langle \delta u, \delta v \rangle_{L^2(E)} = -\langle \Delta_\Gamma u, v \rangle_{L^2(X_t)}.$$

证明。

$$\begin{aligned}
\langle \delta u, \delta u \rangle_{L^2(E)} &= \frac{1}{2} \sum_{x_i \sim x_j} w_{ij} \big(u(x_j) - u(x_i)\big)^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{x_i \sim x_j} w_{ij} \big(u(x_i) - u(x_j)\big) u(x_i) - \frac{1}{2} \sum_{x_i \sim x_j} w_{ij} \big(u(x_i) - u(x_j)\big) u(x_j).
\end{aligned}$$

由于边是有向的，在第二个求和中交换指标 i 和 j，并利用对称性 $w_{ij} = w_{ji}$，可得

$$\langle \delta u, \delta u \rangle_{L^2(E)} = \sum_{x_i} \left(\sum_{x_j \sim x_i} w_{ij} \big(u(x_i) - u(x_j)\big) \right) u(x_i).$$

由于 $u \in L^2(X_t),\ \ u(x_i) = 0$ 对所有 $x_i \notin X_t$. 均成立。因此,

$$\langle \delta u, \delta u \rangle_{L^2(E)} = \sum_{x_i \in X_t} \left(\sum_{x_j \sim x_i} w_{ij} \big(u(x_i) - u(x_j)\big) \right) u(x_i).$$

现在对于 $x_i \in X_t$,

$$\Delta_\Gamma u(x_i) = \frac{1}{\mu_i} \sum_{x_j \sim x_i} w_{ij} \big(u(x_j) - u(x_i)\big),$$

这意味着

$$\sum_{x_j \sim x_i} w_{ij} \big(u(x_i) - u(x_j)\big) = -\mu_i \, \Delta_\Gamma u(x_i).$$

代入此恒等式可得

$$\langle \delta u, \delta u\rangle_{L^2(E)} = -\sum_{x_i} \mu_i\, \Delta_\Gamma u(x_i)\, u(x_i) = -\langle \Delta_\Gamma u, u\rangle_{L^2(X_t)}.$$

最后，这两个映射

$$(u,v) \mapsto \langle \delta u, \delta v\rangle_{L^2(E)}, \qquad (u,v) \mapsto \langle \Delta_\Gamma u, v\rangle_{L^2(X_t)}$$

在 $L^2(X_t)$上定义了对称双线性形式。因此，一般恒等式由极化公式得出，

$$\langle \delta u, \delta v\rangle = \frac{1}{4}\big(\langle \delta(u+v), \delta(u+v)\rangle - \langle \delta(u-v), \delta(u-v)\rangle\big).$$

□

2.1. **Min-Max 表征**。 Δ_t 的狄利克雷特征值满足变分原理

$$\lambda_k(\Gamma^t_{\varepsilon,\rho}) = \min_{\substack{L\subset H^1_0(X_t)\\ \dim L = k}} \max_{u\in L\setminus\{0\}} \frac{\|\delta u\|^2}{\|u\|^2}.$$

3. Average Dispersion

本节中，我们在截断流形 M_t 上为适当的尺度 r 定义一个平均弥散泛函，使得对所有 $x \in M_t$，球 $B_r(x)$ 均不与 M的边界相交。此限制对于控制边界附近紧支撑函数的能量估计至关重要。

定义 义 5. 设 $f \in L^2(M_t)$ 且 $0 < r < 2\rho < t$。对任意可测集 $V \subset M_t$，定义

$$E^t_r(f, V) := \int_V \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|^2\, dy\, dx.$$

记 $E^t_r(f) := E^t_r(f,\ M_t)$。

Le引理 3.1. 对 $0 < r < 2\rho < t$，存在一个常数 C_n，使得对所有 $f \in L^2(M_t)$

$$E^t_r(f) \le C_n \nu_n r^n \, \|f\|^2_t.$$

证明。 利用不等式

$$|f(y) - f(x)|^2 \le 2\big(|f(x)|^2 + |f(y)|^2\big),$$

我们得到

$$\begin{aligned} E^t_r(f) &\le 2\int_{M_t}\int_{B_r(x)\cap M_t} \big(|f(x)|^2 + |f(y)|^2\big)\, dy\, dx \\ &= 4\int_{M_t} \mathrm{vol}\big(B_r(x)\cap M_t\big)|f(x)|^2\, dx. \end{aligned}$$

由于 $r < 2\rho < t$，对于 $x \in M_t$ 我们有 $B_r(x) \cap \partial M = \phi$。根据体积比较定理，

$$\mathrm{vol}\big(B_r(x)\cap M_t\big) \le \mathrm{vol}\big(B_r(x)\big) \le C_n\nu_n r^n \quad \text{for all } x \in M_t.$$

因此，

$$E^t_r(f) \le C_n\nu_n r^n \, \|f\|^2_t.$$

□

由于紧支撑光滑函数在$H^1_0(M_t)$中稠密，我们有以下引理。

引理 3.2. 对于 $M \in \mathcal{M}$，令$0 < r < 2\rho < t < \frac{i_0}{2}$。对于 $f \in H^1_0(M_t)$，

$$E^t_r(f) \le \frac{\nu_n r^{n+2}}{n+2}(1 + c_{\mathcal{M}} r)\int_{M_t} |df|^2\, dx,$$

其中 ν_n 表示 $\mathbb{R}^n$中单位球的体积。

证明。 我们沿用 [14]中引理 2.3 的证明思路。由于 f 在 M_t和 $t-r>0$中具有紧支集，因此对于任意 $x\in M_t$，球 $B_r(x)$ 都不与边界相交。因此，证明中使用的雅可比估计以及沿测地线 $\exp_x(tu)$、 $0\le t\le r$ 的局部估计，同样适用于我们的情形。□

引理 3.3. 对于 $0<\varepsilon<r<2\rho<t<\frac{i_0}{2}$，设 $V\subset M_t$ 是一个可测集，满足 $\operatorname{diam}(V)\le 2\varepsilon$，且$\operatorname{vol}(V)=\mu>0$。对于 $f\in L^2(M_t)$，设 $a=\frac{1}{\mu}\int_V f(x)\,dx$ 表示 f 在 V 上的平均值。于是

$$\int_V |f(x)-a|^2\,dx \;\le\; \frac{1}{c_n(r-\varepsilon)^n}\,E_r^t(f,V).$$

证明。 证明方法是将 $f\in L^2(M_t)$ 延拓到流形上，并在 M_t. 之外的所有点处赋值为 0。然后我们采用与 [7] 中类似的论证，因为 $t-r>t-2\rho>0$. 因此，对于所有 $x,\ y\in V$， $B_r(x)\cap B_r(y)$ 与 M 的边界不相交。由估计 $\operatorname{vol}(B_r(x))\ge C_n r^n$ 对 [6] 中所有 $r<i_0$ 均成立，可得结论。□

4. Discretization of the manifold

由于流形的边界呈圆柱形，边界附近离散化点对应的沃罗诺伊单元具有 $W_t\times\left[-\frac{\varepsilon}{2},\frac{\varepsilon}{2}\right]$的形式。为确保与狄利克雷条件相容，我们仅对支集包含于$M_{t+\frac{\varepsilon}{2}}$ 中的函数定义离散化映射。采用这一选择后，离散化函数在 X_t 的边界上取值为 0。

定义 6. 离散化映射 $P\colon L^2(M_{t+\frac{\varepsilon}{2}})\to H_0^1(X_t,\mu)$ 定义为

$$Pf(x_i):=\frac{1}{\mu_i}\int_{V_i} f(x)\,dx.$$

我们注意到 $Pf|_{X\setminus X_{t-\varepsilon}}=0.$对于所有 $t>t'$， $\|Pf\|_{t'}=\|Pf\|_t.$

定义 7. 映射 $P^*\colon H_0^1(X_t)\to L^2(M_{t+\frac{\varepsilon}{2}})$ 定义为

$$P^*u(x):=\sum_{i=1}^N u(x_i)\,\mathbf{1}_{V_i}(x).$$

由于边界呈圆柱形， P^*u 的支集包含于 $M_{t+\frac{\varepsilon}{2}}$. 中。我们有关于 P 和 P^* 的以下性质。

引理 4.1。 设 $P\colon L^2(M_{t+\frac{\varepsilon}{2}})\to L^2(X_t)$和 $P^*\colon H_0^1(X_t)\to L^2(M_{t+\frac{\varepsilon}{2}})$如上所定义。则有以下结论。

(1) 对所有 $f\in L^2(M_{t+\frac{\varepsilon}{2}})$， $\|Pf\|_t\le\|f\|_{t+\frac{\varepsilon}{2}}$.*(2)* 对所有 $u\in H_0^1(X_t)$， $\|P^*u\|_{t+\frac{\varepsilon}{2}}=\|u\|_t$.*(3)* 对所有 $f\in L^2(M_{t+\frac{\varepsilon}{2}})$和 $u\in H_0^1(X_t)$，$\langle f,P^*u\rangle_{t+\frac{\varepsilon}{2}}=\langle Pf,u\rangle_t$.

引理 4.2。 设 $\varepsilon<r<2\rho<t$. 对每个 $f\in H_0^1(M_{t+\varepsilon/2})$，

$$\|f-P^*Pf\|^2_{t+\varepsilon/2}\;\le\;\frac{4n\nu_n}{c_n}(1+c_{\mathcal{M}}r)\varepsilon^2\|df\|_t^2.$$

证明。我们有

$$\|f-P^*Pf\|^2_{t+\frac{\varepsilon}{2}}=\sum_{i=1}^N\int_{V_i}|f(x)-Pf(x_i)|^2\,dx.$$

对于所有 $x_i\in X_{t+\frac{\varepsilon}{2}}$，$\operatorname{diam}(V_i)\le 2\varepsilon$，并且由于我们在柱状边界上的点的选取， $V_i\subseteq M_t$。利用引理 3.3，我们有

$$\int_{V_i}|f(x)-Pf(x_i)|^2\,dx\le\frac{1}{c_n(r-\varepsilon)^n}\,E_r(f,V_i).$$

对 i求和，

$$\|f-P^*Pf\|^2_{t+\varepsilon/2}\le\frac{1}{c_n(r-\varepsilon)^n}E_r^t(f).$$

其余论证可由 [14] 中引理 3.2 的证明得出。 □

引理 4.3。 设 $t > \rho + 3\varepsilon$. 对于每个 $f \in H_0^1(M_{t+\varepsilon/2})$，以下结论成立：

(1) $|\|Pf\|_t - \|f\|_{t+\varepsilon/2}|^2 \leq \frac{4n\nu_n}{c_n}(1 + c_{\mathcal{M}} r)\varepsilon^2 \|df\|^2_{t+\varepsilon/2}$.

(2) $\|\delta(Pf)\|^2 \leq (1 + c_{\mathcal{M}}(\rho + 2\varepsilon)) \left(1 + \frac{2\varepsilon}{\rho}\right)^{n+2} \|df\|_{t+\varepsilon/2}$.

证明。 由于 $f \in H_0^1(M_{t+\frac{\varepsilon}{2}})$ 且 P^* 是一个等距映射,

$$\|Pf\|_t = \|Pf\|_{t+\frac{\varepsilon}{2}} = \|P^* Pf\|_{t+\frac{\varepsilon}{2}}.$$

因此,

$$\left| \|Pf\|_{t+\frac{\varepsilon}{2}} - \|f\|_{t+\frac{\varepsilon}{2}} \right| \leq \|P^* Pf - f\|_{t+\frac{\varepsilon}{2}}$$

结合引理 4，即得 (1)。 2

应用柯西–施瓦茨不等式,

$$\left|Pf(x_j) - Pf(x_i)\right|^2 \leq \frac{1}{\mu_i \mu_j} \int_{V_i} \int_{V_j} |f(y) - f(x)|^2 \, dy \, dx.$$

因此,

$$\|\delta(Pf)\|^2 \leq \frac{n+2}{\nu_n \rho^{n+2}} \sum_{x_i \widetilde{} x_j} \int_{V_i} \int_{V_j} |f(y) - f(x)|^2 \, dy \, dx.$$

对于 $x \in V_i$，令 $U(x) := \bigcup_{x_j \sim x_i} V_j \subseteq B_{\rho+2\varepsilon}(x)$。 对于所有 $Pf \in H_0^1(X_t)$，与非零项对应的沃罗诺伊单元 V_i 位于 $M_{t+\frac{\varepsilon}{2}}$. 中。 由于 $t > 2\rho > \rho + 2\varepsilon$， $B_{\rho+2\varepsilon}(x) \cap \partial M = \phi$.因此,

$$\begin{aligned} \|\delta(Pf)\|^2 &\leq \frac{n+2}{\nu_n \rho^{n+2}} \int_{M_t} \int_{B_{\rho+2\varepsilon}(x)} |f(y) - f(x)|^2 \, dy \, dx \\ &= \frac{n+2}{\nu_n \rho^{n+2}} \, E^t_{\rho+2\varepsilon}(f). \end{aligned}$$

应用引理 3.2，由于 $t > \rho + 2\varepsilon$,

$$E^t_{\rho+2\varepsilon}(f) \leq \frac{\nu_n}{n+2}(\rho + 2\varepsilon)^{n+2}(1 + c_{\mathcal{M}}(\rho + 2\varepsilon)) \|df\|^2_t.$$

因此,

$$\|\delta(Pf)\|^2 \leq \left(\frac{\rho + 2\varepsilon}{\rho}\right)^{n+2} (1 + c_{\mathcal{M}}(\rho + 2\varepsilon)) \|df\|^2_t.$$

□

定理 4.4。 设 $0 < \varepsilon < 2\rho < t < s_0 < \frac{i_0}{2}$、 $M \in \mathcal{M}$ 和 $\Gamma^t_{\varepsilon,\ \rho}$ 是 M上的一个（ε， ρ）-邻近图。设λ_k（$M_{t+\varepsilon}$）和 λ_k $(\Gamma^t_{\varepsilon,\ \rho})$ 分别表示 $-\Delta$ 在 $M_{t+\varepsilon}$ 和 Δ_t 上的第 k 个狄利克雷特征值。存在正的常数 C_n 和 $C_{\mathcal{M},\ k}$，使得对于任意 ρ、 $\frac{\varepsilon}{\rho} < \frac{1}{C_n}$,

$$\lambda_k(\Gamma^t_{\varepsilon,\rho}) \ \leq \ \left(1 + C_{\mathcal{M},k}\left(\frac{\varepsilon}{\rho} + \rho\right)\right) \lambda_k(M_{t+\varepsilon}).$$

证明。 对于维数为 $L = k$ 的子空间 $L \subset H_0^1(X_t)$，若

$$\sup_{0 \neq u \in L} \frac{\|\delta u\|^2}{\|u\|^2_t} \leq \left(1 + C_{\mathcal{M},k}\left(\frac{\varepsilon}{\rho} + \rho\right)\right) \lambda_k(M_{t+\varepsilon})$$

则由 Δ_t 的极小极大原理，结论即得。

令 $W \subset H_0^1(M_{t+\varepsilon/2})$ 为由 $-\Delta$ 在 $M_{t+\varepsilon/2}$ 上的前 k 个正交归一 Dirichlet 特征函数张成的 k 维子空间。于是对所有 $f \in W$，由于 $M_{t+\varepsilon} \subseteq M_{t+\varepsilon/2}$，对特征值应用区域单调性

$$\|df\|^2_{t+\varepsilon/2} \leq \lambda_k(M_{t+\varepsilon}) \|f\|^2_{t+\varepsilon/2}.$$

令 $L := P(W) \subset H_0^1(X_t)$。 利用引理 4.2， P 在 W 上对 $\rho < \frac{1}{C_{\mathcal{M},\ k}}$ 是单射, 其中常数取自 [9]，该引理断言存在一个仅依赖于 $\mathcal{M}$ 和 k 的 $\lambda_k(M_{t+\varepsilon})$ 上界。

令 $u \in L \backslash \{0\}$，并选择 $f \in W$，使得 $u = Pf$。我们沿用 [14] 中定理 3.5 证明的论证，这些论证同样适用于狄利克雷情形.□，并用引理 4.3 估计 u的瑞利商

5. Smoothing operator

本节介绍一种平滑算子，它将 $M_{t+\varepsilon/2}$ 上的 L^2 函数映射为 $M_{t+\varepsilon/2-r}$上的 $C^{0,\ 1}$ 函数。该算子利用一个核，在 M 中将函数局部扩散到半径为 r 的球内，同时避免与边界相交。

定义 8. 令 $\psi\colon\ \ [0,\infty)\to\mathbb{R}$ 为

$$\psi(t):=\begin{cases}\dfrac{n+2}{2\nu_n}\,(1-t^2), & 0\le t\le 1,\\ 0, & t>1,\end{cases}$$

其中 ν_n 表示 $\mathbb{R}^n$中单位球的体积。

归一化常数的选取使得

$$\int_{\mathbb{R}^n}\psi(|x|)\,dx=1.$$

定义 9. 固定 r使得 $0<r<2\rho<t_\circ$ 对于 $x\in M$，使得 $d(x,\partial M)>r$，我们将核定义为

$$k_r(x,y):=r^{-n}\,\psi\!\left(\frac{d(x,y)}{r}\right).$$

由于对 r 的选择， k_r 的支集与 M 的边界不相交。于是，

$$\mathrm{grad}k_r(.,y)(x)=\frac{n+2}{\nu_n r^{n+2}}\exp^{-1}(y),\qquad \forall x\in M_t \text{ and } y\in B_r(x).$$

引理 5.1. 核映射具有以下性质。

(1) 对于 $x\in M_r$, $\left|k_r(x,y)\right|\le\frac{n+2}{\nu_n r^n}$ *(2)* 对于 $d(x,\partial M)>2r$, $k_r(x,y)=k_r(y,x)$。

定义10。 对于 $0<r<2\rho<t$ ，积分算子 $\Lambda_r^0\colon\ L^2(M_{t+\varepsilon/2})\to C^{0,1}(M_{t+\varepsilon/2-r})$ 定义为 by

$$\Lambda_r^0 f(x):=\int_{M_{t+\varepsilon/2}}k_r(x,y)\,f(y)\,dy.$$

定义11. 对于满足 $d(x,\partial M)>r$ 的 $x\in M$，定义 $\theta_r(x)=\int_{B_r(x)}k_r(x,y)dy$ 即

.,

$$\theta_r(x)=r^{-n}\int_{B_r(x)}\psi\!\left(\frac{d(x,y)}{r}\right)\,dy.$$

定义12。 设 $0<r<2\rho<t_\circ$ 归一化平滑算子 $\Lambda_r\colon\ L^2(M_{t+\varepsilon/2})\to C^{0,1}(M_{t+\varepsilon/2-r})$ 定义为

$$\Lambda_r f(x):=\frac{1}{\theta_r(x)}\,\Lambda_r^0 f(x).$$

注 5.2。 对 $r<2\rho<t$ 的限制确保平滑核的支集远离边界，因此所有雅可比估计和梯度估计都与无边界情形完全相同。我们陈述 [14] 中的引理 4.2 和引理 4.3。

引理 5.3。 设 $0<r<2\rho<t<\frac{i_0}{2}$。对于所有 $x\in M_t$,

(1) $1-c_{\mathcal{M}}r\le\theta_r(x)\le 1+c_{\mathcal{M}}r$，以及 *(2)* $|\nabla\theta_r(x)|\le c_{\mathcal{M}}$.

引理 5.4。 设 $0<3r<t<\frac{i_0}{2}$。对于每个 $f\in L^2(M_{t+\varepsilon/2})$ 和 $r<\frac{1}{c_{\mathcal{M}}}$， —

$$\|\Lambda_r f\|^2_{t+\frac{\varepsilon}{2}-r}\le\left(\frac{1+c_{\mathcal{M}}r}{1-c_{\mathcal{M}}r}\right)\,\|f\|^2_{t+\varepsilon/2}.$$

证明。 设 $x\in M_{t+\varepsilon/2-r}$. 由于 $t+\varepsilon/2-r>r$, $B_r(x)\cap\partial M=\phi$ 且 $B_r(x)\cap M_{t+\varepsilon/2-r}\subseteq B_r(x)$。 因此，

$$\int_{M_{t+\varepsilon/2}}k_r(x,y)dy\le\int_{B_r(x)}k_r(x,y)dy=\theta_r(x).$$

根据柯西-施瓦茨不等式,

$$|\Lambda_r^0 f(x)|^2 \le \left(\int_{M_{t+\varepsilon/2}} k_r(x,y)dy\right)\left(\int_{M_{t+\varepsilon/2}} |f(y)|^2 k_r(x,y)\,dy\right)$$
$$\le \theta_r(x)\int_{M_{t+\varepsilon/2}} |f(y)|^2 k_r(x,y)\,dy. \tag{5.1}$$

对 $x \in M_{t+\frac{\varepsilon}{2}-r}$ 积分并代入 (5.1)，得到

$$\|\Lambda_r f\|^2_{t+\frac{\varepsilon}{2}-r} \le \int_{M_{t+\frac{\varepsilon}{2}-r}} \theta_r(x)^{-1}\int_{M_{t+\frac{\varepsilon}{2}}} |f(y)|^2 k_r(x,y)\,dy\,dx$$
$$\le (1-c_{\mathcal{M}}r)^{-1}\int_{M_{t+\frac{\varepsilon}{2}}} |f(y)|^2 \int_{M_{t+\frac{\varepsilon}{2}-r}} k_r(x,y)\,dx\,dy.$$

由于 $t > 3r$，我们有 $t+\frac{\varepsilon}{2}-r > 2r$。利用引理 5.1,

$$\int_{M_{t+\frac{\varepsilon}{2}-r}} k_r(x,y)\,dx \le \int_{B_r(y)} k_r(x,y)\,dx = \theta(y) \le (1+c_{\mathcal{M}}r).$$

结论得证。 □

引理 5.5。 设 $0 < 3r < t < \frac{i_0}{2}$。对于每个 $f \in L^2(M_{t+\varepsilon/2})$ 以及 $r < \frac{1}{c_{\mathcal{M}}}$，

$$\|\Lambda_r f - f\|^2_{t+\varepsilon/2-r} \le \frac{n+2}{\nu_n r^n(1-c_{\mathcal{M}}r)} E_r^{t-\varepsilon/2-r}(f).$$

证明。 固定 $x \in M_{t+\varepsilon/2}$。由于 $t > 3r$， $B_r(x)$ 与流形 M 的边界不相交。因此， $\theta_r(x)$ 的支集以及在 x 处的核 k_r 与边界不相交。我们有

$$\Lambda_r f(x) - f(x) = \theta_r(x)^{-1}\int_{B_r(x)} (f(y)-f(x))k_r(x,y)\,dy.$$

由柯西–施瓦茨不等式,

$$|\Lambda_r f(x) - f(x)|^2 \le \theta_r(x)^{-2}\left(\int_{B_r(x)} k_r(x,y)dy\right)\left(\int_{B_r(x)} |f(y)-f(x)|^2 k_r(x,y)\,dy\right)$$
$$= \theta_r(x)^{-1}\int_{B_r(x)} |f(y)-f(x)|^2 k_r(x,y)\,dy$$
$$\le \frac{n+2}{\nu_n r^n(1-c_{\mathcal{M}}r)}\int_{B_r(x)} |f(y)-f(x)|^2 \tag{5.2}$$

其中 (5.2) 由引理 5.3 和引理 5.1 得出。 □

我们在紧支撑函数的情形下，陈述 [14] 中引理 4.6 的界。由于对于所有 $x \in M_{t+\varepsilon/2}$，$B_r(x) \cap \partial M = \varnothing$， [14] 中的估计适用于当前情形。

引理 5.6。 令 $0 < r < 2\rho < i_0$ 和 $t > 3r$。对于每个 $f \in L^2(M_{t+\frac{\varepsilon}{2}})$，

$$\|d(\Lambda_r f)\|^2_{t+\varepsilon/2-r} \le \frac{n+2}{\nu_n r^{n+2}}\frac{(1+2c_{\mathcal{M}}r)^2}{(1-c_{\mathcal{M}}r)^3} E_r^{t+\varepsilon/2-r}(f).$$

6. Interpolation map

为了比较离散化 X_t 上的函数与流形上的函数，我们引入一个插值映射，将离散函数提升为 M上的 Lipschitz 函数。该映射首先使用算子 P^* 将 X_t 上的函数延拓到流形上，然后应用平滑算子 Λ得到。该构造将使我们能够联系离散狄利克雷能量与流形上的连续狄利克雷能量。

定义 13. 插值映射 $I:\ H_0^1(X_t) \to C^{0,1}(M_{t+2\varepsilon-\rho})$ 定义为

$$Iu = \Lambda_{\rho-2\varepsilon} P^* u.$$

对于 $u \in H_0^1(X_t)$, Iu的支集包含于 $M_{t+\frac{5\varepsilon}{2}-\rho} \subseteq M_{t+2\varepsilon-\rho}$。由于 $\|Iu\|_{t+\frac{5\varepsilon}{2}-\rho} = \|Iu\|_{t+2\varepsilon-\rho}$, 为简便起见我们采用后一种记号。

由引理以及 P^* 保持范数这一事实，我们得到

$$\|Iu\|_{t+2\varepsilon-\rho} \leq \left(\frac{1+c_{\mathcal{M}}(\rho-2\varepsilon)}{1-c_{\mathcal{M}}(\rho-2\varepsilon)}\right)\|u\|_t .$$

引理 6.1. 对于 $0 < 2\varepsilon < \rho < 3\rho < t$、 $c_{\mathcal{M}}\rho < \frac{1}{4}$和 $\frac{2\epsilon}{\rho} < \frac{1}{n}$，令 $u \in H_0^1(X_t)$。 n

(1) $|\|Iu\|_{t+2\varepsilon-\rho} - \|u\|_t| \leq \frac{3\rho^2}{1-c_{\mathcal{M}}\rho}\|\delta u\|$; *(2)* $\|d(Iu)\|_{t+2\varepsilon-\rho} \leq \left(1-\frac{2\epsilon}{\rho}\right)^{-\frac{n}{2}-1} \frac{1+2c_{\mathcal{M}}\rho}{(1-c_{\mathcal{M}}\rho)^{\frac{3}{2}}}\|\delta u\|$.

证明。 对于 $u \in H_0^1(X_t)$, 利用 P^*保持范数这一事实以及 $2\varepsilon < \rho \implies M_{t+\frac{\varepsilon}{2}} \subseteq M_{t+2\varepsilon-\rho}$,

$$|\|Iu\|_{t+2\varepsilon-\rho} - \|u\|_t| = \left|\, \|Iu\|_{t+2\varepsilon-\rho} - \|P^*u\|_{t+2\varepsilon-\rho} \,\right| \leq \|Iu - P^*u\|_{t+2\varepsilon-\rho}.$$

根据引理 5.5

$$\|Iu - P^*u\|_{t+2\varepsilon-\rho}^2 \leq \frac{n+2}{\nu_n(1-c_{\mathcal{M}}(\rho-2\epsilon))(\rho-2\epsilon)^n} E_{\rho-2\varepsilon}^{t+2\varepsilon-\rho}(P^*u). \tag{6.1}$$

u 在 $M_{t+2\varepsilon-\rho}$ 上计算时的狄利克雷能量为

$$\|\delta u\|^2 = \frac{n+2}{\nu_n \rho^{n+2}} \sum_{x_i \in X} \sum_{j: x_i \sim x_j} \mu_i \mu_j |u(x_j) - u(x_i)|^2.$$

由于 $t > 2\rho$, 一端点在 ∂M 中的边不可能有另一端点在 X_t 中。因此，这些端点不在 u 的支集中，也不会对狄利克雷能量作出贡献。对于 $x \in V_i$, 令$U(x) := \bigsqcup_{j: x_j \sim x_i} V_j$。由于 $t > 2\rho > \varepsilon$ 且对于任意 $x \in M \setminus M_\varepsilon$, $u \in H_0^1(M_t)$, $P^*u|_{U(x)} \equiv 0.$，因此,

$$\|\delta u\|^2 = \frac{n+2}{\nu_n \rho^{n+2}} \int_{M_\varepsilon} \int_{U(x)} |P^*u(y) - P^*u(x)|^2 \, dy \, dx. \tag{6.2}$$

根据三角不等式，对于所有 $y \in B_{\rho-2\varepsilon}(x)$, $d(x_i, x_j) \leq d(x, x_i) + d(x, y) + d(y, x_j) \leq \rho.$因此, $B_{\rho-2\varepsilon}(x) \subseteq U(x)$。由（ 6.2 ）,

$$\begin{aligned}\|\delta u\|^2 &\geq \frac{n+2}{\nu_n \rho^{n+2}} \int_{M_\varepsilon} \int_{B_{\rho-2\varepsilon}(x)} |P^*u(y) - P^*u(x)|^2 \, dy \, dx \\ &= \frac{n+2}{\nu_n \rho^{n+2}} E_{\rho-2\varepsilon}^{\varepsilon}(P^*u). \end{aligned} \tag{6.3}$$

由此，根据 (6.1),

$$\begin{aligned}\|Iu - P^*u\|_{t+2\varepsilon-\rho}^2 &\leq \frac{n+2}{\nu_n(1-c_{\mathcal{M}}(\rho-2\epsilon))(\rho-2\epsilon)^n} E_{\rho-2\varepsilon}^{t+2\varepsilon-\rho}(P^*u) \\ &\leq \frac{n+2}{\nu_n(1-c_{\mathcal{M}}(\rho-2\epsilon))(\rho-2\epsilon)^n} E_{\rho-2\varepsilon}^{\varepsilon}(P^*u) \\ &\leq \frac{3\rho^2}{1-c_{\mathcal{M}}\rho}\|\delta u\|^2\end{aligned}$$

这就证明了 (1)。

由引理 5.6 和 (6.3),

$$\|d(Iu)\|_{t+2\varepsilon-\rho}^2 \leq \frac{n+2}{\nu_n r^{n+2}} \frac{(1+2c_{\mathcal{M}}r)^2}{(1-c_{\mathcal{M}}r)^3} E_{\rho-2\varepsilon}^{t+2\varepsilon-\rho}(P^*u) \leq \left(\frac{\rho}{\rho-2\varepsilon}\right)^{n+2} \frac{(1+2c_{\mathcal{M}}r)^2}{(1-c_{\mathcal{M}}r)^3}\|\delta u\|^2.$$

□

定理 6.2. 设 $0 < \varepsilon < 2\rho < t < s_0 < \frac{i_0}{2}$、 M–$\in \mathcal{M}$ 与 $\Gamma_{\varepsilon,\,\rho}^t$ 为 M 上的一个 （ε, ρ）-邻近图。设 λ_k（$M_{t+2\varepsilon-\rho}$） 与 λ_k （$\Gamma_{\varepsilon,\,\rho}^t$）分别表示 $-\Delta$ 在 $M_{t+2\varepsilon-\rho}$ 与 Δ_t 上的第 k 个狄利克雷特征值。存在正常数 C_n 与 $C_{\mathcal{M},\,k}$，使得对任意 ρ、 $\frac{\varepsilon}{\rho} < \frac{1}{C_n}$,

$$\lambda_k(\Gamma_{\varepsilon,\rho}^t) \;\geq\; \left(1 + C_{\mathcal{M},k}\left(\frac{\varepsilon}{\rho} + \rho\right)\right)\lambda_k(M_{t+2\varepsilon-\rho}).$$

证明。 该证明采用与定理 4.4 类似的论证。对于维数为 $\dim L = k$ 的子空间 $L \subset H_0^1(M_{t+2\varepsilon-\rho})$，若

$$\sup_{0\neq f\in L} \frac{\|df\|^2}{\|f\|^2_{t+2\varepsilon-\rho}} \leq \left(1 + C_{\mathcal{M},k}\left(\frac{\varepsilon}{\rho} + \rho\right)\right)^{-1} \lambda_k(\Gamma^t_{\varepsilon,\rho})$$

于是，根据 $-\Delta$ 的极小极大原理，结论得证。

令 $W \subset H_0^1(X_t)$ 为由 $-\Delta_t$ 的前 k 个正交狄利克雷特征函数张成的 k 维子空间。于是，对所有 $u \in W$，$\|\delta u\|^2 \leq \lambda_k(\Gamma^t_{\varepsilon,\ \rho})\ \|u\|^2_t$. 令 $L := I(W) \subset H_0^1(M_{t+2\varepsilon-\rho})$。 利用引理 6.1， I 在 W 上是单射，其中 $\rho < C^{-1}_{\mathcal{M},\ k}$。

令 $f \in L \setminus \{0\}$，并选取 $u \in W$ 使得 $f = Iu$。接着，我们利用引理 6.1 估计 f 的瑞利商，从而得到结论。

□

定理 1.2 的证明结合定理 4.4 和定理 6.2 得到的估计，我们便得到所需的比较结果。

推论 1.3 的证明该证明由定理 1.2、狄利克雷特征值的区域单调性，以及以下事实推出：对于 M 的一列单调递增的截断子流形，将特征函数与截断函数相乘并使用极小极大原理，可得 $\lim_{\varepsilon,\ \rho\to 0} \lambda_k(M_{t+2\varepsilon-\rho}) = \lambda_k(M_t)$ 以及 $\lambda_k(M_{t+\varepsilon}) = \lambda_k(M_t)$。

命题 1.4 的证明 该证明由区域单调性以及推论 1.3 证明中所使用的论证推出。

Acknowledgement

我感谢我的导师 Soma Maity 博士，是他将我引入这一问题，并在多年来给予我富有洞见的讨论和宝贵的指导。我感谢“科学与工业研究委员会（CSIR），印度”提供的资助。本文中的成果是在作者于印度科学教育与研究学院（IISER）莫希完成博士期间取得的，也是作者学位论文的一部分。

References

[1] Erwann Aubry. 通过离散化近似流形的谱。 *arXiv preprint arXiv:1301.3663*，2013。[2] Mikhail Belkin 和 Partha Niyogi。用于降维和数据表示的拉普拉斯特征映射。 *Neural Computation* 15 6 1373 1396, 2003 , (): –。[3] Mikhail Belkin 和 Partha Niyogi。黎曼流形上的半监督学习。 *Machine Learning* 56 1 3 209 239, , (–): –。[4] 2004 Mikhail Belkin 和 Partha Niyogi。拉普拉斯特征映射的收敛性。19，2006。[5] Mikhail Belkin、Qichao Que、Yusu Wang 和 Xueyuan Zhou。迈向复杂空间的理解：具有奇点和边界的流形上的图拉普拉斯算子。载于 Shie Mannor、Nathan Srebro 和 Robert C. Williamson 编，*Proceedings of the 25th Annual Conference on Learning Theory*，第 23 卷， *Proceedings of Machine Learning Research*，第 36.1–36.26 页，爱丁堡，苏格兰，2012 年 6 月 25–27 日。PMLR。[6] M. Berger。黎曼流形中体积、单射半径和凸性半径之间的一些关系。载于 *Differential geometry and relativity* 3 *dath. Phys. Appl. Math.* 33 42 1976 , 第 Vol. 卷，[7] Dmitri Burago、Sergei Ivanov 和 Yaroslav Kurylev。拉普拉斯–贝尔特拉米算子的图离散化。 *J. Spectr. Theory* 4 4 675 714, 2014 , (): –。[8] Jeff Calder 和 Dejan Slepˇ cev。用于半监督学习的适当加权图拉普拉斯算子。 *Appl. Math. Optim.*，82 3 1111( ): –1159，2020。[9] Shiu Yuen Cheng。特征值比较定理及其几何应用。 *Math. Z.*，143(3): 289–297，1975。[10] Ronald R. Coifman 和 St´ephane Lafon。扩散映射。 *Appl. Comput. Harmon. Anal.*，21(1): 5–30，2006。[11] Koji Fujiwara。闭黎曼流形及其网的拉普拉斯算子的特征值。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，123 8 2585( ): –2594，1995。[12] Nicol´as Garc´ıa Trillos、Moritz Gerlach、Matthias Hein 和 Dejan Slepˇ cev。随机几何图上的图拉普拉斯算子向拉普拉斯–贝尔特拉米算子谱收敛的误差估计。 *Found. Comput. Math.* 20 4 827 887, , (): –。[13] 2020 Jinpeng Lu。拉普拉斯谱的图近似。 *J. Topol. Anal.*，14(1): 111–145，2022。[14] Soma Maity 和 ANUSHA BHATTACHARYA。具有里奇曲率界的黎曼流形上拉普拉斯算子的图离散化。 *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*，2026。

[15] Tatiana Mantuano。应用于拉普拉斯算子谱的紧黎曼流形离散化。

Ann. Global , ( ): –

Anal. Geom. 27 1 33 46, 2005

。[16] Andrew Y. Ng 、 Michael I. Jordan 和 Yair Weiss。关于谱聚类：分析与算法。NIPS'01，第 849–856 页，美国马萨诸塞州剑桥，2001。麻省理工学院出版社。[17] J. Wilson Peoples 和 John Harlim。带边界流形上对称化图拉普拉斯算子的谱收敛。*Found. Data Sci.*，8：119–167，2026。[18] Ulrike von Luxburg、Mikhail Belkin 和 Olivier Bousquet。谱聚类的一致性。*The Annals of Statistics*，36 2 555( )：–586，2008。

Department of Mathematical Sciences, Indian Institute of Science Education and Research Mohali, Sector 81, SAS Nagar, Punjab- 140306, India.*Email address*: ph21059@iisermohali.ac.in