arXiv:2603.12389v1 [math.AG] 12 Mar 2026

通过有色带图构造几乎拓扑量子场论

William Davis 和 Olivia Dumitrescu

摘要。本文通过有色带状图的边收缩/构造公理引入带状拓扑量子场论，将其作为 [8] 中针对带状图提出的二维拓扑量子场论公理的扩展。我们研究了 [18] 中定义的近 Frobenius 结构和几乎拓扑量子场论，以及带状拓扑量子场论。我们给出了带状拓扑量子场论的一个分类结果，将 [8] 中针对 Frobenius 代数所得的结果加以扩展。特别地，本文中的有色带图边收缩/构造公理，等价于 Atiyah 和 Segal 的缝合原理所支配的拓扑量子场论函子公理，相关讨论见 [4] 和 [18]。作为应用，我们得到，广义卡特兰数的递推关系可由余单位近弗罗贝尼乌斯代数的近似拓扑量子场论加以扭转。

目录

1. 引言 2 致谢 5 2. 卡特兰数的枚举几何 5 3. 弗罗贝尼乌斯结构 8 3.1. 弗罗贝尼乌斯代数 8 3.2. 近似弗罗贝尼乌斯代数 11 4. 拓扑量子场论 12 4.1. 背景 12 4.2. 一个分类结果 19 4.3. 近似拓扑量子场论 21 5. 带颜色的胞腔图与边公理 21 5.1. 带颜色的胞腔图 21 5.2. 输入顶点之间的边 23 5.3. 输出顶点之间的边 24 5.4. 受拓扑启发的公理 25 5.5. 图上的弗罗贝尼乌斯结构 27 5.6. 围成圆盘的环与重复的输入/输出边 28 6. 带颜色的胞腔图的结果 30 6.1. 亏格 0 情形 31 6.2. 正亏格 36 6.3. 一个启发性示例 39 7. 近似弗罗贝尼乌斯代数的带颜色胞腔图 40 8. 扭转卡特兰数递推 42 8.1. 由近似拓扑量子场论扭转的卡特兰数递推 42

日期：2026年3月。2020年数学主题分类。主要分类：14C20 次要分类：14E05、14E30、14J45。关键词与短语。近似拓扑量子场论、Frobenius结构、近 Frobenius 代数、二维拓扑量子场论、有色带图。

8.2. 彩色卡特兰数 参考文献 44
45

1. 引言

在 [10] 中，作者将广义卡特兰数引入为满足类似于赫尔维茨数的切割与合并方程的递推关系的一类带状图的计数；我们将在第 2 节回顾卡塔兰递归。 [10] 中的拓扑递归形式体系意味着，卡特兰数的生成函数与一点的格罗莫夫–威滕不变量有关 [39]。这些不变量与稳定曲线模空间上的交叉理论有关$\mathscr{M}_{g,\,n}$；它们最初由 Kontsevich 在 [24] 中通过三价带状图理论和矩阵积分计算得出，从而证明了 Witten 的猜想 [39]。 [10], 的递推关系是一个枚举问题的例子，这类问题已知会产生$\mathscr{M}_{g,\,n}$（即亏格为g且有n 个互异标记点的稳定代数曲线的 Deligne-Mumford 模空间）的交数。在 Harer 和 Zagier 的一篇有影响力的论文中 [20] ，作者使用一个与 [10] 中卡特兰数的递推密切相关的递推公式（第 475 页），计算了$\mathscr{M}_{g,\,n}$的欧拉示性数。

关于赫尔维茨数理论及其与拓扑递归、ELSV 公式或$\mathscr{M}_{g,n}$等的交数之间的联系，已有许多进展（例如参见 [12, 13, 33]）。我们回顾一下，轨形 Hurwitz 数也可以通过对带状图进行计数来计算，其中还附加了各顶点上所附着点的信息（参见 [9]）。将边收缩公理应用于这一特定的带状图计数，可以得到轨形 Hurwitz 数的切割与合并方程。将范围限制在亏格 0 和 1 个标记点时，带状图的递推关系就变成了对树的计数，并由此得到赫尔维茨数的谱曲线，即朗伯曲线 [9], ；其计算与第 2 节中所述的卡特兰数计算类似。

在枚举几何中，一些重要的不变量与曲线模空间上上同调类的交数有关。例如，赫尔维茨数可以用$\mathscr{M}_{g,n}$上余切类的关联函数，以及秩为 g 的霍奇丛的总陈类$c(\mathbb{E}) \in H^*(\mathscr{M}_{g,n},\mathbb{Q})$来表示。同样，Mirzakhani 的工作 [28, 29] 中的韦伊–彼得森体积可以用余切类与 κ 类指数$\exp(\kappa_l) \in H^*(\mathscr{M}_{g,n},\mathbb{Q})$之间的关联函数来表示。这些数满足一种递推关系，其生成函数编码了点的格罗莫夫 – 威滕不变量。这表明赫尔维茨数、韦伊–彼得森体积与卡特兰数之间存在有趣的相似性。我们回顾一下，霍奇丛的总陈类$c(\mathbb{E})$和 κ 类的指数$\exp(\kappa_l)$都是上同调场论的例子。一个有趣的问题是，如何用$\mathscr{M}_{g,n}$上余切类的关联函数，以及定义在亏格为 g 的 n 点稳定曲线模空间上的上同调场论，来描述卡特兰数$C_{g,n}(\mu_1,\ldots,\mu_n)$。

由黎曼曲面的裤子分解所诱导的带状图运算还可用于定义曲线模空间之间的映射，并为上同调场论的分类结果提供一种枚举方法。具体而言，在 [11] （进行中），作者利用带状图理论，将弗罗贝尼乌斯代数的带状拓扑量子场论形式体系扩展为适用于 [25] 的上同调场论形式体系。这种组合方法为定义在半单弗罗贝尼乌斯代数上的上同调场论导出了一个类似于定理 1.1 的分类结果，所用的是 Thurston 等人在 [36],、Strebel 在 [37], 、Mulase 和 Penkava 在 [31] 以及其他人所发展的带状图形式体系。

通过推导由上同调场论扭转的卡塔兰递归，并进一步将其与枚举几何联系起来，从而推广定理 8.1，是一个有趣的问题。一个推动这一研究方向的问题是：

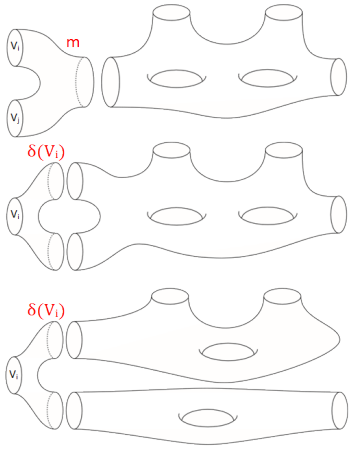
上同调场论所产生的扭曲卡塔兰数，能否在拓扑递归形式体系中得到诠释，从而为模空间的枚举几何和交数提供信息？

本文结构如下。在第 2 节中，我们回顾广义卡特兰数的递推关系及其与一点的格罗莫夫–维滕不变量之间的联系。在第 3 节中，我们对 Frobenius代数、近 Frobenius 代数和二维拓扑量子场论作较为充分的介绍，总结二维拓扑量子场论分类的主要步骤，并陈述定理 4.7，即作者最近在 [4] 中给出的几乎拓扑量子场论的一般分类结果。我们回顾， [8] 中借助带状图得到的拓扑量子场论主要分类结果利用了弗罗贝尼乌斯代数与其对偶之间的同构。然而，将该结果推广到近 Frobenius 代数的困难在于，该代数与其对偶之间不再存在同构，因此我们需要修改用于得到该结果的方法。

在 [8] 中，作者引入了一组公理，其中胞腔图的收缩一条直边 在代数结构上的作用类似于乘法，而在单个顶点处收缩一个环 的作用类似于余乘法。在本文中，我们采用这些公理，并在第 5 节中进一步为着色胞腔图引入额外的公理。在第7节中，我们将着色胞腔图公理应用于可能无限维的近 Frobenius 代数。

更确切地说，在第 5 节中，我们通过一组分为四类的公理（定义 5.5、5.7 和 5.11），在定义 5.4 中引入近弗罗贝尼乌斯代数的带状拓扑量子场论。第一类公理与原始分类结果中针对弗罗贝尼乌斯代数所用的公理类似；第二类公理则是第一类公理在拓扑量子场论输出侧对偶元素上的对应形式；第三类公理的灵感来自前两类公理之间联系所带来的拓扑推论。第四条公理是近弗罗贝尼乌斯代数所必需的，因为它们不再具有单位元；而对于弗罗贝尼乌斯代数，这条公理可由前两类公理和单位元的存在性推出（见引理 5.17）。

我们回顾由Eynard与Orantin [14, 15], 以及此前由Mirzakhani [28, 29] 所探讨的黎曼曲面裤子分解技术，它是作为拓扑递归框架基础的一项基本工具。回想一下，胞腔图可视为嵌入在此类黎曼曲面上的图，因此拓扑递归形式体系正是前两类公理的灵感来源，这取决于该分解发生在被视为图的“输入”还是“输出”的边界分支上，我们分别将其着为红色和蓝色。



F图 1. 黎曼曲面的裤子分解导出拓扑递归 n

我们在第5.11节给出的有色带图上流公理，受到Kontsevich等人在 [26] 中引入的图技术的启发，作者在其中使用带图运算来描述与Lurie [27]的一个构造相关的模空间。

在第6节中，我们聚焦于弗罗贝尼乌斯代数，并证明带状拓扑量子场论的一个分类结果——定理 6.13，从而推广了论文 [8] 的主要结果（另见 [6, 7]）。在第7节中，我们证明了本文针对近弗罗贝尼乌斯代数所引入的几乎拓扑量子场论的分类结果——定理 7.1。更明确地说，

定理 1.1。设 A 是一个具有余乘法 δ 和欧拉映射 $\mathbf{E}$ 的近弗罗贝尼乌斯代数。那么，在 *5.4* 中定义的、与一个类型为 (g, n, m) 且 $n, m \geq 1$ 的着色胞腔图 γ相关联的带状拓扑量子场论，与图无关，并且由下式给出：

$$\Omega(\gamma)(v_1, \ldots, v_n) = \delta^{m-1}(\mathbf{E}^g(v_1 \cdots v_n)). \tag{1}$$

其中，δ^0 是恒等映射（在 $m = 1$ 的情形下）。

请注意，即使在有限维情形下，也存在不具有余单位的近弗罗贝尼乌斯代数结构，见例3.9。因此，只要我们对胞腔图的拓扑类型施加一个额外约束，定理 1.1 就给出了比 [4]，中所得结果更一般的分类结果。

定理1.2。设 A 是一个带余单位的近弗罗贝尼乌斯代数，其余单位为 ε，欧拉映射为 $\mathbf{E}$，乘法为 $m = 0$。考虑γ一个类型为 $(g, n, 0)$、具有 $n \geq 1$ 的着色胞腔图，以及 $\Omega(\gamma) \in \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, K)$ 中的一个赋值，该赋值是满足 *5.2* 中定义的边收缩公理的多重线性映射。与近弗罗贝尼乌斯代数 A 相关联的带状拓扑量子场论与图无关，并且由下式给出

$$\Omega(\gamma)(v_1, \ldots, v_n) = \varepsilon(\mathbf{E}^g(v_1 \cdots v_n)). \tag{2}$$

我们注意到，在 $m = 0$ 的情况下，定义5.2中的公理恰好恢复了 [8] 的公理。因此，定理1.2的证明沿用 [8] 中的论证，并额外考虑注5.16，即围圆盘环的消去，也就是带图拓扑量子场论定义5.4中的情形 (4)。该证明的思路利用边收缩运算的图无关性，关键步骤如下：将胞腔图中的所有直边逐一收缩，直到只剩下一个顶点和若干个环。这些环要么围住一个圆盘，要么围住某个正亏格部分。我们可以消去每个围圆盘环，而对剩余环进行收缩，则相当于对被这些环围住的每个亏格各应用一次欧拉映射。

此外，我们回顾 [4] 的推论1.3：对于带余单位的近弗罗贝尼乌斯代数，由定理 1.1和定理1.2给出的带图拓扑量子场论分类，与 [4]中定理1.2给出的几乎拓扑量子场论分类相同。然而，在余单位可能不存在的情况下，定理 1.1给出了更一般的带图拓扑量子场论分类。

在第8节中，我们结合本文证明的结果，将由几乎拓扑量子场论扭转的、针对近弗罗贝尼乌斯代数的卡塔兰递归加以推广。更确切地说，卡塔兰递归 4 可以由几乎拓扑量子场论 76 进行扭转。关于明确的递归公式，请参见定理8.1。

定理 1.3。设 A 是一个余单位为 ε 的带余单位的近弗罗贝尼乌斯代数，欧拉映射为 $\mathbf{E}$，则广义卡塔兰递归可以由该几乎拓扑量子场论进行扭转。

注意，如果A 是一个有限维弗罗贝尼乌斯代数，那么它也是一个带余单位的近弗罗贝尼乌斯代数。特别地，定理1.2将 [8] 中得到的结果推广到了带余单位的近弗罗贝尼乌斯代数。

为说明我们为何关注定理 1.3，考虑以下例子。设G 为有限群，令$A = Z(C[G])$为群代数的中心，它作为弗罗贝尼乌斯代数表示分类栈的轨形上同调

of G，即BG。若G 是有限群，则A 是有限维的，其一组基由G的共轭类索引。文献 [35, 22] 证明，通过与弗罗贝尼乌斯代数$A = H^*(BG)$相对应的二维拓扑量子场论，装饰黛茜图和扭曲卡塔兰数的递推关系能够提供关于模空间 $\mathscr{M}_{g,n}(BG)$上余切类交数的信息；这一结论采用了第 2 节所述的方法。这一发现促成了文献 [7, 8, 10] 的研究，旨在计算扭曲卡塔兰数的递归关系，以期获得更一般的稳定映射模空间的交叉理论信息。定理 1.3 的结果能否应用于类似于文献 [7]所得扭曲递归结果的拓扑不变量，仍是一个开放问题。引言最后，我们提出以下观察：

推论 1。 **4.** 若 A 是有限维弗罗贝尼乌斯代数，则定理 *1.1* 和定理*1.2* 完成了分类 对于 $m \geq 1$ 的 *[8]* 。

事实上，请注意，当 A 是有限维弗罗贝尼乌斯代数（因此也是近弗罗贝尼乌斯代数）时，欧拉映射就是乘以欧拉元的 g 次幂，$\mathbf{E}^g(v) = e^g v$。

在本文末尾，我们还将介绍带色卡特兰数，并将其是否满足一种可通过定理 8.1 为近弗罗贝尼乌斯代数的几乎拓扑量子场论扭转的递推关系，留作一个开放问题。

最后，我们想提及 Garoufalidis、Scholze、Wheeler 和 Zagier [16] 在数域的 Habiro 环理论中的近期发展，以及 [17]的先前结果。特别是，卡特兰数的谱曲线是从 Nahm 和（即 q-差分方程的解）的渐近展开中恢复出来的。关于 q-差分方程与 Nahm 和的渐近展开之间的比较，以及它们同卡特兰数的量子曲线及其渐近展开之间的比较，都是进一步感兴趣的课题。

致谢。 作者谨此感谢波恩的马克斯·普朗克数学研究所在2023年项目启动期间长期逗留时所给予的慷慨支持、热情接待和富有启发性的环境。作者还要感谢比于尔叙尔伊维特的高等科学研究所和京都数理科学研究所在2024年访问期间给予的支持。他们还要感谢 David Rose 和 Luuk Stehouwer 在北卡罗来纳大学教堂山分校和 MPIM 就本项目提出的宝贵建议并进行多次讨论。作者的研究部分得到了 NSF-FRG DMS 2152130 项目资助和北卡罗来纳大学 JFDA 2022 年奖的支持。

在第二作者于波恩的 MPIM 访问期间，他在牛津大学开设了一门短期课程，介绍了本项目的一些初步构想；本工作谨献给《牛津讲座》卷。在牛津讲座中，作者还谈到了通过带状图研究轨形 Hurwitz 数、Mirzakhani 关于韦伊–彼得森体积的工作及其与卡特兰数的比较；还谈到了通过带状图进行的上同调场论方法，这些都启发了本工作。

在 String Math 2016 举办前不久，玛丽安·米尔扎哈尼表达了对拓扑递归广阔图景的兴趣；我们猜想，卡特兰数的递归是我们在枚举几何研究中与她的工作最为接近的问题。谨以此文纪念她。

2. 卡特兰数的枚举几何

本节基于 [10], [7] 中得到的结果展开。在 [10] 中，作者从干净贝利态射的加权计数这一角度，介绍了本节所述的枚举几何；这与诺伯里和 Do 在 [32] 中研究的格点计数密切相关。我们采用卡塔兰递归，为曲线模空间的枚举几何提供一种更简便的方法，并将在定理 8.1 中进一步使用。

全文中，我们将使用胞腔图理论，即带状图的 Poincar´e 对偶。该理论最初由 't Hooft [21] 在物理学中以及 Grothendieck [19] 在数学中提出。Kontsevich [24] 运用这一理论，首次提出了一种计算格罗莫夫–威滕不变量的方法。

定义 2.1。（胞腔图）拓扑类型为（g，n）的**胞腔图**，是一个亏格为g 且带有n 个标记的0-胞腔的紧致定向拓扑曲面的1-骨架（即0-胞腔与1-胞腔的并）。我们将0-胞腔称为顶点，将1-胞腔称为边，将2-胞腔称为面。每条边都分为两条半边，并在每条边的中点处相连。集合 $\Gamma_{g,\,n}$ 表示所有拓扑类型为（g，n）的胞腔图的集合。

注 2.2。胞腔图是通常所称的带状图或胖图的对偶概念，Grothendieck [19] 将其引入为儿童画。带状图是在每个顶点的关联半边上指定了一个循环次序的图。该次序随后会在每个面上的关联半边中诱导出一个循环次序。因此，任何胞腔图同时也是一个带状图，不过带状图通常按其面标记，而胞腔图则按其顶点标记。

注 2.3。根据前面的注释，我们可以将胞腔图视为由三部分信息构成：顶点列表、边列表，以及每个顶点处与该顶点相接的半边的循环次序。接着，我们考虑将该图嵌入紧致定向拓扑曲面，使n 个顶点对应于从曲面中挖去的n 个标记圆盘。我们以这样的方式将图嵌入曲面：在每个顶点处，其半边指定的循环次序都沿曲面上的顺时针方向排列。如此一来，拓扑亏格g就是使该图能够嵌入亏格为g且没有边相交的曲面的最小非负整数。

设$\Gamma_{g,\,n}(\vec{\mu})$为顶点集上度数指定为$\vec{\mu}=(\mu_1,\ldots,\mu_n)$的类型为$(g,\ n)$的所有无色胞腔图组成的集合。如果我们尝试用这个集合来回答关于其大小的计数问题，就会遇到重复计数的问题：一个胞腔图可能存在非平凡的自同构，即固定边和顶点却置换面的自同构。我们可以通过自同构来校正这种重复计数，也可以完全避开自同构问题，转而考虑带箭头胞腔图。带箭头胞腔图是一种胞腔图，其中每个顶点处都标记一条与该顶点相接的半边，并将这条半边视为循环次序的起点。设$\widehat{\Gamma}_{g,\,n}(\vec{\mu})$为顶点度数由 $\vec{\mu}$指定的类型为$(g,\ n)$的带箭头胞腔图集合。现在令$\widehat{C}_{g,\,n}(\vec{\mu}):=|\Gamma_{g,\,n}(\vec{\mu})|$ 表示其基数。容易看出，在黎曼球面上只有一个顶点、带编号且度数为$2k$的带箭头胞腔图中，该顶点的度数为偶数，因为边只能是附着在该顶点上的环。类型为$(0,\ 1)$的带箭头胞腔图还与一对唯一的k个括号相对应，因为我们从箭头处开始，沿着曲面的定向放置括号

这些数$C_{g,n}(\vec{\mu})$ 是经典卡塔兰数的一种推广，因为

$$C_{0,1}(2k)=\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}=C_k \tag{3}$$

是第k个传统卡特兰数。

数 $C_{g,n}(\vec{\mu})$ 因而满足一个与切割与连接类似的递推关系；当 $g=0$ 且 $n=1$时，该关系得到 5。我们将简化卡特兰递归的记法，并在本文后续部分使用这一简化形式。这里请注意，记号 $\neg u_{[n]\setminus\{1,j\}}=(\widehat{\ }u_1,u2,\ldots,\widehat{\ }u\,j\ \cdots,u_n)$ 表示省略向量 $\neg u$ 的第一项和第 j 项，而 $C_{g,n-1}(\mu_1+\mu_j-2,\vec{\mu}_{[n]\setminus\{1,j\}})=C_{g,n-1}(\mu_1+\mu j-2,\mu_2,\ldots,\widehat{\mu}j\ \cdots,\mu_n)$ 表示将 $\vec{\mu}$ 的第一项替换为 $\mu_1+\mu j-2$，并省略第 j 项

comp项。我们得到了广义卡特兰数的如下递推公式 [10, 7]

$$C_{g,n}(\vec{\mu}) = \sum_{j=2}^{n} \mu_j C_{g,n-1}(\mu_1+\mu_j-2, \vec{\mu}_{[n]\setminus\{1,j\}}) + \sum_{\alpha+\beta=\mu_1-2} \left[C_{g-1,n+1}(\alpha,\beta,\vec{\mu}_{[n]\setminus 1}) + \sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ I\sqcup J=\{2,\dots,n\}}} C_{g_1,|I|+1}(\alpha,\vec{\mu}_I) C_{g_2,|J|+1}(\beta,\vec{\mu}_J) \right], \tag{4}$$

并且已证明，通过坐标变换，可以利用这个方程计算一点的格罗莫夫–威滕不变量。该表达式中的每一项都对应于收缩第一个顶点处的标记边，从而得到一个不同的胞腔图。第一项对应于收缩连接顶点 1 和 j 的一条直边；第二项对应于收缩顶点 1 处的一个环，且收缩后图仍然连通；第三项对应于收缩顶点 1 处的一个环，且收缩后图不再连通。

利用方程 3 的观察，将广义卡特兰数的递推关系（方程 4）限定在亏格 0、带一个标记点的情形，我们得到经典卡特兰数满足的著名递推关系：

$$C_k = \sum_{a+b=k-1} C_a \cdot C_b \tag{5}$$

离散数学教材中的一道本科习题要求证明，经典卡特兰数C_k 的递推关系 5 等价于一条代数曲线的方程。事实上，取这些数的生成函数 $z(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{-2m-1}$，并使用经典递推关系 5，我们得到卡特兰数的谱曲线

$$z^2 - xz + 1 = 0 \tag{6}$$

这是拓扑递归形式体系中的一个基本概念。

广义卡特兰数的生成函数定义为

$$F_{g,n}(x_1,\dots,x_n) := \sum_{\mu_1,\dots,\mu_n>0} \frac{C_{g,n}(\mu_1,\dots,\mu_n)}{\mu_1\cdots\mu_n} x_1^{-\mu_1}\cdots x_n^{-\mu_n}. \tag{7}$$

卡特兰数 (6) 的谱曲线可视为希策布鲁赫曲面 $\mathbb{F}_2$ 内一条奇异曲线的某个坐标图上的局部表达式。与 [10] 中一样，我们进行一次坐标变换，它对应于爆破曲线的归一化坐标

$$x = x(t) = \frac{t+1}{t-1} + \frac{t-1}{t+1}, \tag{8}$$

对于稳定范围内的每个 $(g,\ n),\ 2g-2+n>0,$ 则 $F_{g,\ n}\big(x(t_1),\ x(t_2)。\ ..,\ x(t_n)\big)$ 将成为一个 Laurent 多项式。

存在一个微分算子能够湮灭广义卡特兰数的自由能生成函数。我们称之为卡特兰数的量子曲线。用于卡塔兰递归的拓扑递归形式体系中的谱曲线（6）导出了其量子曲线

$$\hbar\frac{d^2}{dx^2} + \hbar x\frac{d}{dx} + 1$$

其中，普朗克常数 $\hbar$ 是一个变形参数。特别地，Mulase 和 Sulkowski 依据 Gukov 和 Sulkowski 的猜想证明了卡特兰数的量子化，并得到如下结果:

定理 2.4。 设 $\hbar$ 为普朗克常数。则

$$\left(\hbar^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2} + \hbar \cdot x \cdot \frac{d}{dx} + 1\right) \exp\left(\sum_{2g-2+n\geq -1} \frac{1}{n!} \cdot \hbar^{2g-2+n} \cdot F_{g,n}(t,\ldots,t)\right) = 0. \tag{9}$$

一个令人惊讶的发现是，可以通过量子曲线解的渐近展开，求得 $\overline{\mathscr{M}}_{g,\,n}$ 的交数。更准确地说，劳朗多项式 $F_{g,\,n}$ 的最高次数部分是一个次数为 $6g-6+3n$ 的齐次多项式

$$F_{g,n}^{\text{highest}}(t_1,\ldots,t_n) = \frac{(-1)^n}{2^{2g-2+n}} \sum_{\substack{d_1+\cdots+d_n \\ =3g-3+n}} \langle \tau_{d_1} \cdots \tau_{d_n} \rangle_{g,n} \prod_{i=1}^{n} \left(|2d_i-1|!! \left(\frac{t_i}{2}\right)^{2d_i+1} \right), \tag{10}$$

这里，模空间 $\overline{\mathscr{M}}_{g,\,n}$ 上的余切类交数记为

$$\langle \tau_{d_1} \cdots \tau_{d_n} \rangle_{g,n} = \int_{\overline{\mathscr{M}}_{g,n}} \psi_1^{d_1} \cdots \psi_n^{d_n} \tag{11}$$

它们是 $F_{g\,n}^{\text{highest}}{}_{,}$ $(t1,\ldots,tn)$ 的系数

这些由 [10] 得到的结果进一步表明，导数 $W_{g,\,n} = d_1 \cdots d_n F_{g,\,n}$ 满足基于谱曲线 (6) 的拓扑递归，而该谱曲线是方程 (9) 的半经典极限。本文将略去有关拓扑递归的 Eynard-Orantin形式体系或 WKB分析的细节，转而聚焦于拓扑量子场论的数学方面。

在接下来的章节中，通过运用有色带图理论以及 [4]，中得到的近似拓扑量子场论分类，我们得到递推关系定理 8.1，它推广了 [10] 的标准递推。如何通过拓扑递归机制将这些新的递归关系与枚举几何联系起来，是今后值得进一步研究的问题。

3. Frobenius结构

3.1. Frobenius代数。 在本章中，我们将考虑域K上的有限维、含幺、交换Frobenius代数。我们回顾如下

定义 3.1. 设有限维代数 A为基域K 上的含幺代数，并配备非退化对称双线性形式 $\eta(u,vw) = \eta(uv,w)$,对所有 $u,v,w \in A$成立，则称为弗罗贝尼乌斯代数。我们用m表示其乘法映射$m: A \otimes A \to A$，并将双线性形式 η称为其*Frobenius* 型。

设 $\{e1,\ldots,e_n\}$为域K上A的一个基，且 $1 \in A$为该弗罗贝尼乌斯代数的单位元。Frobenius 型 η 诱导一个对称可逆矩阵，其元素将记为

$$\eta_{m,n} = \eta(e_m,e_n), \quad \eta = [\eta_{mn}] \quad \eta^{-1} = [\eta^{mn}].$$

我们将进一步介绍弗罗贝尼乌斯代数 $\varepsilon: A \to K$ 的余单位定义为 $\varepsilon(v) = \eta(1,v)$，其中 $v \in A$，而 $1 \in A$ 是乘法单位元。特别地，弗罗贝尼乌斯型可以用余单位来定义

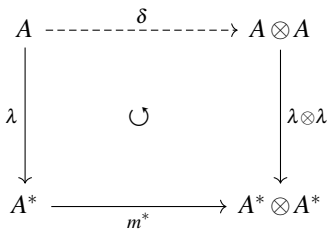
$$\eta(u,w) = \varepsilon(uw), \text{ for every } u,w \in A.$$

对于有限维弗罗贝尼乌斯代数，弗罗贝尼乌斯型 η 在 A 与其对偶 A^* 之间诱导出一个同构

$$\lambda : A \longrightarrow A^*, \quad \lambda(u) = \eta(u, -). \tag{12}$$

乘法的对偶 、m^*以及对偶性 λ 和 $\lambda \otimes \lambda$ 诱导出唯一的映射 δ，称为
余乘 A的余乘法，使该图表交换

(13)



在基元素上，A 的余乘法可定义为:

$$\delta(v) := \sum_{k,p,i,j=1}^{n} \eta(v, e_k e_p) \eta^{ki} \eta^{pj} e_i \otimes e_j \tag{14}$$

此外，假设弗罗贝尼乌斯代数是结合的且余结合的，换言之，以下关系成立（$m(m(p \otimes q) \otimes r) = m(p \otimes m(q \otimes r))$ 且 $(\delta \otimes \mathrm{id})(\delta(w)) = (\mathrm{id} \otimes \delta)(\delta(w))$，并且对每个$p,q,r,w \in A$均成立。那么，映射$m$和 δ满足“弗罗贝尼乌斯关系”，即对于所有$u, w \in A$,

$$\delta(uw) = (\mathrm{id} \otimes m)(\delta(u), w) = (m \otimes \mathrm{id})(u, \delta(w)). \tag{15}$$

为看出这一点，首先注意到，弗罗贝尼乌斯代数的任意向量都可以借助基由下列表达式写出

$$v = \sum_{a,b} \eta(v, e_a) \eta^{ab} e_b = \sum_{a,b} \eta(e_a, v) \eta^{ba} e_b. \tag{16}$$

此外，若A是交换且余交换的，则

$$\begin{aligned}
\delta\circ m(u\otimes v) &= \delta(uv)\\
&= \sum_{i,j,a,b}\eta(uv,e_ie_j)\eta^{ia}\eta^{jb}e_a\otimes e_b\\
&= \sum_{i,j,a,b}\eta(ue_i,ve_j)\eta^{ia}\eta^{jb}e_a\otimes e_b\\
&= \sum_{i,j,a,b,c,d}\eta(ue_i,e_c)\eta^{cd}\eta(e_d,ve_j)\eta^{ia}\eta^{jb}e_a\otimes e_b\\
&= \sum_{i,j,a,b,c,d}\eta(e_i,ue_c)\eta^{cd}\eta(e_de_j,v)\eta^{ia}\eta^{jb}e_a\otimes e_b\\
&= \sum_{j,b,c,d}\eta^{cd}ue_c\eta(e_de_j,v)\eta^{jb}\otimes e_b\\
&= \sum_{j,b,c,d}\eta^{cd}\eta^{jb}\eta(v,e_de_j)ue_c\otimes e_b\\
&= (m\otimes\mathrm{id})(u\otimes\delta(v)).
\end{aligned}$$

同样，我们有

$$\begin{aligned}
\delta\circ m(u\otimes v) &= \delta(uv)\\
&= \sum_{i,j,a,b}\eta(uv,e_ie_j)\eta^{ia}\eta^{jb}e_a\otimes e_b\\
&= \sum_{i,j,a,b}\eta(ue_i,ve_j)\eta^{ia}\eta^{jb}e_a\otimes e_b\\
&= \sum_{i,j,a,b,c,d}\eta(ue_i,e_c)\eta^{cd}\eta(e_d,ve_j)\eta^{ia}\eta^{jb}e_a\otimes e_b\\
&= \sum_{i,j,a,b,c,d}\eta(u,e_ie_c)\eta^{cd}\eta(e_dv,e_j)\eta^{ia}\eta^{jb}e_a\otimes e_b\\
&= \sum_{i,j,a,b,c,d}\eta(u,e_ie_c)\eta^{cd}\eta^{ia}e_a\otimes\eta(e_dv,e_j)\eta^{jb}e_b\\
&= \sum_{i,a,c,d}\eta(u,e_ie_c)\eta^{cd}\eta^{ia}e_a\otimes(e_dv)\\
&= (\mathrm{id}\otimes m)(\delta(u)\otimes v).
\end{aligned}$$

如上所见，复合 $\delta\circ m\colon A\otimes A\longrightarrow A\otimes A$ 在弗罗贝尼乌斯代数的定义中起着重要作用。反向次序的这一复合 $m\circ\delta\colon A\longrightarrow A$ 在二维拓扑量子场论的发展中十分重要。

弗罗贝尼乌斯代数的**欧拉元** 记作$\mathbf{e}\in A$，定义为

$$\mathbf{e}=m\circ\delta(1). \tag{17}$$

我们可以用一组基来表示欧拉元

$$\mathbf{e}=\sum_{a,b}\eta^{ab}e_ae_b. \tag{18}$$

这一元素使我们能够将对二维拓扑量子场论的理解拓展到与正亏格曲面胞腔图相关的线性映射。

注 3.2。 我们还指出，对于任意向量v，都有

$$m \circ \delta(v) = \mathbf{e}v. \tag{19}$$

这可由 14 和 18 直接推出，证明留给读者。

例 3.3. 考虑域 K 上的有限维多项式代数，$A = K[x]/(x^{n+1})$，其基为$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$。那么，$A$可以赋予许多余乘法结构。Gonzalez 等人 [18]证明，A 上所有可能的余乘法都必须是如下形式的余乘法的线性组合

$$\delta_k(x^\ell) := \sum_{i+j=n+k+\ell} x^i \otimes x^j, \quad \text{for } k \in \{0, 1, \ldots, n\}. \tag{20}$$

我们注意到，对于 $k = 0$，这 δ_0 恰好是例 2.4 中有限循环群的群代数上的余乘法，该有限循环群的阶为$n+1$，由元素x生成，其中余乘法由余单位诱导：$\varepsilon A \to K$ 由 $\varepsilon(1) = 1$ 和 $\varepsilon(x^\ell) = 0$ 给出，其中 $\ell \neq 0$。然而，这些余乘结构中的其余部分并非来自某个弗罗贝尼乌斯代数的余单位，否则近 Frobenius 结构就不满足弗罗贝尼乌斯关系。

3.2. **近弗罗贝尼乌斯代数**。 任何同时具有单位元和余单位、且乘法结构结合、余乘法结构余结合的弗罗贝尼乌斯代数，都必然是有限维的。然而，将许多关于 Frobenius代数的结果和分类推广到可能是无限维、但仍保留许多相同弗罗贝尼乌斯结构的代数上，或许会很有意义。由于这一限制，这些新结构必须缺少单位元或余单位（也可能两者都缺少）。我们在 3.1 中对 Frobenius代数的讨论说明了如何根据其余单位 ε 定义弗罗贝尼乌斯代数，而 Abrams [1] 则提出了另一种表述方式，依据余乘法 δ 来定义弗罗贝尼乌斯代数。事实上，Abrams 进一步证明了这两种构造等价：任何根据余单位定义的弗罗贝尼乌斯代数，也都可以等价地根据其余乘法定义，反之亦然。
Gonzalez 等人 [18] 利用这种通过余乘法进行的构造，将弗罗贝尼乌斯代数的结构推广到这类可能缺少余单位的相似代数上。

定义 3.4。 （近弗罗贝尼乌斯代数）设A 是域K 上的一个代数，并赋予乘法m和余乘法 δ的结构，其中乘积映射和余乘法映射满足弗罗贝尼乌斯关系 15。则数据集合（A，m δ）称为**近弗罗贝尼乌斯代数**。

备注 3.5。 我们回顾一下，定义 3.1 要求弗罗贝尼乌斯代数同时含幺且具有余单位，但对于近弗罗贝尼乌斯代数，并不存在这样的要求。

定义 3.6。 对于近弗罗贝尼乌斯代数，**欧拉映射，E**定义为

$$\mathbf{E} := m \circ \delta : A \longrightarrow A. \tag{21}$$

我们回顾一下，对于弗罗贝尼乌斯代数，欧拉元定义为$\mathbf{e} = (m \circ \delta)(1)$，类似地$(m \circ \delta)(v) = \mathbf{e}v$。然而，对于没有单位元的近弗罗贝尼乌斯代数，我们无法将 $\mathbf{e}$ 定义为代数中的一个元素。因此，欧拉映射这一概念使我们能够在新的背景下使用一种同样有用的构造。

Remark 3.7. 对于弗罗贝尼乌斯代数，欧拉映射就是乘以欧拉元e .

$$\mathbf{E}(v) = ev = m \circ \delta(v).$$

欧拉映射可以用A的一组基表示，

$$\mathbf{E}(v) = \sum_{i,j} \eta^{ij} v e_i e_j. \tag{22}$$

然后，我们利用这个欧拉映射对高亏格下近似拓扑量子场论的取值进行分类。

例 3.8. 任何弗罗贝尼乌斯代数也必定是近弗罗贝尼乌斯代数。作为乘法映射 m的对偶而得到的余乘法 δ，也可作为近弗罗贝尼乌斯代数结构的余乘法。

然而，并非任何近弗罗贝尼乌斯代数都必然来自某个Frobenius代数结构。事实上，即使近弗罗贝尼乌斯代数是有限维的，它也并不必然同时是弗罗贝尼乌斯代数。这一现象的一个例子源于如下事实：尽管弗罗贝尼乌斯代数必须具有唯一的余单位，近弗罗贝尼乌斯代数却可能具有许多潜在的余积，它们满足必要的余乘法结构，但并不作为乘积映射在该唯一余单位下的对偶而出现。

例3.9. 考虑K上的有限维多项式代数$A = K[x]/(x^{n+1})$，其基为$\{1, x, x^2, \ldots\ldots, x^n\}$。于是$A$可被赋予多种余乘结构。Gonzalez 等人 [18]证明，A上所有可能的余积都必须是取如下形式的余积的线性组合

$$\delta_k(x^\ell) := \sum_{i+j=n+k+\ell} x^i \otimes x^j, \quad \text{for} k \in \{0, 1, \ldots, n\}. \tag{23}$$

我们注意到，对于 $k = 0$，这个 δ_0 恰好是由元素 x 生成的阶为 $n+1$ 的有限循环群的群代数中的余乘法，其中余乘法由余单位 $\varepsilon\colon A \to K$ 诱导，该余单位由$\varepsilon(1) = 1$ 以及对于 $\ell \neq 0$ 的 $\varepsilon(x^\ell) = 0$ 给出。

然而，对于 $k \neq 0$, 这把 $(A\ \delta_k)$ 定义为一个近弗罗贝尼乌斯代数，尽管它是有限维的，却不是弗罗贝尼乌斯代数。事实上，注意任何弗罗贝尼乌斯代数都必须满足缝合圆盘上的关系：对所有 v，$(\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\delta(v)) = v$。在 $k \neq 0$ 的情形下，我们看到

$$(\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\delta(x^\ell)) = \sum_{i+j=n+k+\ell} \varepsilon(x^i) \otimes x^j \neq x^\ell \tag{24}$$

如前所述，Frobenius代数必须是有限维的，但近 Frobenius 代数可以是无限维的。

例 3.10. 设 $A = K[[x, x^{-1}]]$ 为 K 上的形式Laurent级数代数。该代数结构的余积可能形如以下各项的线性组合

$$\delta_k(x^\ell) = \sum_{i+j=k+\ell} x^i \otimes x^j, \tag{25}$$

而这些结构中的每一个都定义了一个近弗罗贝尼乌斯代数，它并非由某个弗罗贝尼乌斯代数的余单位所导出。我们可以观察到，这些余积的高次幂必定具有如下形式

$$\delta_k^m(x^\ell) = \sum_{j_1+j_2+\cdots j_{m-1}=mk+\ell} x^{j_1} \otimes \cdots \otimes x^{j_{m-1}}. \tag{26}$$

4. Topological Quantum Field Theory

4.1. 背景。 20 世纪 80 年代末，Atiyah [2] 和 Segal [34]提出了n维拓扑量子场论的思想，以便从数学上解释源自量子物理的概念。这里，我们关注$n = 2$的情形。Dijkgraaf [5], 发现了二维拓扑量子场论与弗罗贝尼乌斯代数之间的联系，而 Moore 和 Segal [30] 证明了有限维弗罗贝尼乌斯代数范畴与二维拓扑量子场论范畴之间存在范畴等价，另见 Kock[23] 和 Teleman [38]。

定义 4.1。 令**2Cob**表示二维配边范畴，其对象是若干个不相交的圆S^1，态射则是带边界的光滑定向曲面。更确切地说，两个对象$N_0 = \sqcup_n S^1$和$N_1 = \sqcup_m S^1$之间的态射是一个带边界的黎曼曲面 $\Sigma_{g,\ n,\ m}$，其边界为 $\partial\Sigma_{g,\ n,\ m} = N_0^{op} \sqcup N_1$，其中与$N_0$ 对应的边界分支赋予一种定向，与N_1 对应的边界分支则赋予相反定向。

我们用生成元与关系来描述范畴 **2Cob** 中的态射。所有配边都可以通过复合与不交并由以下五种配边生成：一个有一个入边界分量且没有出边界分量的杯，一个有一个出边界分量且没有入边界分量的杯，一个有一个入边界分量和一个出边界分量的圆柱，一个有一个入边界分量和两个出边界分量的裤子，以及一个有两个入边界分量和一个出边界分量的裤子。接着，我们给出这些生成元的复合必须满足的关系。

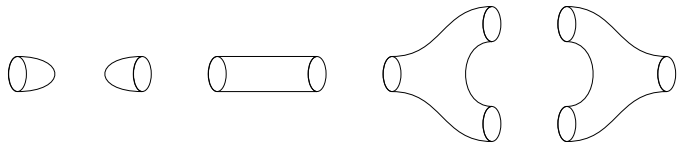


图 2. 范畴 **2Cob** 中态射的生成集

注 4.2. 通常，我们可以考虑一个称为“扭转”的第六个生成元；然而，生成所有可能的配边并不需要这个映射。相反，扭转满足一些重要关系。将这些概念用弗罗贝尼乌斯代数的语言表达时，其中两个关系对应于交换性和余交换性。其他关系（类似于纽结理论中的 Reidemeister移动）涉及扭转映射与其他生成元的复合，并使 **2Cob** 成为一个对称幺半范畴。关于这些关系，请参见 [23]。

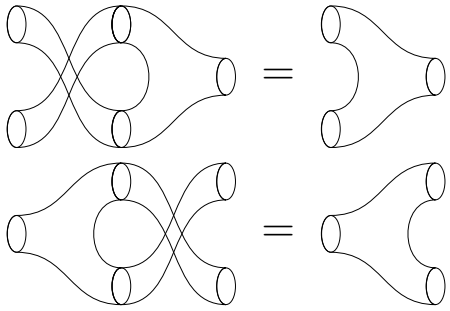


图 3. 扭转的交换性与余交换性关系。

在其余五个生成元的其他关系中，第一大类关系涉及圆柱充当恒等态射这一事实。因此，将圆柱粘合到另一个生成元的入边界或出边界上（对于裤子曲面，则将两个圆柱分别粘合到定向相同的两个边界分支上），不会改变该生成元。此外，我们还引入了两条

条关于将圆盘缝合到裤子曲面边界分支上的关系。具体而言，若将一个圆盘缝合到具有两个入边界分支的裤子曲面的一个入边界分支上（或者相应地，缝合到具有两个出边界分支的裤子曲面的一个出边界分支上），则所得配边是一个圆柱。当然，单独缝合一个圆盘看起来并不像配边的复合，因此我们真正的意思是，将一个圆盘缝合到一个入边界（或出边界）分支上，并将一个恒等圆柱缝合到另一个分支上。

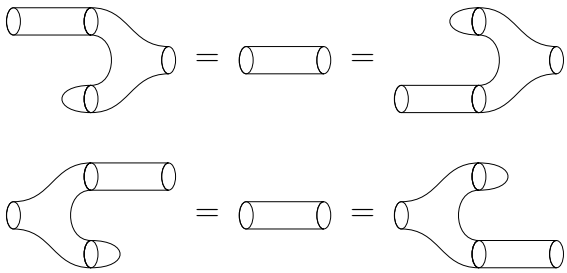


图 4. 涉及缝合圆盘的关系

接下来，我们有结合律和余结合律关系，它们涉及两个定向相同的裤子曲面的复合。

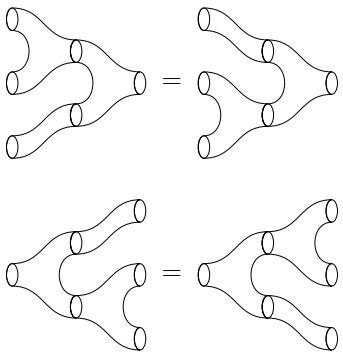


图 5. 配边的结合律和余结合律关系。

最后，考虑以下亏格为 0、具有两个入边界分支和两个出边界分支的微分同胚黎曼曲面；每个曲面都以不同的方式将定向相反的裤子曲面复合。这里的最后一个关系称为弗罗贝尼乌斯关系，它指出这些曲面作为配边也等价。

我们进一步考虑基域 K 上有限维向量空间构成的幺半范畴，并赋予其张量积；我们将这个范畴称为 **Kvect**。那么，二维拓扑量子场论（2D TQFT）是一个对称幺半函子

$$Z : \mathbf{2Cob} \longrightarrow \mathbf{KVect}, \tag{27}$$

满足一组特定公理。该函子将**2Cob**中的对象——由n 个圆组成——映射为A 在K上的n次张量幂，其中A 是一个特定的向量空间；并将每个黎曼曲面$\Sigma_{g,n,m}$ 映射为一个

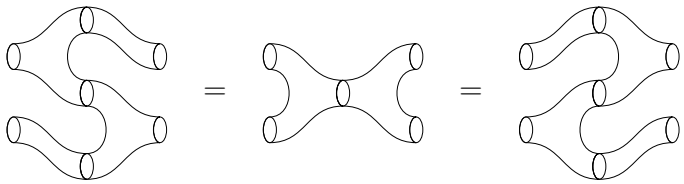


图 6. 配边的弗罗贝尼乌斯关系 .

多重线性映射 $\omega_{g,n,m} : A^{\otimes n} \longrightarrow A^{\otimes m}$。根据函子性，**2Cob**生成元之间的关系意味着，由此得到的向量空间 A 必然是带单位元的交换Frobenius代数。

很容易看出，图 2 中 **2Cob** 的生成元分别对应于弗罗贝尼乌斯代数 A 的一项有用数据。

$$\begin{aligned}
\varepsilon &:= \omega_{0,1,0} : A \longrightarrow K, \\
\mathbf{1} &:= \omega_{0,0,1} : K \longrightarrow A, \\
\eta &:= \omega_{0,2,0} : A \otimes A \longrightarrow K, \\
\delta &:= \omega_{0,1,2} : A \longrightarrow A \otimes A, \\
m &:= \omega_{0,2,1} : A \otimes A \longrightarrow A.
\end{aligned}$$

图 3 中扭转的两个关系分别对应于 A 的交换性和余交换性。图 4 中关于缝合圆盘的第一个关系仅定义了 1 是乘法单位元，而第二个关系给出了方程 16 中 ν 的典范基展开。图 5 中的两个关系分别对应于 A 的结合律和余结合律，而图 6 中的弗罗贝尼乌斯关系正是方程 15。

Atiyah 和 Segal [2]定义**缝合公理**，以表达二维拓扑量子场论函子必须保持态射的复合。也就是说，如果一个黎曼曲面 $\Sigma_{g+h+k-1,\ n,\ m}$ 由两个曲面$\Sigma_{g,\ n,\ k}$ 和 $\Sigma_{h,\ k,\ m}$ 通过将一个曲面的k 个出边界分量与另一个曲面的k 个入边界分量缝合而成，那么与新曲面关联的多重线性映射应为与原来两个曲面关联的映射的复合。特别地，

$$\omega_{g+h+k-1,n,m} = \omega_{h,k,m} \circ \omega_{g,n,k} : A^{\otimes n} \longrightarrow A^{\otimes m}. \tag{28}$$

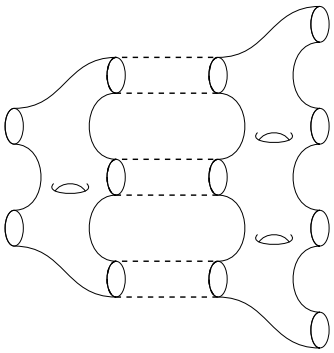


图 7. 缝合两个配边。

随后可以将文献 28 中的缝合公理推广为一种运算，即只将这些公共边界分量中的一部分缝合在一起。具体而言，考虑两个黎曼曲面 $\Sigma_{g,\ n,\ k}$ 和$\Sigma_{h,\ \ell,\ m}$。对于任意满足$j \geq 1$、$j \leq k$ 且$j \leq \ell$的情形，我们可以将第一个曲面的j 个出边界分量与第二个曲面的j 个入边界分量缝合，并在其他定向相同的边界分量处接上恒等圆柱。这样便得到一个新的黎曼曲面 $\Sigma_{g+h+j-1,\ n+\ell-j,\ k+m-j}$。**部分缝合公理**规定，与这个新曲面关联的映射也应是与 $\Sigma_{g,\ n,\ k}$ 和 $\Sigma_{h,\ \ell,\ m}$关联的多重线性映射的复合。也就是说，

$$\omega_{g+h+j-1,n+\ell-j,k+m-j} = \omega_{h,\ell,m} \circ \omega_{g,n,k} : A^{\otimes n+\ell-j} \longrightarrow A^{k+m-j}. \tag{29}$$

如果考察边界分支较少的亏格为零的曲面所满足的部分缝合公理，就可以探究弗罗贝尼乌斯代数结构中重要映射之间的关系。例如，

$$\omega_{0,1,0} \circ \omega_{0,2,1} = \omega_{0,0,2} \Longrightarrow \varepsilon \circ m = \eta. \tag{30}$$

在 [2] 中，另一个公理确保了对偶性与定向反转之间的兼容性。特别地，如果 $Z(S^1) = A$，那么对偶代数 A^* 对应于 $Z((S^1)^{op})$。此外，设 Σ 是一个类型为 (g,n,m) 的配边， Σ^* 是 Σ 的相反定向曲面。那么 $Z(\Sigma^*)$ 给出对偶向量空间 $(A^*)^{\otimes n} \longrightarrow (A^*)^{\otimes m}$ 之间的对偶映射。这种与定向有关的兼容性赋予 A 双代数结构。双线性形式 η 的非退化条件保证了 A 的代数与余代数结构之间的对偶性。这意味着第 12 节中的映射 λ 给出了 A 与其对偶A^* 之间的同构，并使 A 成为一个交换Frobenius代数。

我们可以明确看到，Z 在图 2 所示生成集上的关系下的函子性，导出了弗罗贝尼乌斯代数所固有的性质。图 3 中关于扭转的关系意味着A的代数与余代数结构具有交换性和余交换性。图 4 所示的第一个关系表明，1 是A的乘法单位元，而第二个关系则意味着 16。特别地，我们可以看到

$$\begin{aligned} v = \mathrm{id}(v) &= (\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \delta(v) \\ &= (\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \left(\sum_{i,j,a,b} \eta(v, e_i e_j) \eta^{ia} \eta^{jb} e_a \otimes e_b \right) \\ &= \sum_{i,j,a,b} \eta(v, e_i e_j) \eta^{ia} \eta^{jb} e_a \varepsilon(e_b) \\ &= \sum_{i,j,a,b} \eta(v, e_i \varepsilon(e_b) \eta^{jb} e_j) \eta^{ia} e_a \\ &= \sum_{i,a} \eta(v, e_i) e_a \eta^{ia}. \end{aligned}$$

图 5 中的两个关系分别对应m 和 δ 的结合律与余结合律。最后，弗罗贝尼乌斯关系正是图 6 所示的关系，它可以表示为某个图表的交换性，该图表由方程 15 描述。任意弗罗贝尼乌斯代数都会导出一个二维拓扑量子场论。事实上，从生成映射 $1, \varepsilon, \mathrm{id}, m,$和 δ 出发，根据部分缝合公理并施加少数限制，即可构造出所有其他映射。

定义 4.3 （二维拓扑量子场论）。 设A 是域 K上的有限维向量空间。假设A 配备了一个非平凡线性映射 $\varepsilon : A \longrightarrow K$ 以及一个到其对偶的同构 $\lambda : A \xrightarrow{\sim} A^*$。多重线性映射系统 $\left(A \left\{\omega_{g,n,m}\right\}\right)$ 是一个二**维拓扑量子场论**，如果该系统

$$\omega_{g,n,m} : A^{\otimes n} \longrightarrow A^{\otimes m}, \quad g,n,m \geq 0$$

满足以下四条公理。

• **拓扑量子场论 1. 对称性：**该映射

$$\omega_{g,n,m} : A^{\otimes n} \longrightarrow A^{\otimes m} \tag{31}$$

在其定义域上的对称群作用下保持不变。

• **拓扑量子场论 2. 非平凡性：**

$$\omega_{0,1,0} := \varepsilon : A \longrightarrow K. \tag{32}$$

• **拓扑量子场论 3. 对偶性：** 下图交换:

$$\begin{array}{ccc} A^{\otimes n} & \xrightarrow{\omega_{g,n,m}} & A^{\otimes m} \\ \downarrow{\scriptstyle \lambda^{\otimes n}} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda^{\otimes m}} \\ (A^*)^{\otimes n} & \xrightarrow{(\omega_{g,n,m})^*} & (A^*)^{\otimes m} \end{array} \tag{33}$$

• **拓扑量子场论 4. 部分缝合：**

$$\omega_{h,\ell,m} \circ \omega_{g,n,k} = \omega_{g+h+j-1,n+\ell-j,k+m-j} : A^{\otimes n+\ell-j} \longrightarrow A^{k+m-j}, \quad j \le k, j \le \ell. \tag{34}$$

对于满足这四条公理的任意二维拓扑量子场论，这些映射 $\omega_{g,n,m}$ 都可以分类。两位作者运用上同调场论的技巧，证明了 [4] 中所有 $\omega_{g,n,m}$ 的映射$m > 0$ 的这一分类，从而推广了 [7] 中对形如 $\omega_{g,n,}$ 0 的映射所得到的先前结果。在本文中，我们将回顾 [7] 中用于证明$m = 0$ 情形的主要技巧。

上同调场论（CohFT） [25]是由一个弗罗贝尼乌斯代数 A 以及一组线性映射$\Omega_{g,n}$: A $\longrightarrow$ H*($\mathscr{M}$ g,n,K) 构成的，这些映射对满足 $2-2g+n>0$ 的 (g, n) 定义，并满足一组特定的公理。这里，$\mathscr{M}_{g,n}$ 表示具有 n 个标记点的稳定亏格 g 曲线的模空间的德利涅-芒福德紧化。已知任意二维拓扑量子场论的 $\{\omega_{g,n,0}\}$ 部分给出一个 CohFT，其取值仅在 H^0($\mathscr{M}$g,n,K) = K 中，因此，在二维拓扑量子场论映射 $\{\omega_{g,n,0}\}$ 的语境下，CohFT 公理如下:

$$\omega_{g,n+1,0}(v_1,\dots,v_n,1) = \omega_{g,n,0}(v_1,\dots,v_n). \tag{35}$$

$$\omega_{g,n,0}(v_1,\dots,v_n) = \sum_{i,j} \omega_{g-1,n+2}(v_1,\dots,v_n,e_i,e_j)\eta^{ij}. \tag{36}$$

$$\omega_{g_1+g_2,|I|+|J|,0}(v_I,v_J) = \sum_{i,j} \eta^{ij}\omega_{g_1,|I|+1,0}(v_I,e_i)\cdot\omega_{g_2,|J|+1,0}(v_J,e_j). \tag{37}$$

其中$I \sqcup J = \{1,2,\dots,n\}$。事实上，这三个等式中的每一个都是部分缝合公理 29 的直接结果。由于乘法单位元 1 是帽 $\Sigma_{0,}0,1$ 的像，因此第一个公理 35 是将一个圆盘缝合到$\Sigma_{g,n+1,}0$ 的最后一个输入边界分量上得到的。也就是说，

$$\omega_{g,n+1,0} \circ (\mathrm{id}^{\otimes n} \otimes \omega_{0,0,1}) = \omega_{g,n,0} : A^{\otimes n} \longrightarrow K. \tag{38}$$

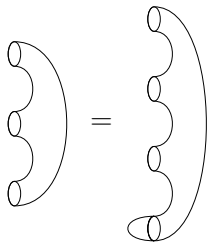


图8. 对应于第一个 CohFT 公理的部分缝合。

另外两个 CohFT 公理涉及在与元素 $\delta(1) = \omega_{0,1,2} \circ \omega_{0,0,1}$ 相关联的管状形状 $\Sigma_{0,0,2}$ 上进行缝合。由 14 可见，这是

$$\begin{aligned}\delta(1) &= \sum_{i,j,a,b} \eta(1, e_i e_j)\eta^{ia}\eta^{jb} e_a \otimes e_b \\ &= \sum_{i,j,a,b} \eta(e_i, e_j)\eta^{ia}\eta^{jb} e_a \otimes e_b \\ &= \sum_{i,j,a,b} \eta_{ij}\eta^{ia}\eta^{jb} e_a \otimes e_b \\ &= \sum_{a,b} \eta^{ab} e_a \otimes e_b.\end{aligned}$$

如果我们将它缝合到 $\Sigma_{g-1,n+2,0}$ 的最后两个输入边界分量上，就会形成一个孔，使亏格增加 1。

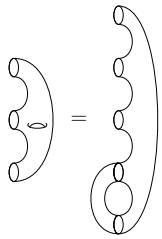


图9. 对应于第二个 CohFT 公理的部分缝合。

这给出了相应的线性映射复合：

$$\omega_{g-1,n+2,0} \circ (\mathrm{id}^{\otimes n} \otimes \omega_{0,0,2}) = \omega_{g,n,0} : A^{\otimes n} \longrightarrow K. \tag{39}$$

第三公理也涉及缝合到相同的管状形状 $\Sigma_{0,0,2}$ 上，但它将每个边界分量分别缝合到两个不相交配边形 $\Sigma_{g_1,|I|+1,0}$ 和 $\Sigma_{g_2,|J|+1,0}$ 上。由于相应的线性映射在输入上的对称群作用下保持不变，我们将其描绘为缝合到一个配边形的第一个输入槽位和另一个配边形的最后一个输入槽位，尽管公式 37 表明我们应该将这些圆分别缝合到两者的最后一个输入槽位上。

这给出了 $\omega_{0,0,2}$ 的一个复合，同时作用于两个独立的线性映射。

$$(\omega_{g_1,|I|+1,0} \otimes \omega_{g_2,|J|+1,0}) \circ (\mathrm{id}^{\otimes |I|} \otimes \omega_{0,0,2} \otimes \mathrm{id}^{\otimes |J|}) = \omega_{g_1+g_2,|I|+|J|,0} : A^{|I|+|J|} \longrightarrow K. \tag{40}$$

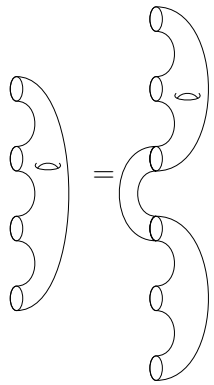


图10．对应于第三条 CohFT 公理的部分拼接。

我们现在给出二维拓扑量子场论分类的证明，但首先将确立若干基本情形。根据定义，我们有 $\omega_{0,1,0}(v) = \varepsilon(v)$ 以及 $\omega_{0,2,0}(v,w) = \eta(v,w)$，但我们借助对偶性来求出 $\omega_{0,3,0}$。注意，线性映射 $\omega_{g,n+m,0} : A^{\otimes n} \otimes A^{\otimes m} \longrightarrow K$ 等价于映射 $A^{\otimes n} \longrightarrow (A^*)^{\otimes m}$，因此我们可以利用如下图表，由 $\omega_{g,n+m,0}$ 重构映射 $\omega_{g,n,m}$：

(41)
$$\begin{array}{ccccc} A^{\otimes n} & \xrightarrow{\omega_{g,n+m,0}} & (A^*)^{\otimes m} & \xrightarrow{(\lambda^{-1})^{\otimes m}} & A^{\otimes m} \\ \| & & & & \| \\ A^{\otimes n} & & \xrightarrow{\qquad\qquad\omega_{g,n,m}\qquad\qquad} & & A^{\otimes m} \end{array},$$

其中 $\lambda : A \xrightarrow{\sim} A^*$ 是由 Frobenius 型 $\eta(v\,-)$ 给出的同构。我们可以利用该图观察到，$vw = \omega_{0,2,1}(v,w) = \lambda^{-1}(\omega_{0,3,0}(v,w\,-))$，或者等价地，$\omega_{0,3,0}(u,v,w) = \eta(uv,w) = \varepsilon(uvw)$。这将作为所有形如$\omega_{0,n,0}$的映射的基例。

4.2. **一个分类结果**。 我们将进一步回顾 $\omega_{g,\,n,\,0}$ 的分类结果，如 [7] 和 [8 中所述]

命题4.4。 没有输出的二维拓扑量子场论的亏格0 取值为

(42)
$$\omega_{0,n,0}(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \varepsilon(v_1 v_2 \cdots v_n).$$

证明。 我们已经看过$n = 1$，2，和 3 的基本情形。从这里开始，我们将使用第三个 CohFT 公理 37 和典范基展开 16。假设$n \geq 4$，并且对于所有满足 $\omega_{0,\,k,\,0}$ 且$k < n$的情况，42 均成立。那么，

$$\begin{aligned} \omega_{0,n,0} &= \sum_{a,b} \eta^{ab} \omega_{0,n-1,0}(v_1, \ldots, v_{n-2}, e_a) \omega_{0,3,0}(v_{n-1}, v_n, e_b) \\ &= \sum_{a,b} \eta^{ab} \omega_{0,n-1,0}(v_1, \ldots, v_{n-2}, e_a) \eta(v_{n-1} v_n, e_b) \\ &= \sum_{a,b} \omega_{0,n-1,0}(v_1, \ldots, v_{n-2}, \eta^{ab} \eta(v_{n-1} v_n, e_b) e_a) \\ &= \omega_{0,n-1,0}(v_1, \ldots, v_{n-2}, v_{n-1} v_n) \\ &= \varepsilon(v_1 \cdots v_{n-1} v_n). \end{aligned}$$

□

现在我们注意到，对于更高的亏格，每增加一个亏格，函数内部就会再乘上一个欧拉元$\mathbf{e}$因子。

命题 4.5. 对于正亏格为 $g > 0$ 的映射，我们有

$$\omega_{g,1,0}(v) = \varepsilon(v\mathbf{e}^g). \tag{43}$$

证明。 我们首先使用第二个 CohFT 公理来建立基例$\omega_{1,}1,0$.

$$\begin{aligned}
\omega_{1,1,0}(v) &= \sum_{a,b} \eta^{ab}\omega_{0,3,0}(v,e_a,e_b) \\
&= \sum_{a,b} \eta^{ab}\eta(v,e_ae_b) \\
&= \eta(v,\mathbf{e}) \\
&= \varepsilon(v\mathbf{e}).
\end{aligned}$$

现在我们同时使用第二个和第三个 CohFT 公理，对 n 进行归纳。

$$\begin{aligned}
\omega_{g,1,0}(v) &= \sum_{a,b} \omega_{g-1,3,0}(v,e_a,e_b)\eta^{ab} \\
&= \sum_{i,j,a,b} \omega_{0,4,0}(v,e_a,e_b,e_i)\omega_{g-1,1,0}(e_j)\eta^{ij}\eta^{ab} \\
&= \sum_{i,j,a,b} \eta(ve_ae_b,e_i)\omega_{g-1,1,0}(e_j)\eta^{ij}\eta^{ab} \\
&= \sum_{i,j} \eta(v\mathbf{e},e_i)\omega_{g-1,1,0}(e_j)\eta^{ij} \\
&= \omega_{g-1,1,0}(v\mathbf{e}) \\
&= \quad \vdots \\
&= \omega_{1,1,0}(v\mathbf{e}^{g-1}) \\
&= \eta(v\mathbf{e}^{g-1},\mathbf{e}) = \eta(v,\mathbf{e}^g) = \varepsilon(v\mathbf{e}^g).
\end{aligned}$$

□

我们现在使用类似的论证，将二维拓扑量子场论中无输出映射的情形完全推广。

定理 4.6. *[7, 8]* 对于其输出位于 K 中的映射，我们有

$$\omega_{g,n,0}(v_1,\ldots,v_n) = \varepsilon(v_1\cdots v_n\mathbf{e}^g). \tag{44}$$

证明。 这里的论证与定理 4.5 的论证大体相同。

$$\begin{aligned}
\omega_{g,n,0}(v_1,\ldots,v_n) &= \omega_{1,n,0}(v_1\mathbf{e}^{g-1},v_2,\ldots,v_n) \\
&= \sum_{a,b} \omega_{0,n+2,0}(v_1\mathbf{e}^g,v_2,\ldots,v_n,e_a,e_b)\eta^{ab} \\
&= \omega_{0,n,0}(v_1\mathbf{e}^g,v_2,\ldots,v_{n-1},v_n\mathbf{e}) \\
&= \varepsilon(v_1\cdots v_n\mathbf{e}^g).
\end{aligned}$$

□

定理 4.6 给出了$m=0$的二维拓扑量子场论取值。不难看出，这一结果可以推广到$m\geq 1$的情形。对于$m=1$的情形，将 λ^{-1}应用于这一结果一次，便得到$v_1\cdots v_n\mathbf{e}^g$.。对于更高的输出$m>1$，接下来可以连续使用余乘映射 δ，将单输出情形推广到多输出情形。 [3] 和 [4] 给出的结果是：对于任意弗罗贝尼乌斯代数A，二维拓扑量子场论 $\omega_{g,n,m}$ 的$m\geq 1$ 部分由下式给出

$$\omega_{g,n,m}(v_1,\ldots,v_n)=\begin{cases} v_1\cdots v_n\mathbf{e}^g, & m=1\\ \delta^{m-1}(v_1\cdots v_n\mathbf{e}^g), & m\geq 2\end{cases}. \tag{45}$$

4.3. **近似拓扑量子场论**。 Gonzalez 等人提出了近弗罗贝尼乌斯代数的概念，并将其称为 [18] 近似拓扑量子场论，由此可以推广二维拓扑量子场论的概念。若考虑$\mathbf{2Cob}^+$，即其对象为正数个S^1 的不交并的$\mathbf{2Cob}$的全子范畴，以及K上的可能为无限维的向量空间范畴$\mathbf{KVect}^\infty$，那么近似拓扑量子场论就是如下函子

$$Z:\mathbf{2Cob}^+\longrightarrow\mathbf{KVect}^\infty. \tag{46}$$

人们已广泛研究并发现，Frobenius 代数范畴与二维拓扑量子场论范畴同构；Gonzalez 等人也类似地证明了，近弗罗贝尼乌斯代数范畴与近似拓扑量子场论范畴之间存在范畴同构。

事实上，方程 45 中的这一分类结果还可以推广到近弗罗贝尼乌斯代数和近似拓扑量子场论，但仅限于代数带有余单位的情形。在这种情形下使用的部分缝合技术仍可应用于带余单位的近弗罗贝尼乌斯代数；不过需要注意，对于不带余单位的近弗罗贝尼乌斯代数，我们必须发展第 5 章和第 7 章中的技术。

定理 4.7。 *[3, 4]* 与带余单位的近弗罗贝尼乌斯代数 A 相关联的近似拓扑量子场论，其余单位为 ε，余乘法为 δ，欧拉映射为 $\mathbf{E}$，其取值由下式给出：

$$\omega_{g,n,m}(v_1,\ldots,v_n)=\begin{cases}\mathbf{E}^g(v_1\cdots v_n), & m=1,\\ \delta^{m-1}(\mathbf{E}^g(v_1\cdots v_n)), & m\geq 2,\\ \varepsilon(\mathbf{E}^g(v_1\cdots v_n)), & m=0.\end{cases} \tag{47}$$

5. 着色胞腔图与边公理

5.1. **着色胞腔图**。 本章中，我们提供一种表述二维拓扑量子场论的替代方法。Dumitrescu 和 Mulase [7] 通过胞腔图范畴上的公理，引入了二维拓扑量子场论的$m=0$ 映射的表述。这里，我们通过考察这些胞腔图的特定着色，并引入遵循这种着色的新公理，对这些公理加以拓展。

现在我们考虑对胞腔图的某个顶点子集进行着色。类型为（g，n，m）的着色胞腔图，是指亏格为g 的胞腔图，其中n 个顶点标记为一种颜色，m 个顶点标记为另一种颜色，其余顶点不着色。当然，我们也可以将其视为每个顶点都标记为三种颜色之一的胞腔图，但我们希望这三种颜色中的两种有所区别。

定义 5.1. 对于类型为（g,n,m）的胞腔图，一种颜色的n个顶点称为**输入顶点**，第二种颜色的m 个顶点称为**输出顶点**。在本文中，我们将输入顶点标为红色，输出顶点标为蓝色，其余所有顶点标为黑色。

注记 5.2. 在图着色的许多情形中，通常要求两个相邻顶点不能标以同一种颜色。我们在此并不施加这一要求。相反，这种顶点着色会诱导出图的边上的一种着色。连接两个输入顶点或两个输出顶点的边与其所连接的两个顶点具有相同的颜色，而所有其他边保持无色。

除了这种顶点颜色标记会在边上诱导出颜色外，它还会在（大多数）无色边上诱导出方向。若一条无色边连接到输入顶点，则其方向背离该输入顶点；若连接到输出顶点，则其方向指向该输出顶点。连接两个无色顶点的边可以指向任一方向，只要每个无色顶点至少有一条入边和一条出边。

注 5.3。 根据这些要求，若我们考虑由所有有向边及与这些边相连的顶点构成的子图，则输入顶点是**源点**，输出顶点是**汇点**，而无色顶点称为**流顶点**。我们用 $\Gamma_{g,\ n,\ m}$ 表示所有亏格为g、具有n 个输入顶点、m 个输出顶点以及任意非负数个流顶点的胞腔图的集合。

定义 5.4 （带状拓扑量子场论）。 设A 是一个近弗罗贝尼乌斯代数。我们将**带状拓扑量子场论** 定义为一种指派，它将多重线性映射与边收缩/构造公理相容地对应起来。

$$\Omega : \Gamma_{g,n,m} \longrightarrow \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, A^{\otimes m}). \tag{48}$$

也就是说，对于任意着色胞腔图 $\gamma \in \Gamma_{g,n,m}$，其中 $n,m \geq 1$,考虑 $\Omega(\gamma) : A^{\otimes n} \longrightarrow A^{\otimes m}.$，这是一个 n 元函数 $\Omega(\gamma)(v1,\ldots,vn)$，它将 $v_i \in A$ 赋给 γ 的第 i 个输入顶点，使得 $\Omega(\gamma)$ 满足

(1) 输入边收缩公理：定义5.5。(2) 输出边构造公理：定义5.7。(3) 流公理和基本情形：定义5.11。(4) 围盘环路消去：若 γ, γ' 是仅在一个围成圆盘的环 L 上不同的图，则要求 $\Omega(\gamma) = \Omega(\gamma')$（见图11）。

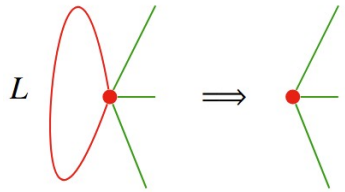


图11. 公理 (4)：消去围成圆盘的环 L

注意，当 $m = 0$ 时，图 γ 只有输入顶点，因此在上述定义中只需考虑公理 (1) 和 (4)。此外，当 A 是弗罗贝尼乌斯代数时，公理 (4) 是冗余的，因为它可由公理 (1) 和单位元的存在推出，并且作为引理 5.17 的情形 1 给出。

我们断言，这一赋值给出了二维拓扑量子场论的另一种表述。Dumitrescu 和 Mulase[8] 在无色胞腔图的情形下给出了这一表述，即将映射 $\Omega(\gamma) : A^{\otimes n} \longrightarrow K$ 赋予一个亏格为 g 、具有 m 个顶点的胞腔图。该表述恰好对应于我们表述中的 $m = 0$ 情形。受他们关于无色胞腔图的公理启发，我们引入自己的公理，规定这一赋值48必须对彩色胞腔图成立。

5.2. **输入顶点之间的边**。 本小节列出的公理类似于 Dumitrescu 和 Mulase [8] 在无色情形下的边收缩公理，但现在我们仅将它们应用于着色胞腔图中连接输入顶点的边。

定义 5.5（输入边收缩公理）。 我们称赋值 48 满足以下**输入边收缩公理**，如果

• **IECA 1：**设有一条边 E 连接 γ 的第 i 个与第 j 个输入顶点，其中 $i<j$ 且 $\gamma\in\Gamma_{g,n,m}$。令 $\gamma'\in\Gamma_{g,n-1,m}$ 为通过收缩 E 得到的胞腔图。则，

$$\Omega(\gamma)(v_1,\dots,v_n)=\Omega(\gamma')(v_1,\dots,v_{i-1},v_iv_j,v_{i+1},\dots,\widehat{v_j},\dots,v_n), \tag{49}$$

其中 $\widehat{\ }v_j$ 表示我们忽略第 j 个输入变量 v_j，因为其对应的输入顶点在图 γ' 中已不存在。

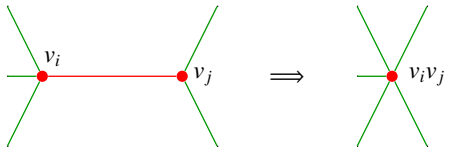


图12. 收缩输入顶点i 与 j 之间的边 E 的输入边收缩操作

• **IECA 2：**设胞腔图 $\gamma\in\Gamma_{g,n,m}$ 的第 i 个输入顶点处有一个环 L。令 γ' 为通过收缩环 L 并将第 i 个输入顶点分离为两个分别标记为 i 与 i' 的不同输入顶点而得到的可能不连通图。为便于标记，我们将按$i-1<i<i'<i+1$ 排序。若 γ' 连通，则 $\gamma'\in\Gamma_{g-1,n+1,m}$。在此情形下，我们有

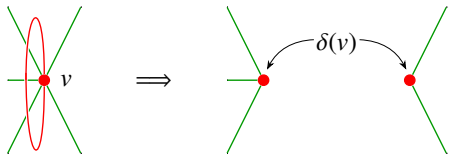


图13. 在输入顶点i处收缩环L 的输入边收缩操作

$$\Omega(\gamma)(v_1,\dots,v_n)=\Omega(\gamma)(v_1,\dots,v_{i-1},\delta(v_i),v_{i+1},\dots,v_n) \tag{50}$$

其中余乘法 $\delta(\mathrm{v}_i)$ 的输出被插入线性映射的第 i 个和第 i′ 个输入槽位。然而，如果 γ'是不连通的，则写作 $\gamma'=(\gamma_1,\gamma_2)\in\Gamma_{g_1,\mathrm{I}\sqcup\mathrm{m}_1}\times\Gamma_{g_2,\mathrm{J}\sqcup\mathrm{m}2}$，其中 $\mathrm{g}=\mathrm{g}_1+\mathrm{g}_2,\mathrm{m}=\mathrm{m}_1+\mathrm{m}_2,$，且 $\mathrm{I}\sqcup\mathrm{J}=\{1,\dots,\widehat{\mathrm{i}}\dots\mathrm{n}\}$。我们称 γ_1具有标签为 $\{\mathrm{v}_I、\mathrm{v}_i\}$ 的输入顶点，而 γ_2具有标签为 $\{\mathrm{v}_J、\mathrm{v}_{i'}\}$ 的输入顶点。现在，令 $(\mathrm{I}_-,\mathrm{i},\mathrm{I}_+)$ 和 $(\mathrm{J}_-,\mathrm{i}',\mathrm{J}_+)$ 分别为 $\mathrm{I}\sqcup\{\mathrm{i}\}$ 和 $\mathrm{J}\sqcup\{\mathrm{i}'\}$ 按递增顺序排列后的序列。在这种情况下，我们有

$$\Omega(\gamma)(v_1,\dots,v_n)=\sum_{a,b,k,\ell}\eta(v_i,e_ke_\ell)\eta^{ka}\eta^{lb}\Omega(\gamma_1)(v_{I_-},e_a,v_{I_+})\otimes\Omega(\gamma_2)(v_{J_-},e_b,v_{J+}), \tag{51}$$

这与 50 类似，但由于余乘法 $\delta(v_i)$ 的输出被插入两个不同连通部分的输入槽位中，因此我们用 A 的一组基来表示它。由于这个张量积被拆分到不连通的部分中，我们在此公式中假设 A 是余交换的。

5.3. 输出顶点之间的边。在本节及本文余下部分中，我们引入以下记号，用于表示 A 的张量幂之间映射的复合。特别地，对于图诱导的拓扑量子场论 $\Omega(\gamma)$，我们定义复合 $(\delta\circ \mathrm{j}\ \Omega(\gamma))$ 和 $(\mathrm{m}\circ_i,\ \mathrm{j}\mapsto \mathrm{i}\ \Omega(\gamma))$。我们通过对 $\Omega(\gamma):\mathrm{A}^{\otimes n}\longrightarrow \mathrm{A}^{\otimes m}$ 的输出的第 j 个分量施加余乘法来定义复合 $(\delta\circ_j\Omega(\gamma))$；该余乘法的结果将成为所得 $\mathrm{A}^{\otimes m+1}$ 元素的第 j 个和第 j′ 个分量。类似地，我们通过对 $\Omega(\gamma)$ 的输出的第 i 个和第 j 个分量施加乘法来定义 $(\mathrm{m}\circ_{i,j\mapsto i}\Omega(\gamma))$，而该乘法的结果将成为所得 $\mathrm{A}^{\otimes m-1}$ 元素的第 i 个分量，其中第 j 个分量不再存在。我们在下文中针对简单张量更明确地说明此定义，并将其线性扩展到整个 $\mathrm{A}^{\otimes m}$。

定义5.6。若 $\Omega(\gamma)(v)=a_1\otimes a_2\otimes\cdots\otimes a_n$，则

$$\delta\circ_j\Omega(\gamma):=a_1\otimes a_2\otimes\cdots\otimes a_{j-1}\otimes\delta(a_j)\otimes a_{j+1}\otimes\cdots\otimes a_n,$$
$$m\circ_{i,j\mapsto i}\Omega(\gamma)(v):=a_1\otimes\cdots\otimes a_{i-1}\otimes a_ia_j\otimes a_{i+1}\otimes\cdots\otimes\widehat{a_j}\otimes\cdots\otimes a_n.$$

以下输出边构造公理是一组新规则，用于为每个着色胞腔图 $\gamma\in\Gamma_{g,n,m}$ 指定一个多重线性映射。这些公理在某种意义上与输入边收缩公理互为对偶，我们将它们应用于在着色胞腔图中创建连接输出顶点的边。

定义5.7（输出边构造公理）。我们称赋值 48 满足以下**输出边构造公理**，若

- **OECA 1：** 设 $\gamma\in\Gamma_{g,n,m}$ 是一个着色胞腔图，γ' 是将第j个输出顶点拆分为两个顶点j 和j'，并用一条边连接它们后得到的图（拆分方式应使得收缩连接顶点j和j'的这条边后，所得图为 γ）。与之前一样，为便于标记，我们将$j-1<j<j'<j+1$排序。于是 $\gamma'\in\Gamma_{g,n,m+1}$，并规定

$$\Omega(\gamma')(v_1,\ldots,v_n)=\delta\circ_j\Omega(\gamma)(v_1,\ldots,v_n). \tag{52}$$

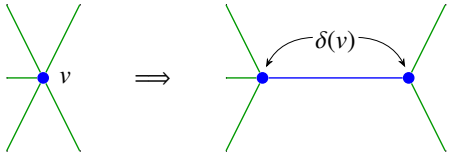


图14. 将输出顶点j 拆分为两个顶点，并在它们之间添加一条边的输出边构造操作

- **OECA 2a:** 假设 $\gamma\in\Gamma_{g,n,m}$ 是一个着色胞腔图，且 γ' 是通过取 γ 的输出顶点 i 和 j 、将它们合并为同一顶点 i，然后在该顶点处添加一个环而得到的图（使得若我们在 γ' 中收缩该环，所得图将为 γ）。则$\gamma'\in\Gamma_{g+1,n,m-1}$ 并且我们规定

$$\Omega(\gamma')(v_1,\ldots,v_n)=m\circ_{i,j\mapsto i}\Omega(\gamma)(v_1,\ldots,v_n), \tag{53}$$

• *OECA 2b*：此运算与 *OECA 2a* 的作用方式相同，只是此时 $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma_{g1,n1,m_1} \times \Gamma_{g2,n2,m2}$ 是一个具有两个连通部分的不连通图，而 $\gamma' \in \Gamma_{g,n,m}$ 是通过将两个连通部分各自的一个输出顶点合并，并在新合并的顶点处添加一个环而得到的（使得若我们在 γ' 中收缩该环，所得图将为 γ）。在这种情况下，我们有 $g_1 + g_2 = g$、$n_1 + n_2 = n$ 以及 $m_1 + m_2 = m$。我们将把 γ_1 的输入顶点和输出顶点重新标记为 $\{v1, v2, \ldots vn1, u1, u2, \ldots, um_1\}$，并把 γ_2 的输入顶点和输出顶点重新标记为$\{vn_1+1, vn_1+2, \ldots vn_1+n2, um_1+1, um_1+2, \ldots, um_1+m_2\}$，并假设我们合并的顶点是输出顶点$u_i$和$u_j$，其中$i \leq n_1 < j$。在这种情况下，我们规定

$$\Omega(\gamma')(v_1, \ldots, v_n) = m \circ_{i,j \mapsto i} (\Omega(\gamma_1)(v_1, \ldots, v_{n_1}) \otimes \Omega(\gamma_2)(v_{n_1+1}, \ldots, v_{n_1+n_2})). \tag{54}$$

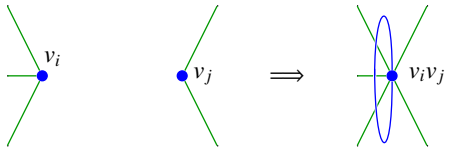


图15. 输出边构造操作：将输出顶点i 和j合并为一个带有额外环的单一顶点

5.4. **受拓扑启发的公理**。 我们先前的公理涉及输入顶点之间边的收缩，以及输出顶点之间边的构造。本节将介绍图上的以下拓扑等价，它们涉及连接到无色顶点或颜色不同的顶点的边。我们首先定义图上的两种拓扑变换，并说明在这些变换下两个图等价的含义。

如果着色胞腔图实际上是二分图，那么同色顶点之间没有边，也不存在流顶点。此时，唯一存在的边是直接连接输入顶点与输出顶点的边，因此我们可以将它们全部视为从输入顶点指向输出顶点的有向边。

定义 5.8（重复边删除和顶点分裂/有向边收缩）。

• **重复边删除（DER）：** 设 γ 是一个着色胞腔图，且$E1$，$E2$ 是包含在 γ 中的两条边。若 $E1$ 与$E2$ 关联于相同的两个顶点，并共同围成该图的一个面，则考虑删除这两条边中任意一条后得到的图 γ'。此时，我们称 γ与 γ' 在 DER 下等价。

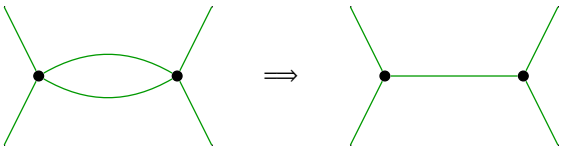


图16。重复边删除。

• 顶点分裂/有向边收缩（VSDEC）：给定顶点 v，其边 E1、E2、……、Ed 按循环次序排列，我们可以将顶点 v 分裂为两个新顶点 v 与 v′，并在二者之间连一条有向边 E′。我们按如下方式将边分配给这两个顶点：对任意满足 $1 \leq i \leq j \leq d$ 的整数 i、j，顶点 v 按循环次序被分配边 E1、……、Ei、E′、E $j+1$、……、Ed，而顶点 v′按循环次序被分配边 E′、E$i+1$、……、E $j+1$（注意，若 $i = j$，则两个新顶点之一将只被分配边 E′）。若 γ 是一个着色胞腔图，且 γ' 是对 γ 施加一次顶点分裂操作后得到的图，则我们称 γ 与 γ' 在 VSDEC 下等价。

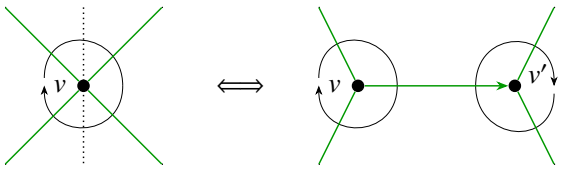


图17. 顶点分裂操作：将一个价为4的顶点分裂为两个独立的顶点。

注5.9. 注意，如果v 是图5.8中的输入顶点，那么两个新顶点中必须有一个仍为输入顶点，另一个则成为流顶点，并且有向边E' 从输入顶点指向流顶点。类似地，如果v是输出顶点，那么两个新顶点中必须有一个仍为输出顶点，另一个则成为流顶点，并且有向边E' 从流顶点指向输出顶点。如果v 已经是流顶点，那么两个新顶点都成为流顶点，而E' 的方向可以任意选择。

注5.10. 顶点分裂操作的逆操作就是收缩一条有向边。我们允许收缩任意一条不同时与输入顶点和输出顶点关联的有向边；任何被收缩的有向边都必须至少与一个流顶点关联。收缩后得到的顶点将具有另一个非流顶点的类型。也就是说，收缩输入顶点与流顶点之间的边会得到一个输入顶点，收缩流顶点与输出顶点之间的边会得到一个输出顶点，而收缩两个流顶点之间的边会得到一个流顶点。

如果 γ 是一个着色胞腔图，而 γ' 是通过收缩这样一条有向边所得到的图，那么 γ 也可以通过对 γ' 执行顶点分裂操作来等价地得到。因此，我们看到，在 VSDEC 下，γ 和 γ' 是等价的。

接下来，我们要求赋值 Ω 必须保持 VSDEC 操作与 DER 操作下的等价性。也就是说，如果两个图在这些操作下等价，那么它们应当对应同一个多重线性映射。我们对 Ω 所作的最后一项假设，是赋予某些小型基础图的特定多重线性映射。对于以下图：一个输入顶点、没有输出顶点且没有边的图；一个输出顶点、没有输入顶点且没有边的图；一个输入顶点和一个输出顶点且二者之间有一条边的图；一个输入顶点通过单边连接到两个输出顶点的图；以及一个输出顶点通过单边连接到两个输入顶点的图，我们要求它们对应的多重线性映射依次为该代数的余单位、单位元、恒等映射、余乘法和乘法。以下是规定如何将多重线性映射 Ω 赋给着色胞腔图 γ 的最后两条公理：

定义 5.11（流公理和基本情形）。

(1) 根据定义 (5.8)，若 γ 和 γ' 在 VSDEC 或 DER 下等价，则规定 $\Omega(\gamma) = \Omega(\gamma')$。(2) 我们进一步规定这五个简单图的赋值如下：

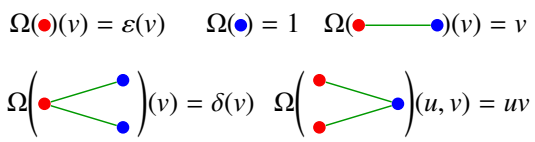


图18. 与余单位、单位元、恒等映射、余乘法和余乘法对应的映射相关联的简单图。

注 5.12. 针对有向边的 VSDEC 和 DER 等价变换，不仅能将每个二部胞腔图转化为特定的典范形式，还会带来一些特定的拓扑推论，这些推论与弗罗贝尼乌斯代数结构中的性质相似。事实上，以下列出了一些操作：如果两个图之间相差一个或多个此类操作，那么它们在 VSDEC/DER 下等价。

5.5. **图上的弗罗贝尼乌斯结构。** 以下是带状图上的三种操作，它们与第 4 节中配边之间的关系相似。引理 5.14 表明，根据 VSDEC/DER 的定义，这些操作是冗余的。尽管如此，在确定给定拓扑类型的图的典范形式时，这些操作在实践中仍然有用。

定义 5.13. （隐含操作）

- **2价流移除：** 设 γ 为一个有向胞腔图，且 v 是 γ 中一个恰有一条入边和一条出边的顶点。考虑移除 v 及其两条边，并在与 v 相邻的两个顶点之间添加一条有向边，方向与原先相同，由此得到的图。这个图与收缩连接 v 的任意一条边所得到的图相同。简言之，我们可以移除任何价恰为 2 的流顶点。

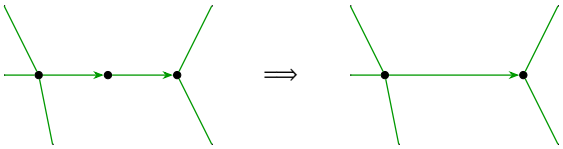


图19. 通过边收缩移除一个价为2的流顶点。

- **Frobenius “z=x” 移动：** 假设一个有向胞腔图包含一条长度为 3 的路径，且路径上的边方向交替。再假设在路径上两条边相交的两个顶点处，这两条边在各自顶点的循环次序中彼此相邻。将这两个铰链顶点分别拆分，并收缩它们之间的边后，每个铰链顶点的价都会减少 1，同时会产生一个价为 4 的新顶点。通过这种移动，可以将此类“z 形”或“s 形”子图替换为“x 形”子图，同时保持胞腔图的亏格不变，也不改变相应的线性映射。

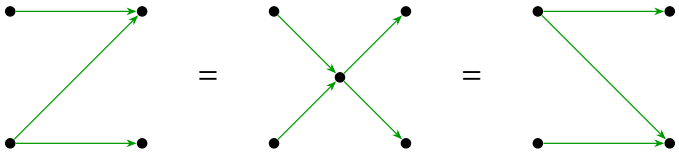


图 20. 弗罗贝尼乌斯“z=x”变换下的等价子图。

• **结合律/余结合律：** 将一个顶点拆分，使其有三条相邻的出边，可以有两种不同的实现方式。这与将一个带有一个输入孔和三个输出孔的配边进行裤子分解时的余结合律颇为相似。同样地，拆分一个顶点，使其有三条相邻的入边，也可以有两种不同的实现方式，这与将一个带有三个输入孔和一个输出孔的配边进行裤子分解时的结合律颇为相似。这两种情况均见图 21。

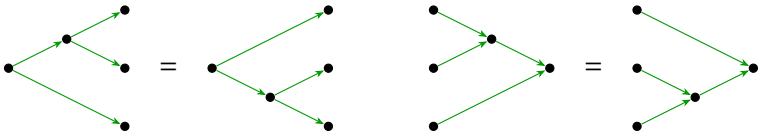


图 21. 余结合律与结合律下的等价子图。

注意，图 5.13 中子图的等价性与图 6 所示二维协边上的弗罗贝尼乌斯关系，以及弗罗贝尼乌斯代数中乘法与余乘法上的相应关系（15）具有明显的相似性。

引理 5.14. *5.11* 中的 *VSDEC* 与 *DER* 等价蕴含定义 *5.13* 中的变换。

推论 5.15. 根据 *5.11* 中 *VSDEC* 与 *DER* 等价的 *TQFT* 公理，赋值 Ω 在 *5.13* 所定义的拓扑变换下保持不变。

5.6. **围成圆盘的环与重复的输入/输出边**。 稍后我们将考虑该赋值 Ω对类型为 (g,n,m),的胞腔图的图无关性，但首先我们将通过两个有用的引理来观察这种图无关性的一个简单情形。

注5.16。 在弗罗贝尼乌斯代数的情形下，只要假设对应于该弗罗贝尼乌斯代数的单位元和余单位的图仅有一个顶点且没有边，引理 5.17 和 5.18 就是 **IECA 2b** 和 **OECA 2b** 的直接推论。之后，当我们考虑可能是无限维的近弗罗贝尼乌斯代数时，这些代数可能没有单位元或余单位；在这种情况下，我们将 5.17 的情形 1 作为公理，而不将其视为先前公理的直接推论。我们注意到，5.17 的情形 2 和情形 3 可由情形 1 直接推出。

引理 5.17。 设 Ω 是定义在弗罗贝尼乌斯代数 A 上的带状拓扑量子场论。假设 $\gamma \in \Gamma_{g,n,m}$。我们考虑三种情形：

• 情形 ***1***： 存在一个环 L 与 γ中的一个输入顶点相连，并且该环围成一个圆盘；$\gamma' \in \Gamma g$、n、m 是通过移除环 L 得到的图。（注意，我们并未收缩环 L，而只是将其移除。）

• 情形 **2**： **</style>**在 中，两个不同的输入顶点 i 和 j 之间存在两条边 $E1$ 和 E_2，且 E_1 和 E_2 共同围成一个面。$\gamma' \in \Gamma g$、n、m 是通过移除（而非收缩）边 E_2得到的图。

• 情形 **3**：存在两个同伦环 L_1 和 L_2，它们都附着在 γ 的同一个输入顶点 i 上。$\gamma' \in \Gamma g,\ n,\ m$ 是移除环 L_2后得到的图。

在上述每种情形中，我们都有

$$\Omega(\gamma)(v_1,\dots,v_n) = \Omega(\gamma')(v_1,\dots,v_n). \tag{55}$$

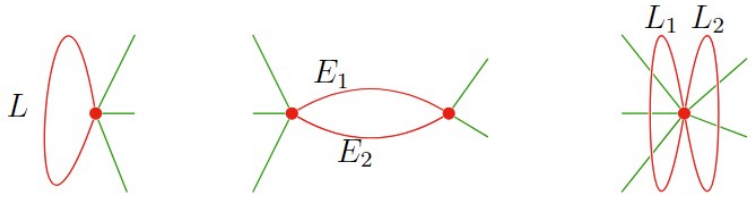


图 22. 移除输入顶点之间的围盘边。

证明。在情形 1 中，注意，在 γ 的第i个输入顶点处收缩这个围圆盘环L，会得到一个不连通图 $(\gamma_0,\ \gamma') \in \Gamma_{0,\ 1,\ 0} \times \Gamma_{g,\ n,\ m}$，其中 γ_0是只有一个输入顶点且没有边的简单图，而 γ' 是移除L后得到的图。这里我们通过边收缩公理**IECA 2b**计算与 γ相关联的线性映射。

$$\begin{aligned}
\Omega(\gamma)(v_1,\dots,v_n) &= \sum_{a,b,k,\ell} \eta(v_i, e_k e_\ell)\eta^{ka}\eta^{\ell b}\Omega(\gamma_0)(e_a)\Omega(\gamma')(v_1,\dots,v_{i-1},e_b,v_{i+1},\dots,v_n) \\
&= \sum_{a,b,k,\ell} \eta(v_i, e_k e_\ell)\eta^{ka}\eta^{\ell b}\eta(1,e_a)\Omega(\gamma')(v_1,\dots,v_{i-1},e_b,v_{i+1},\dots,v_n) \\
&= \sum_{b,\ell} \eta(v_i, 1\cdot e_\ell)\eta^{\ell b}\Omega(\gamma')(v_1,\dots,v_{i-1},e_b,v_{i+1},\dots,v_n) \\
&= \sum_{b,\ell} \eta(v_i, e_\ell)\eta^{\ell b}\Omega(\gamma')(v_1,\dots,v_{i-1},e_b,v_{i+1},\dots,v_n) \\
&= \Omega(\gamma')(v_1,\dots,v_{i-1},v_i,v_{i+1},\dots,v_n).
\end{aligned}$$

对于情形 2，注意，收缩边E_1 会使边E_2 变成一个围圆盘环。这就归结为情形 1，在该情形中我们可以直接移除这个环E_2。这样，收缩E_1 并移除E_2 后得到的图，与先移除E_2 得到图 γ'，然后再收缩E_1所得的图相同。因此，55 成立。

对于情形 3，注意收缩环 L_1 会使环 L_2 变成一个围圆盘环。这就归结为情形 1，在该情形下我们只需移除这个环 L_2。和之前一样，先收缩 L_1 再移除 L_2 所得的图，与先移除 L_2 得到图 γ'、再收缩 L_1所得的图相同。因此，55 仍然成立。□

现在，对于向有颜色的胞腔图的输出顶点添加围成圆盘的环和面，我们也有类似的结果。

引理 5.18。 设 $\gamma \in \Gamma_{g,\ n,\ m}$。我们考虑三种情形：

• 情形 ***1***：$\gamma' \in \Gamma_{g,\ n,\ m}$ 是通过在 γ 的第 i 个输出顶点上添加一个围圆盘环 L 得到的图。（注意，我们没有改变 γ 的顶点，只是添加了一个环。）

• 情形 ***2***：对于 γ 中连接两个不同输出顶点 i 和 j 的某条边 E_1，则 $\gamma' \in \Gamma_{g,\ n,\ m}$ 是在相同两个顶点之间添加边 E_2 后得到的图，使得 E_1 和 E_2 共同围成一个面。

• 情形 ***3***：对于连接到 γ 的第 i 个输出顶点的某个环 L_1，则 $\gamma' \in \Gamma_{g,\ n,\ m}$ 是在同一顶点添加一个与 L_1 同伦的环 L_2 后得到的图。

在上述每种情形中，我们都有

$$\Omega(\gamma)(v_1,\dots,v_n) = \Omega(\gamma')(v_1,\dots,v_n). \tag{56}$$

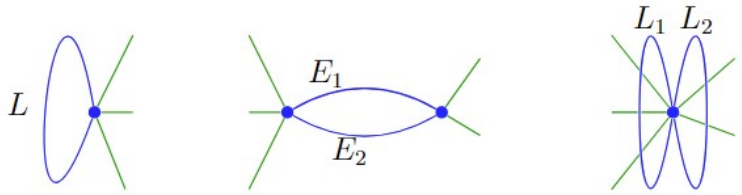


图 23. 在输出顶点之间添加围面边

证明。 在情形 1 中，我们看到，在 γ 的第 i 个输出顶点处添加这个围圆盘环 L，等同于取不连通图 $(\gamma_0,\ \gamma) \in \Gamma_{0,\ 0,\ 1} \times \Gamma_{g,\ n,\ m}$，其中 γ_0 是只有一个输出顶点且没有边的简单图，并对 γ_0 的顶点和 γ 的第 i 个顶点应用边构造公理 **OECA 2b** 。我们用这个公理计算与 γ' 关联的线性映射。

$$\begin{aligned}\Omega(\gamma')(v_1,\dots,v_n) &= m \circ_{i,m+1\mapsto i} \Omega(\gamma)(v_1,\dots,v_n) \otimes \Omega(\gamma_0)\\ &= m \circ_{i,m+1\mapsto i} \Omega(\gamma)(v_1,\dots,v_n) \otimes 1\\ &= \Omega(\gamma)(v_1,\dots,v_n).\end{aligned}$$

对于情形 2，注意，从一个将输出顶点拆分为顶点i 和顶点j，并通过 **OECA1** 在它们之间加入一条边E_1，从而得到图 γ的图出发，再添加一条边E_2，使E_1 和E_2 围成一个面，这与先将E_2 作为围圆盘环添加，再拆分顶点并通过 **OECA1** 添加E_1 以得到图 γ'是相同的。因此，在这种情形下，56 成立。

对于情形 3，注意，环L_1 可以通过**OECA 2** 将两个分离的顶点合并为一个带有此环L_1的顶点而构造出来。若改为先在其中一个顶点上添加一个围圆盘环L_2，然后执行**OECA2**，则得到的图与先通过**OECA 2** 添加环L_1，再添加同伦环L_2所得的图相同。因此，这归结为情形 1，在这种情形下 56 也成立。□

注记 5.19. 注意，引理 5.17 和 5.18 中的三种情形分别对应于在与着色胞腔图 γ 对偶的带状图中移除或添加价为 1 和 2 的顶点。

6. 关于彩色胞腔图的结果

本节中，我们证明与类型为（g，n，m）的着色胞腔图相关联的二维拓扑量子场论具有图无关性。也就是说，如果 γ 和 γ' 都是亏格为 g、具有 n 个输入顶点和 m 个输出顶点的胞腔图，

那么它们应当导出相同的多重线性映射 $A^{\otimes n} \longrightarrow A^{\otimes m}$。为此，我们证明，任何双色胞腔图都可以通过边收缩和构造公理等价地化为某种典范形式，至多只需进行少量修改。写出与这种典范形式下的图相关联的映射后，我们再说明如何通过这些公理重构与原图相关联的映射。

6.1. **亏格零情形**。

定义 6.1.（标准形）我们称着色胞腔图 $\gamma \in \Gamma_{0,n,m}$ 处于**标准形**，如果它满足以下条件：

- 一个具有 2 条入边和 2 条出边的中心流顶点，
- $n-2$ 个具有 2 条入边和 1 条出边的流顶点，其中所有入边都连接到同类型顶点或输入顶点，而出边则连接到同类型顶点或中心流顶点，
- $m=2$ 个具有 1 条入边和 2 条出边的流顶点，其中所有出边都连接到同类型顶点或输出顶点，而入边则连接到同类型顶点或中心流顶点，
- 所有输入顶点和输出顶点的价均为 1。

也就是说，若亏格 0 胞腔图具有图24所示的形式，则它处于标准形。

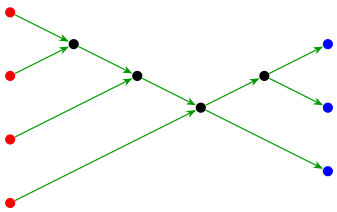


图24。一个着色胞腔图，具有4个输入顶点、3个输出顶点、 $4-2$ 个“输入-输入-输出”流顶点、 $3-2$ 个“输入-输出-输出”流顶点，以及一个四价流顶点。

定义 6.2。（星形图）如果一个着色胞腔图 $\gamma \in \Gamma_{0,\ n,\ m}$ 的每个输入顶点和输出顶点的价均为1，且有一个流顶点与所有其他顶点相连，则称其为**星形图**。（参见图28中的图）

引理6.3。考虑一个按*6.1*节定义处于标准形的着色胞腔图 $\gamma \in \Gamma_{0,\ n,\ m}$。那么，

$$\Omega(\gamma)(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \delta^{m-1}(v_1 v_2 \cdots v_n). \tag{57}$$

证明。首先 注意，如果$n=1$ 和$m=1$ 都成立，那么该图恰好是18中的基本图 γ，对于该图，$\Omega(\gamma) = \mathrm{id}$。

现在，如果 $n \geq 2$ 且 $m=1$，那么我们就可以通过有向边收缩公理和 **IECA1**，依次收缩流边和输入边，直到得到一个有两个输入顶点和一个输出顶点的简单图。每次使用 **IECA1** 时，我们都会将两个输入相乘，而与这个最终图关联的映射就是乘法映射。按照这一过程，我们可以看到，与原图关联的映射就是将 n 个输入 $v_1 \cdots v_n$相乘。

反过来，如果$n=1$ 和$m \geq 2$，那么我们就可以从与余乘法映射相关联的简单图出发，通过顶点分裂公理和 **OECA1**，依次创建流边、顶点以及输出边和输出顶点。按照这一过程，每次使用**OECA1** 都会增加一个输出顶点，并为所得映射贡献

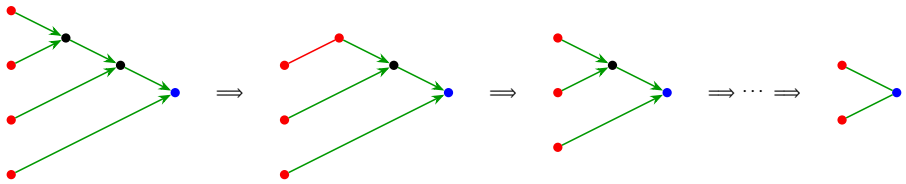


图 25. $m = 1$ 情形的证明。

一个额外的余乘法。因此，与原图相关联的映射是对单个输入进行$m-1$次余乘法所得的结果， $\delta^{m-1}(v)$。

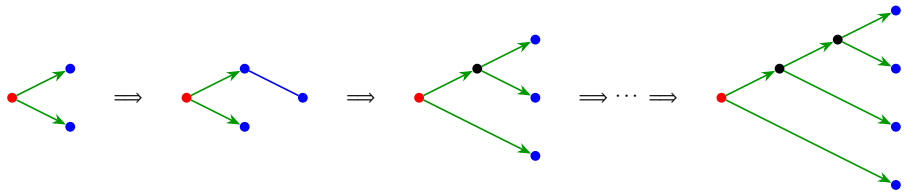


图 26. $n = 1$ 情形的证明。

现在，假设$n \geq 2$和$m \geq 2$均成立，且赋给输入顶点的代数元素为$v1,\ldots,v_n$。与$m = 1$ 情形相同，我们可以依次收缩有向边和输入边，直到图简化为仅有一个输入顶点，且其对应元素为$v_1v_2\cdots v_n$。这就归结为前一种情形，其中$n = 1, m \geq 2$，因此与该图关联的映射为 $\delta_{m-1}(v_1v_2\cdots v_n)$。□

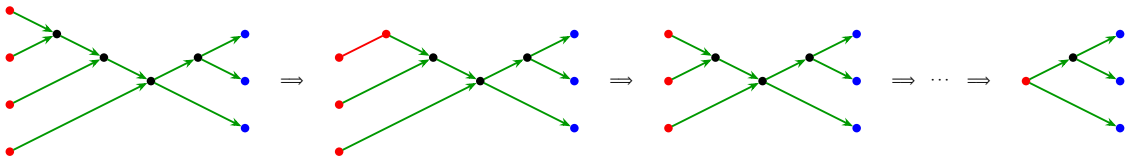


图 27. 化归为$n = 1$ 情形。

现在我们证明，每个亏格 0 的双色胞腔图都等价于引理6.3中所述形式的图。

引理 6.4. 设$\gamma \in \Gamma_{0,n,m}$ 是一个着色胞腔图，具有 n 个输入顶点和 m 个输出顶点，所有顶点的价均为 *1*，并且有一个与其他每个顶点都相连的中心流顶点。经过一系列边收缩和顶点分裂操作， γ 等价于一个形式相同的图，但流顶点上带有循环次序，且所有连接输入顶点的边彼此相邻。

证明。 设 $\gamma \in \Gamma_{0,n,m}$ 为所述形式的着色胞腔图。注意，若收缩任意一条边，则中心顶点将变为输入顶点或输出顶点，具体取决于所收缩的是哪一条边。不失一般性，我们将逐一收缩连接中心顶点与输入顶点的边。

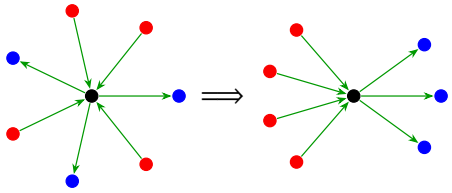


图28. 星形图中叶子的重新排序

选取一个固定的输入顶点，并将其记为 v_1，将其连接到中心顶点的边记为 E_1，中心顶点周围的边按循环次序为 E_1,$E2$,...,E_d。现选取另一个输入顶点 v_k，并收缩其边 E_k。中心顶点现在是一个价为 $d-1$ 的输入顶点，其边按循环次序为 E_1,$E2$,...,E_k,...,E_d。现在，我们对这个新的中心顶点执行顶点分裂操作，取 $i=j=1$。这将产生一个新的价为 1 的输入顶点，它在中心顶点周围的循环次序中紧随顶点 v_1，并使中心顶点重新成为流顶点。若对所有其他输入顶点重复此过程，则所得图中所有输入顶点在中心顶点周围边的循环次序中彼此相邻。 □

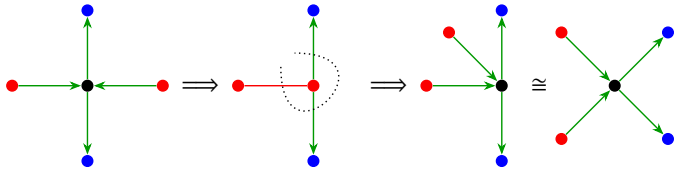


图29. 通过边收缩和顶点分裂重新定位输入叶子

引理6.5. 设 $\gamma \in \Gamma_{0,n,m}$ 是一个具有引理 *6.4* 所述形式的星形图，其中有 n 个价为 *1* 的输入顶点和 m 个价为 *1* 的输出顶点，它们都连接到同一个中心流顶点，且连接输入顶点的边在循环次序中彼此相邻。那么 γ 在这些公理下等价于一个满足引理*6.3*条件的图。

证明. 在这个星形图中，中心顶点的价为 $n+m$；而在引理6.3的树形图中，中心连接顶点的价为 4。因此，我们可以通过将中心顶点分裂 $n+m-4$ 次，将星形图变换为树形图；每次分裂出两条边，从而有效地将中心顶点的价减少 1。

考虑中心顶点周围循环次序中的这样一个位置：存在一条连接输入顶点的边，与一条连接输出顶点的边相邻（严格来说有两个这样的位置，但为方便起见，我们选择出边比入边更靠顺时针方向的那个）。首先，将通向输入顶点的前两条边分离出来，创建一个新的流顶点。接下来，从中心顶点分离出与最新流顶点相连的边以及下一条相邻的通向输入顶点的边。在执行同样的操作$n-2$次之后，我们便创建了一个将输入顶点连接到中心顶点的树形子图，其中所创建的$n-2$个流顶点各自恰好有两条入边和一条出边。

接下来，从中心顶点处分出通向输出顶点的前两条边，形成一个新的流顶点。然后，从中心顶点处分出连接到最新流顶点的边，以及下一条相邻的、通向输出顶点的边。再次执行此操作$m-2$次后，我们便构造出了一个树形子图

将中心顶点与输出顶点连接起来。此时，每个$m-2$个流顶点都恰有一条入边和两条出边。由于每次分边都会使中心顶点的价减小1，该顶点现在的价为4，而整个图恰好具有引理6.3所述的形式。□

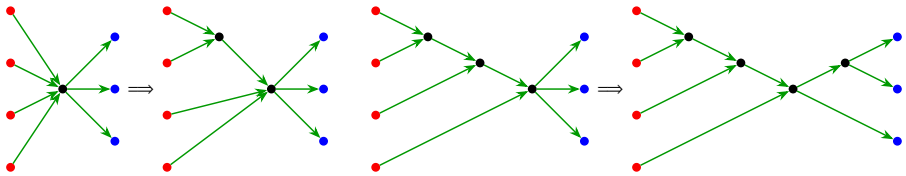


图30. 将星形图转换为树形图的顶点分裂操作。

我们现在考虑二**分**胞腔图，也就是没有流顶点、且只有直接连接输入顶点与输出顶点的边的胞腔图。我们旨在证明，每个亏格 0 的二部胞腔图都等价于上述典范形式的图，但首先我们对某一特定二部胞腔图中的面数进行简化。回想一下，我们可以通过欧拉示性数 $\chi(\gamma)$计算胞腔图 γ的亏格：

$$\chi(\gamma) = V(\gamma) - E(\gamma) + F(\gamma) = 2 - 2g, \tag{58}$$

其中$V(\gamma)$,$E(\gamma)$,和$F(\gamma)$分别表示该图的顶点、边和面的数目。引理6.3所描述的树形图与引理 6.4所描述的星形图都只有一个面（前者有$2n+2m-3$个顶点和$2n+2m-2$条边，后者有$n+m+1$个顶点和$n+m$条边，并且在任一情形下均有 $2-2g=2$，这就要求该图只有一个面）。因此，我们希望只考虑仅有一个面的二分胞腔图，以证明它们同样等价于这一典范树形形式。为此，我们运用重复边删除公理。

引理 6.6。 设 $\gamma \in \Gamma_{0,\,n,\,m}$ 是一个连通二部胞腔图。那么存在一棵生成树$\gamma' \in \Gamma_{0,\,n,\,m}$，它是 γ 的子图，且只包含一个面，使得 γ 和 γ' 在***VSDEC*** 与***DER*** 公理下等价。

证明。 如果 γ 是一个只有一个面的图，那么 $\gamma=\gamma'$ 就足够了，因此假设 γ 是一个包含多个面的二部胞腔图。选取该图的一个面，并考察围绕此面的环形边界。注意，在二部胞腔图中，边只存在于输入顶点和输出顶点之间。因此，若该环从同一顶点出发并回到该顶点，则它必定包含偶数条边，且沿环行进时这些边的方向交替变化。因此，该环中任意长度为 3 的子路径都会形成一个“Z 形”或“S 形”子图，并可通过图 20 所示的**VSDEC** 推论将其转换为另一种形状。此操作会使环的长度减少 2。若继续这一过程，环的长度就会不断缩短，直到该图的面仅由两条重复边围成。此时，可以通过**DER**移除这两条边中的一条，从而使$F(\gamma)$ 减少 1。

除了一开始选择的长度为 3 的子路径不同外，这一过程等同于直接移除环上的一条边。若对图中除最后一个面以外的所有面都执行这一过程，就能将图化简为仅有一个面、仍保持连通且顶点完全相同的图，只是移除了部分边。由于这个图只有一个面，因此没有环，而它正是我们所需的生成树 γ'。□

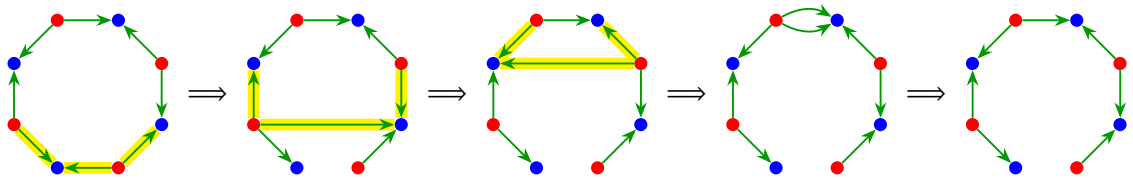


图31. 通过连续的**VSDEC** 移动缩短一个环，直到可以通过**DER**移除一条边

既然每个亏格 0 的二部胞腔图都等价于一个仅有一个面的图，我们只需考虑那些仅有一个面的图。

引理6.7. 设$\gamma \in \Gamma_{0,n,m}$ 是一个只有一个面的连通二部胞腔图。那么 γ 等价于引理 *6.4* 中描述的星形图。

证明. 设$\gamma \in \Gamma_{0,n,m}$ 是一个只有一个面的二部胞腔图。在每个输入顶点和输出顶点处，执行一次顶点分裂操作，使输入顶点或输出顶点的价为 1，并将所有原有边转移到新创建的流顶点上。这样会得到一个由流顶点构成的子图，它与原图 γ同构，且每个流顶点恰好与一个输入顶点或输出顶点相连。这个由流顶点构成的子图仍然连通，因此我们可以执行有向边收缩操作，直到这些流顶点合并为一个流顶点。这个单一流顶点与每个输入顶点和输出顶点相连，而该图正是引理 6.4 中描述的星形图。□

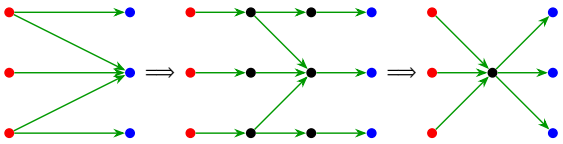


图32. **VSDEC** 将二部树转换为星形图的操作

综合前面这些引理的结果，我们现在可以求出与任意亏格 0 二部胞腔图相关联的线性映射。

命题6.8. 每个连通的亏格 *0* 二部胞腔图 $\gamma \in \Gamma_{0,n,m}$ 都会产生相同的映射

$$\Omega(\gamma)(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \delta^{m-1}(v_1 v_2 \cdots v_n). \tag{59}$$

证明。 设$\gamma \in \Gamma_{0,\,n,\,m}$ 是一个亏格 0 的二部胞腔图。根据引理 6.6，存在某个子图γ_1 ，它是 γ的子图，并且是一个只有一个面的生成树，使得 $\Omega(\gamma) = \Omega(\gamma_1)$。于是，根据引理 6.7 和引理 6.4，存在某个星形图 γ_2 ，其具有 n 个价为 1 的输入顶点、m 个价为 1 的输出顶点，以及一个与这些顶点分别相连的流顶点；连接顺序使得与输入顶点相连的边彼此相邻。引理 6.5 表明， γ_2 等价于某个树形图 γ_3，该图具有 n 个价为 1 的输入顶点、m 个价为 1 的输出顶点、$n-2$ 个具有两条入边和一条出边的三价流顶点、$m-2$ 个具有两条出边和一条入边的三价流顶点，以及一个具有两条入边和两条出边的四价流顶点。因此，由于 $\Omega(\gamma) = \Omega(\gamma_3)$，根据引理 6.3，公式 59 成立。

□

6.2. **正亏格**。 现在我们考虑 $g \geq 1$ 的情形，首先观察在输入顶点或输出顶点之间添加某些边，可能会如何改变与特定胞腔图相关联的映射。

定义 6.9.（花瓣）**花瓣** 是连接到胞腔图同一顶点的一对环，满足四条半边在该顶点周围的循环次序中彼此相邻，但这两个环本身都不围成图的一个面。

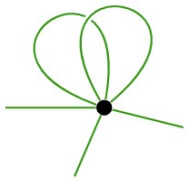


图 33. 带有花瓣的顶点。

特别地，如果有两个环 L_1 和 L_2 连接到胞腔图的同一顶点，并将半边标记为 $L_1, \underline{L_1}, \overline{L_2}, L_2,$，那么这些半边按顺时针次序排列为 L_1, L_2, L_1, L_2。我们可以看到，向胞腔图添加一个花瓣会使亏格增加 1。这与如下观点相符：将该图嵌入黎曼曲面时，为了使这个花瓣能够位于曲面上，同时保持半边的这一循环次序且不让两个环交叉，其中一个环必须绕过曲面的孔，而另一个环必须穿过这个孔。向图中添加一个花瓣需要在曲面上增加一个孔，以避免两个环交叉。

引理 6.10. 向着色胞腔图的一个输入顶点添加一个花瓣，对应于将该顶点所关联的向量乘以欧拉元**e**。特别地，若$\gamma \in \Gamma_{g,n,m}$ 是一个着色胞腔图，且$\gamma' \in \Gamma_{g+1,n,m}$ 是通过向 γ的第i个输入顶点添加一个花瓣而得到的图，则

$$\Omega(\gamma')(v_1, \ldots, v_n) = \Omega(\gamma)(v_1, \ldots, v_{i-1}, \mathbf{e}v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n). \tag{60}$$

证明。 这可由先应用**IECA2a** ，再应用**IECA 1** 收缩构成该花瓣的两个环而得出。特别地，我们看到，若$\gamma_1 \in \Gamma_{g-1,n+1,m}$ 是由花瓣中两个环之一所生成的图，则

$$\begin{aligned}\Omega(\gamma')(v_1, \ldots, v_n) &= \Omega(\gamma_1)(v_1, \ldots, v_{i-1}, \delta(v_i), v_{i+1}, \ldots, v_n) \\ &= \Omega(\gamma_1)(v_1, \ldots, v_{i-1}, m \circ \delta(v_i), v_{i+1}, \ldots, v_n) \\ &= \Omega(\gamma_1)(v_1, \ldots, v_{i-1}, \mathbf{e}v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n).\end{aligned}$$

因此，60成立。 □

若改为向一个输出顶点添加花瓣，则类似的结果成立。

引理 6.11. 在着色胞腔图的一个输出顶点上添加花瓣，对应于将与该顶点关联的张量积分量乘以欧拉元 **e**。也就是说，若 $\gamma \in \Gamma_{g,n,m}$ 是一个着色胞腔图，而 $\gamma' \in \Gamma_{g+1,n,m}$ 是在 γ 的第 j 个输出顶点上添加花瓣后得到的图，则

$$\Omega(\gamma')(v_1, \ldots, v_n) = (m \circ \delta) \circ_j \Omega(\gamma)(v_1, \ldots, v_n). \tag{61}$$

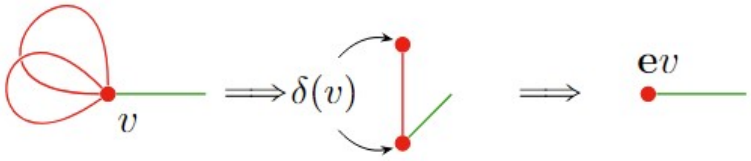


图34。在输入顶点处收缩花瓣中的两个环。

证明. 这同样可直接由先应用 **OECA 1** 、再应用 **OECA2a** 得出。设 $\gamma_1 \in \Gamma_{g,n,m+1}$ 是对 γ 的第 j 个输出顶点应用 **OECA 1** ，将其拆分成两个独立顶点后得到的图。接着对 γ_1 的第 j 个和第 j' 个输出顶点应用 **OECA 2a** ，生成一个花瓣，从而得到图 γ'。根据与这两条公理相关的自然变换，我们可知

$$\begin{aligned}\Omega(\gamma')(v_1,\dots,v_n) &= m\circ_{j,j+1\mapsto j}\Omega(\gamma_1)(v_1,\dots,v_n)\\ &= m\circ_{j,j+1\mapsto j}\delta\circ_j\Omega(\gamma)(v_1,\dots,v_n)\\ &= (m\circ\delta)\circ_j\Omega(\gamma)(v_1,\dots,v_n).\end{aligned}$$

因此，命题 6.1 成立。 □

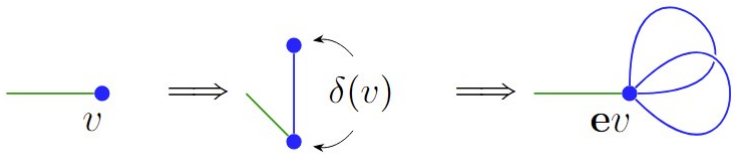


图35。在输出顶点处添加两条边以创建花瓣。

前面这两个引理基本涵盖了亏格完全由输入顶点之间的边或完全由输出顶点之间的边编码的情形。如果亏格是通过流边编码的，那么我们采用与第6.1节中概述的技术类似的过程，将我们的图化简为一个星形图，但在流顶点处增加额外的花瓣。然后，通过使用 **VSDEC** 移动，我们可以将一条边收缩到一个输入顶点，并以一种使这个新顶点从流顶点获得所有花瓣的方式分裂该新顶点。从这里开始，我们只需对这个新图反复应用 6.10，直到得到一个亏格 0 的星形图。

命题 6.12。 每个连通二部胞腔图 $\gamma \in \Gamma_{g,\,n,\,m}$ 都对应于同一个映射

$$\Omega(\gamma)(v_1,v_2,\dots,v_n) = \begin{cases}\varepsilon(v_1\cdots v_n\mathbf{e}^g), & m=0\\ v_1\cdots v_n\mathbf{e}^g, & m=1\\ \delta^{m-1}(v_1\cdots v_n\mathbf{e}^g), & m\geq 2\end{cases}. \tag{62}$$

证明。 注意，Dumitrescu 和 Mulase [8] 给出了 $m=0$ 情形的证明，因此我们将考虑 $m\geq 1$。接下来按照 6.6，我们可以找到一棵等价的生成树，它只包含一个面。然后按照 6.7 的证明过程，将每个输入顶点和输出顶点拆分为一个叶子，再将相连的

流顶点之间的边收缩，直到只剩下一个流顶点。这样便得到一个星形图，其中心流顶点上有 $2g$ 个额外的环。接下来，我们按照 6.4 的证明过程重新排列这些叶子，直到将中心顶点处的半边划分为三个互不相交但彼此相邻的组：n 条连接中心顶点与输入顶点的边、m 条连接中心顶点与输出顶点的边，以及 $2g$ 条作为环的一部分的半边。

从这里，我们可以将中心顶点沿有向边收缩至与环集合相邻的输入顶点。然后，我们以一种方式分裂这个新顶点，使得所有环现在都连接到输入顶点，而中心顶点仅与输入顶点和输出顶点相连。对于输入顶点处的环，由 6.10 可知，通过**IECA 2a** 和 **IECA 1**收缩这些环，会使与该输入顶点关联的向量乘以$\mathbf{e}^g$。完成后剩下的是一个星形图 γ'，其关联的输入向量为v_1,$v2$,...,v_{i-1},$\mathbf{e}^g v_i$,v_{i+1},...v_n，因此由 6.5 和 6.3 可得

$$\begin{aligned}\Omega(\gamma)(v_1,v_2,\ldots,v_n) &= \Omega(\gamma')(v_1,v_2,\ldots,v_{i-1},\mathbf{e}^g v_i,v_{i+1},\ldots v_n)\\ &= \delta^{m-1}(\mathbf{e}^g v_1 v_2\cdots v_n).\end{aligned}$$

□

现在，这对所有二部胞腔图都成立，我们声称这正是所有类型为（g,n,m）的着色胞腔图的分类。现在我们将证明定理 1.1，其中A是弗罗贝尼乌斯代数，且$m > 0$。

定理 6.13。 设 A 是一个弗罗贝尼乌斯代数，且 $\gamma \in \Gamma_{g,\,n,\,m}$ 是一个连通的着色胞腔图，它给出一个多重线性映射 $\Omega(\gamma)(v_1,\ldots,v_n) : A^{\otimes n} \longrightarrow A^{\otimes m}$，满足彩色边收缩公理。那么 $\Omega(\gamma)$ 与图 γ 无关，只取决于黎曼曲面的拓扑，并且其表示为

$$\Omega(\gamma)(v_1,v_2,\ldots,v_n) = \begin{cases}\varepsilon(v_1\cdots v_n\mathbf{e}^g), & m=0\\ v_1\cdots v_n\mathbf{e}^g, & m=1\\ \delta^{m-1}(v_1\cdots v_n\mathbf{e}^g), & m\geq 2\end{cases}. \tag{63}$$

证明。 同样，在证明中我们考虑 $m \geq 1$ 的情形。为了找出与给定着色胞腔图 γ 相关联的映射，我们考虑以下过程。

首先，我们收缩输入顶点之间的所有边，并使用输入边收缩公理记录新映射的输入向量。如果这些输入边中编码了正亏格，那么其中一些输入向量可能会乘以欧拉元 **e** 的幂。

接下来，我们收缩输出顶点之间的所有边，并记录执行这些操作的顺序。完成后，剩下的是连通二分图的不交并。一旦我们确定了这组图的输出，就使用输出边重构公理来重构刚刚收缩的边。如果这些输出边中编码了正亏格，那么这个 m 阶张量中的某些位置将乘以**e**。

对于连通二分图的不交并，我们直接使用命题 6.12。在整个过程中，在输入边与二分图之间，会有$n-1$ 次将两个输入相乘的操作；在输出边与二分图之间，则会有$m-1$ 次应用余乘法的操作。此外，亏格必须由输入边、输出边或二分图来编码；但这些情形都对应于乘以**e** 的某个幂，而这些幂的总和为$\mathbf{e}^g$。

经过这一过程，剩下的是对若干m个张量的基元素求和，其中每个n 个输入向量和**e** 的g 次幂都分散在m 个张量因子中。随后可以验证，在余结合律和弗罗贝尼乌斯关系意义下，这与 $\delta_{m-1}(v_1v_2\cdots v_n)$. □ 等价

通过一个视觉示例，或许最容易理解 6.13 的证明。

6.3. **一个启发性的例子**。 本节将考察一个类型为 (2,2,2) 的特定着色胞腔图 γ，并演示如何求出其对应的线性映射 $\Omega(\gamma) : A \otimes A \longrightarrow A \otimes A$。我们从图36中的图 γ出发，按从上到下的顺序标记这些图中的输入顶点和输出顶点。

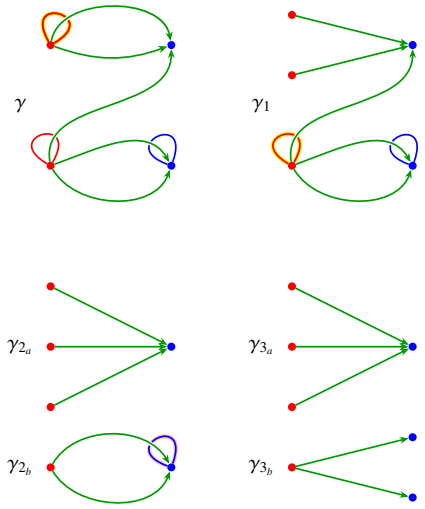


图36. 收缩着色胞腔图中的边，以确定对应的线性映射

首先，通过**IECA 2a**收缩第一个输入顶点处的环，将该顶点分裂成另外两个顶点。若所得的图为 γ_1，则由这个公理可得

$$\Omega(\gamma)(v_1, v_2) = \Omega(\gamma_1)(\delta(v_1), v_2). \tag{64}$$

接着，通过**IECA 2b** 收缩剩余的输入环，将图分成两个不相交部分（$\gamma_{2_a}, \gamma_{2_b}$） $\in \Gamma_{0,3,1} \times \Gamma_{1,1,1}$，而该公理指出

$$\Omega(\gamma_1)(\delta(v_1), v_2) = \sum_{a,b,k,\ell} \eta(v_2, e_k e_\ell)\eta^{ka}\eta^{\ell b}\Omega(\gamma_{2_a})(\delta(v_1), e_a) \otimes \Omega(\gamma_{2_b})(e_b). \tag{65}$$

现在， γ_{2_a} 是一个亏格0二部图，因此可得

$$\Omega(\gamma_{2_a})(x, y, z) = xyz. \tag{66}$$

另一方面， γ_{2_b} 有一个输出环，我们将此环收缩，得到图 γ_{3_b}。如果我们通过 **OECA 2a** 重构此环，那么由该公理可得

$$\Omega(\gamma_{2_b})(v) = m \circ \Omega(\gamma_{3_b})(v). \tag{67}$$

现在， γ_{3_b} 是一个亏格0二部图，我们有

$$\Omega(\gamma_{3_b})(v) = \delta(v). \tag{68}$$

现在应用 67 可得

$$\Omega(\gamma_{2_b})(v) = m \circ \delta(v) = \mathbf{e}v. \tag{69}$$

然后我们同时使用 66 和 69，并将它们应用于 65，可得

$$\Omega(\gamma_1)(\delta(v_1),v_2)=\sum_{a,b,k,\ell}\eta(v_2,e_ke_\ell)\eta^{ka}\eta^{\ell b}(m\circ\delta(v_1)\cdot e_a)\otimes(\mathbf{e}e_b). \tag{70}$$

然后，我们利用基底展开 16、 δ 14 的展开以及弗罗贝尼乌斯关系 15 来计算这个映射。

$$\begin{aligned}
\Omega(\gamma)(v_1,v_2)&=\Omega(\gamma_1)(\delta(v_1),v_2)\\
&=\sum_{a,b,k,\ell}\eta(v_2,e_ke_\ell)\eta^{ka}\eta^{\ell b}(m\circ\delta(v_1)\cdot e_a)\otimes(\mathbf{e}e_b)\\
&=\sum_{a,b,k,\ell}\eta(v_2,e_ke_\ell)\eta^{ka}\eta^{\ell b}(\mathbf{e}v_1e_a)\otimes(\mathbf{e}e_b)\\
&=\sum_{a,b,k,\ell}\eta(v_2e_\ell,e_k)\eta^{ka}\eta^{\ell b}(\mathbf{e}v_1e_a)\otimes(\mathbf{e}e_b)\\
&=\sum_{b,\ell}\eta^{\ell b}\mathbf{e}v_1v_2e_\ell\otimes(\mathbf{e}e_b)\\
&=(\mathrm{id}\otimes m)\left(\sum_{b,\ell}\eta^{\ell b}\mathbf{e}v_1v_2e_\ell\otimes e_b\otimes\mathbf{e}\right)\\
&=(\mathrm{id}\otimes m)(\delta(\mathbf{e}v_1v_2)\otimes\mathbf{e})\\
&=(\delta\otimes m)(\mathbf{e}v_1v_2\otimes\mathbf{e})\\
&=\delta(\mathbf{e}^2v_1v_2).
\end{aligned}$$

我们可以看到这一过程如何推广：收缩输入边，对输入向量应用乘法或余乘法；收缩输出边，以决定如何对二分图的输出应用乘法和余乘法；然后利用先前证明的二分图情形，将输入向量转换为输出向量。每次先应用余乘法再应用乘法，都会使图的亏格减少一，但同时会使一个输入或输出向量乘上欧拉元 $\mathbf{e}$。

7. 近弗罗贝尼乌斯代数的着色胞腔图

我们声称，6.13 中采用着色胞腔图方法对二维拓扑量子场论的表述，也适用于近似拓扑量子场论的表述；不过，我们确实需要做一些修改。首先要考虑的是，如果近弗罗贝尼乌斯代数 A 没有单位元，那么我们就无法解释没有输入顶点的胞腔图；如果 A 没有余单位，那么我们就无法解释没有输出顶点的胞腔图。因此，我们希望考虑至少有一个输入顶点和一个输出顶点的图。特别是，对于空间 $\Gamma_{g,\ n,\ m}$，我们要求 $n,\ m\ \geq 1$。

由于近 Frobenius 代数可能不含余单位（因而可能不具有双线性形式 η），我们或许无法像在 14 中那样，将 $\delta(v)$ 写成典范基展开。由于**IECA2b** 的公式依赖于这一点，我们必须改变这一公理的表述方式。该公理的要旨大体相同：将余乘法作用于某一特定输入顶点处的向量，然后把该余乘法的两个因子分别分配到两个彼此分离的连通图的输入顶点上。有鉴于此，考虑如下情形。设 $v_i\in A$ 是一个向量，使得 $\delta(v_i)$ 可以写成张量之和

$$\delta(v_i)=\sum_a u_a\otimes w_a. \tag{71}$$

在这种情况下，新的**IECA2b**应表述为

$$\Omega(\gamma)(v_1,\dots,v_n)=\sum_a \Omega(\gamma_1)(v_{I-},u_a,v_{I_+})\otimes\Omega(\gamma_2)(v_{J_-},w_a,v_{J_+}), \tag{72}$$

在继续之前，我们先回顾一下 [4] 的主要结果，该结果在第 4 节中以定理 4.7 的形式陈述。这里另一个重要问题是引理 5.17 和 5.18。回想一下，这两个引理的证明都涉及收缩一个围圆盘环，将图分成两个不相交部分，其中一部分只是一个只有单个顶点的图。由于我们不再考虑只有一种颜色的图（例如只有一个顶点的图必然如此），这个证明不再适用。相反，我们必须将 5.17 和 5.18 的结果作为额外假设：可以移除输入顶点处围成圆盘的环，也可以添加输出顶点处围成圆盘的环，而不改变与胞腔图关联的映射。

我们对 6.13 给出了更具操作性的证明，而不是着重说明边收缩与构造操作的顺序无关。在近似拓扑量子场论中，这一操作过程的顺序甚至更加关键，主要原因是某些胞腔图可能包含这样的环：若将其收缩，图便会分成若干部分，其中一个连通部分只含有一种颜色的顶点。例如，见图 37；收缩其中的这个环会得到一个不连通图，其中一个不连通部分没有输出顶点。

我们断言，若在程序中要求始终先收缩直边再收缩环，便可避免这一问题。这能防止我们分裂成仅含单一颜色的子图，原因如下。不失一般性，设在某个输入顶点处有一个环，收缩该环会使一个连通子图的所有顶点具有相同颜色。这些顶点必然全是输入顶点，因为分裂该环所产生的顶点必须都是输入顶点。然而，这意味着在原图中，环内的所有顶点都必须是输入顶点，因此它们应通过直边与原来的输入顶点相连。若我们改为先收缩直边，则这个原环会变成一个围圆盘环，从而可依我们的新公理将其移除。

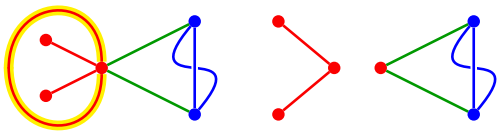


图 37. 在直边之前收缩环可能导致仅含单一颜色的不连通图。

按照这一程序，我们可以对由彩色胞腔图生成的近似拓扑量子场论给出类似的分类结果。具体而言，若 A 是一个近弗罗贝尼乌斯代数，且对$n,m\geq 1$,

$$\Omega:\Gamma_{g,n,m}\longrightarrow \mathrm{Hom}(A^{\otimes n},A^{\otimes m}) \tag{73}$$

是对一个多重线性映射的赋值

$$\Omega(\gamma):A^{\otimes n}\longrightarrow A^{\otimes m} \tag{74}$$

到一个着色胞腔图 $\gamma\in\Gamma_{g,\ n,\ m}$，使得 Ω 满足着色边收缩公理以及引理 5.17 和 5.18 的结论，那么这一赋值只取决于图的拓扑类型（g，n，m）。我们现在可以证明以下结果

定理 7.1. *1.1* 设 A 是一个近弗罗贝尼乌斯代数，具有余乘法 δ 和欧拉映射**E**。进一步设 γ是一个类型为(g,n,m)的着色胞腔图，其中 $n,m \geq 1$，且 $\Omega(\gamma) \in \mathrm{Hom}(A^{\otimes n},A^{\otimes m})$是一个满足边收缩公理的多重线性映射赋值。那么，与 γ 相关联的带状拓扑量子场论与图无关，且由下式给出

$$\Omega(\gamma)(v_1,v_2,\dots v_n) = \delta^{m-1}(\mathbf{E}^g(v_1v_2\cdots v_n)). \tag{75}$$

证明。 这里的证明完全遵循 6.13 中的步骤。首先，我们收缩输入边之间的所有直边，然后收缩输入边上的环，以记录新映射的输入向量。接着，我们收缩输出边之间的直边，然后收缩输出边上的环，并记录执行这些操作的顺序，以便之后重构这些输出。我们采用相同的步骤，将二分图化简为带有若干个环的树，然后使用 **VSDEC** 改变这些环的颜色。收缩这些环后，剩下的就只有二叉树。

和之前一样，这相当于将乘法和余乘法应用适当的次数；在余结合律和弗罗贝尼乌斯关系下，这恰好等价于 $\delta_{m-1}(\mathbf{E}^g(v_1\cdots v_n))$

□

W我们回顾一下这个结果，它也曾在 [4, 3] 。

推论 7.2。 设 A 是带余单位的近弗罗贝尼乌斯代数。那么，由 *Atiyah* 和 *Segal* 的缝合公理所诱导的几乎拓扑量子场论，与由边收缩/构造公理所诱导的带图拓扑量子场论相一致。

证明依赖于分类定理 4.7 和 7.1。

8. 扭曲卡特兰数递推

此外，在本节中，我们利用定理 4.7 和 4.7 中得到的两种分类来证明定理 8.1。该定理将卡特兰数递推关系推广为由与近 Frobenius 结构代数的拓扑递归形式体系相容的拓扑量子场论 [7] A 扭曲的递推关系。

8.1. **由几乎拓扑量子场论扭曲的卡特兰数递推**。我们回到对带箭头胞腔图及其由广义卡特兰数计数的讨论。我们可以把胞腔图看作图的“加厚”形式：在每个顶点处，我们规定与该顶点关联的半边的循环次序。随后，我们为每个顶点和每条边赋予一定厚度，并将新图嵌入一个亏格尽可能小的黎曼曲面，使得边彼此不相交，且每个顶点处关联半边的排列方向均符合所规定的循环次序。

我们回顾第 2 节中的广义卡特兰数

$$C_{g,n}(\vec{\mu}) := |\widehat{\Gamma}_{g,n}(\vec{\mu})|$$

表示 $\widehat{\Gamma}_{g,n}(\vec{\mu})$ 中类型为 (g,n) 的无色带箭头胞腔图的数量。

由于这种卡塔兰递归对应于边收缩操作，而拓扑量子场论形式体系也可以通过相同的边收缩操作等价地表述，因此被 $\omega_{g,n}$ 扭转的卡塔兰递归意味着以下结论（[7] 或 [8]）。

定理 *8.1.* 设 A 为带余单位的近弗罗贝尼乌斯代数，其余单位为 ε，欧拉映射为 E。设 $C_{g,n}(\vec{\mu})$ 表示类型为 (g,n) 的带箭头胞腔图的数目，其中顶点的度由向量$\vec{\mu}$指定。此外，考虑近似拓扑量子场论 $\omega_{g,n,m} : A^{\otimes n} \longrightarrow A^{\otimes m}$，以及由 $\omega_{g,n}(v1,\dots, v_n) = \omega_{g,n,0}(v1,\dots, v_n) = \varepsilon(E^g(v_1\cdots v_n))$ 给出的该近似拓扑量子场论的限制。

那么， 由广义卡特兰数扭转的近似拓扑量子场论满足如下递推关系：

$$
\begin{aligned}
C_{g,n}(\vec{\mu})\cdot\omega_{g,n}(v_1,\dots,v_n) = \sum_{j=2}^{n}(\mu_1+\mu_j-2)C_{g,n-1}(\mu_1+\mu_j-2,\vec{\mu}_{[n]\setminus\{1,j\}})\cdot\omega_{g-1,n+1}(v_1v_j,\vec{v}_{[n]\setminus\{1,j\}}) \\
+\sum_{\alpha+\beta=\mu_1-2}\alpha\beta\Bigg[C_{g-1,n+1}(\alpha,\beta,\vec{\mu}_{[n]\setminus 1})\omega_{g-1,n+1}(\delta(v_1),\vec{v}_{[n]\setminus 1}) \\
+\sum_{\substack{g_1+g_2=g\\ I\sqcup J=\{2,\dots,n\}}}\sum_{a,b,k,\ell}\Big(\eta(v_1,e_ke_\ell)\eta^{ak}\eta^{b\ell}C_{g_1,|I|+1}(\alpha,\vec{\mu}_I) \\
\times C_{g_2,|J|+1}(\beta,\vec{\mu}_J)\omega_{g_1,|I|+1}(e_a,\vec{v}_I)\omega_{g_2,|J|+1}(e_b,\vec{v}_J)\Big)\Bigg].
\end{aligned}
\tag{76}
$$

证明。 对于近弗罗贝尼乌斯代数 A，我们将近似拓扑量子场论限制到 $m=0$ 情形，从而得到映射$\omega_{g,\ n}:A^{\otimes n}\longrightarrow K$。我们回顾，由推论 7.2，近似拓扑量子场论与带状拓扑量子场论相一致。

因此，我们需要考虑仅含输入顶点的胞腔图。我们认为，递推公式 76 解答了一个计数问题：计算类型为 (g,n)、度数由 $(\mu_1,\dots\mu_n)$ 指定的带箭头胞腔图的数量，其中每个顶点都由参数 $v_i\in A$ 加权；另见第 2 节，同时在第 5.2 节定义的输入边收缩公理下保持函子性。我们注意到，由于第 2 节中类型为 (g,n) 且度数为 $(\mu_1,\dots,\mu_n)$ 的胞腔图数量有限，该计数问题给出了一个定义良好的映射 $A^n\longrightarrow K$。

我们进一步观察到，根据函子性，任何类型为 (g, n)、度数为 $(\mu_1,\dots,\mu_n)$ 且权重为 $(v1,\dots,v_n)$ 的胞腔图，都会产生相同的映射 $A^n\longrightarrow K$；该映射由定理 4.7 计算出的近似拓扑量子场论的值给出。因此，我们的计数问题将近似拓扑量子场论的值 $\varepsilon(E^g(v_1\cdots v_n))$ 乘以这类胞腔图的数量。回顾第 2 节，类型为 (g, n)、度数为 $(\mu_1,\dots,\mu_n)$ 的带箭头胞腔图的数量是卡特兰数 $C_{g,n}(\mu_1,\dots,\mu_n)$。因此，这个计数问题给出了公式 76 的左侧。我们进一步观察到，可以通过收缩类型为 (g, n)、度数为 $(\mu_1\dots,\mu_n)$ 的胞腔图中位于权重为 v_1 的顶点处的带箭头边或环来解答这个计数问题，从而得到公式 76 右侧的递推公式。

事实上，我们首先指出，公式 76 右侧的三项分别来自对权重为 v_1 的顶点处带箭头边的三种收缩方式。

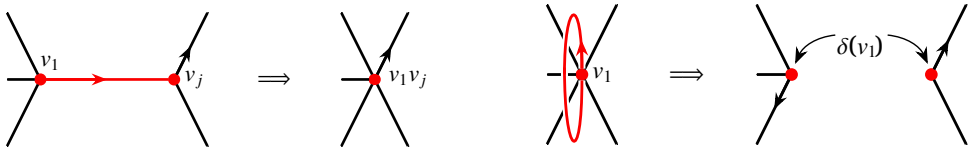


图 38. 带箭头胞腔图的边收缩运算。

第一项的类型为（$g,n-1$），它来自收缩一条连接权为 v_1 的顶点与权为 v_j 的顶点的边。第二项的类型为（$g-1,n+1$），它来自在权为 v_1, 的顶点处收缩一个环，且该收缩不使图不连通。最后一项来自在权为 v_1 的顶点处收缩一个环，且该收缩使图不连通，从而分成类型为

（$g1, |I|+1$）的图与另一个类型为（$g2, |J|+1$）的图，其中 $g_1+g_2=g$ 且 $I \sqcup J = \{2,\ldots,n\}$。如前所述，这三项中的每一项都表现为近似拓扑量子场论的数目与相应类型的带箭头胞腔图的数目之乘法，亦即相应的卡特兰数。我们进一步由卡塔兰递归可知，收缩胞腔图的一条边或一个环会改变度向量以及相关胞腔的拓扑类型，如第 2 节中的递归 3 所述。

我们将收缩胞腔图中带箭头的半边所在的边，该半边位于权重为v_1的第一个顶点上。若这条边连接到第j个顶点，且该顶点的权重为v_j，那么新顶点的权重将为v_1v_j；我们在新顶点的半边上放置一个箭头，该半边在嵌入曲面的循环顺时针序中紧邻原先被收缩的半边。若被收缩的边是一个环，则两个新顶点的权重将由 $\delta(v_1)$的张量分量给出，并在每个顶点上、紧邻原环的半边处放置箭头，次序按循环次序排列。

通过收缩权重为v_1, 的顶点上带箭头的边／环，我们可以得出，计数问题给出公式 76 右侧的三项递归，其论证与导出 [7, 8]的卡塔兰递归时所用的论证相同。还需指出，卡塔兰递归基于边或环的收缩，因此我们不必移除环；故无需使用引理 5.17 的情形 1。

□

在下一节中，我们将通过把其中一些顶点标记为红色顶点、其余顶点标记为蓝色顶点，为这些图引入顶点着色。顶点的这种着色会引出边的着色：连接两个同色顶点的边与顶点同色，而连接两个不同颜色顶点的边则可标记为绿色。这些图正是第 5.1 章讨论的类型为 (g,n,m) 的图，但不含流顶点。

8.2. **着色　　卡特兰数**。本节中，我们提出了一些值得进一步探索的思路
，以拓展这项工作

我们考虑一个亏格为g的黎曼曲面，以及一组由$n+m$ 个彩色标记点组成的集合，其中$p1,\ldots,p_n$为红色点，而$q1,\ldots,q_m$为蓝色点。该黎曼曲面上的胞腔图中，每个顶点p_i和q_j都与边或环相接；顶点的度数等于连接到该顶点的半边数。例如，一个顶点若与一个环和一条边相接，其度数为 3，因为一个环有 2 条半边。红色顶点只能通过边与蓝色顶点相连，这种边称为黑边。

现在考虑带箭头胞腔图：在这种情形下，我们在每个红色顶点处用一个箭头标记一条红色半边，并在每个蓝色顶点处用一个箭头标记一条蓝色半边。如果某个顶点不存在这样的半边，则不对该顶点作标记。令 $\widehat{\Gamma}_{g,n,m}(\vec{\nu}, \vec{\mathrm{d}}\ \vec{\mu}, \vec{\mathrm{f}})$ 为红色顶点数为 n、蓝色顶点数为 m，且度数由四个向量 $\vec{\nu}=(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ $\vec{\mathrm{d}}=(\mathrm{d}1,\ldots,\mathrm{d}_n)$ $\vec{\mu}=(\mu_1,\ldots,\mu_m)$ 和 $\vec{\mathrm{f}}=(\mathrm{f}1,\ldots,\mathrm{f}_m)$ 指定的带箭头胞腔图集合。我们有 n 个红色顶点和 m 个蓝色顶点，因此需要记录每种颜色的半边数：$\vec{\nu}$ 表示从红色顶点连向其他红色顶点的红色半边数，d 表示从红色顶点连向蓝色顶点的黑边数，$\vec{\mu}$ 表示从蓝色顶点连向其他蓝色顶点的蓝色半边数，而 $\vec{\mathrm{f}}$ 表示从每个蓝色顶点连向红色顶点的黑色半边数。例如，图 $\gamma \in \widehat{\Gamma}_{g,n,m}(\vec{\nu}, \vec{\mathrm{d}}\ \vec{\mu}, \vec{\mathrm{f}})$ 将是一个亏格为 g 的曲面上的带箭头胞腔图，其中有 n 个红色标记点 $\mathrm{p}1,\ldots \mathrm{p}_n$ 和 m 个蓝色标记点 $\mathrm{q}1,\ldots,\mathrm{q}_m$，并且每个存在可用红色或蓝色半边的顶点上都附有一个箭头。图 γ 在每个红色顶点 p_i 处有 ν_i 条红色半边和 d_i 条黑色半边，并且在每个蓝色顶点 q_j 处还有 μ_j 条蓝色半边和 f j 条黑色半边。我们注意到 $\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}_i=\sum_{j=1}^{m}\mathrm{f}\,\mathrm{j}$。

引理 8.2. 设 $\widehat{\Gamma}_{g,n,m}(\vec{\nu}, \vec{d}\ \vec{\mu}, \vec{f})$ 为画在亏格为 g 的闭连通定向黎曼曲面上、具有 n 个带标号的红色顶点、m 个蓝色顶点、且各顶点相应的度由向量 $(\vec{\nu}, \vec{d}\ \vec{\mu}, \vec{f})$ 计数的所有带箭头的彩色胞腔图的集合。则 $\widehat{\Gamma}_{g,n,m}(\vec{\nu}, \vec{d}\ \vec{\mu}, \vec{f})$ 是一个有限集。

证明. 设 $\gamma \in \widehat{\Gamma}_{g,n,m}(\vec{\nu}, \vec{d}\ \vec{\mu}, \vec{f})$ 为一个着色带状图，且 $c_\alpha(\gamma)$ 为与每个 γ 相关联的胞腔分解中 α 胞腔的数目。则顶点的数目 $c_0(\gamma) = n + m$，边的数目

$$c_1(\gamma) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \nu_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j + \sum_{k=1}^{n} d_k + \sum_{r=1}^{m} f_r\right)$$

且面数 $c_2(\gamma)$ 满足不等式

$$2 - 2g = c_0(\gamma) - c_1(\gamma) + c_2(\gamma).$$

由于c_0 和c_1 是有限的，因此对于固定数量的顶点和边，我们至多只能得到有限个图。

□

定义 8.3。 我们将着色卡塔兰数 定义为着色箭头胞腔图的计数

$$C_{g,n,m}(\vec{\nu}, \vec{d}, \vec{\mu}, \vec{f}) := |\widehat{\Gamma}_{g,n,m}(\vec{\nu}, \vec{d}, \vec{\mu}, \vec{f})|$$

例 8.4。 类型为 $(0, 1, 1)$ 且有k条边连接两个顶点的胞腔图只有唯一一个，因为只有一种循环定向的赋值会使该图能够嵌入球面。由于不存在红色或蓝色半边，因此该胞腔图上没有箭头。因此，$C^{0,1,1}(0, k, 0, k) = 1$。

此外，可以看出 $C^{0,1,1}(2a, 1, 2b, 1) = 4ab \cdot C_a C_b$，其中$C_m$表示用于计数$m$ 对括号的经典卡特兰数。这对应于$C_a C_b$ 个无箭头图：先将类型为 $\Gamma_{0,\ 1}(2a)$ 的图与类型为 $\Gamma_{0,\ 1}(2b)$ 的图连接起来，然后在第一个顶点处有 $2a$ 种箭头选择，在第二个顶点处有 $2b$ 种箭头选择。

问题 8.5。带色卡特兰数 $C_{g,n,m}(\vec{\nu}, \vec{d}\ \vec{\mu}, \vec{f})$ 是否满足类似于赫尔维茨数的切割与合并方程的递推关系?

计算上述问题中的基例是一项颇具挑战性的练习。在拓扑递归领域，一个有趣的问题是进一步将这些递推关系与枚举几何和 Gromov-Witten 理论联系起来，从而为这些数关于曲线模空间上的相交类建立严谨的数学基础。

参考文献

[1] Lowell Abrams.《二维拓扑量子场论与弗罗贝尼乌斯代数》。载于：《纽结理论及其分支期刊》05.05 (1996), pp. 569–587. DOI: 10.1142/S021821659600033 3.

网址： https://doi.org/10.1142/S0218216596000333.[2] Michael F. Atiyah。《拓扑量子场论》。载于：《*I.H.E.S* 数学出版物》68 (1988)，第 175–186 页。[3] William Davis。《类Frobenius代数、有色带图与拓扑量子场论的扩展》。博士论文。北卡罗来纳大学教堂山分校，2024年。[4] William Davis 和 Olivia Dumitrescu。《关于近*Frobenius*结构》。2025年。arXiv：2510.03128[math.AG]。网址：https://arxiv.org/abs/2510.03128。[5] Robbert Dijkgraaf。《二维共形场论的几何方法》。博士论文。乌得勒支大学，1989年。[6] Olivia Dumitrescu。《从胞腔图到拓扑量子场论》。技术报告 9。奥伯沃尔法赫数学研究所，2016年。DOI：10.4171/OWR/2016/9。

[7] Olivia Dumitrescu 和 Motohico Mulase。《二维拓扑量子场论导论与希钦谱曲线的量子化》。2017年。arXiv：1705.05969 [math.AG]。网址：https://arxiv.org/abs/1705. 05969。[8] Olivia Dumitrescu 和 Motohico Mulase。《对偶带图上的边收缩与二维拓扑量子场论》。载于：《代数杂志》494 (2017)，第 1–27 页。arXiv：1508 . 05922 [math.AG]。网址：https :/ / arxiv.org/abs/1508.05922。[9] Olivia Dumitrescu 和 Motohico Mulase。《轨形赫尔维茨数的镜像曲线》。载于：《罗马尼亚纯粹与应用数学评论》66.1 (2021)。电子预印本：https://imar.ro/journals/Revue_Matematiq ue/ pdfs/2021/2/4.pdf.[10] Olivia Dumitrescu、Motohico Mulase、Brad Safnuk 和 Adam Sorkin。“通过拉普拉斯变换研究埃纳尔-奥兰坦递推的谱曲线”。载于：《当代数学》593（2013），第263–315页。[11] Olivia Dumtrescu 和 Motohico Mulase。《胞腔图范畴上的上同调场论》。准备中。[12] Petr Dunin-Barkowski、Maxim Kazarian、Nicolas Orantin、Sergey Shadrin 和 Loek Spitz。“赫尔维茨数的多项式性、Bouchard-Mari˜no 猜想及 ELSV公式的新证明”。载于：Advances in Mathematics 279（2015），第67–103页。arXiv：1307.4729 [math.AG]。网址：htttps: //arxiv.org/abs/1307.4729。[13] Bertrand Eynard、Motohico Mulase 和 Brad Safnuk。“切割与连接方程的拉普拉斯变换及关于赫尔维茨数的 Bouchard-Mari˜no 猜想”。载于：《数理科学研究所刊物》47（2011），第629–670页。arXiv：0907.5224 [math.AG]。网址：https://arxiv.org/abs/0907.5224。[14] Bertrand Eynard 和 Nicolas Orantin。“代数曲线不变量与拓扑展开”。载于：《数论与物理学通讯》1.2（2007），第347–452页。[15] Bertrand Eynard 和 Nicolas Orantin。模空间的魏尔-彼得森体积、Mirzakhani递推与矩阵模型。2007年。arXiv：0705.3600 [math-ph]。网址：https://arxiv.org/abs/ 0705.3600。[16] Stavros Garoufaldis、Campbell Wheeler Peter Scholze 和 Don Zagier。“数域的 Habiro环”。载于：（2024）。arXiv：2412.04241 [math.NT]。网址：https://arxiv.org/abs/2412.04241。[17] Stavros Garoufaldis 和 Don Zagier。“单位根处 Nahm 和的渐近性”。载于：The Ramanujan Journal 55（2021），第219–238页。[18] Ana Gonzalez、Ernesto Lupercio、Carlos Seg ovia 和 Bernardo Uribe。“近弗罗贝尼乌斯代数”。载于：《欧洲数学杂志》（2019）。arXiv：1907 . 05470 [math.RA]。网址：https :/ / arxiv.org/abs/1907.05470。[19] Alexander Grothendieck。《纲领草图》。1984年。[20] John Harer 和 Don Zagier。“曲线模空间的欧拉示性数”。载于：《数学创刊》85（1986），第457–485页。[21] Gerard ’t Hooft。“强相互作用的平面图理论”。载于：《核物理B辑》72.3（1974），第461–473页。[22] Tyler J. Jarvis 和 Takashi Kimura。有限群分类空间的轨形量子上同调。2002年。arXiv：math/0112037 [math.AG]。网址：https://arxiv.org/abs/math/0112037。[23] Joachim Kock。《弗罗贝尼乌斯代数与二维拓扑量子场论》。剑桥大学出版社，2003年。[24] Maxim Kontsevich。“曲线模空间上的交叉理论与矩阵艾里函数”，载于：《数学物理通讯》147（1992），第1–23页。

[25] Maxim Kontsevich 和尤里·马宁。“格罗莫夫-维滕类、量子上同调与枚举几何”。载于：《数学物理通讯》164（1994），第525–562页。[26] Maxim Kontsevich、Alex Takeda 和 Yiannis Vlassopoulos。《前卡拉比-丘代数与拓扑量子场论》。2022年。arXiv：2112.14667 [math.AG]。网址：https://arxiv.org/ abs/2112.14667。[27] 雅各布·卢里。“拓扑场论的分类”。载于：《数学当前进展》2008（2009），第129–280页。[28] 玛丽安·米尔扎哈尼。“简单测地线与带边黎曼曲面模空间的魏尔-彼得森体积”，载于：《数学创刊》167.1（2007），第179–222页。[29] 玛丽安·米尔扎哈尼。“曲线模空间上的魏尔-彼得森体积与交叉理论”。载于：《美国数学会杂志》20.1（2007），第1–23页。[30] Gregory W. Moore 和格雷姆·西格尔。《二维拓扑场论中的D膜与 K理论》。2006年。arXiv：hep-th/0609042 [hep-th]。网址：https://arxiv.org/abs/hep-th/0609042。[31] Motohico Mulase 和 Michael Penkava。“黎曼曲面上的带状图、二次微分以及定义在 $\mathbb{Q}$ 上的代数曲线”。载于：《亚洲数学杂志》2.4（1998），第875–920页。[32] Paul Norbury 和 Norman Do。计算紧化曲线模空间中的格点。2011年。arXiv：1012.5923 [math.AG]。网址：https://arxiv.org/pdf/1012.5923。[33] 安德烈·奥昆科夫和Rahul Pandharipande。“格罗莫夫-维滕理论、赫尔维茨数与矩阵模型”。载于：《纯数学专题讨论会论文集》80（2009），第325–414页。arXiv： 0101147 [math.AG]。网址：https://arxiv.org/abd/0101147。[34] 格雷姆·西格尔。《量子场论的几何方面》。1990年。[35] Daniel Hernandez Serrano。“拓扑递归、拓扑量子场论与 BG 的格罗莫夫-维滕不变量”。载于：《伊比利亚美洲数学杂志》34.4（2018），第1443–1468页。[36] Daniel D Sleator、Robert E Tarjan 和 William P Thurston。“旋转距离、三角剖分与双曲几何”。载于：《美国数学会杂志》1.3（1988），第647–681页。[37] Kurt Strebel。《二次微分》。施普林格出版社，1984年。[38] Constantin Teleman。“二维半单场论的结构”。载于：《数学创刊》188.3（2011），第525–588页。ISSN：1432-1297。DOI：10.1007/s00222-011- 0352- 5。网址：http: // dx.doi.org/10.1007/s00222-011-0352-5。[39] 爱德华·威滕。“二维引力与模空间上的交”。载于：《微分几何综述》（1991），第243–310页。

北卡罗来纳大学教堂山分校 , 菲利普斯楼340室 , 北卡罗来纳州邮政信箱3250，邮编27599-3250 EMAIL:DOLIVIA@UNC.EDU ,
WILLDAVISMATH@GMAIL.COM