阿贝尔希格斯模型的混合模拟-数字模拟

Muhammad Asaduzzaman,[1,2,*] Rayleigh W. Parker,[3,4,*] Noah Goss,[5,6] Ahmed I. Mohamed,[3,4] Max Neiderbach,[3,7] Zane Ozzello,[2] Ravi K. Naik,[6] Alexander F. Kemper,[1] Irfan Siddiqi,[5,6] Yannick Meurice,[2] 和 Machiel S. Blok[3,4]

[1] *Department of Physics and Astronomy, North Carolina State University, Raleigh, NC 27607, USA*
[2] *Department of Physics and Astronomy, The University of Iowa, Iowa City, IA 52242, USA*
[3] *Department of Physics and Astronomy, University of Rochester, Rochester, New York 14627, USA*
[4] *University of Rochester Center for Coherence and Quantum Science, Rochester, New York 14627, USA*
[5] *Department of Physics, University of California, Berkeley, Berkeley, CA 94720, USA.*
[6] *Computational Research Division, Lawrence Berkeley National Laboratory, Berkeley, CA 94720, USA.*
[7] *Department of Physics, University of Maryland,4150 Campus Dr, College Park, MD 20742, USA*(日期：2026年3月16日)

要利用近期量子计算机研究规范理论，有必要探索非传统量子模拟器，以寻找资源高效的模拟方案，并最终探究不同场论的奇异特征，包括尚未探索的 QCD 相图区域。在这项工作中，我们使用超导传输子三能级量子处理器，构建并实现了一种基于脉冲、采用三能级的混合模拟-数字模拟方案，用于模拟两个格点上的 (1+1) 维阿贝尔希格斯模型（AHM）。与此同时，我们还通过实验实现了同一模型的基于门的实现。利用将传输子希尔伯特空间的三能级截断自然映射到自旋-1截断AHM的方法，我们通过这两种方案观测了AHM场可观测量的实时动力学；这些可观测量与电场算符类似。对于模拟-数字方案，我们结合局部模拟驱动、对两个传输子的自然相互作用哈密顿量进行驱动调制，以及动态解耦脉冲，构造了 Floquet模拟。对于数字方案，我们使用先进的 qutrit 处理器，对该模型进行 Trotter化模拟，并采用了先进的误差缓解技术。我们还讨论了这两种方法的可扩展性，以及将其扩展用于模拟其他模型哈密顿量的潜力。我们的实验表明，当前及近期的超导传输子三能级量子处理器可作为可行平台，用于未来研究基于自旋-1和 SU(3) 的规范理论模型。

arXiv:2603.12391v1 [quant-ph] 12 Mar 2026

I. 引言

近年来，利用量子模拟器模拟量子场论的前景引起了广泛关注。基于重要性抽样的经典数值方法已成功确立了以虚时间为基础的格点量子色动力学（QCD），作为强相互作用可靠的非微扰表述；但在应对符号问题（它在大化学势下出现） [1, 2] 以及观测实时非平衡动力学方面的困难 [3]时，它们面临重大挑战。鉴于这些困难，研究人员已尝试利用多种量子计算平台模拟格点规范理论，包括超导电路、囚禁离子和里德伯原子模拟器，分别用于（1+1）维 [4–9]以及（2+1）维 [10–19]。这些研究是朝着模拟（3+1）维 QCD 迈进的重要中间步骤，并探讨了多种物理现象，包括相变、 [20], 粒子散射、 [9], 实时禁闭动力学、 [7, 19], 淬火动力学、 [21], 纠缠在热化过程中的作用[22],以及量子混沌 [15]。

迄今为止，大多数研究都是在由量子二能级系统（即量子比特）组成的平台上开展的。平台——由量子多能级系统（即量子 d能级系统）构成的平台，则有望减少对自然界中常见的 d 能级系统进行量子模拟所需的门深度和非局域量子操作；这类系统常见于晶格场论模型中 [23–26]。然而，尽管超导电路 [27, 28], 、囚禁离子 [29], 和光子系统 [30], 在多能级量子比特处理器的开发方面近期取得了成功，也有不少理论方案提出用多能级量子比特研究场论 [26, 31–40], ，据我们所知，基于多能级量子比特的场论模拟仅有一次实验实现，并且是在囚禁离子量子硬件上完成的 [18]。

在这项工作中，我们研究一种特定的晶格场论模型——自旋-1 截断阿贝尔希格斯模型（AHM） [41–44] 在两个时空维度中——并采用两种相互独立但互为补充的方法，在超导电路平台上对该模型进行基于量子多能级比特的量子模拟（图1）。第一种方法利用哈密顿量工程技术进行模拟-数字混合模拟；第二种方法则借助最先进的误差缓解方法，进行全数字仿真。AHM 是验证原理性模拟器的理想试验平台，其中一个重要原因是它具有与量子色动力学（QCD）相似的特征，包括禁闭 [45, 46], 和弦断裂 [42],，因此是迈向量子色动力学量子模拟的重要一步。在这里，我们研究该模型在两个晶格点上的情形，但这些方法也可以更广泛地应用于其他情况

* 这些作者对这项工作做出了同等贡献。

以及更长的链。由于模型采用自旋-1 截断，每个格点都可以自然地映射为一个 qutrit（$d = 3$）；在两种模拟方法中，我们都将其编码在一个截断子空间内，该子空间由跨蒙最低的三个能量本征态张成。跨蒙是一种超导非谐振荡器，其非线性使得人们能够在其希尔伯特空间的一部分中实现高保真度的通用控制 [47]。尽管跨蒙最初是为实现量子比特而设计的，但如今它们越来越多地应用于更高维度的量子计算与模拟 [27, 28, 48–51]。

在第一种模拟方法中，我们通过模拟-数字混合协议对双跨蒙系统的哈密顿量进行调控，使其近似于目标模型的哈密顿量；具体做法是在模拟演化阶段与相对较短的数字门序列之间交替，从而产生有效的弗洛凯哈密顿量 [52–54]。类似方法已用于多种平台上的量子模拟 [55–61]。这些实验表明，模拟-数字混合方法是量子模拟的有力工具，因为它们能够减少或消除保真度相对较低的双三能级量子比特门，同时保留精细数字控制所带来的一些灵活性。

在第二种方法中，我们在通用三能级量子比特处理器上，利用一对传输子对模型进行基于数字门的模拟 [62, 63]。与基于量子比特的门分解相比，使用基于 qutrit 的量子门分解所需的资源减少了四倍。我们采用了最先进的误差缓解协议，包括随机化编译和纯化方法，以计算可观测量；在未来的研究中，这些可观测量或可用于识别大型晶格中的相变。我们的研究表明，在以 qutrit 取代量子比特作为计算单元时，采用随机化进行数字误差缓解所需的资源不会显著增加，这与先前的研究结果一致 [63]。

本文结构安排如下。在第II节中，我们回顾阿贝尔希格斯模型的一种可通过实验实现的格点哈密顿量表述。在第III节中，我们介绍单点阿贝尔希格斯模型的模拟模拟方法，以及针对多点阿贝尔-希格斯模型哈密顿量的模拟-数字混合方法。我们讨论设计和实施这一方案时的实际考量，并展示实验所得结果。接下来，在第IV 节中，我们将阿贝尔希格斯模型哈密顿量生成的酉操作分解为处理器的原生门集。我们展示从器件获得的结果，并讨论数字量子模拟中不同误差缓解策略的影响。最后，我们在第V 节讨论这两种方法之间的权衡及其可扩展性，并在第VI节给出结论。

II. 阿贝尔-希格斯模型

阿贝尔希格斯模型是标量量子电动力学的一个玩具模型，用于描述光子场与自旋零粒子之间的相互作用。我们首先简要介绍该模型及其在晶格上近似表示为自旋-1 哈密顿量的形式。该模型的作用量由一个 $U(1)$ 规范场和一个复物质场 Φ [33, 64, 65] 描述

$$S = \int \mathrm{d}^2x \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} + |D_\mu\Phi|^2 + \frac{\mu^2}{2}\Phi^\dagger\Phi - \frac{\lambda}{4}(\Phi^\dagger\Phi)^2, \quad (1)$$

其中，$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ 是电磁张量，$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\nu$ 是物质荷为 q的协变导数。该模型在 $U(1)$规范变换 $\Phi \to e^{i\alpha(x)}\Phi$，$A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu\alpha(x)$下保持不变。我们考虑希格斯模解耦的极限，此时复标量场化为一个常数乘以复相位（即南部-戈德斯通模）。在（1+1）维中，该模型不存在退禁闭相；然而，在更高维度中，它确实表现出类似的禁闭特征，即一对电荷与反电荷 [42, 43]。禁闭的标志是：在低于临界距离尺度时，静态电荷分离导致势线性增长；而在大距离处则会观测到弦断裂现象，这表明存在电荷屏蔽[66]。在实时量子模拟器中，可以从局域电荷密度 [67]观测到禁闭特征和弦断裂现象。光锥的形状可以揭示模型中的禁闭特征，而通过计数存在的电荷数，可以根据积分局域电荷密度识别弦断裂。

通过将物质场置于二维格点的顶点上，并将规范场置于链路上，可将作用量转换为离散形式，如图 1(a)所示。这种形式也可用于基于路径积分表述对该模型进行经典数值模拟。按照文献 [5], 中概述的步骤，对格点作用量取时间连续极限，我们得到 N_s 个格点上的格点哈密顿量，并假设采用开放边界条件，

$$H_{\mathrm{AHM}} = \frac{\kappa}{2}\sum_{k=1}^{N_s}\left(L_z^{(k)}\right)^2 - \chi\sum_{k=1}^{N_s}F_x^{(k)} + \frac{\beta}{2}\sum_{k=1}^{N_s-1}\left(L_z^{(k+1)} - L_z^{(k)}\right)^2. \quad (2)$$

我们在本文中始终定义 $\hbar = 1$。哈密顿量表述中出现的 L_z 算符是规范场的正则共轭量，类似于量子电动力学中的电场算符；而电荷对应于希格斯场相位算符的共轭量。在这个 (1+1) 维模型中，我们无需显式考虑物质场，因为电荷可以计算为以下两者之差：

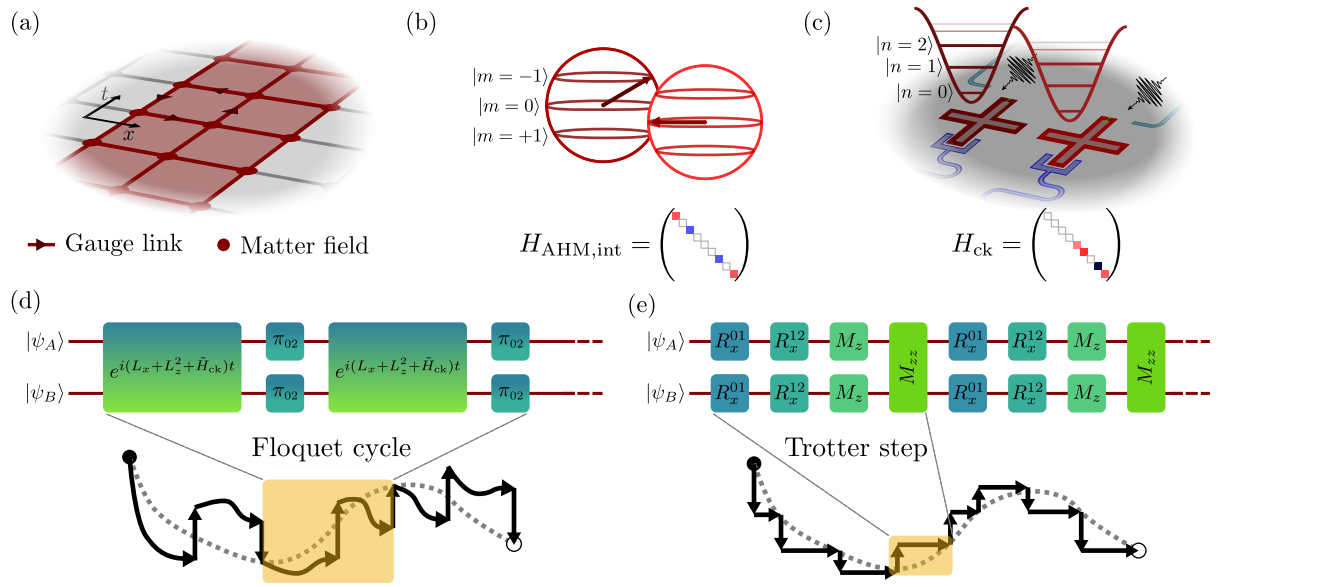


图 1：(a) 阿贝尔希格斯模型（AHM）在（1+1）维中的晶格场论表示。顶点表示物质场，边表示离散时空中的规范链路。在本工作中，我们考虑宽度为两个格点的时间片。(b) 在适当的极限与近似下（见参考文献 [5]），（1+1）维 AHM 可映射到一条自旋-1链，其中自旋态对应于格点量子数。我们展示了本实验中所模拟的两个自旋-1粒子及其相互作用哈密顿量的形式$H_{\mathrm{AHM,\ int}} \propto L_z \otimes L_z$。(c) 我们的实验平台由一对 transmon qutrit 组成，其本征交叉克尔相互作用 H_{ck} 是对角的，但在形式上与目标相互作用差异很大。通过对两个传输子施加微波驱动，我们可以用两种不同方式近似模型哈密顿量下的演化。(d) 一种用于实现目标哈密顿量演化的模拟-数字混合方法。在此，我们在由模拟驱动构造的哈密顿量下的演化与近似瞬时的局域 π_{02} 门之间交替；这些门会转置态 $|0\rangle$ 与 $|2\rangle$，且对每个跨蒙分别进行。(e) 完全数字方法。在此，重复一组取自通用门集的数字门序列，以有效地对时间演化进行 Trotter 分解。门的定义见第IV节。对于两种方案，均展示了态轨迹的示意图。在模拟-数字模拟中，演化可能显著偏离理想轨迹（虚线），但在一个完整的 Floquet 周期之后会返回，其偏差不超过 Magnus 展开的误差。在数字仿真中，演化在整个过程中更接近精确解，并在每个特罗特步结束时在 Trotter 误差范围内近似该解。

电场算符 $(L_z^{k+1} - L_z^k)$，这是由高斯定律所致。哈密顿量中的各项分别可解释为电场的局域能量、驱动场局域演化的能量注入，以及电荷产生所需付出的能量代价。算符 $L_z^{(k)}$（其中 k 表示该算符作用的格点）与下文定义的角动量算符相同：

$$L_z|m\rangle = m|m\rangle. \tag{3}$$

算符 $F_x^{(k)}$定义如下：

$$F_\pm|m\rangle = |m \pm 1\rangle,\ F_x = \frac{1}{2}\left(F_+ + F_-\right). \tag{4}$$

要精确描述该模型，算符 $L_z^{(k)}$和$F_x^{(k)}$必须作用于无限能级：$m \in \{0, \pm1, \pm2, \cdots, \pm\infty\}$，但在实际应用中，需要进行某种截断 $|m| \le l$。在本研究中，我们取 $l = 1$，此时我们可以将 $\sqrt{2}F_x$ 与自旋-1 L_x 算符等同起来。我们可以将自旋 L_z 本征态映射到跨蒙本征态，映射方式为

$$\begin{aligned} &|m=1\rangle \to |n=0\rangle, \quad |m=0\rangle \to |n=1\rangle, \\ &|m=-1\rangle \to |n=2\rangle. \end{aligned} \tag{5}$$

这种自旋-1 截断无法恢复该理论的连续极限，但它能够推动新工具的发展，以比量子比特平台上现有方案更高效的编码方式来模拟各种规范理论模型。此外，自旋-1 模型中的三重性因其与量子色动力学的联系而引人关注；在量子色动力学中，物理态在规范群 SU(3) 的中心变换下变换。

III. 模拟-数字模拟

我们首先讨论双格点阿贝尔希格斯模型的模拟-数字模拟。本节中的实验是在一台基于 Rochester 的跨蒙器件上进行的

，其参数见表 I。该实现可分为两部分：（1）驱动单个跨蒙的动力学，以模拟模型中的局域格点内项；（2）设计跨蒙之间的相互作用，使其有效匹配模型中格点之间的 $L_z \otimes L_z$ 相互作用项。为了减少 Trotter 化误差并尽可能延长模拟时间，我们力求同时执行这些操作，这带来了额外的挑战：如何设计单格点动力学和相互作用工程所需的驱动，使二者互不干扰。

A. 单量子三能级系统实现

我们首先讨论模拟驱动，它们在每个位置产生所需的单个跨蒙哈密顿量。在实验室参考系中，将跨蒙 k 截断至三个能级，并施加时变驱动 $V_k(t)$ 时，其哈密顿量可写为 [47]

$$\begin{aligned} H_k^{\mathrm{LF}}(t) &= H_k^0 + H_k^{\mathrm{drive}}(t) \\ &= \omega_{01}^k \left|1\right\rangle\!\left\langle 1\right| + (\omega_{01}^k + \omega_{12}^k) \left|2\right\rangle\!\left\langle 2\right| \\ &\quad + V_k(t) \left(i \left|1\right\rangle\!\left\langle 0\right| + i\lambda_k \left|2\right\rangle\!\left\langle 1\right| + \mathrm{h.c.}\right), \end{aligned} \tag{6}$$

其中，ω_{ij}^k 定义为跨蒙本征态 $|i\rangle$ 与 $|j\rangle$之间的跃迁频率，$\lambda_k \approx \sqrt{2}$ 是一个无量纲因子，用于表征与 $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ 跃迁和$|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ 跃迁相关的电荷耦合之比。在本小节余下部分，我们将省略哈密顿量各项中的跨蒙指标 k 。

我们同时驱动两个跃迁，令 $V(t) = \sum_{i=1}^{2} \Omega_i(t) \cos(\omega_i^{\mathrm{d}} t + \phi_i)$，其中 Ω_i 为驱动包络，ω_i^{d}为驱动频率，ϕ_i 为各驱动项的相位。我们进一步定义失谐量 $\Delta_i = \omega_i^{\mathrm{d}} - \omega_{i-1,i}$ ，并假设 $|\Delta_i| + \Omega_i \ll |\omega_{12} - \omega_{01}|$，使得每个驱动项都接近与其中一个跃迁共振。在模拟-数字实验中，两个跨蒙的非谐性约为 $(\omega_{12} - \omega_{01})/2\pi \sim -240$ 兆赫兹。

从模型哈密顿量的式（2）中提取原位项，可得

$$H_{\mathrm{AHM},k} = \frac{\kappa + \beta}{2} L_z^2 - \frac{\chi}{\sqrt{2}} L_x, \tag{7}$$

其中，格点 k 被视为双格点模型中两个格点所在链的边界。为了找到模拟 $H_{\mathrm{AHM},\,k}$所需的驱动，我们首先进行幺正旋转参考系变换，将 H_k^{LF}变换到驱动频率参考系中：$H_k^{\mathrm{DF}} = U_{\mathrm{D}}^{\dagger} H_k^{\mathrm{LF}} U_{\mathrm{D}} - i U_{\mathrm{D}}^{\dagger} \partial_t U_{\mathrm{D}}$，其中 $U_{\mathrm{D}}(t) = \mathrm{diag}\left(1, e^{-i\omega_1^{\mathrm{d}} t}, e^{-i(\omega_1^{\mathrm{d}} + \omega_2^{\mathrm{d}})t}\right)$ [68, 69]。由于该参考系变换是对角的，我们在实验室参考系中观察到的布居动力学将与旋转参考系中的布居动力学完全相同。

在假设驱动强度相较于驱动频率以及跨蒙的非谐性都较弱的条件下，应用旋转波近似（RWA）后，Ω_1,$\Omega_2 \ll |\omega_{01} - \omega_{12}| < \omega_1^{\mathrm{d}}$，$\omega_2^{\mathrm{d}}$，我们得到：

$$\begin{aligned} H_k^{\mathrm{DF}}(t) &\approx -\Delta_1 \left|1\right\rangle\!\left\langle 1\right| - (\Delta_1 + \Delta_2) \left|2\right\rangle\!\left\langle 2\right| \\ &\quad + \frac{i}{2}\Omega_1(t) e^{-i\phi_1} \left|1\right\rangle\!\left\langle 0\right| + \frac{i\lambda}{2}\Omega_2(t) e^{-i\phi_2} \left|2\right\rangle\!\left\langle 1\right| + \mathrm{h.c.} \end{aligned} \tag{8}$$

旋波近似下被舍弃项的更多细节见附录B。

通过假设驱动相位相等 $\phi_1 = \phi_2 = -\pi/2$，驱动包络 $\Omega_1(t) = \lambda\Omega_2(t) = \Omega_0$，恒定且失谐 $\Delta_1 = -\Delta_2 = \Delta_0$，可以将式（8）映射为式（7），从而将驱动 transmon 哈密顿量简化为：

$$\begin{aligned} H_k^{\mathrm{DF}} &\approx -\Delta_0 \left|1\right\rangle\!\left\langle 1\right| \\ &\quad - \frac{1}{2}\Omega_0 \left(\left|1\right\rangle\!\left\langle 0\right| + \left|2\right\rangle\!\left\langle 1\right| + \mathrm{h.c.}\right) \\ &\to \Delta_0 L_z^2 - \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} L_x, \end{aligned} \tag{9}$$

最后一步中，我们移除了一个全局能量偏移 $-\Delta_0 I$。要在式（7）中的无量纲参数与式（9）中的物理参数之间进行转换，必须选择一个时间尺度 t_s，它决定了一个尺度频率 t_s^{-1}。随后，通过 $\Omega_0 = \chi t_s^{-1}$和$\Delta_0 = \frac{\kappa+\beta}{2} t_s^{-1}$即可完成映射。只要满足旋波近似条件，我们就可以在单量子三能级系统实验中自由选择尺度频率。在图2所示的实验中，我们选择了 $t_s^{-1} = 1$兆赫兹。

虽然上述推导在最后一步假设驱动包络恒定，但实验必须显式或隐式地采用成形包络进行。为以可控的方式实现这一点，我们让两个驱动具有相同的包络：$\Omega_1(t) = \lambda\Omega_2(t) = \Omega_0 A_T(t)$，其中 $A_T(t)$经过归一化，使得持续时间为 T 的脉冲之后，其积分等于相同持续时间的单位阶跃面积：$\int_0^T A_T(t)\,\mathrm{d}t = T$。包络函数及其归一化方式在附录B中有明确说明。驱动结束时产生的酉演化可用平均哈密顿量理论建模 [70]（另见附录A）；其中，一阶近似下，平均哈密顿量由各个矩阵元分别取时间平均得到，从而产生与式（9）相同的结果。

平均哈密顿量中的二阶及更高阶项会在模拟中产生相干误差。由于这些项取决于哈密顿量在不同时刻与自身的对易子，我们在渐变过程中对脉冲施加啁啾，使瞬时失谐保持与驱动相同的包络，即：$\Delta_{01}(t) = -\Delta_{12}(t) = \Delta_0 A_T(t)$。附录B中介绍了维持这一关系所需的相位渐变以及随之进行的参考系变换的详细信息。该

单个 qutrit 的哈密顿量可写为，

$$H_k^{\mathrm{DF}}(t) \approx \Delta(t) L_z^2 - \frac{\Omega(t)}{\sqrt{2}} L_x \approx A_T(t) \left(\Delta_0 L_z^2 - \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} L_x \right), \tag{10}$$

随后，Magnus 展开在一阶项之后终止。

如图所示2(a)，为模拟不同时刻的演化，改变脉冲持续时间 T，并在振幅固定的情况下拉伸驱动包络，其斜坡长度为脉冲持续时间的固定比例 $r = 0.1$。因此，无论 T如何，脉冲结束时的平均哈密顿量为

$$\bar{H}_k^{\mathrm{DF}} \approx \Delta_0 L_z^2 - \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} L_x, \tag{11}$$

其中，近似仅源于旋波近似。

单个超导量子比特模拟实验的结果见图 2(b)，其中绘出了对角场算符 L_z 和 L_z^2的期望值。这些期望值由测得的微波量子比特本征态布居直接计算得出，并已进行统计读出校正 [71, 72]。对于这项测量，式（7）中的参数设为 $\kappa/2\pi = \chi/2\pi = 1$，$\beta = 0$。图中还绘出了模型预测的精确单个 qutrit 动力学，以及附录E中所述的 Lindblad 主方程模型；该模型考虑了独立测得的该跨蒙的退相干时间和弛豫时间，如表 I （量子三能级系统 B）所列。可以看到，实验结果与 Lindblad 模型的预测吻合良好，这表明我们的单个超导量子比特模拟中的误差主要由退相干导致。

B. 双量子三能级系统实现

1. *Engineering the interaction Hamiltonian*

接下来，我们讨论用于工程化目标相互作用的模拟-数字方法。式（2）中的哈密顿量相互作用部分呈现伊辛型相互作用的形式，

$$H_{\mathrm{AHM,int}} = -\beta L_z \otimes L_z. \tag{12}$$

由于我们仅在两个格点上进行模拟，因此我们通过算符相对于 $\otimes$ 符号的位置来表示算符作用在哪个格点，而不使用上标索引。此外，在上下文含义明确时，我们会省略作用于传输子 A 和 B上的算符之间的 $\otimes$ 符号。

我们的器件由一对直接电容耦合的传输子组成，其性质见表 I。由于我们的 transmon qutrit 与

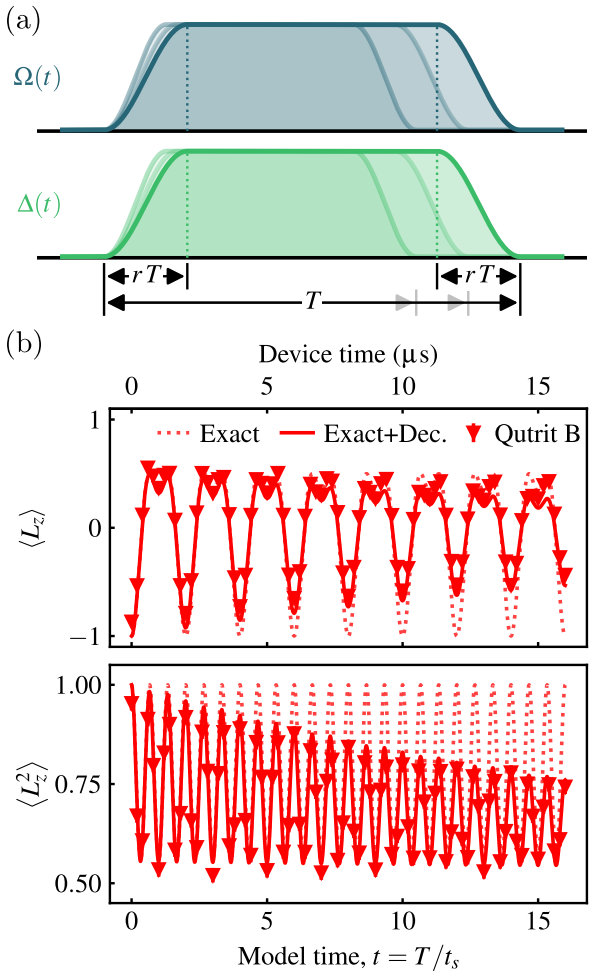


图 2：单 qutrit 模拟实验。(a) 对阿贝尔希格斯模型进行单 qutrit 模拟仿真的方案。qutrit 两条跃迁上的驱动遵循相同包络 $\Omega_{01}(t) = \lambda\Omega_{12}(t) = \Omega(t) = \Omega_0 A_T(t)$，并具有大小相等、符号相反的失谐$\Delta_1(t) = -\Delta_2(t) = \Delta(t) = \Delta_0 A_T(t)$。(b) 中每个数据点的测量方式为：设定脉冲持续时间 T，并在脉冲结束时读出 qutrit 本征态布居。斜坡占总持续时间的固定比例 $r = 0.1$，因此随着 T增大，脉冲被拉伸。无量纲包络函数 $A_T(t)$ 被归一化，使其面积等于其持续时间 T；详见附录 B。(b) 单个 qutrit 从初始微波量子比特态 $|n = 2\rangle$出发，在 $\kappa/2\pi = \chi/2\pi = 1$, $\beta = 0$条件下进行模拟演化时，场算符 L_z（上）和 L_z^2 （下）的期望值。尺度频率选为 $t_s^{-1} = 1$兆赫兹，用于在物理设备时间（上轴）与无量纲模型时间（下轴）之间换算。点线表示模型哈密顿量下精确的 Schr¨odinger 方程演化，实线为主方程模拟，假定采用表 I 中量子三能级系统 B 独立测得的相位退相干时间和弛豫时间。不确定度由散粒噪声 $\sigma \sim 1/\sqrt{N_{\mathrm{shots}}}$ 估计，其中 $N_{\mathrm{shots}} = 3000$。

彼此之间相对于其电容耦合强度，其固有相互作用可有效地由色散交叉克尔哈密顿量 [73, 74], 描述，附录中有更详细的说明C。我们将这一对角相互作用参数化为 L_z 两个量子三能级系统算符的幂次组合，

$$H_{\mathrm{ck}} = \sum_{i,j=0}^{2} z_{ij} L_z^i \otimes L_z^j, \tag{13}$$

其中， $L_z^0 = I$ 是单位矩阵。仅在一个 qutrit 上包含L_z 的非零次幂的项对应于局域频移，可以通过分别对每个跨蒙施加适当的参考系旋转来消除。在实验中，这对应于校准每个 qutrit 的频率，使另一个 qutrit 处于 $|1\rangle$态，而不是更常见地在另一个 qutrit 处于 $|0\rangle$态时进行调谐。这样可得到一个简化的相互作用哈密顿量，

$$\begin{aligned} H'_{\mathrm{ck}} &= \sum_{i,j=1}^{2} z_{ij} L_z^i \otimes L_z^j \\ &= z_{11} L_z L_z + z_{12} L_z L_z^2 \\ &+ z_{21} L_z^2 L_z + z_{22} L_z^2 L_z^2. \end{aligned} \tag{14}$$

随后，我们希望采用一种能够实现有效相互作用速率 $z_{21} = z_{12} = z_{22} = 0$的方法。

测得的 z_{ij} 用于本实验的跨蒙对的数值如图3(a)所示。它们取决于两个跨蒙的谱和电荷矩阵元（关于利用二阶微扰理论计算速率，见附录C ），因此通常不能指望它们实现原生的 $L_z L_z$ 相互作用。我们在实验中使用双回波序列测量这些速率，该序列在超导量子比特文献中被称为 [75], JAZZ [76], ，我们对其进行了改编，以便与 qutrit 一起使用（见附录D）。

不期望的相互作用通常可以通过动力学解耦技术予以抵消 [54, 59, 77]。然而，先前报道的、能够在 qutrit 上产生所需相互作用的脉冲序列，包含与我们的单 qutrit驱动不对易的脉冲 [27]。因此，我们设计了一种方案，将单qutrit驱动与一种哈密顿量工程方法相结合；该方法基于对两个传输子同时施加斯塔克驱动，并采用一组最精简的动态解耦脉冲，改编自参考文献 [78]。我们对两个传输子都施加斯塔克驱动，$\Omega_{S,\,A}(t)\cos\omega_S t$ 和 $\Omega_{S,\,B}(t)\cos\,\omega_S t$，其中包络 $\Omega_{S,\,k}$ 以及频率 ω_S 使相互作用哈密顿量具有一定的可调性。这也是第IV节基于门的模拟中所用受控-Z门背后的原理。

实际上，一对斯塔克驱动只能提供足够的可调性，将相互作用哈密顿量中的一个项设为零。有鉴于此，我们寻找仅由脉冲构成的序列，这些脉冲能够使单qutrit哈密顿量保持不变，并

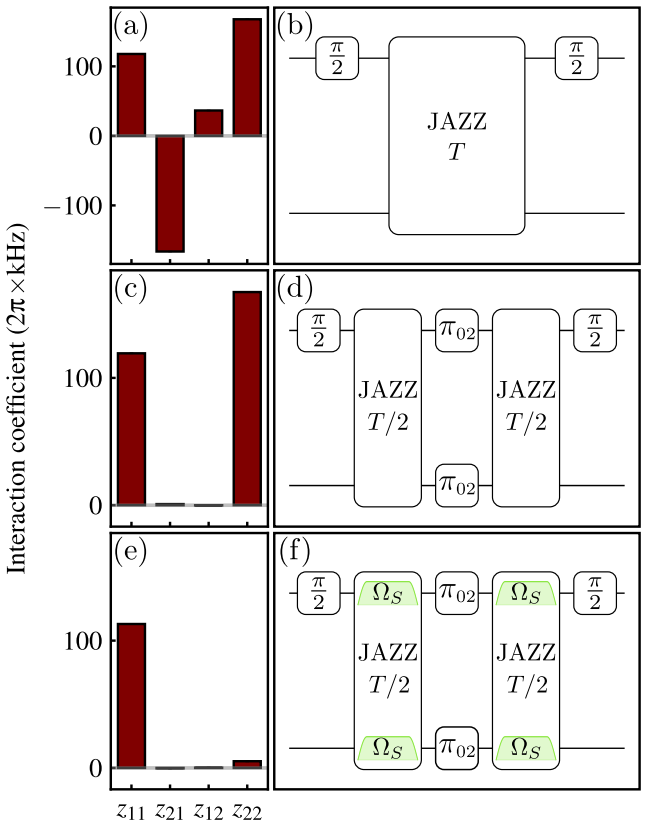


图 3：工程化 $L_z \otimes L_z$ 相互作用。(a) 实验测得的未驱动（裸）双跨蒙系统的相互作用哈密顿量各项，依据公式(13)。(b) 相互作用速率测量的抽象量子电路示意图。JAZZ模块由两个时长为 T 的自由演化周期组成，其间在两个跨蒙上各施加一个 π 脉冲 [75, 76]。 和π 脉冲的子空间$\frac{\pi}{2}$ 由目标相互作用哈密顿量矩阵元决定，附录 C 和 D对此有详细说明。(c)–(d) 使用 $|0\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ 交换操作进行平均时的相互作用速率和测量量子电路示意图。我们观察到，该动力学解耦序列有效地消除了奇宇称项 z_{12} 和 z_{21} ，而偶宇称项保持不变。此时量子电路包含四个时长为$T/2$ 的自由演化周期。(e)–(f) 同时进行平均并施加斯塔克驱动时的相互作用速率和量子电路示意图。在适当的频率和振幅下施加斯塔克驱动，几乎可以消除受驱动的 $\tilde{z}_{22}$ 项，使修正后的 $\tilde{z}_{11}$成为哈密顿量中唯一显著的相互作用速率。有关斯塔克驱动校准的详情，请参阅附录 D。

这可能会使至少两个不需要的项相互抵消。值得注意的是，操作 $U_{02} \equiv \pi_{02}^A \pi_{02}^B$（其中 π_{02}^k 是一个局域酉算符，可在跨蒙 k 上交换状态 $|0\rangle$ 和$|2\rangle$）与单个超导量子比特

式（11）中的平均哈密顿量，并具有如下效果：翻转奇宇称相互作用项的符号，同时保持偶宇称项不变：

$$U_{02}H'_{\rm ck}U_{02}^{\dagger} = z_{11}L_zL_z - z_{12}L_zL_z^2 - z_{21}L_z^2L_z + z_{22}L_z^2L_z^2. \tag{15}$$

通过将 $H_{\rm ck}$ 下的演化时段与动态解耦脉冲 U_{02}交替进行，可使系统平均地在动态解耦相互作用哈密顿量下演化，

$$H_{\rm ck}^{\rm dd} = \frac{1}{2}\left(H'_{\rm ck} + U_{02}^{\dagger}H'_{\rm ck}U_{02}\right) = z_{11}L_zL_z + z_{22}L_z^2L_z^2. \tag{16}$$

由平均哈密顿量理论（附录A）可见，只要执行 U_{02} 的脉冲被假定为瞬时的，则在哈密顿量中不存在其他项时，这种平均是精确的，因为 $H'_{\rm ck}$ 与$U_{02}H'_{\rm ck}U_{02}^{\dagger}$ 对易。平均相互作用速率及其测量方案分别示于图3(c)和3(d)。

在此序列之后，唯一剩余的非期望相互作用项是 $z_{22}L_z^2L_z^2$，并且我们发现，通过适当选择斯塔克驱动频率和振幅，系数 $z_{22}\to\tilde{z}_{22}$ 可被驱动至接近零。这会改变驱动相互作用哈密顿量中的所有系数，$z_{ij}\to\tilde{z}_{ij}$，并将新的有效交叉克尔相互˜作用哈密顿量称为 $H'_{\rm ck}$，将有效驱动且动态解耦的相互作用称为 $\tilde{H}_{\rm ck}^{\rm dd}$。测得的 $\tilde{H}_{\rm ck}^{\rm dd}$ 的系数示于图3(e)。我们观察到，应用该方案后只有 L_zL_z 项具有可观的权重。为找到实现 $\tilde{z}_{22}\approx 0$ 所需的斯塔克驱动频率和振幅的校准流程分别描述于附录C和D。

虽然单量子三能级系统实验在尺度频率的选择上具有很大的灵活性，但在双 qutrit 实验中，$\tilde{z}_{11}$ 应用斯塔克驱动后，其值便固定下来，因此它决定了哈密顿量中其他项的尺度。也就是说，我们有 $\tilde{z}_{11}=-\beta\, t_s^{-1}$其中 $\beta/2\pi\equiv 1$。出现负号是因为$\tilde{z}_{11}>0$ 与模型哈密顿量中的 $-\beta L_zL_z$ 项符号不匹配。为此，我们仅对其中一个跨蒙，将式（5）中的跨蒙态映射 $|n=0\rangle$ 和 $|n=2\rangle$ 反转，这相当于用 π_{02}对其整个演化进行共轭，因为 $L_z\otimes\pi_{02}^{\dagger}L_z\pi_{02}=-L_z\otimes L_z$。这一操作完全通过后处理完成。

2. *Combining on-site and interaction terms*

我们将第 $H_k^{\rm DF}$节 t 中定义的单量子三能级系统驱动哈密顿量IIIA 与斯塔克驱动的相互作用哈密顿量结合，同时开启所有驱动，如图 4(a)中对每个脉冲的示意，得到

$$H_{\rm sys}(t) = H_A^{\rm DF}(t) + H_B^{\rm DF}(t) + \tilde{H}'_{\rm ck}(t), \tag{17}$$

对于 $t\in[0,T_E]$，其中 T_E 是单脉冲的固定演化周期。为减少脉冲过程中哈密顿量在不同时刻不与自身对易所导致的误差，我们必须确保 $H'_{\rm ck}(t)$ 的时间依赖性由乘积 $\Omega_{S,A}(t)\Omega_{S,B}(t)$ 决定，并与单qutrit驱动和失谐具有相同的包络。因此，我们将斯塔克驱动包络设为 $\Omega_{S,A}(t) = \Omega_{S,B}(t) = \Omega_S^0\sqrt{A_{T_E}(t)}$。这并不能完全消除误差，因为相互作用哈密顿量中仍存在无驱动分量，它与单量子三能级系统的 L_x 项不对易。不过，正如我们在附录 F 中所示，这种误差只会以三阶形式进入平均哈密顿量，并且大致随斜坡时长的平方增长，即 $(rT_E)^2$, 。

我们不能无限缩短斜坡时长，因为我们在实践中发现，斜坡还必须足够长，以维持相互作用哈密顿量的绝热变化。在本实验中，我们选择了80ns的斜坡时长。当误差被做得足够小时，一个脉冲过程中的有效平均哈密顿量可以很好地由Magnus展开的一阶项近似，

$$\bar{H}_{\rm sys} \approx \frac{1}{T_E}\int_0^{T_E} H_{\rm sys}(t)\,{\rm d}t = \bar{H}_A^{\rm DF} + \bar{H}_B^{\rm DF} + \bar{\tilde{H}}'_{\rm ck}. \tag{18}$$

然后在驱动演化时段与 π_{02} 脉冲之间交替——在本实验中，这些脉冲是通过同时驱动 $|0\rangle\leftrightarrow|1\rangle$ 和 $|1\rangle\leftrightarrow|2\rangle$ 跃迁来实现的，采用零失谐且幅度远大于在位模拟驱动 [79, 80]——我们便得到所需的有效Floquet演化：

$$U_{\rm eff}(N) = \left[\exp\left(-iU_{02}^{\dagger}\bar{H}_{\rm sys}U_{02}T_E\right)\exp\left(-i\bar{H}_{\rm sys}T_E\right)\right]^N \approx \exp\left(-i\left(\bar{H}_A^{\rm DF} + \bar{H}_B^{\rm DF} + \tilde{H}_{\rm ck}^{\rm dd}\right)NT_E\right), \tag{19}$$

其中 $\bar{H}_A^{\rm DF}$和 $\bar{H}_B^{\rm DF}$由式（11）和 $\tilde{H}_{\rm ck}^{\rm dd}\approx\tilde{z}_{11}L_zL_z$给出。因此这近似于 $H_{\rm AHM}$。

近似中的误差可以从Magnus展开的高阶项和Trotter化误差两方面来理解。我们使用平均哈密顿理论在附录F 中分析了误差项，发现它们随演化周期 T_E呈线性增长，这表明在 π_{02} 门之间采用更短的演化周期将产生更好的近似。然而，这与门必须近似瞬时的要求之间存在权衡。在实践中，我们发现当演化脉冲时长为 $T_E=800$ns且 π_{02}门时间为 $T_g=60$ns时，可以取得可接受的平衡。

3. *Device results*

在图 4(b) 中，我们绘制了模拟-数字协议实验实现所得到的动力学，以及

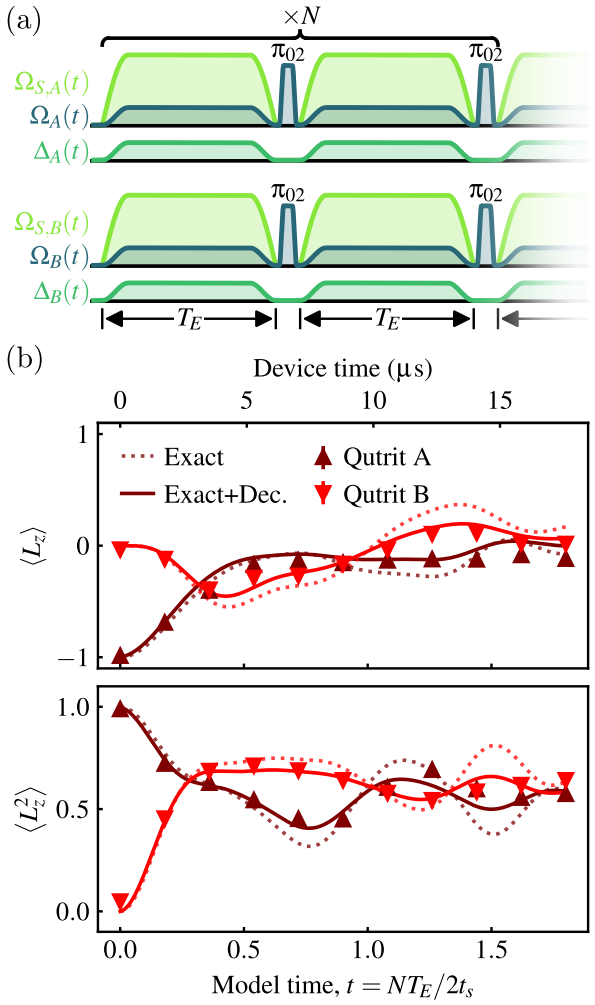


图 4：双量子三能级系统模拟-数字实验。(a) 双量子三能级协议。通过拼接固定时长的演化周期 T_E =800 ns，并在周期之间穿插对两个跨蒙施加的 60 ns π_{02}脉冲，实现模拟演化。图(b) 中的数据点是在经过 $2N$ 个演化周期后测得的。 π_{02} 脉冲通过同时共振驱动两个 $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$和 $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ 跃迁实现 [79, 80]。在每个演化周期内，除了第IIIA节所述的失谐驱动外，还对每个跨蒙施加斯塔克音调 $\Omega_S(t)$，从而改变纠缠哈密顿量~，使得经过两个步骤后的平均相互作用近似为 $H_{\rm ck}$。(b) 模拟-数字协议过程中，两个 qutrit 的 $\tilde{H}^{\rm dd}_{\rm ck} \approx \tilde{z}_{11} L_z \otimes L_z$期望值（上）和 L_z （下）。虚线表示精确理论演化，实线表示主方程模拟，假设相位退相干和弛豫时间是独立测得的。尺度频率固定为 L_z^2 kHz。初始跨蒙态为 $t_s^{-1} = \tilde{z}_{11}/2\pi \approx 110$。$|\psi_{\rm init}\rangle_{AB} = |21\rangle$

对式（ [81]2）中的哈密顿量进行数值积分演化，以及一种由林德布拉德算符描述的耗散模型，该模型考虑了弛豫和退相干时间（表I）实验中所使用的传输子。我们发现，包含退相干的模型能够很好地捕捉受驱动系统的动力学。为在具有时间无关主方程的退相干模型中考虑周期性布居交换的影响，我们假设采用有效平均林德布拉德方程，其中跳跃算符通过周期性施加 π_{02} 脉冲以与哈密顿量相同的方式进行变换。该有效 Lindblad 模型的详细描述见附录E。我们还在附录的图14中绘制了多个初始乘积态对应的传输子本征态布居，以及模型的预测结果。

IV. 基于门的模拟

本节将介绍用于模拟 AHM 的数字门方法，并展示实验中获得的动力学。我们在基于伯克利技术的 q utrit 处理器上执行数字模拟，该处理器的性质列于附录 II 的表G中。本节的讨论重点是将 AHM 产生的演化映射到我们处理器的原生门集上。我们还将强调误差缓解方案对于使用当前硬件进行量子多能级系统模拟以获得可靠结果的重要性，并讨论相关的计算成本。

1. *Mapping of the unitary operations to basis gates*

对于一个 N_s-qutrit 系统，模型哈密顿量下的时间演化算符可使用一阶Trotter近似进行近似，见方程（2）。

$$U(t) = \exp(-iH_{\rm AHM}t) \simeq \Big(\prod_{k=1}^{N_s} M_z^k(\kappa,\delta t) \prod_{k=1}^{N_s-1} M_{zz}^{k,k+1}(\beta,\delta t) \prod_{k=1}^{N_s} M_x^k(\chi,\delta t)\Big)^n, \tag{20}$$

其中，演化时间 t 被离散为均匀的步长 δt，使得 $t = n\,\delta t$。这里， $M_z^k = \exp(-i\theta(L_z^{(k)})^2)$ 和 $M_x^k = \exp(-i\phi L_x^{(k)})$ 表示作用于单个 qutrit k的在位操作，而 $M^{k,\ l}_{\ zz} = \exp(-i\gamma L_z^{(k)} L_z^{(l)})$ 表示作用于一对 qutrit k 和 l之间的纠缠操作。角度 ϕ、 θ 和 γ由哈密顿量参数 χ、 κ 和β以及 Trotter步长 δt确定。这些操作的矩阵表示见附录 G。近似误差的上界为$\mathcal{O}(t\,\delta t)$。采用高阶Trotter近似可以改善误差的缩放，但会增加纠缠门的数量。

要在我们的超导qutrit处理器上执行操作 M_z^k、 M_x^k 和 $M^{k,\ l}_{\ zz}$，需要进一步将酉算符分解为我们的原生门集。在

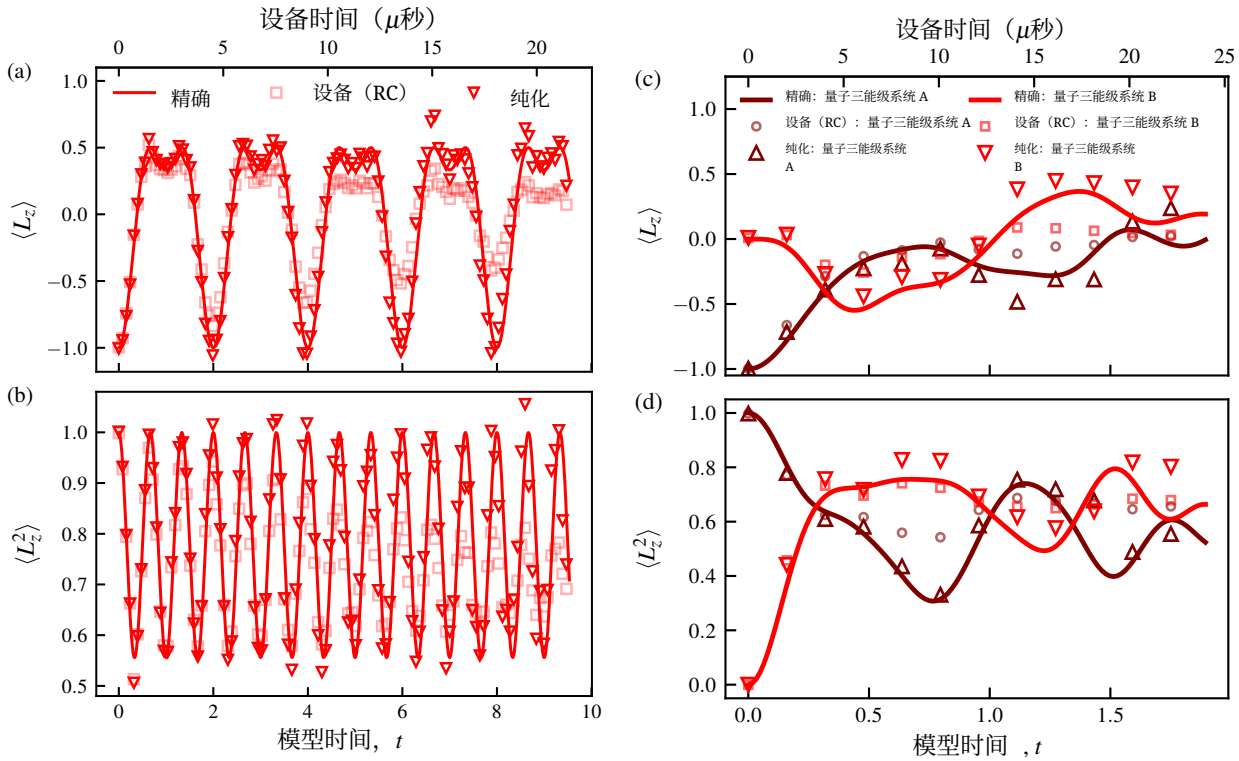


图 5：单 qutrit 实验中场算符的精确对角化（精确）、采用随机化编译的器件数据（设备（RC））以及经误差缓解的器件结果（纯化），对应于 (a,b) $\langle L_z\rangle$ 和 $\langle L_z^2\rangle$，以及 $\kappa/2\pi = \chi/2\pi = 1.0$ 双量子三能级系统实验中的 (c,d)。关于不同类型误差缓解方案影响的讨论，请参见附录 H。动力学从初始态 $|\psi_{\text{init}}\rangle_{AB} = |21\rangle$开始。

与用于模拟数字仿真的多音驱动不同，这里我们使用单音驱动，使其与每个 transmon qutrit 上的单个跃迁共振。这类驱动可以在由以下状态张成的子空间中实现类似量子比特的旋转$\{|0\rangle, |1\rangle\}$或 $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ [62]。固定的子空间旋转$\{R_x^{01}(\frac{\pi}{2})\ R_x^{12}(\frac{\pi}{2})\ R_y^{01}(\frac{\pi}{2})\ R_y^{12}(\frac{\pi}{2})\}$以及任意相位门 $R_z^{01}(\theta)$ 和 $R_z^{12}(\theta)$，这些操作通过调整后续微波驱动的相位来实现 [82]，共同构成了每个 qutrit 的原生门集，其中我们定义

$$R_\alpha^{ij}(\theta) = \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\sigma_\alpha^{ij}\right), \quad \alpha \in \{x, y, z\}. \tag{21}$$

这些 σ_α^{ij} 是绕轴 α 在 qutrit 希尔伯特空间的 $\{|i\rangle, |j\rangle\}$ 子空间内进行类量子比特旋转的生成元，可用 Gell-Mann 矩阵表示（见附录 G）。然后，结合受控 SUM 纠缠门 $U_{\text{CSUM}}|i,\ j\rangle = |i,\ j + i \pmod d\rangle$，我们得到一组足以实现通用 qutrit 计算的门集 [83, 84]。

为了使用基本门表示任意单个 qutrit 操作 $\exp(i\,h)$，我们首先将 h按盖尔-曼基 $\{\lambda_i\}$, $h = \sum_{k=1}^{8} c_k\lambda_k$展开，其中系数通过 $c_k = \frac{1}{2}\,\text{Tr}(h\lambda_k)$ 计算。然后，我们通过分别对求和中的每一项取指数来进行一阶Trotter近似——对每一项取指数。对于 M_z^k项，这会得到一个精确分解（相差一个全局相位），

$$M_z(\theta) = R_z^{01}\left(\frac{-2\theta}{3}\right) R_z^{12}\left(\frac{2\theta}{3}\right), \tag{22}$$

其中 $\theta = (\frac{\kappa}{2} + \beta)\delta t$ 适用于除边界 qutrit 外的所有 qutrit，而对于边界 qutrit，则改为 $\theta = \frac{\kappa+\beta}{2}\delta t$。对于此处研究的 $N_s = 2$ 情况，两个 qutrit 均视为边界 qutrit。

对于 M_x^k 项，我们得到一个近似结果，

$$M_x(\phi) \simeq R_x^{01}\left(\sqrt{2}\phi\right) R_x^{12}\left(\sqrt{2}\phi\right), \tag{23}$$

其中 $\phi = \frac{\chi}{\sqrt{2}}\delta t$。我们注意到，通过施加多音驱动 [59, 80]，，在数字门集中加入一个经过校准的自旋-1 旋转 $\pi/2$，即可消除生成 M_x 操作时的 Trotter 近似，但这留待未来工作。

按照类似的分析，通过将双三能级厄米算符表示为盖尔曼矩阵的张量积$h = \sum_{k,l} c_{kl}\lambda_k \otimes \lambda_l$，可以找到纠缠操作 M_{zz} 的分解。由此得到四个非零系数。不过，通过观察可以找到一种简单得多的分解：我们将纠缠操作 M_{zz} 分解为——

三个受控-SUM 门，中间交错插入局部相位门，

$$M_{zz}(\gamma) = U_{\mathrm{CSUM}}\, D(\gamma)\, U_{\mathrm{CSUM}}\, G(\gamma)\, U_{\mathrm{CSUM}} \tag{24}$$

其中 $\gamma = \delta t\, \beta$。 D 和 G 是由基本相位门构造的对角矩阵，

$$D(\gamma) = R_z^{01}\Big(\frac{4\gamma}{3}\Big) R_z^{12}\Big(\frac{2\gamma}{3}\Big), \tag{25}$$

$$G(\gamma) = R_z^{01}\Big(\frac{2\gamma}{3}\Big) R_z^{12}\Big(\frac{4\gamma}{3}\Big). \tag{26}$$

除了上述量子电路分解分析外，我们还测试了能否利用 TrueQ 软件提供的数值综合方法实现更高效的编译 [85]。我们发现，数值综合得到的纠缠操作成本与解析分解的成本相当。为完整起见，并便于与未来实验进行公平比较，附录G列出了 AQT测试平台的完整原生门集，以及量子比特频率、非谐性、弛豫时间和退相干时间等关键器件参数。

我们发现，对于最高效的分解，AHM 的单个特罗特步需要三个原生纠缠门（式（24）），与附录I所示的全连接条件下基于量子比特的实现所需的十二个纠缠操作相比，减少了四倍。此外，受限的量子比特连接性（例如 IBM 的重六边形拓扑）会使成本大约增加十倍（附录I）。因此，如果超导传输子三能级量子处理器的原生纠缠操作门时间、弛豫时间和退相干时间能够达到与最先进的量子比特处理器相当的水平，那么对于某些具有 SU(3)群结构的规范理论模型而言，基于三能级量子比特的实现可能更具优势。这一点尤为重要，因为 SU(3) 会出现在量子色动力学的不同极限中 [86]。因此，利用数字式三能级量子比特处理器，可能能够更高效地研究量子色动力学的相结构，以及不同近似程度下的量子色动力学变体 [31, 32, 40]。

2. *Device results*

现在，我们展示单格点和双格点晶格阿贝尔希格斯模型的基于门的模拟硬件结果。在单格点实验中，快速且高保真的单三能级量子比特门使我们能够观测到比双格点实验更长时间的动力学。图 5展示了经过误差缓解的硬件结果，其中$\langle L_z^{(k)}\rangle$ 和 $\langle (L_z^{(k)})^2\rangle$ 期望值是根据测得的跨蒙本征态布居计算得出的，并与精确对角化结果以及
采用随机编译的硬件结果。我们发现，随着应用 qutrit 随机编译 [63, 87–89] 来缓解相干误差，并使用通过循环基准测试测得的噪声对期望值进行重新缩放，量子电路操作的保真度得到了提升 [90, 91]。

我们使用特罗特化电路的 30 个不同随机化版本，其中每个随机化电 $N_{\mathrm{shots}} = 1024$ 路使用测量次数。随机化是指在纠缠操作的每个周期之前和之后，为每个 qutrit 应用局部随机单 qutrit 泡利算符。这些随机操作选自广义泡利算符集合，该集合构成单个 qutrit 的正交基。我们还采用循环基准测试来学习与量子电路中原生门相关的不同泡利通道和制备与测量通道的错误率，从而通过使用数值校正因子对估计值进行后处理来校正可观测量。此外，还通过混淆矩阵求逆执行读出误差缓解。随机化的目的是将相干噪声转换为随机噪声通道，从而改善错误累积的缩放关系——使其从关于电路深度的二次阶变为线性阶。这也使后续的缓解步骤更加有效，因为我们使用态纯化来缓解通过循环基准测试实验获知的器件噪声中的非相干部分。关于缓解方案有效性的定量分析，建议读者参阅附录 H。

V. 讨论与展望

本文介绍的模拟-数字方法和全数字方法在模拟阿贝尔希格斯模型时，各自具有潜在优势，也面临尚待解决的挑战。在数字多能级量子比特处理器上进行模拟的主要优势在于其具有通用性，能够

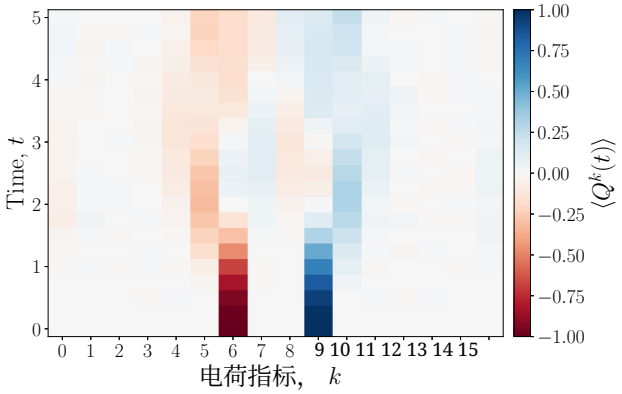


图 6：使用无噪声模拟器展示数字模拟方案的可扩展性 [92]。此处展示了 *Cirq* 对式（20）中的特罗特化幺正算符进行模拟的结果，模拟对象为具有 $\kappa/2\pi = \beta/2\pi = \chi/2\pi = 1.0$的 15 位点晶格模型。我们制备了含有两个畴壁的初始态 $|\psi_{\mathrm{init}}\rangle = |111111000111111\rangle$，并将相邻 qutrit 之间的 $\langle L_{(z)}\rangle$ 之差作为局域电荷的时间演化：$\langle Q^k(t)\rangle = \langle L^{(k-1)}_{(z)}\rangle - \langle L_z^{(k)}\rangle$。对于开放边界条件，计算 $\langle Q^k\rangle$时假定额外的边缘格点固定为$\langle L_z^{(-1)}\rangle = \langle L_z^{(15)}\rangle = 0$ 。

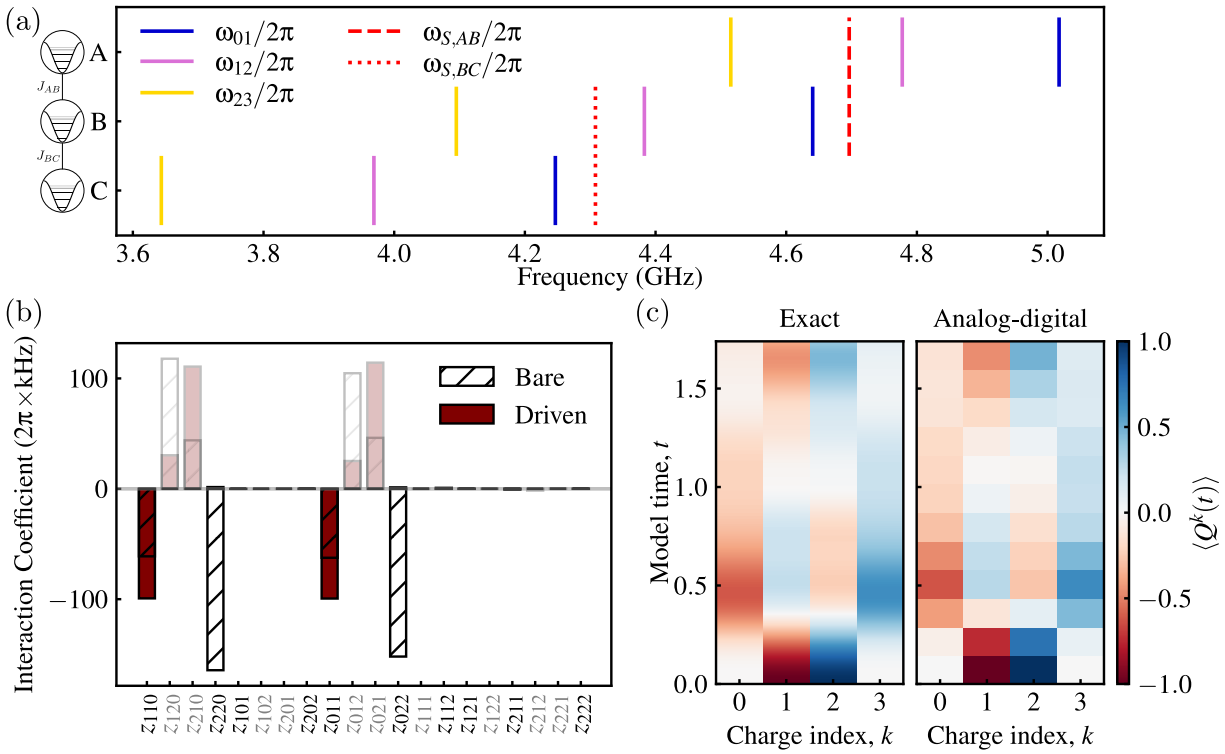


图 7：通过数值模拟验证扩展模拟-数字协议的可行性。(a) 三个模拟跨蒙的跃迁频率，以及用于工程化所需相互作用的斯塔克驱动频率。请注意，此处跨蒙特间失谐大于实验中的失谐。电容耦合J_{kl}设为 $J_{AB} = 2.42$兆赫兹， $J_{BC} = 2.40$ 兆赫兹。(b) 跨蒙特链的相互作用速率。在裸情形（空白阴影）中，系数 z_{ijk} 由三跨蒙特哈密顿量的数值对角化计算得出，其中上标表示算符的幂。在驱动情形（栗色）中，在同时对两对跨蒙施加斯塔克驱动的情况下，通过数值积分薛定谔方程并拟合累积相位来计算这些系数。与 $\sum_{ijk\in\{0,1,2\}} z_{ijk} L_z^i \otimes L_z^j \otimes L_z^k$ 共轭变换下的奇宇称项以灰色显示，表示它们将被动态去耦协议抵消，仅留下 U_{02} 千赫兹和 $\tilde{z}_{110}/2\pi = -99.3$千赫兹。(c) 在模型参数 $\tilde{z}_{011}/2\pi = -99.4$ 和尺度频率 $\kappa/2\pi = \chi/2\pi = \beta/2\pi = 1$ ($t_s^{-1} = \frac{1}{2\pi}\tilde{z}_{011} + \tilde{z}_{110}$下，对三个无噪声跨蒙上的 AHM 模拟-数字模拟进行数值模拟，并与 AHM 的精确演化进行比较。局域电荷 /2按图 $\langle Q^k\rangle$ 6所示，计算相邻量子三能级系统之间 的差值。初始微波量子比特态为 $|\psi_{\text{init}}\rangle = |101\rangle$。

灵活地改变模型参数并探索相关模型，前提是能够找到量子电路分解。与此同时，处理器的原生门集未必总能高效地分解目标操作，正如本文中对 M_x 操作采用特罗特近似，以及每个特罗特步都需要执行三次受控-SUM 操作所体现的那样。相比之下，模拟方法和模拟-数字方法虽然能模拟的模型种类较为有限，却表明可以更直接地实现本文研究的目标哈密顿量，而且该哈密顿量与器件哈密顿量足够接近。本节余下部分将指出这两种方案的一些值得关注之处，并讨论未来研究的潜在方向。

这些方案的一个区别在于误差缓解方法能否立即使用。我们已证明，应用 Weyl 随机化和纯化可显著改善数字实验中的数据与精确对角化结果的一致性。然而，在模拟-数字实验中，依赖于 Clifford 门性质的相同技术目前尚不可用。尽管已有一些用于模拟仿真基准测试 [93–95] 和误差缓解的方法 [96–98], 但它们通常针对特定模型或方法量身定制，目前还不适用于此处进行的模拟。

考虑将模拟扩展到更长的传输子链时，现有器件即可轻松执行该数字协议。图6 展示了将数字仿真扩展到大规模链的数值模拟，结果表明，未来在近期三能级量子处理器上使用该方案进行实验，可用于研究晶格上电荷的动力学，并探究弦断裂和禁闭等现象。扩展到更高的空间维度

将带来额外的工程挑战和门代价，因为其中存在涉及四体相互作用的磁场项。

另一方面，扩展模拟-数字协议可能需要定制器件，因为要求所有耦合的传输子对具有相同的有效 $L_z \otimes L_z$ 相互作用速率。我们在图7中通过数值模拟表明，对于由三个传输子组成的理想化链，每个耦合对使用一个斯塔克驱动，实现（1+1）维AHM是可能的，这要求三个传输子的非谐性近似相同，且各对之间的失谐也近似相等。虽然这表明借助适当设计的器件可以扩展该方案，但在允许制造缺陷的情况下，频率间隔要求对于固定频率传输子的长链而言可能过于严格。为弥补这一点，一种可能的途径是使用额外的斯塔克驱动来进一步修改相互作用，我们将其留待未来工作。

尽管模拟-数字混合方法确实对器件工程施加了显著约束，但这种将斯塔克修正的相互作用项、失谐驱动与动力学解耦序列同时结合的方式，可被视为基于qudit的模拟仿真工具箱中的一种新工具，并可能使构建更多样化的qudit哈密顿量的混合模拟-数字模拟成为可能。特别是，结合用于稳健设计量子比特 [58] 与qudit哈密顿量 [54, 59], 的线性规划方法，我们可以扩展到对具有非对角相互作用项的模型的模拟；在更长的时间尺度上，或许有可能利用所提出的、用于模拟多体相互作用的模拟-数字方法，设计出更高空间维度上AHM所需的磁场项 [99]。

最后，与其在空间上扩展模拟，我们也可以考虑增加每格点态数。研究人员已在与本研究所用类似的传输子上展示了更高能级的量子操作 [100, 101], ，这为采用更高的场算符截断阶数来进行 AHM 模拟留下了可能性 $l \geq 2$ ，无论使用数字方法还是模拟-数字方法。

VI. 结论

总之，我们在跨蒙器件上实现了基于 qutrit 的阿贝尔希格斯模型数字量子模拟和模拟-数字混合量子模拟，并证明它们为模拟格点规范理论和自旋-1量子系统提供了一条可扩展的路径。我们的结果表明，两种方案都能在当今传输子处理器的相干极限内提取与禁闭相关的物理可观测量。尽管控制更多能级和更复杂的相互作用哈密顿量会带来额外挑战，但本研究开展的基于 qutrit 的实验实现了比基于量子比特的模拟更具硬件效率的自旋-1模型编码，所需的纠缠操作更少。

尽管本研究的性质不允许对这两种方法进行定量比较，但本研究开发的工具可用于未来对不同晶格场论模型的两种方案进行定量资源分析。本文开发的模拟-数字方案只需进行少量修改即可扩展，而采用误差缓解方法的数字方案则无需任何进一步修改即可扩展。我们发现，实际扩展模拟-数字方案会引入更多限制，但有望减少模拟所需的脉冲总数。一个令人振奋的后续研究方向是，在更多空间维度中考察弦断裂和禁闭现象，并借助更高维量子比特逼近基础理论的更高阶近似。

致谢

我们感谢 Gabriel T. Landi 就 Lindblad 主方程展开的有益讨论。MA 和 AFK 获得了美国能源部先进科学计算研究项目的资助，合同编号为 DE-SC0025430。YM 和 ZO 获得了美国能源部部分资助，资助编号为 DE-SC0019139。RWP、AIM 和 MSB 获得了美国能源部资助，资助编号为 DE-SC0024714。NG 获得了美国能源部科学办公室先进科学计算研究办公室量子测试平台计划的资助，合同编号为 DE-AC02-05CH11231。模拟—数字混合实验中使用的器件由 MIT 林肯实验室的林肯实验室超导量子比特（SQUILL）代工厂制造并提供，资金来自物理科学实验室（LPS）量子比特协作项目。模拟—数字混合实验中使用的行波参量放大器（TWPA）由美国情报高级研究计划局和林肯实验室提供。

附录 A：平均哈密顿理论

关于平均哈密顿理论（AHT）的完整综述，参见例如 [70, 102]。为方便起见，我们在此简要概述其核心思想，并介绍与开发我们的模拟方案相关的结果。

酉算符 $U(t,\ t_0)$ 可以写成某个厄米算符 $\Theta_{t,\ t_0}$ 的矩阵指数：$U(t,\ t_0) = \exp\left(i\Theta_{t,\ t_0}\right)$ [103, 104]。这意味着，对于任意一个在固定区间内生成 $H(t)$ 的含时哈密顿量——

在固定区间 $[t_0, t_f]$ 内生成 $U(t_f,\ t_0)$，方法是

$$U(t_f, t_0) = \hat{\mathcal{T}} \exp\left(-i \int_{t_0}^{t_f} H(t')\, \mathrm{d}t'\right), \tag{A1}$$

其中 $\hat{\ }\mathcal{T}\exp(\cdot)$ 为时间序指数，我们可以¯定义某个不含时哈密顿量 H_{t_f,t_0} 使得

$$U(t_f, t_0) = \exp\left(-iT\bar{H}_{t_f,t_0}\right), \tag{A2}$$

其中 $T = t_f - t_0$。假设收敛条件¯成立，则哈密顿量 $H_{t_f,\ t_0}$ 可用 Magnus 展开 [103, 104]表示

$$\bar{H} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{H}^{(n)}, \tag{A3}$$

其中前三项为

$$\bar{H}^{(1)} = \frac{1}{T} \int_{t_1=t_0}^{t_f} H(t_1)\, \mathrm{d}t_1, \tag{A4}$$

$$\bar{H}^{(2)} = \frac{1}{2iT} \int_{t_1=t_0}^{t_f} \int_{t_2=t_0}^{t_1} [H(t_1), H(t_2)]\, \mathrm{d}t_2\, \mathrm{d}t_1, \tag{A5}$$

$$\begin{aligned} \bar{H}^{(3)} =& \frac{-1}{6T} \int_{t_1=t_0}^{t_f} \int_{t_2=t_0}^{t_1} \int_{t_3=t_0}^{t_2} \Big(\big[H(t_1), [H(t_2), H(t_3)]\big] \\ &+ \big[\,[H(t_1), H(t_2)]\,, H(t_3)\big] \Big)\, \mathrm{d}t_3\, \mathrm{d}t_2\, \mathrm{d}t_1. \end{aligned} \tag{A6}$$

将该级数截断至有限阶，可得一个有效平均哈密顿量 $\bar{H}_{\mathrm{eff}} = \sum_{n=1}^{m} \bar{H}^{(n)} \approx \bar{H}$.

平均哈密顿量的每一相继阶都涉及 $H(t)$在不同时刻与自身之间日益嵌套的对易子。因此，若哈密顿量在所有时刻都与自身对易，

$$[H(t_1), H(t_2)] = 0\ \forall t_1, t_2 \in [t_0, t_f],$$

则 $\bar{H}^{(n)} = 0$ 对于 $n \geq 2$，且该展开在一阶即为精确。

该展开的另一个有助于制定模拟方案的性质是：对于满足 $H(t) = H(t_f - (t - t_0))$ 且对所有 $t \in [t_0, t_f]$ 都成立的对称哈密顿量，展开中的所有偶数阶项都将精确为零，即 $\bar{H} = \bar{H}^{(1)} + \bar{H}^{(3)} + \cdots$[70]。

最后，对于一系列不含时哈密顿量 $\{H_1, H_2, \ldots, H_N\}$，或者如模拟—数字协议的情形，哈密顿量的演化由脉冲分段驱动，而每个分段又可通过平均哈密顿理论近似为不含时哈密顿量，此时上述积分可以替换为求和：

$$\bar{H}^{(1)}_{\mathrm{disc}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} H_i, \tag{A7}$$

$$\bar{H}^{(2)}_{\mathrm{disc}} = \frac{1}{2iN} \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} [H_i, H_j] T, \tag{A8}$$

为简洁起见，我们省略了三阶项，并假设序列中的所有哈密顿量均作用相同的时长 T。后缀“disc”仅用于将这个离散平均哈密顿量与上文的积分定义区分开来。

附录 B：模拟失谐驱动旋转框架变换与相位渐变推导

在模拟方案中，在考虑驱动频率随时间变化这一事实后，受驱动跨蒙的哈密顿量在驱动框架中近似于阿贝尔-希格斯哈密顿量。本附录将进一步阐述向驱动框架的变换，并推导出产生具有特定包络的瞬时失谐所需的相位渐变。我们从截断为三个能级的受驱动跨蒙的实验室参考系哈密顿量开始：

$$\begin{aligned} H_k^{\mathrm{LF}}(t) &= H_k^0 + H_k^{\mathrm{drive}}(t) \\ &= \omega_{01}\, |1\rangle\langle 1| + (\omega_{01} + \omega_{12})\, |2\rangle\langle 2| \\ &+ V(t)\, (i\, |1\rangle\langle 0| + i\lambda\, |2\rangle\langle 1| + \mathrm{h.c.})\,. \end{aligned} \tag{B1}$$

对于与时间无关的失谐，$V(t)$ 可如正文所述定义为 $V(t) = \sum_{i=1}^{2} \Omega_i(t) \cos(\omega_i^{\mathrm{d}} t + \phi_i) = \sum_{i=1}^{2} \Omega_i(t) \cos\left((\omega_{i-1,\ i} - \Delta_i)\ t + \phi_i\right)$。这里我们采用更一般的表达式，

$$V(t) = \sum_{i=1}^{2} \Omega_i(t) \cos(\omega_{i-1,i} t + \delta\phi_i(t) + \phi_i), \tag{B2}$$

其中，失谐（现在可能随时间变化）已被吸收到一个随时间变化的相位中。旋转参考系变换的定义方式与时间无关的情形类似：

$$H^{\mathrm{DF}} = U_{\mathrm{D}}^{\dagger} H^{\mathrm{LF}} U_{\mathrm{D}} - i U_{\mathrm{D}}^{\dagger} \partial_t U_{\mathrm{D}}, \tag{B3}$$

其中现在

$$U_{\mathrm{D}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i(\omega_{01} t + \delta\phi_1(t))} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i((\omega_{01}+\omega_{12})t + \delta\phi_1(t) + \delta\phi_2(t)} \end{pmatrix}. \tag{B4}$$

由此得到以下旋转后的哈密顿量，不采用旋波近似：

$$
\begin{aligned}
H_k^{\mathrm{DF}}(t) = {} & (\omega_{01} - \delta\dot{\phi}_1)\,|1\rangle\langle 1| + (\omega_{01} + \omega_{12} - \delta\dot{\phi}_1 - \delta\dot{\phi}_2)\,|2\rangle\langle 2| \\
& + \frac{i}{2}\Big(\Omega_1 e^{-i\phi_1} + \Omega_1 e^{2i(\omega_{01}t + \delta\phi_1(t)) + i\phi_1} \\
& \qquad + \Omega_2 e^{i(\omega_{01}t + \delta\phi_1(t) + \omega_{12}t + \delta\phi_2(t)) + i\phi_2} \\
& \qquad + \Omega_2 e^{i(\omega_{01}t + \delta\phi_1(t) - \omega_{12}t - \delta\phi_2(t)) - i\phi_2}\Big)\,|1\rangle\langle 0| \\
& + \frac{i\lambda}{2}\Big(\Omega_2 e^{-i\phi_2} + \Omega_2 e^{2i(\omega_{12}t + \delta\phi_2(t)) + i\phi_2} \\
& \qquad + \Omega_1 e^{i(\omega_{12}t + \delta\phi_2(t) + \omega_{01}t + \delta\phi_1(t)) + i\phi_1} \\
& \qquad + \Omega_1 e^{i(\omega_{12}t + \delta\phi_2(t) - \omega_{01}t - \delta\phi_1(t)) - i\phi_1}\Big)\,|2\rangle\langle 1| + \mathrm{h.c.}
\end{aligned}
\tag{B4}
$$

在与标准旋波近似相同的条件下，涉及频率ω_{01} 和 ω_{12} 之和的振荡项可以安全地舍去，假设 $\Omega \ll \omega_{01} + \omega_{12} \approx 2\omega_{01}$。然而，涉及两个频率之差的项对旋波近似提出了更严格的条件：$\Omega \ll |\omega_{01} - \omega_{12}|$（因为失谐必须远小于非谐性的绝对值，我们已经要求由 $\delta\phi(t)$ 项引起的振荡很小）。在本文所述的实验中，单量子三能级系统实验的 $\Omega/|\omega_{01} - \omega_{12}| \sim 4 \times 10^{-3}$，双量子三能级系统实验的 $\Omega/|\omega_{01} - \omega_{12}| \sim 4 \times 10^{-4}$，两者均满足这一更严格的旋波近似要求。满足旋波近似条件时，可以舍去所有振荡项，并将旋转坐标系哈密顿量近似为

$$
\begin{aligned}
H_k^{\mathrm{DF}}(t) \approx {} & (\omega_{01} - \delta\dot{\phi}_1)\,|1\rangle\langle 1| \\
& + (\omega_{01} + \omega_{12} - \delta\dot{\phi}_1 - \delta\dot{\phi}_2)\,|2\rangle\langle 2| \\
& - \frac{i}{2}\Omega_1\,|0\rangle\langle 1| - \frac{i\lambda}{2}\Omega_2\,|1\rangle\langle 2| + \mathrm{h.c.}.
\end{aligned}
\tag{B5}
$$

相位累积函数的导数可以看作与时间无关情形中的失谐发挥相同的作用，见公式（8），因此我们可以定义 $\Delta_i(t) = \delta\phi_i(t)$ 以得到：

$$
\begin{aligned}
H_k^{\mathrm{DF}}(t) \approx {} & -\Delta_1(t)\,|1\rangle\langle 1| - (\Delta_1(t) + \Delta_2(t))\,|2\rangle\langle 2| \\
& + \frac{i}{2}\Omega_1\,|0\rangle\langle 1| + \frac{i\lambda}{2}\Omega_2\,|1\rangle\langle 2| + \mathrm{h.c.}.
\end{aligned}
\tag{B6}
$$

这意味着，给定所需的 $\Delta(t)$，我们必须按照 $\delta\phi(t) = \int_0^t \Delta(t')\,\mathrm{d}t'$[105]对驱动的相位进行渐变。此外，对于一系列脉冲，为了使失谐参考系中的相位参考保持一致，我们必须确保相位累积 $\delta\phi(t)$ 从一个脉冲结束到下一个脉冲开始期间保持不变。

模拟脉冲和 π_{02} 门所用的包络函数是一个带余弦形上升沿和下降沿的平顶脉冲，其定义如下：

$$
A_T(t) = \begin{cases} a\sin^2\left(\frac{\pi t}{2rT}\right), & 0 \le t < rT \\ a, & rT \le t < (1-r)T \\ a\sin^2\left(\frac{\pi(T-t)}{2rT}\right), & (1-r)T \le t \le T, \end{cases}
\tag{B7}
$$

其中，r 是每个渐变所占脉冲的比例，a 是归一化因子 $1/(1-r)$，由此总面积为 $\int_0^T A_T(t)\,\mathrm{d}t = T$。对于 π_{02} 门，我们还加入了二阶DRAG校正 [106]，以减小非共振激发的影响。

附录 C：色散相互作用速率计算

两个电容耦合的跨蒙 qutrit 之间的有效色散相互作用，可通过时间无关的裸系统哈密顿量近似推导得到：

$$
H_{\mathrm{sys}} = H_A^0 + H_B^0 + H_{AB},
\tag{C1}
$$

其中，H_A^0 和 H_B^0 分别是跨蒙 A 和 B的裸哈密顿量，而 $H_{AB} = J\hat{n}_A\hat{n}_B \approx J(\hat{a}_A\hat{a}_B^\dagger + \hat{a}_A^\dagger\hat{a}_B)$表示裸电容耦合；此处已采用旋转波近似，其中$\hat{a}_k^\dagger = \sum_{i=1}^{d} \mu_{k,\,i}\,|i\rangle\langle i-1|$ 是跨蒙 $k \in \{A, B\}$能量本征态的升算符，其无量纲电荷矩阵元为$\mu_{k,\,i} \approx \sqrt{i}$[47]。实际中，我们不采用 $\sqrt{i}$近似，而是使用通过对 transmon 哈密顿量 [107, 108]进行数值对角化计算得到的数值。

我们可以使用二阶定态微扰理论 [109] 对双跨蒙哈密顿量 H_{sys} 进行近似对角化，并求得无任何驱动时的有效能级位移。注意，为了准确估算前三个能级的位移，两个跨蒙的哈密顿量都必须至少取到本征态 $|3\rangle$（四能级近似）。对角化后的——

哈密顿量通常可表示为

$$H_{\rm sys} \approx H_A^0 + H_B^0 + \sum_{i,j=0}^{d-1} \varepsilon_{i,j} \left|ij\right\rangle\!\left\langle ij\right| . \tag{C2}$$

将对应于重新定义两个跨蒙跃迁频率的频移吸收到 $H_A^0 \to H_A^{0'}$ 和 $H_B^0 \to H_B^{0'}$ 中后，我们得到

$$H_{\rm sys} \approx H_A^{0'} + H_B^{0'} + H_{\rm ck}, \tag{C3}$$

其中交叉克尔相互作用哈密顿量为，

$$\begin{aligned} H_{\rm ck} = \alpha_{11}^0 \left|11\right\rangle\!\left\langle 11\right| + \alpha_{12}^0 \left|12\right\rangle\!\left\langle 12\right| \\ + \alpha_{21}^0 \left|21\right\rangle\!\left\langle 21\right| + \alpha_{22}^0 \left|22\right\rangle\!\left\langle 22\right| , \end{aligned} \tag{C4}$$

with rates given by the perturbation theory:

$$\alpha_{11}^0 = J^2 \left(\frac{\mu_{A,1}^2 \mu_{B,2}^2}{\omega_1^A - \omega_2^B} - \frac{\mu_{A,2}^2 \mu_{B,1}^2}{\omega_2^A - \omega_1^B} \right) \tag{C5}$$

$$\alpha_{12}^0 = -J^2 \left(\frac{\mu_{A,2}^2 \mu_{B,2}^2}{\omega_2^A - \omega_2^B} + \mu_{A,1}^2 \left(\frac{\mu_{B,1}^2}{\omega_1^A - \omega_1^B} - \frac{\mu_{B,2}^2}{\omega_1^A - \omega_2^B} - \frac{\mu_{B,3}^2}{\omega_1^A - \omega_3^B} \right) \right) \tag{C6}$$

$$\alpha_{21}^0 = J^2 \left(\frac{\mu_{A,2}^2 \mu_{B,2}^2}{\omega_2^A - \omega_2^B} + \mu_{B,1}^2 \left(\frac{\mu_{A,1}^2}{\omega_1^A - \omega_1^B} - \frac{\mu_{A,2}^2}{\omega_2^A - \omega_1^B} - \frac{\mu_{A,3}^2}{\omega_3^A - \omega_1^B} \right) \right) \tag{C7}$$

$$\alpha_{22}^0 = -J^2 \left(\mu_{A,2}^2 \left(\frac{\mu_{B,1}^2}{\omega_2^A - \omega_1^B} - \frac{\mu_{B,3}^2}{\omega_2^A - \omega_3^B} \right) - \mu_{B,2}^2 \left(\frac{\mu_{A,1}^2}{\omega_1^A - \omega_2^B} - \frac{\mu_{A,3}^2}{\omega_3^A - \omega_2^B} \right) \right) . \tag{C8}$$

为使视觉表达更简洁，本节将能级 $i-1$ 和i 之间的跃迁频率表示为 $\omega_i \equiv \omega_{i-1,\ i}$。

为了调整相互作用速率，我们对两个量子三能级系统施加频率为 ω_S 的斯塔克驱动。这种方法已用于在超导量子比特 [110, 111] 和量子三态器件中实现受控-Z门 [78]。为方便起见，我们在此回顾该方法的微扰分析。

我们从实验室参考系下的双传输子哈密顿量出发，其中两个传输子都施加了斯塔克驱动，

$$\tilde{H}_{\rm sys}^{\rm LF} = H_A^0 + H_A^{\rm Stark}(t) + H_B^0 + H_B^{\rm Stark}(t) + H_{AB}, \tag{C9}$$

其中，每个传输子的斯塔克驱动哈密顿量在一开始就采用旋转波近似，其表达式为

$$\begin{aligned} H_k^{\rm Stark}(t) &= i\Omega_{S,k}^0 \cos\left(\omega_S t + \phi_k\right)(\hat{a}_k^\dagger - \hat{a}_k) \\ &\approx i\frac{\Omega_{S,k}^0}{2} \left(e^{-i(\omega_S t + \phi_k)} \hat{a}_k^\dagger - e^{i(\omega_S t + \phi_k)} \hat{a}_k \right). \end{aligned} \tag{C10}$$

我们可以通过将两个传输子都旋转到驱动的参考系中，得到不含时的旋波近似哈密顿量，其中 $U_{\rm S} = U_{{\rm S},\ A} \otimes U_{{\rm S},\ B}$ 和 $U_{{\rm S},\ k} = \sum_{n=0}^{d} e^{in\omega_S t} \left|n\right\rangle\!\left\langle n\right|$，从而得到斯塔克驱动参考系中的不含时哈密顿量，

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\rm sys}^{\rm SF} \approx & \left(\sum_{i=1}^{d} \epsilon_i^A \left|i\right\rangle\!\left\langle i\right| \right) \otimes I + I \otimes \left(\sum_{j=1}^{d} \epsilon_j^B \left|j\right\rangle\!\left\langle j\right| \right) \\ & + \left(i \sum_{i=1}^{d} \mu_{A,i} \frac{\Omega_{S,A}^0 e^{-i\phi_A}}{2} \left|i\right\rangle\!\left\langle i-1\right| \right) \otimes I \\ & + I \otimes \left(i \sum_{j=1}^{d} \mu_{B,j} \frac{\Omega_{S,B}^0 e^{-i\phi_B}}{2} \left|j\right\rangle\!\left\langle j-1\right| \right) \\ & + J \sum_{i,j=1}^{d} \mu_{A,i} \mu_{B,j} \left|i\right\rangle\!\left\langle i-1\right| \otimes \left|j-1\right\rangle\!\left\langle j\right| + \text{h.c.}, \end{aligned} \tag{C11}$$

其中我们定义 $\epsilon_j^k \equiv \sum_{j'=1}^{j} (\omega_{j'}^k - \omega_S) = \sum_{j'=1}^{j} \Delta_{j'}^k$ 和 $\Delta_i^k \equiv \omega_{i-1,\ i}^k - \omega_S$。也就是说，旋转参考系中的有效能量项是从斯塔克驱动频率起，每个相邻跃迁失谐量的累积和。

现在可以对该哈密顿量进行微扰对角化，直至三阶，然后通过逆变换 $U^\dagger$ s 旋转回实验室参考系，从而得到一个有效的对角哈密顿量，其中两个传输子的相互作用速率均已改变，跃迁频率也均发生了斯塔克频移，

$$\tilde{H}_{\rm sys}^{\rm LF} \approx \tilde{H}_A^{0'} + \tilde{H}_B^{0'} + \tilde{H}_{\rm ck}. \tag{C12}$$

修正相互作用哈密顿量中的系数

$\tilde{H}_{\rm ck}$ are

$$\tilde{\alpha}_{11} = J\Omega^0_{S,A}\Omega^0_{S,B}\cos(\delta\phi)\left\{\frac{\mu^2_{A,1}}{\Delta^A_1}\left(\frac{2\mu^2_{B,1}}{\Delta^B_1}-\frac{\mu^2_{B,2}}{\Delta^B_2}\right)-\frac{\mu^2_{A,2}}{2\Delta^A_2}\left(\frac{2\mu^2_{B,1}}{\Delta^B_1}-\frac{\mu^2_{B,2}}{\Delta^B_2}\right)\right\}+\alpha^0_{11} \tag{C13}$$

$$\tilde{\alpha}_{12} = J\Omega^0_{S,A}\Omega^0_{S,B}\cos(\delta\phi)\left\{\frac{\mu^2_{A,1}}{\Delta^A_1}\left(\frac{\mu^2_{B,1}}{\Delta^B_1}+\frac{\mu^2_{B,2}}{\Delta^B_2}-\frac{\mu^2_{B,3}}{\Delta^B_3}\right)-\frac{\mu^2_{A,2}}{2\Delta^A_2}\left(\frac{\mu^2_{B,1}}{\Delta^B_1}+\frac{\mu^2_{B,2}}{\Delta^B_2}-\frac{\mu^2_{B,3}}{\Delta^B_3}\right)\right\}+\alpha^0_{12} \tag{C14}$$

$$\tilde{\alpha}_{21} = J\Omega^0_{S,A}\Omega^0_{S,B}\cos(\delta\phi)\left\{\frac{\mu^2_{B,1}}{\Delta^B_1}\left(\frac{\mu^2_{A,1}}{\Delta^A_1}+\frac{\mu^2_{A,2}}{\Delta^A_2}-\frac{\mu^2_{A,3}}{\Delta^A_3}\right)-\frac{\mu^2_{B,2}}{2\Delta^B_2}\left(\frac{\mu^2_{A,1}}{\Delta^A_1}+\frac{\mu^2_{A,2}}{\Delta^A_2}-\frac{\mu^2_{A,3}}{\Delta^A_3}\right)\right\}+\alpha^0_{21} \tag{C15}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{22} = J\Omega^0_{S,A}\Omega^0_{S,B}\cos(\delta\phi)\Bigg\{&\frac{\mu^2_{A,1}}{2\Delta^A_1}\left(\frac{\mu^2_{B,1}}{\Delta^B_1}+\frac{\mu^2_{B,2}}{\Delta^B_2}-\frac{\mu^2_{B,3}}{\Delta^B_3}\right)+\frac{\mu^2_{A,2}}{2\Delta^A_2}\left(\frac{\mu^2_{B,1}}{\Delta^B_1}+\frac{\mu^2_{B,2}}{\Delta^B_2}-\frac{\mu^2_{B,3}}{\Delta^B_3}\right)\\&-\frac{\mu^2_{A,3}}{2\Delta^A_3}\left(\frac{\mu^2_{B,1}}{\Delta^B_1}+\frac{\mu^2_{B,2}}{\Delta^B_2}-\frac{\mu^2_{B,3}}{\Delta^B_3}\right)\Bigg\}+\alpha^0_{22},\end{aligned} \tag{C16}$$

其中 $\delta\phi$ 是斯塔克驱动之间的相位差，$\delta\phi=\phi_A-\phi_B$。在 $\tilde{H}^{0'}_k$ 中的局域频移是 [112] 多能级梯形系统在 ω_S 处受到失谐驱动时的标准交流斯塔克频移，即$\tilde{\omega}_{i-1,\ i}=\omega_{i-1,\ i}+\delta^{\rm S}_{i-1,\ i}$，其中

$$\delta^{\rm S}_{i-1,i}=\frac{-1}{4}\frac{\mu^2_{i-1}\Omega^2_S}{\Delta_{i-1}}+\frac{1}{2}\frac{\mu^2_i\Omega^2_S}{\Delta_i}-\frac{1}{4}\frac{\mu^2_{i+1}\Omega^2_S}{\Delta_{i+1}},$$

并取 $\mu_0\equiv 0$。我们通过拉姆齐实验测量这些局域频移，并通过调节位点模拟驱动的失谐来补偿它们。

给定上述关于$\tilde{\alpha}_{ij}(\Omega^0_{S,\ A},\ \Omega^0_{S,\ B},\ \omega_S,\ \delta\phi)$的表达式，我们现在进行变量变换，以简化目标 $L_z\otimes L_z$ 相互作用哈密顿量的设计。为方便起见，我们将采用一种能更好地体现目标哈密顿量结构的中间表象。类比于根据双跨蒙系统的能级定义 α_{ij} 的方式，$\alpha_{ij}=(\varepsilon_{ij}-\varepsilon_{i0})-(\varepsilon_{0j}-\varepsilon_{00})$，我们可以改为定义$\zeta_{ij}=(\varepsilon_{ij}-\varepsilon_{i1})-(\varepsilon_{1j}-\varepsilon_{11})$。它们包含与 α_{ij}相同的信息，但所参照的能级来自双跨蒙系统的 $|11\rangle$态，而非 $|00\rangle$ 态。将 α_{ij} 的表达式代入此定义后，我们得到四个非零的 ζ_{ij}:

$$\begin{aligned}\zeta_{00}&=\alpha_{11}\\ \zeta_{02}&=\alpha_{11}-\alpha_{12}\\ \zeta_{20}&=\alpha_{11}-\alpha_{21}\\ \zeta_{22}&=(\alpha_{22}-\alpha_{21})-(\alpha_{12}-\alpha_{11}).\end{aligned} \tag{C17}$$

如正文所述，该过程实际上重新定义了各个跨蒙的跃迁频率，并得到一个等效的哈密顿量

与式（14）中给出的哈密顿量，只是表示在不同的基中:

$$\begin{aligned}H'_{\rm ck}=&\zeta_{00}\,|00\rangle\langle 00|+\zeta_{02}\,|02\rangle\langle 02|\\&+\zeta_{20}\,|20\rangle\langle 20|+\zeta_{22}\,|22\rangle\langle 22|\,.\end{aligned} \tag{C18}$$

接下来，只需通过检查即可将 z_{ij}系数表示为 ζ_{ij} 的函数，从而得到 α_{ij}。这种关系可用矩阵方程表示为:

$$\begin{pmatrix}z_{11}\\ z_{12}\\ z_{21}\\ z_{22}\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\ 1&1&-1&-1\\ 1&-1&1&-1\\ 1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta_{00}\\ \zeta_{02}\\ \zeta_{20}\\ \zeta_{22}\end{pmatrix}. \tag{C19}$$

为了确定候选斯塔克驱动频率和振幅，我们利用受驱动$\tilde{z}_{22}$的微扰理论表达式（$\Omega^0_{S,\ A}$，$\Omega^0_{S,\ B}$，ω_S，$\delta\phi$），通过数值搜索寻找零点。我们将 $\delta\phi$ 限制为两个值 $\delta\phi\in\{0,\pi\}$，并要求 $\Omega^0_{S,\ A}=\Omega^0_{S,\ B}$ 或 Ω^0_S，从而简化参数空间。我们发现，对于此处使用的两个传输子（处于跨越区间），存在若干频率范围，使得给定驱动振幅时会出现 $\tilde{z}_{22}=0$。如图 8 所示，当 $\omega^B_{12}<\omega_S<\omega^A_{12}$时，我们在 $\tilde{z}_{22}$ 中观察到最强响应。我们发现，只要驱动频率不太接近任何跃迁频率，微扰理论的结果至少在定性上与实验结果一致，因此可作为校准的良好起点。振幅的实验校准见附录 D 的图 10(b)。

附录 D：纠缠速率测量协议

为了通过实验测量纠缠哈密顿量的系数，我们使用一系列改进的

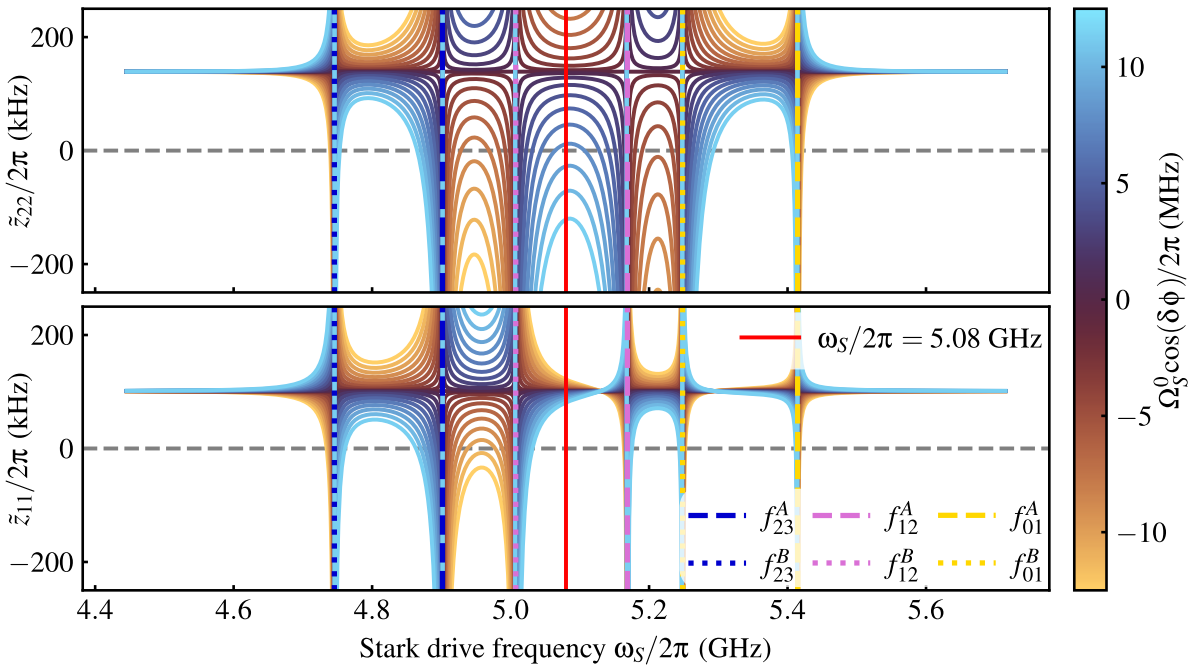


图 8：基于模拟-数字实验中使用的两个传输子实验测得的谱，绘制了三阶微扰理论得到的驱动相互作用速率随频率的变化，展示了不同斯塔克驱动幅度 Ω_S^0 和相位差 $\delta\phi \in \{0, \pi\}$下的结果。每个传输子的跃迁频率 $k \in \{A, B\}$, $f_{ij}^k = \omega_{ij}^k/2\pi$以竖线标出。驱动速率 $\tilde{z}_{11}(\Omega_S^0, \omega_S, \delta\phi)$ 和 $\tilde{z}_{22}(\Omega_S^0, \omega_S, \delta\phi)$ 的表达式可由方程 (C13)–(C16) 得到。红色实心竖线表示本实验所用斯塔克驱动的频率。

JAZZ/BIRD序列 [75, 76] ，既能提取各个纠缠速率，又能消除由校准误差或缓慢漂移造成的小幅跃迁频率偏移。

对于两个 qutrit，每个纠缠速率 ζ_{ij} $(i, j \in\{0, 2\})$—定义见方程 (C18，并与方程 (α_{ij} $(i, j \in \{1, 2\})$ 中原始的交叉克尔纠缠速率相关)—都可以从单次 JAZZ 序列的 Ramsey 振荡中提取，如图 9所示。对于不同的 i, j ，各序列仅在用于 $\pi/2$脉冲的子空间选择，以及用于回波消除非条件频移的 π 脉冲选择上有所不同。

为了明确确定 JAZZ 拉姆齐频率的符号，我们通过改变最后一个 δ_{art}脉冲的相位，在拉姆齐序列中加入“人工失谐” $\pi/2$，即 $\theta(T) = \pm\delta_{\text{art}}T$，其中 T是序列中每个演化时段（时长可变）的持续时间 [113], ，并且每次都进行两次 JAZZ 拉姆齐实验：一次采用 $+\delta_{\text{art}}$，另一次采用 $-\delta_{\text{art}}$。对于这一特定的解耦脉冲方案，当 $i = 2$时，测得的 JAZZ 拉姆齐频率符号会反转，因此必须对此进行补偿。

针对特定 ζ_{ij} 的单次 JAZZ 测量中，振荡频率为 $\omega^{\pm}_{\text{JAZZ }0j} = |\pm\delta_{\text{art}} - \zeta_{0j}|$ （当 $i = 0$ 时），或为 $\omega^{\pm}_{\text{JAZZ }2j} = |\pm\delta_{\text{art}} + \zeta_{2j}|$ （当 $i = 2$ 时）。假设人工失谐的幅值大于待测频率的幅值，则可通过以下方式估算带符号的纠缠速率：

$$\zeta_{ij} = \begin{cases} \frac{\omega^{-}_{\text{JAZZ},ij} - \omega^{+}_{\text{JAZZ},ij}}{2}, & i = 0 \\ \frac{\omega^{+}_{\text{JAZZ},ij} - \omega^{-}_{\text{JAZZ},ij}}{2}, & i = 2 \end{cases} \tag{D1}$$

各个 ˜驱动速率 ζ_{ij} 对应的 JAZZ 拉姆齐测量结果，显示在图 9 中各自对应的电路图下方。

此外，图 10(a)所示的更复杂序列包含八个演化时段，可证明它会产生频率等于 ζ_{ij} 相互作用速率之和的振荡，从而在一次实验中估算出 $z_{22} = \frac{1}{4}(\zeta_{00} + \zeta_{02} + \zeta_{20} + \zeta_{22})$。这使得我们能够高效校准产生条件 $z_{22} = 0$所需的斯塔克驱动振幅，如图 10(b)所示。

最后，为了校准斯塔克驱动在两个传输子上产生的局域频率偏移，我们在每个跨蒙的每个跃迁上进行简单的拉姆齐实验，并在等待时段内使斯塔克驱动处于激活状态。这些测量是在另一个跨蒙处于 $|1\rangle$ 态时进行的，以便直接提供式（14）的坐标系变换所需的频率，附录 C中也对此作了描述。

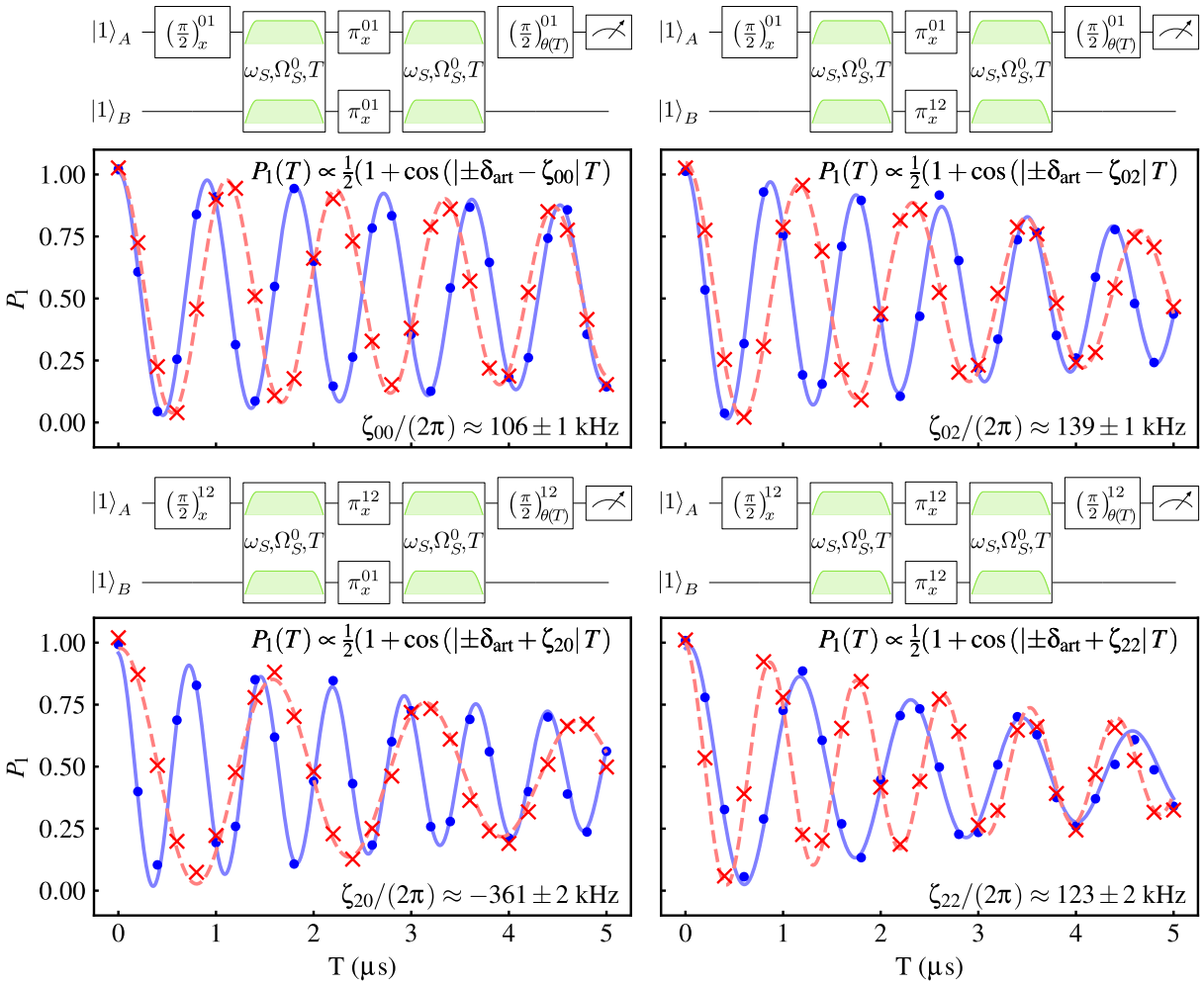


图 9：用于估算斯塔克驱动纠缠速率的 JAZZ序列电路图和测量结果。每个量子电路运行两次，分别采用 $\theta(T) = \pm\delta_{\rm art.}T$ (+：蓝色圆点，实线拟合； −：红色叉号，虚线拟合)，并通过对两次测量结果进行指数衰减余弦拟合，提取 ζ_{ij} 的带符号数值。所有测量的人工失谐均为 $\delta_{\rm art}/2\pi = 1$兆赫兹。这些测量使用经过校准的斯塔克驱动进行，得到$\tilde{z}_{22} = \frac{1}{4}(\tilde{\zeta}_{00} + \tilde{\zeta}_{02} + \tilde{\zeta}_{20} + \tilde{\zeta}_{22}) \approx -2$ 千赫兹。

附录 E：模拟-数字模拟相干时间与启发式平均衰减模型

模拟-数字实验中所用两个传输子的相干时间及其他相关参数列于表I。

在单qutrit实验中，我们假设噪声过程是马尔可夫的，并使用 Lindblad 主方程 [115]对退相干进行建模。

$$\dot{\rho} = -i[H,\rho] + \sum_\alpha \Gamma_\alpha \left(L_\alpha \rho L_\alpha^\dagger - \frac{1}{2} L_\alpha^\dagger L_\alpha \rho - \frac{1}{2} \rho L_\alpha^\dagger L_\alpha \right) \equiv \mathcal{L}(\rho), \tag{E1}$$

其中，哈密顿量取为式（7）中的单qutrit哈密顿量，$\mathcal{L}(\cdot)$ 为刘维尔超算符，而跨蒙的 Lindblad 跳跃算符

	QA	QB
$\omega_{01}/2\pi$(吉赫兹)	5.4146	5.2484
$\omega_{12}/2\pi$(GHz)	5.1687	5.0075
$\omega_{23}/2\pi$(GHz)	4.918	4.758
T_1^{01} (μs)	30(3)	26(7)
T_{2R}^{01} (μs)	48(8)	36(14)
T_1^{12} (μs)	15(4)	17(5)
T_{2R}^{12} (μs)	20(10)	24(9)
ω_S (GHz)	5.08	5.08
Ω_S^0 (兆赫兹)	7.1	7.1
J (兆赫兹)	2	

表 I：模拟-数字实验中使用的基于罗切斯特的器件中两个传输子的相关参数。

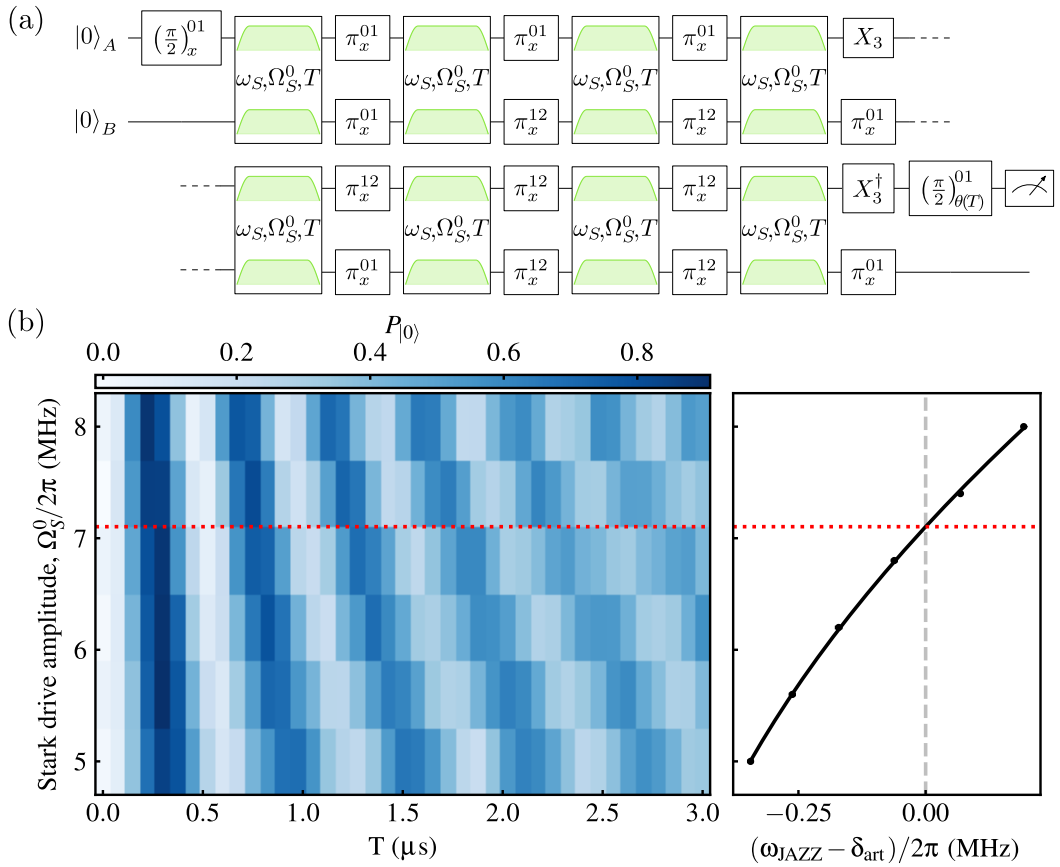


图 10：斯塔克驱动振幅的电路图和校准测量。(a) “Total JAZZ”序列，旨在以对应于 T 的频率产生振荡 $\zeta_{00}+\zeta_{02}+\zeta_{20}+\zeta_{22}=4z_{22}$。为清晰起见，量子电路分为两行。“移位”门 $X_d=\sum_n^{d-1}|n+1\,(\text{模 }d)\rangle\langle n|$（例如，参见 [83, 114]）可通过两个脉冲作用于一个 qutrit： π 脉冲： $X_3=\pi_x^{01}\pi_x^{12}$。(b) 使用 “Total JAZZ” 序列进行的斯塔克驱动振幅校准测量。给定特定的 ω_S，我们执行 (a) 中的量子电路，并改变斯塔克驱动振幅 Ω_S^0 和驱动持续时间 T。对于每个 Ω_S^0值，使用指数衰减余弦函数拟合左图中的拉姆齐振荡，并将减去 $\delta_{\mathrm{art}}=3$ 兆赫兹人工失谐后的振荡频率显示在右图中。随后将频率拟合为 Ω_S^0的二次函数，并通过解析方法求出零交叉点，从而得到校准后的斯塔克驱动振幅。

子 [68, 116]

$$L_{10}=|0\rangle\langle 1|\,,\qquad L_{11}=|1\rangle\langle 1|\,,\qquad L_{21}=|1\rangle\langle 2|\,,\qquad L_{22}=|2\rangle\langle 2|\,, \tag{E2}$$

描述激发态（L_{10}、L_{21}）的衰减和纯退相干（L_{11}、L_{22}）。相应的速率 Γ_{ij}根据表格中报告的相干时间计算得出I 如下

$$\Gamma_{10}=(T_1^{01})^{-1},\qquad \Gamma_{11}=(T_2^{01})^{-1}-\frac{1}{2}(T_1^{01})^{-1},$$
$$\Gamma_{21}=(T_1^{12})^{-1},\qquad \Gamma_{22}=(T_2^{12})^{-1}-\frac{1}{2}(T_1^{12})^{-1}. \tag{E3}$$

在双量子三能级系统实验中，我们交替进行长时间的演化（$T_E=800$ns）和相对短暂的幺正操作（$T_g=60$ns），以近似时间无关的哈密顿量 H_{AHM}。为了用定常主方程模型描述退相干，

我们假设一组经过修正的林德布拉德跳跃算符，并在此给出其依据。

在交换操作之间的每个演化周期内，演 $\rho(t)=e^{\mathcal{L}t}(\rho(0))$ [117]化可形式化地写为。若在演化周期开始前施加酉算符 U，并在周期结束后施加其逆算符 $U^\dagger$——假设二者均为瞬时操作——则新的演化可写为

$$\tilde{\rho}(t)=\mathcal{U}^\dagger\left(e^{\mathcal{L}t}\left(\mathcal{U}\left(\rho(0)\right)\right)\right), \tag{E4}$$

其中，我们定义超算符 $\mathcal{U}(\cdot)=U\cdot U^\dagger$。展开指数算符可知， $\mathcal{U},\mathcal{U}^\dagger$ 可以吸收到指数中：

$$\mathcal{U}^\dagger\left(e^{\mathcal{L}t}\left(\mathcal{U}\left(\cdot\right)\right)\right)=e^{\mathcal{U}^\dagger\mathcal{L}t\mathcal{U}}(\cdot), \tag{E5}$$

从而得到新的李维尔算符：

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{U}^\dagger \mathcal{L} \mathcal{U})(\rho) &= -iU^\dagger[H, U\rho U^\dagger]U + \sum_\alpha \Gamma_\alpha U^\dagger \left(L_\alpha U\rho U^\dagger L_\alpha^\dagger - \frac{1}{2} L_\alpha^\dagger L_\alpha U\rho U^\dagger - \frac{1}{2} U\rho U^\dagger L_\alpha^\dagger L_\alpha \right) U \\
&= -i[\tilde{H}, \rho] + \sum_\alpha \Gamma_\alpha \left(\tilde{L}_\alpha \rho \tilde{L}_\alpha^\dagger - \frac{1}{2} \tilde{L}_\alpha^\dagger \tilde{L}_\alpha \rho - \frac{1}{2} \rho \tilde{L}_\alpha^\dagger \tilde{L}_\alpha \right) \\
&\equiv \tilde{\mathcal{L}}(\rho),
\end{aligned}
\tag{E6}
$$

其中我们定义了切换框架哈密顿量 $\tilde{H} = U^\dagger H U$和跳跃算符 $\tilde{L}_\alpha = U^\dagger L_\alpha U$。

接下来，假设演化时间 T_E 相较于由 H 和 Γ_α决定的演化时间尺度较短，我们可以将林德布拉德方程下的指数演化近似到 T_E 的一阶，得到：

$$
\rho(T_E) = e^{\mathcal{L}T_E}(\rho(0)) \approx (1 + \mathcal{L}T_E)(\rho(0)). \tag{E7}
$$

然后，以 $\rho(T_E)$作为在$\mathcal{L}$下演化的初始态，我们再次取一阶近似，得到：

$$
\begin{aligned}
\rho(2T_E) &= e^{\tilde{\mathcal{L}}T_E}(\rho(T_E)) \approx (1 + \tilde{\mathcal{L}}T_E)(1 + \mathcal{L}T_E)(\rho(0)) \\
&= (1 + \tilde{\mathcal{L}}T_E + \mathcal{L}T_E + \tilde{\mathcal{L}}\mathcal{L}T_E^2)(\rho(0)) \\
&\approx (1 + \tilde{\mathcal{L}}T_E + \mathcal{L}T_E)(\rho(0)) \\
&\approx e^{(\tilde{\mathcal{L}}+\mathcal{L})T_E}(\rho(0)).
\end{aligned}
\tag{E8}
$$

于是，经过两个周期演化的有效平均李维尔算符为

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(\tilde{\mathcal{L}} + \mathcal{L})(\rho) = -i\frac{1}{2}[H + \tilde{H}, \rho] \\
&+ \frac{1}{2}\sum_\alpha \Gamma_\alpha \left(L_\alpha \rho L_\alpha^\dagger - \frac{1}{2} L_\alpha^\dagger L_\alpha \rho - \frac{1}{2} \rho L_\alpha^\dagger L_\alpha \right) \\
&+ \frac{1}{2}\sum_\alpha \Gamma_\alpha \left(\tilde{L}_\alpha \rho \tilde{L}_\alpha^\dagger - \frac{1}{2} \tilde{L}_\alpha^\dagger \tilde{L}_\alpha \rho - \frac{1}{2} \rho \tilde{L}_\alpha^\dagger \tilde{L}_\alpha \right) \\
&\approx \mathcal{L}_{\text{eff}}(\rho).
\end{aligned}
\tag{E9}
$$

算符的哈密顿量部分是正文中讨论的一阶平均哈密顿量，而跳跃算符 L_α 按照方程（E2）为每个 qutrit 定义。

由于林德布拉德方程假设具有马尔可夫性，我们预计该平均林德布拉德模型会遗漏周期性脉冲可能造成的动力学解耦效应。然而，模型数值演化结果与数据之间的吻合程度表明，这类效应对这里的演化没有显著影响。

附录 F：模拟-数字模拟中的误差分析

在本附录中，我们应用平均哈密顿理论（AHT）分析双三能级量子比特模拟-数字协议中的相干误差。我们讨论两种不同的误差来源：（1）斯塔克驱动哈密顿量在单脉冲过程中无法与自身对易所产生的误差；（2）动力学解耦序列中的高阶项所产生的误差。

为分析脉冲整形导致的脉冲内部误差，我们从式（17）中的驱动框架下系统哈密顿量入手：

$$
\begin{aligned}
H_{\text{sys}}(t) &= A(t)\left(\Delta_0 L_z^2 + \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} L_x\right) \otimes I \\
&+ I \otimes A(t)\left(\Delta_0 L_z^2 + \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} L_x\right) \\
&+ A(t)\sum_{ij=1}^{2} \delta z_{ij} L_z^i \otimes L_z^j + \sum_{ij=1}^{2} z_{ij}^0 L_z^i \otimes L_z^j,
\end{aligned}
\tag{F1}
$$

其中，我们将 $A(t)\delta z_{ij} = \tilde{z}_{ij}(t) - z_{ij}^0$ 定义为纠缠哈密顿量中依赖于斯塔克驱动的部分（见附录C）。在本节中，L_α 算符上的上标表示幂次，位置则表示相对于 $\otimes$ 符号的作用位点。由于哈密顿量中所有含时部分都被构造为随同一包络 $A(t)$变化（见正文），我们可以写成

$$
\begin{aligned}
H_{\text{sys}}(t) &= A(t)M_1 + \sum_{ij=1}^{2} z_{ij}^0 L_z^i \otimes L_z^j \\
&\equiv H(t) + H_0,
\end{aligned}
\tag{F2}
$$

其中 M_1 包含了式（F1）中含时部分的结构。接下来，我们要将该哈密顿量进行三阶 Magnus 展开，从而得到描述单个演化周期内演化过程的有效不含时哈密顿量。关于 Magnus 展开前几项的定义，见附录 A 中的式（18）；高阶项会产生相干误差。

我们首先计算二阶项和三阶项被积函数的对易子。利用我们将哈密顿量写成含时部分与不含时部分这一事实，我们可以简化与 $[H_0, H_0] = 0$ 和$[H(t)\ H(t')] = A(t)A(t')[M_1, M_1] = 0$的对易子计算，因此唯一的贡献将来自不含时部分与含时部分的对易子及其嵌套

对易子。据此我们可以写出：

$$\begin{aligned}[H_{\mathrm{sys}}(t), H_{\mathrm{sys}}(t')] &= [H(t), H_0] - [H(t'), H_0] \\ &\equiv \mathcal{C}_{10}(t) - \mathcal{C}_{10}(t'),\end{aligned}$$

其中，我们定义 $\mathcal{C}_{10}(t)$ 以便后续使用。下标表示（嵌套）对易子序列中的项，其中用 1 表示 $H(t)$，用 0 表示H_0。类似地，对于三阶交换子，

$$\begin{aligned}&\Big[H_{\mathrm{sys}}(t), [H_{\mathrm{sys}}(t'), H_{\mathrm{sys}}(t'')]\Big] = [H_{\mathrm{sys}}(t), \mathcal{C}_{10}(t')] \\ &\qquad\qquad - [H_{\mathrm{sys}}(t), \mathcal{C}_{10}(t'')] \\ &= [H(t), \mathcal{C}_{10}(t')] - [H(t), \mathcal{C}_{10}(t'')] \\ &+ [H_0, \mathcal{C}_{10}(t')] - [H_0, \mathcal{C}_{10}(t'')] \\ &\equiv \mathcal{C}_{110}(t, t') - \mathcal{C}_{110}(t, t'') + \mathcal{C}_{010}(t') - \mathcal{C}_{010}(t'')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Big[[H_{\mathrm{sys}}(t), H_{\mathrm{sys}}(t')], H_{\mathrm{sys}}(t'')\Big] \\ &= -\Big[H_{\mathrm{sys}}(t''), [H_{\mathrm{sys}}(t), H_{\mathrm{sys}}(t')]\Big] \\ &\equiv \mathcal{C}_{110}(t'', t') - \mathcal{C}_{110}(t'', t) + \mathcal{C}_{010}(t') - \mathcal{C}_{010}(t).\end{aligned}$$

最后，在计算积分之前，我们需要求出算符$\mathcal{C}_{10}(t)$、$\mathcal{C}_{110}(t,\ t')$ 和 $\mathcal{C}_{010}(t)$ 的形式。二阶对易子可写为，

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{10}(t) &= A(t)\frac{\Omega}{\sqrt{2}}\sum_{ij} z^0_{ij}\Big(\big[L_x, L^i_z\big]\otimes L^j_z + L^i_z\otimes\big[L_x, L^j_z\big]\Big) \\ &\equiv A(t)M_2.\end{aligned}$$

三阶对易子为：

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{010}(t) = -A(t)\frac{\Omega_0}{\sqrt{2}}\sum_{ij} z^0_{ij}\sum_{kl} z^0_{kl}\Big(\Big[L^i_z, \big[L_x, L^k_z\big]\Big]\otimes L^{l+j}_z \\ + L^{k+i}_z\otimes\Big[L^j_z, \big[L_x, L^l_z\big]\Big]\Big) \\ \equiv A(t)M_{3,1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{110}(t,t') = A(t)A(t')\frac{\Omega_0}{\sqrt{2}}\sum_{ij} z^0_{ij}\Bigg\{\frac{\Omega_0}{\sqrt{2}}\Big(\Big[L_x, \big[L_x, L^i_z\big]\Big]\otimes L^j_z + L^i_z\otimes\Big[L_x, \big[L_x, L^j_z\big]\Big]\Big) \\ + \Delta_0\Big(\Big[L^2_z, \big[L_x, L^i_z\big]\Big]\otimes L^j_z + L^i_z\otimes\Big[L^2_z, \big[L_x, L^j_z\big]\Big]\Big) \\ + \sum_{kl}\delta z_{kl}\Big(\Big[L^k_z, \big[L_x, L^i_z\big]\Big]\otimes L^{j+l}_z + L^{i+k}_z\otimes\Big[L^l_z, \big[L_x, L^j_z\big]\Big]\Big) \\ + 2\frac{\Omega_0}{\sqrt{2}}\big[L_x, L^i_z\big]\otimes\big[L_x, L^j_z\big]\Bigg\} \\ \equiv A(t)A(t')M_{3,2}.\end{aligned}$$

由此可得，Magnus 展开的各阶项可写为

$$\begin{aligned}\bar{H}^{(1)} &= \frac{B(T)}{T}\Bigg[\Big(\Delta_0 L^2_z + \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}}L_x\Big)\otimes I \\ &\quad + I\otimes\Big(\Delta_0 L^2_z + \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}}L_x\Big) + \sum_{ij}\delta z_{ij} L^i_z\otimes L^j_z\Bigg] \\ &\quad + \sum_{ij} z^0_{ij} L^i_z\otimes L^j_z \\ &= M_1 + H_0,\end{aligned} \tag{F3}$$

其中，$B(t) \equiv \int_0^t A(t')\,\mathrm{d}t'$ 以及 $B(T) = T$根据定义。

二阶项变为：

$$\begin{aligned}\bar{H}^{(2)} &= \frac{M_2}{2iT}\int_0^T\int_0^t A(t) - A(t')\,\mathrm{d}t'\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{M_2}{2iT}\int_0^T (tA(t) - B(t))\,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{F4}$$

对于任意关于 $t = T/2$ 对称的 $A(t)$，该积分的值为 $H^{(2)} = 0$。最后，三阶项

可写为

$$\begin{aligned}\bar{H}^{(3)} &= \frac{-1}{6T}\int_0^T\int_0^t\int_0^{t'}\Big(\mathcal{C}_{110}(t,t')+\mathcal{C}_{110}(t'',t')\\ &+\mathcal{C}_{010}(t)-2\mathcal{C}_{010}(t')+\mathcal{C}_{010}(t'')\Big)\,\mathrm{d}t''\,\mathrm{d}t'\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{-1}{6T}\int_0^T\int_0^t\int_0^{t'}\Big(A(t)A(t')+A(t')A(t'')\Big)M_{3,2}\\ &+\Big(A(t)-2A(t')+A(t'')\Big)M_{3,1}\,\mathrm{d}t''\,\mathrm{d}t'\,\mathrm{d}t\\ &= \alpha(r,T)M_{3,2}+\beta(r,T)M_{3,1},\end{aligned} \tag{F5}$$

其中 $\alpha(r,T)$ 和 $\beta(r,T)$ 仅是斜坡分数和演化时间的函数，并且对于式 (B7) 中定义的包络，由下式给出

$$\alpha(r,T)=T^2\frac{(33-6\pi^2)r^3+3r^2(\pi^2-8)+6\pi^2 r-4\pi^2}{72\pi^2(1-r)^2}$$

$$\beta(r,T)=\frac{rT^2}{12}\left[1+\left(\frac{12}{\pi^2}-2\right)r\right].$$

考虑到模拟-数字双三能级系统实验中哈密顿量的所有参数均在 100kHz 量级，并取演化时间 $T=T_E=800$ ns，我们可以估算 $\bar{H}^{(3)}$ 的总贡献为 $\left|\bar{H}^{(3)}\right|<0.1$ kHz。

现在，我们计算动力学解耦序列中高阶项所导致的误差。假设该序列在不含时哈密顿量 $\bar{H}_{\mathrm{sys}}$ 和 $\tilde{H}_{\mathrm{sys}}=U_{02}^{\dagger}\bar{H}_{\mathrm{sys}}U_{02}$之间交替切换，其中 $U_{02}=\pi_{02}\otimes\pi_{02}$ 被视为瞬时且完美。考虑到上述误差项的量级，我们将采用以下简化计算：¯假设 H_{sys} 可用式（F3）中的一阶项很好地近似。然后，我们可以使用离散有效平均哈密顿量 $\bar{H}_{\mathrm{disc}}\approx\bar{H}^{(1)}{}_{\mathrm{disc}}+\bar{H}^{(2)}{}_{\mathrm{disc}}$，其哈密顿量项定义见式（A7）–（A8）。

一阶项，

$$\begin{aligned}\bar{H}^{(1)}_{\mathrm{disc}} &= \left(\Delta_0 L_z^2+\frac{\Omega_0}{\sqrt{2}}L_x\right)\otimes I+I\otimes\left(\Delta_0 L_z^2+\frac{\Omega_0}{\sqrt{2}}L_x\right)\\ &+\tilde{z}_{11}L_z\otimes L_z+\tilde{z}_{22}L_z^2\otimes L_z^2,\end{aligned} \tag{F6}$$

在考虑校准 $\tilde{z}_{22}\approx 0$ 后，得到目标哈密顿量 H_{AHM}。为计算二阶项，我们首先注意到，与 U_{02} 作共轭变换时，只有奇宇称相互作用项 $L_zL_z^2$ 和 $L_z^2L_z$会受到影响；其次，只有位点驱动 L_x与这些项不对易。这简化了对易子的计算：

$$\begin{aligned}\bar{H}^{(2)}_{\mathrm{disc}} = -\frac{\Omega_0 T}{2}\Big\{&\tilde{z}_{12}\left(L_y\otimes L_z^2+L_z\otimes[L_x,L_z^2]\right)\\ &+\tilde{z}_{21}\left([L_x,L_z^2]\otimes L_z+L_z^2\otimes L_y\right)\Big\}\end{aligned} \tag{F7}$$

根据双量子三能级系统实验的参数，这些误差的数量级为 $\left|\bar{H}^{(2)}{}_{\mathrm{disc}}\right|\sim 20$kHz，使其成为所考察各项中占主导地位的相干误差项。

我们尚未严格分析的其余误差来源包括 U_{02} 脉冲的有限持续时间与不完美保真度，以及斯塔克驱动斜坡期间绝热条件的有效性。

附录G：数字量子模拟器的器件特定细节

在本附录中，我们给出作为我们理论基本构件的量子操作的矩阵表示，并给出我们进行数字量子模拟所使用的AQT 设备上可用的基门集。

阿贝尔希格斯模型中的单三能级量子比特操作由以下量子操作实现

$$M_z=\mathrm{diag}(\exp(i\theta),1,\exp(i\theta)) \tag{G1}$$

and,

$$M_x=\begin{pmatrix}\cos^2(\frac{\phi}{2\sqrt{2}}) & \frac{-i}{\sqrt{2}}\sin(\frac{\phi}{\sqrt{2}}) & -\sin^2(\frac{\phi}{2\sqrt{2}})\\ \frac{-i}{\sqrt{2}}\sin(\frac{\phi}{\sqrt{2}}) & \cos(\frac{\phi}{\sqrt{2}}) & \frac{-i}{\sqrt{2}}\sin(\frac{\phi}{\sqrt{2}})\\ -\sin^2(\frac{\phi}{2\sqrt{2}}) & \frac{-i}{\sqrt{2}}\sin(\frac{\phi}{\sqrt{2}}) & \cos^2(\frac{\phi}{2\sqrt{2}})\end{pmatrix}; \tag{G2}$$

而最近邻自旋-1 伊辛相互作用项则是纠缠操作

$$M_{zz}=\mathrm{diag}\left(e^{i\gamma},\ 1,\ e^{-i\gamma},\ 1,1,\ 1,e^{-i\gamma},1,e^{i\gamma}\right). \tag{G3}$$

我们在正文中讨论了如何将上述量子操作酉分解为基本门。对于分解，我们使用了盖尔曼矩阵，它们是 SU(3) 的标准生成元：

$$\lambda_1 \equiv \sigma_x^{01} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 \equiv \sigma_y^{01} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 \equiv \sigma_z^{01} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda_4 \equiv \sigma_x^{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 \equiv \sigma_y^{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 \equiv \sigma_x^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda_7 \equiv \sigma_y^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

这些是迹为零且在迹内正交的厄米矩阵。盖尔曼矩阵（λ_i）构成了一组可行的 SU(3) 生成元，可对单个 qutrit 实现通用控制。为方便起见，我们定义了一个额外的厄米算符 $\sigma_z^{12} \equiv -\frac{1}{2}\lambda_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_8$。它与 σ_z^{01} 不正交，但对应于在$\{|1\rangle, |2\rangle\}$子空间中绕 z 轴的类量子比特旋转，并且可以通过改变 $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ 跃迁上的驱动相位自然实现。

我们可以使用双多能级量子比特受控-SUM或受控-Z 门来实现纠缠操作，其定义为 [83]

$$U_{\text{CSUM}} = \sum_{n=0}^{d-1} |n\rangle\langle n| \otimes X_d^n \tag{G4}$$
$$= \left(I \otimes H_d^\dagger\right) U_{\text{CZ}} \left(I \otimes H_d\right) \tag{G5}$$
$$U_{\text{CZ}} = \sum_{n=0}^{d-1} |n\rangle\langle n| \otimes Z_d^n, \tag{G6}$$

其中，

$$X_d = \sum_{n=0}^{d-1} |n+1 \pmod d\rangle \langle n|, \tag{G7}$$
$$Z_d = \sum_{n=0}^{d-1} \exp\left(i\frac{2\pi n}{d}\right) |n\rangle\langle n|, \tag{G8}$$
$$H_d = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n,m=0}^{d-1} \exp\left(i\frac{2\pi}{d}nm\right) |n\rangle\langle m|. \tag{G9}$$

CSUM 门和 CZ 门是量子比特 CNOT 门和受控-Z 门在多能级量子比特中的推广。

我们用于双 qutrit 操作的原生门是 qutrit-CZ 门，其酉算符定义为

$$U_{CZ} = \sum_{i,j=0}^{2} \omega^{ij} |ij\rangle\langle ij| \tag{G10}$$

其中，$\omega = e^{i2\pi/3}$ 是三次单位根。为了在我们的器件上实现该门，我们采用同时施加的非共振微波驱动，在耦合三能级量子比特系统中实现可调的交叉克尔相互作用，并采用动力学解耦来构造 U_{CZ}的特定目标酉算符。有关如何执行该门的更多信息，请参见文献 [78]。我们在不要求最终酉算符为 U_{CZ} 的情况下，采用相同原理来构造用于模拟-数字混合模拟的相互作用哈密顿量。

	QA	QB
量子比特频率 (GHz)	5.374	5.443
非谐性 (兆赫兹)	-274	-271
T_1^{01} (μs)	60(13)	47(14)
T_1^{12} (μs)	36(4)	34(5)
T_{2e}^{01} (μ秒)	69(7)	61(14)
T_{2e}^{12} (μ秒)	32(5)	32(6)
$\tau_{1Q,\ X90}$ (ns)	30	30
$\tau_{1Q,\ \text{SU(3)}}$ (ns)	180	180
τ_{2Q} (ns)	612	

表II：用于数字量子模拟的基于伯克利的三能级量子处理器的器件参数。表中列出了退相干时间（T）、各种原生门和复合门时间（τ），以及数字实验中使用的量子比特频率和非谐性。

附录 H：基于三能级量子比特的模拟中的误差缓解

在本附录章节中，我们回顾早期研究中提出的误差缓解方案 [63, 118]，该方案对于延长我们能够观测动力学的时间尺度发挥了关键作用。我们的误差处理策略分为两部分：首先，我们采用随机化编译，将误差模型调整为随机泡利噪声（近似为去极化噪声）；其次，我们利用循环基准测试测得的噪声，对期望值进行数值纯化。此外，还采用读出误差缓解，以减少并消除态制备与测量误差。

我们可以通过以下方式高效地构造一个随机信道

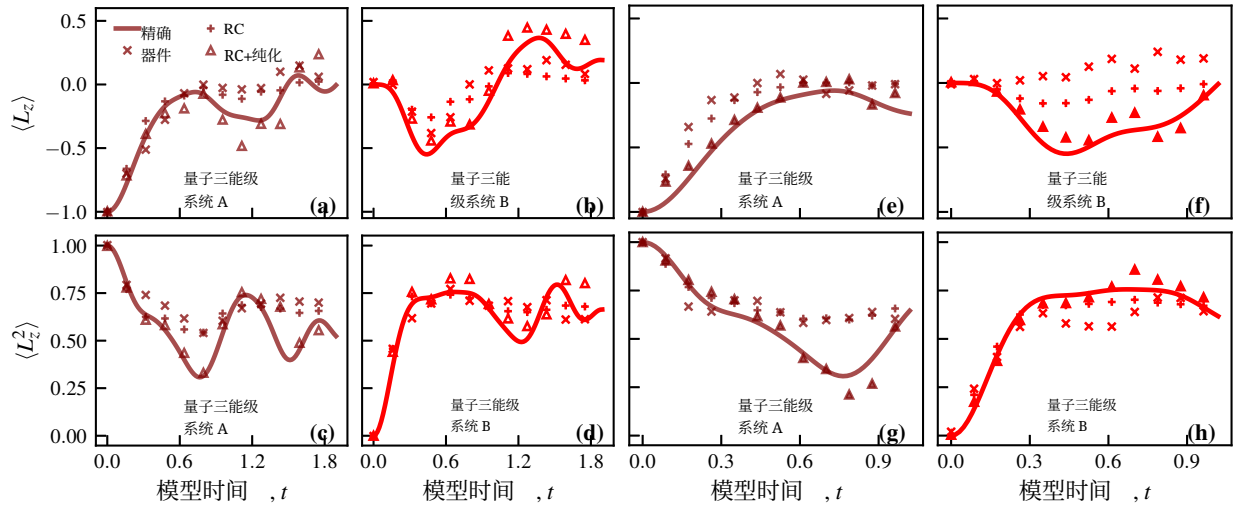


图 11：我们通过两项采用不同 Trotter 步长的实验，考察误差缓解方案的影响。较大的 Trotter 步长（$\delta t = 1.0$）使我们能够在更长时间内观察实时动力学（a–d），而较小的 Trotter 步长（$\delta t = 0.55$）虽能降低 Trotter 误差，却限制了可观测的时间尺度（e–h）。在两项实验中，我们发现误差缓解方案平均而言能有效提高量子操作的保真度。对于两项实验，我们均展示了原始硬件数据（器件）、采用随机化编译进行误差缓解后的器件数据（RC），以及经随机化编译和数值纯化处理的数据（RC+纯化），并将其与量子三能级系统 A（栗色）和量子三能级系统 B（红色）的精确对角化结果（精确）进行比较。初始态为 $|21\rangle$，据此计算期望值。我们注意到，与实验中的其他误差来源相比，实验中的统计误差微不足道。统计误差与测量次数平方根的倒数成正比，因此本实验中的统计误差约为 $\sim \frac{1}{\sqrt{1024\times 30}} \sim 0.006$。

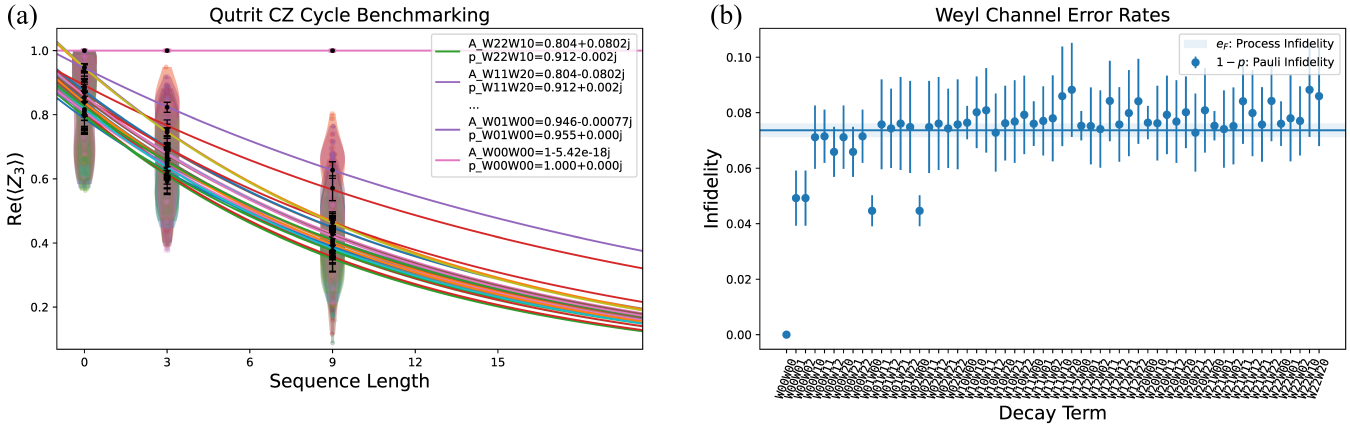


图 12：将双 qutrit CZ 门用作阿贝尔希格斯模型数字量子模拟中的原生纠缠门时所得的循环基准测试结果。(a) 各个 Weyl 衰减指数及其相应不确定度的小提琴图。对每个制备的 Weyl 本征态，均拟合制备与测量参数 (A) 和衰减项 (p)。(b) 根据周期基准测试电路中 Weyl 本征态的衰减拟合结果提取的各衰减项对应的不保真度及其不确定度。

从一阶酉设计中采样 [119]。我们选择 Weyl（量子多能级系统 Pauli）算符作为一阶酉设计，用于随机化编译中的随机化。Weyl 算符在 SU(d) 上构成一个群，其群元素定义为 $W_{k,l} = \omega^{-kl/2} Z^k X^l$ 其中，X 门和 Z门在占据数基上的作用定义为$|m\rangle = \{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$，使得 $X|m\rangle = |m \oplus 1\rangle$ 并且 $Z|m\rangle = \omega^m |m\rangle$，其中 $\omega = \exp(\frac{i2\pi}{3})$。值得一提的是，使用更高维的多能级量子比特作为量子计算单元，并不会增加通过随机编译实现同等相干噪声抑制所需的额外开销（随机化电路的数量） [63]。为了有效抑制相干误差，我们为每个初始电路执行 30 个等价的扭转量子电路。在

原则上，采用随机编译不会产生运行时开销，因为每个电路所需的测量次数可以平均分配到各个扭转量子电路中。

我们在执行随机编译以减轻相干噪声后，采取的策略是学习并在数值上纯化系统中的非相干噪声。形式上，非相干噪声可用与 Weyl 通道相关的错误率来定义。Weyl 通道可表示为

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\rho) &= \sum_{p,q=0}^{2} w_{p,q} W_{p,q} \rho W_{p,q}^{\dagger} \\ &= w_{0,0}\rho + \sum_{p,q,p+q\neq 0} w_{p,q} W_{p,q} \rho W_{p,q}^{\dagger} \end{aligned} \tag{H1}$$

我们使用循环基准测试，高效地学习 Weyl 通$w_{p\text{道}q}$ 的错误率$W_{p,\ q}$。[90]循环基准测试通过执行以下步骤进行

- 准备随机选定的 Weyl 通道的本征态。
- 选择一个循环（例如，我们的原生双 qudit 门）并重复执行 N 次。在每个循环之间进行 Weyl 随机化，将通道转变为随机通道。
- 在经过 N 次后，测量相同 Weyl 算符的期望值。

对多个层数（N）和不同的 Weyl 本征态初始选择重复这些步骤，即可通过拟合相应的错误曲线，测得各相关通道的衰减率。我们的双 qutrit CZ 门的循环基准测试结果见图12。

我们可以根据循环基准测试测得的 Weyl 衰减项的平均值，估算有效的退极化噪声参数。需要指出的是，对于我们的系统，这种简化的退极化噪声模型形式如下：

$$\epsilon(\rho) = \lambda\rho + (1-\lambda)\frac{I_3}{3^N} \tag{H2}$$

如图12所示，Weyl 衰减项的分布相当均匀，因此这种近似是合理的。为减轻非相干噪声，我们使用估算出的退极化强度，对从扭转量子电路中测得的 Z 期望值进行重新缩放，从而更准确地估算可观测量。关于 Weyl 随机化和循环基准测试的详细讨论，建议读者参阅 [63, 120]。

应用这些缓解方案的影响对于恢复有用的动力学至关重要。图 11 展示了随机化编译和纯化如何改进了场算符估计 $\langle L_z \rangle$ 和 $\langle L_z^2 \rangle$。显然，随机化本身并不总是足以恢复低误差估计，因为退相干在非常浅的量子电路深度之外占主导地位。缓解方案的组合，即随机化编译和纯化，对于减少相干误差和非相干误差被证明至关重要。

附录 I：资源估算及与基于量子比特的模拟的比较

我们在本附录中论证了自旋 1 量子系统的基于量子三能级系统的时间演化相对于基于量子比特的表述的优势。

要在量子比特平台上映射一个 N-qutrit 三能级系统，我们需要 $N\log_2 3$ 个量子比特。使用标准二进制编码将自旋-1 本征态映射到占据数基的一种可能方式是

$$\begin{aligned}&|m=1\rangle \to |n=00\rangle\,, \quad |m=0\rangle \to |n=01\rangle\,, \\ &|m=-1\rangle \to |n=10\rangle\,. \end{aligned} \tag{I1}$$

采用这种编码，实现 AHM 传播子所需的不同量子操作如图所示。13。本研究没有考察其他编码方案。值得一提的是，并不存在一种适用于所有不同类型量子操作的唯一最优编码方案 [121]。对于标准二进制编码，我们对每种量子操作都进行了解析分解和基于转译器的分解。我们发现，对于所有情况，Bqskit 转译器得到的分解 [122] 均为最优，且所需的纠缠操作更少。我们的单个 qutrit 操作 M_x^i 通过双量子比特酉综合需要两个 CNOT门，而对原始纠缠操作进行四量子比特分解 M_{zz}^i 则需要 12 个 CNOT门（假设硬件中的量子比特采用全连接拓扑）。对于受限拓扑，例如 IBM 的 Heron r3 处理器，则需要 30 个 CNOT门。这清楚地表明，对于技术成熟且相干时间相当的情形，三能级量子模拟相比基于量子比特的模拟，更适用于阿贝尔-希格斯及其他基于 SU(3)的规范理论，以及各种自旋-1模型。

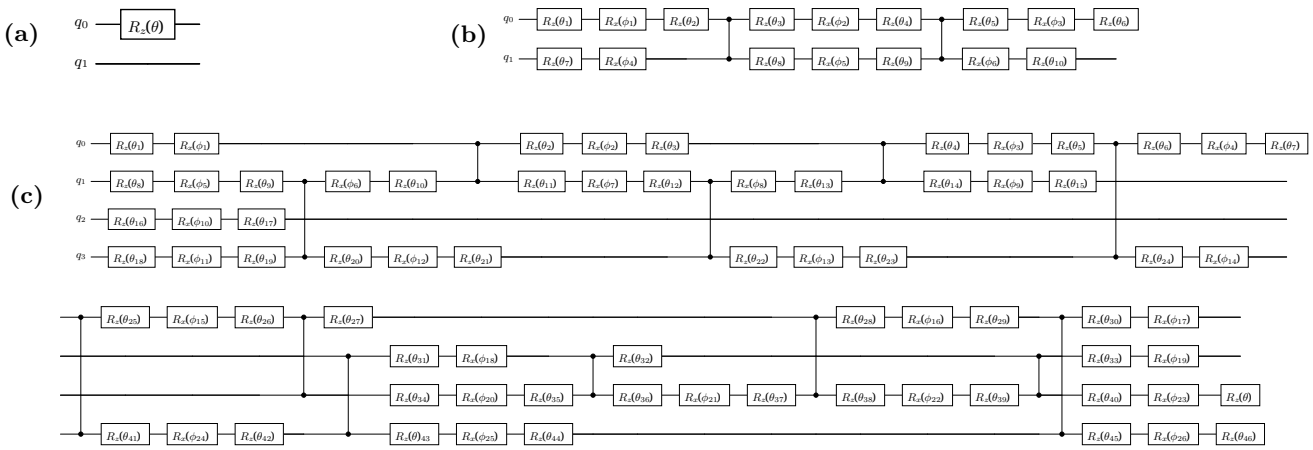


图13：转译器编译的自旋-1截断AHM的 Trotter化演化中不同操作的量子比特门分解。采用二进制编码时，展示了（a） M_z、（b） M_x和（c） M_{zz} 操作的分解。为使图示清晰，不同操作的数值旋转角以符号代替。请注意，与量子三能级系统分解相比，量子比分解中的纠缠操作数量有所增加，且量子比特表述中存在非局域纠缠操作。在量子比特不具备全连接的情况下，由于量子比特对之间存在额外的 SWAP 门，纠缠操作的数量会进一步增加。每个SWAP操作都会引入三个纠缠门，从而使量子比分解的成本更高。

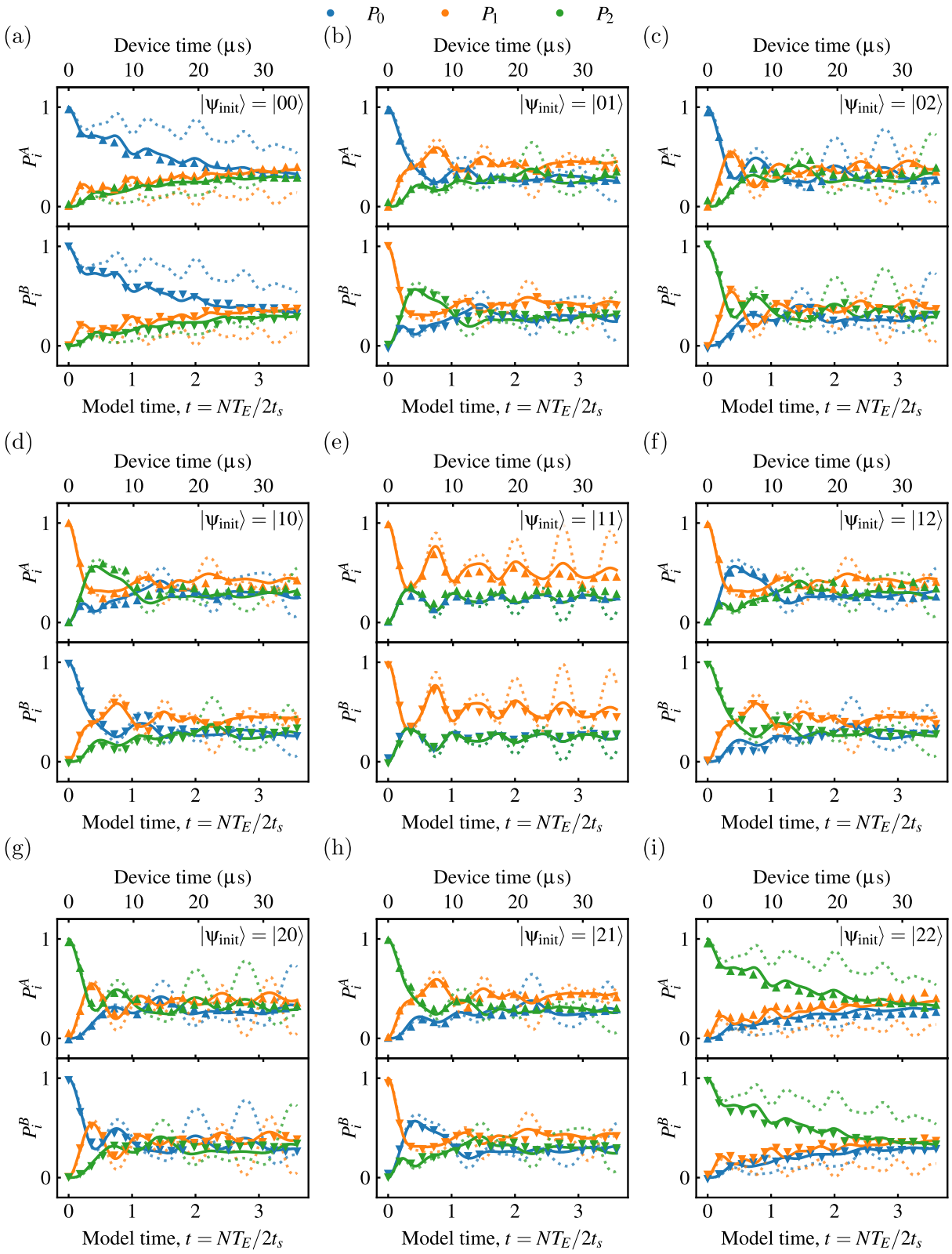


图14：扩展后的双量子三能级系统模拟-数字实验结果。图中所示数据摘自图4(b)的(h)。点线表示 AHM 在 Schrödinger 方程下的精确演化，实线表示附录F中所述 Lindblad 模型下的演化，三角形标记则表示经过统计读出校正后的实验测量跨蒙本征态概率。模型参数为 $\kappa/2\pi = \chi/2\pi = \beta/2\pi = 1$，所有测量的尺度频率均为$t_s^{-1} \approx 110\text{kHz}$。不确定度根据散粒噪声估算$\sigma \sim 1/\sqrt{N_{\text{shots}}}$，其中 $N_{\text{shots}} = 3000$。误差棒小于标记。

[1]M. Troyer与U.-J. Wiese，费米子量子蒙特卡洛模拟的计算复杂性与基本限制，物理评论快报 94, 170201 (2005年), arXiv:cond-mat/0408370。[2] C. Gattringer与K. Langfeld，晶格场论中符号问题的处理方法，国际现代物理杂志A辑 31, 1643007 2016年 1603 ( )，arXiv: .09517 [高能物理—格点]。[3] E. Zohar，多于一个空间维度中格点规范理论的量子模拟——要求、挑战与方法，哲学学报A辑：数学、物理与工程科学 380, 20210069 (2021年)，arXiv:2106.04609 [量子物理]。[4] C. Charles、E. J. Gustafson、E. Hardt、F. Herren、N. Hogan、H. Lamm、S. Starecheski、R. S. Van de Water与M. L. Wagman，在量子计算机上模拟Z2格点规范理论，物理评论E辑 109, 015307 (2024年)，arXiv:2305.02361 [高能物理—格点]。[5] A. Bazavov、Y. Meurice、S.-W. Tsai、J. Unmuth-Yockey与J. Zhang，光学晶格上阿贝尔希格斯模型的规范不变实现，《物理评论D》92, 076003 (2015年)，arXiv:1503.08354 [高能物理—格点]。[6] E. A. Martinez *et al.*，利用少量量子比特量子计算机研究格点规范理论的实时动力学，《自然》534, 516 (2016年)，arXiv:1605.04570 [量子物理]。[7] A. De *et al.*，量子模拟器中弦断裂动力学的观测，(2024年)，arXiv:2410.13815 [量子物理]。[8] D. Luo *et al.*，跨越量子相变的气泡成核量子模拟，(2025年)，arXiv:2505.09607 [量子物理]。[9] R. G. Jha、A. Milsted、D. Neuenfeld、J. Preskill与P. Vieira，利用矩阵乘积态研究伊辛场论中的实时散射，物理评论研究 7, 023266 (2025年)，arXiv:2411.13645 [hep-th]。[10] H. Lamm、S. Lawrence与Y. Yamauchi，规范理论数字量子模拟的一般方法，《物理评论D》100, 034518 (2019年)，arXiv:1903.08807 [高能物理—格点]。[11] D. Gonzalez-Cuadra *et al.*，(2 + 1)维里德堡量子模拟器上弦断裂的观测，《自然》642, 321 (2025年)，arXiv:2410.16558 [量子物理]。[12] A. Yamamoto，量子比特上(2+1)维格点规范理论的实时模拟，物理学进展 2021年, 013B06 (2021年)，arXiv:2008.11395 [高能物理—格点]。[13] Y. Ding、X. Cui与Y. Shi，Z2规范-希格斯模型的数字量子模拟与伪量子模拟，《物理评论D》105, 054508 (2022年)，arXiv:2108.13410 [高能物理—格点]。[14] S. Maiti、D. Banerjee、B. Chakraborty与E. Huffman，利用量子算法研究 2+1维SO(3)非阿贝尔格点规范理论中的自发对称性破缺，物理评论研究 7, 013283 (2025年)，arXiv:2409.07108 [高能物理—格点]。[15] N. Mueller、T. Wang、O. Katz、Z. Davoudi与M. Cetina，(2 + 1)维格点规范理论中普适热化动力学的量子计算，自然·通讯 **16**, 5492 2025 2408 00069 ( )，[ ] arXiv: . 量子物理 。[16] H. Sukeno与T. Okuda，阿贝尔格点规范理论的基于测量的量子模拟，SciPost物理学 14, 129 (2023年)，arXiv:2210.10908 [量子物理]。[17] L. Homeier、A. Bohrdt、S. Linsel、E. Demler、J. C. Halimeh 和 F. Grusdt，《利用动态物质对（2 + 1）维格点规范理论进行量子模拟的现实方案》，《通讯物理》6, 127（2023），arXiv:2205.08541 [凝聚态物理·量子气体]。[18] M. Meth、J. Zhang、J. F. Haase、C. Edmunds、L. Postler、A. J. Jena、A. Steiner、L. Dellantonio、R. Blatt、P. Zoller、T. Monz、P. Schindler、C. Muschik 和 M. Ringbauer，《在量子多能级计算机上模拟二维格点规范理论》，《自然·物理》21, 570（2025），出版方：自然出版集团。[19] T. A. Cochran *et al.*，《可视化（2 + 1）维格点规范理论中电荷与弦的动力学》，《自然》642, 315（2025）。[20] E. O. Rosanowski、A. Crippa、L. Funcke、P. V. Itaborai、K. Jansen 和 S. Singh，《有限密度下（2+1）维量子电动力学的量子计算机实现》，（2025），arXiv:2509.20558 [高能物理—格点]。[21] D.-S. Xiang *et al.*，《里德伯原子格点规范理论中的实时散射与冻结动力学》，（2025），arXiv:2508.06639 [凝聚态物理·量子气体]。[22] Z.-Y. Zhou、G.-X. Su、J. C. Halimeh、R. Ott、H. Sun、P. Hauke、B. Yang、Z.-S. Yuan、J. Berges 和 J.-W. Pan，《量子模拟器上规范理论的热化动力学》，《科学》377, abl6277（2022），arXiv:2107.13563 [凝聚态物理·量子气体]。[23] J. Jiang、N. Klco 和 O. Di Matteo，《立方体上的非阿贝尔动力学：通过基于量子多能级系统的模拟改进量子编译》，《物理评论D》112, 074512 2025 2506（ ），arXiv: .10945 [量子物理]。[24] D. M. Kurkcuoglu、M. S. Alam、J. A. Job、A. C. Y. Li、A. Macridin、G. N. Perdue 和 S. Providence，《利用量子多能级系统模拟 ϕ^4 理论》，（2021），arXiv:2108.13357 [量子物理]。[25] E. Gustafson，《利用qutrit改进标量量子电动力学量子模拟中的噪声（ 2022 2201 04546 ）》，[ ] arXiv: . 高能物理—格点，物理学：量子物理。[26] M. Illa、C. E. P. Robin 和 M. J. Savage，《用于格点量子色动力学量子模拟的Qu8its》，《物理评论D》110, 014507（2024），出版方：美国物理学会。[27] M. S. Blok、V. V. Ramasesh、T. Schuster、K. O'Brien、J. M. Kreikebaum、D. Dahlen、A. Morvan、B. Yoshida、N. Y. Yao 和 I. Siddiqi，《超导三能级量子处理器上的量子信息 scrambling》，《物理评论X》11, 021010（2021），arXiv:2003.03307 [量子物理]。[28] T. Roy、Z. Li、E. Kapit 和 D. Schuster，《可编程超导处理器上的双量子三能级算法》，《物理评论应用》19, 064024（2023）。[29] M. Ringbauer、M. Meth、L. Postler、R. Stricker、R. Blatt、P. Schindler 和 T. Monz，《采用囚禁离子的通用量子多能级处理器》，《自然·物理》18, 1053（2022），第9期，出版方：自然出版集团。[30] Y. Chi、J. Huang、Z. Zhang、J. Mao、Z. Zhou、X. Chen、C. Zhai、J. Bao、T. Dai、H. Yuan、M. Zhang、D. Dai、B. Tang、Y. Yang、Z. Li、Y. Ding、L. K. Oxenløwe、M. G. Thompson、J. L. O'Brien、Y. Li、Q. Gong 和 J. Wang，《可编程的基于量子多能级系统的量子处理器》，《自然通讯》13, 1166（2022），出版方：自然出版集团。

[31] A. Ciavarella、N. Klco 和 M. J. Savage，《局部多重态基中SU(3)杨-米尔斯格点规范理论量子模拟的起点》，《物理评论D》103, 094501 2021 2101（），arXiv: .10227 [量子物理]。[32] E. J. Gustafson，《（ 1 + 1 ）维标量量子电动力学基于量子多能级模型的模拟前景》，《物理评论D》103, 114505（2021）。[33] Y. Meurice，《设计和测试紧致阿贝尔希格斯模型量子模拟器的理论方法》，《物理评论D》104, 094513（2021），arXiv:2107.11366 [量子物理]。[34] D. González-Cuadra、T. V. Zache、J. Carrasco、B. Kraus 和 P. Zoller，《利用里德堡平台上的量子多能级系统高效实现非阿贝尔规范理论的量子模拟》，《物理评论快报》129, 160501 2022（），出版方：美国物理学会。[35] T. V. Zache、D. González-Cuadra 和 P. Zoller，《用于模拟含物质格点规范理论的费米子-量子位元组量子处理器》，Quantum 7, 1140（2023），出版方：促进量子科学开放获取出版协会。[36] M. Illa、C. E. P. Robin 和 M. J. Savage，《利用量子多能级系统模拟SO(5)多费米子系统》，《物理评论C》108, 064306（2023），出版方：美国物理学会。[37] P. P. Popov、M. Meth、M. Lewestein、P. Hauke、M. Ringbauer、E. Zohar 和 V. Kasper，《利用量子多能级系统对U(1)格点规范理论进行变分量子模拟》，物理评论研究6, 013202（2024）。[38] G. Calajò、G. Magnifico、C. Edmunds、M. Ringbauer、S. Montangero 和 P. Silvi，《利用离子量子位元组对（1+1）维SU(2)格点规范理论进行数字量子模拟》，PRX Quantum 5, 040309（2024）。[39] G. Calliari、M. Di Liberto、H. Pichler 和 T. V. Zache，《利用大自旋格点模型模拟连续场论》，PRX Quantum 6, 030304（2025）。[40] J. Jiang、N. Klco 和 O. Di Matteo，《立方体上的非阿贝尔动力学：通过基于量子多能级系统的模拟改进量子编译》，《物理评论D》112, 074512 2025（）。[41] M. E. Peskin 和 D. V. Schroeder，*An Introduction to quantum field theory*（Addison-Wesley，美国雷丁，1995）。[42] E. H. Fradkin 和 S. H. Shenker，《含希格斯场的格点规范理论相图》，《物理评论D》19, 3682（1979）。[43] M. B. Einhorn 和 R. Savit，《阿贝尔希格斯模型中的相变》，《物理评论D》19, 1198（1979）。[44] D. J. Callaway 和 L. J. Carson，《阿贝尔希格斯模型：蒙特卡罗研究》，《物理评论D》25, 531（1982）。[45] A. M. Polyakov，《夸克禁闭与规范理论的拓扑》，核物理学B 120, 429（1977）。[46] F. A. Schaposnik，《二维阿贝尔希格斯模型中的赝粒子与禁闭》，《物理评论D》18, 1183（1978）。[47] J. Koch、T. M. Yu、J. Gambetta、A. A. Houck、D. I. Schuster、J. Majer、A. Blais、M. H. Devoret、S. M. Girvin 和 R. J. Schoelkopf，《源自库珀对盒的电荷不敏感型量子比特设计》，《物理评论 A》76, 042319（2007），arXiv:cond-mat/0703002。[48] R. Bianchetti、S. Filipp、M. Baur、J. M. Fink、C. Lang、L. Steffen、M. Boissonneault、A. Blais 和 A. Wallraff，《三能级超导体的控制与层析成像

导电人工原子，《物理评论快报》105，223601（2010）。[49] Y. Cho、K. M. Beck、A. R. Castelli、K. A. Wendt、B. Ev- ert、M. J. Reagor 和 J. L. DuBois，《超导三能级量子比特上任意量子逻辑门的直接脉冲级编译》，《物理评论应用》22，034066（2024）。[50] K. Kumaran、F. Alam、N. Eassa、K. Ferris、X. Xiao、L. Cincio、N. Bronn 和 A. Banerjee，《基于 Transmon 三能级量子比特的自旋-1 AKLT 系统模拟》（2025），arXiv:2412.19786 [量子物理]。[51] N. Ticea、E. Portoles、E. Rosenberg、A. Schuckert、A. Szasz、B. Kobrin、N. Pomata、P. Praneel、C. Miao、S. Kumar、*et al.*，《观测到无序诱导的超流性》（2026），arXiv:2512.21416 [量子物理]。[52] D. Hayes、S. T. Flammia 和 M. J. Biercuk，《通过动态哈密顿量工程实现可编程量子模拟》，《新物理学杂志》16，083027（2014），出版方：IOP 出版社。[53] I. Arrazola、J. S. Pedernales、L. Lamata 和 E. Solano，《囚禁离子中自旋模型的数字-模拟量子模拟》，《科学报告》6，30534（2016），出版方：自然出版集团。[54] S. Choi、N. Y. Yao 和 M. D. Lukin，《多能级量子比特系综中相互作用的动态工程》，《物理评论快报》119，183603（2017），出版方：美国物理学会。[55] N. K. Langford、R. Sagastizabal、M. Kounalakis、C. Dickel、A. Bruno、F. Luthi、D. J. Thoen、A. Endo 和 L. DiCarlo，《实验模拟深强耦合下量子光与物质的动力学》，《自然·通讯》8，1715（2017），出版方：自然出版集团。[56] D. V. Babukhin、A. A. Zhukov 和 W. V. Pogosov，《利用超导量子比特实现多体动力学的混合数字-模拟模拟》，《物理评论A》101，052337（2020），出版方：美国物理学会。[57] T. I. t. Andersen，《模拟-数字量子模拟器上的热化与临界性》，《自然》638，79（2025），出版方：自然出版集团。[58] J. Choi、H. Zhou、H. S. Knowles、R. Landig、S. Choi 和 M. D. Lukin，《多体自旋系统的稳健动态哈密顿量工程》，《物理评论X》10，031002（2020）。[59] H. Zhou、H. Gao、N. T. Leitao、O. Makarova、I. Cong、A. M. Douglas、L. S. Martin 和 M. D. Lukin，《相互作用多能级量子比特系统的稳健哈密顿量工程》，《物理评论X》14, 031017（2024）。[60] W. Morong、K. Collins、A. De、E. Stavropoulos、T. You 和 C. Monroe，《利用囚禁离子构建动态去耦量子模拟》，PRX Quantum 4，010334（2023），出版方：美国物理学会。[61] P. Scholl、H. J. Williams、G. Bornet、F. Wallner、D. Barredo、L. Henriet、A. Signoles、C. Hainaut、T. Franz、S. Geier、A. Tebben、A. Salzinger、G. Z¨urn、T. Lahaye、M. Weidem¨uller 和 A. Browaeys，《里德堡原子阵列中可编程 XXZ 哈密顿量的微波工程》，PRX Quantum 3，020303（2022），出版方：美国物理学会。[62] A. Morvan、V. V. Ramasesh、M. S. Blok、J. M. Kreike- baum、K. O'Brien、L. Chen、B. K. Mitchell、R. K. Naik、D. I. Santiago 和 I. Siddiqi，《三能级量子比特随机基准测试》，《物理评论快报》126, 210504（2021），

arXiv:2008.09134 [量子物理]。[63] N. Goss、S. Ferracin、A. Hashim、A. Carignan-Dugas、J. M. Kreikebaum、R. K. Naik、D. I. Santiago 和 I. Siddiqi，《拓展超导三能级量子处理器的计算能力》，npj Quantum Inf. 10，101（2024）2305，arXiv: .16507 [量子物理]。[64] M. B. Einhorn 和 R. Savit，《阿贝尔希格斯模型中的相变与禁闭》，《物理评论D》19，1198（1979）。[65] T. Banks 和 E. Rabinovici，《格点阿贝尔希格斯模型的有限温度行为》，Nucl. Phys. B 160，349（1979）。[66] A. M. Polyakov，*Gauge fields and strings*（Routledge，2018）。[67] J. C. Halimeh、N. Mueller、J. Knolle、Z. Papi´c 和 Z. Davoudi，《规范理论中非平衡动力学的量子模拟》，（ 2025 2509 03586 ），[ ] arXiv: . 量子物理 .[68] J. Li、G. S. Paraoanu、K. Cicak、F. Altomare、J. I. Park、R. W. Simmonds、M. A. Sillanp¨a¨a 和 P. J. Hakonen，《双音驱动三能级超导系统中的退相干、Autler-Townes效应与暗态》，《物理评论B》84，104527（2011）。[69] P. Krantz、M. Kjaergaard、F. Yan、T. P. Orlando、S. Gustavsson 和 W. D. Oliver，《超导量子比特量子工程师指南》，Applied Physics Reviews 6，021318（2019）。[70] A. Brinkmann，《平均哈密顿量理论导论。一、基础》，磁共振概念A辑45，e21414（2016）。[71] S. Bravyi、S. Sheldon、A. Kandala、D. C. Mckay 和 J. M. Gambetta，《缓解多量子比特实验中的测量误差》，《物理评论 A》103，042605（2021），出版方：美国物理学会。[72] Z. Wang、R. W. Parker、E. Champion 和 M. S. Blok，《高-E_J/E_C 跨蒙量子多能级系统，最高达12个能级》，《物理评论应用》23，034046（2025），出版方：美国物理学会。[73] M. Elliott、J. Joo 和 E. Ginossar，《在单个量子电路中利用多种超导量子比特设计克尔相互作用用》，New J. Phys. 20，023037（2018）。[74] M. Malekakhlagh、E. Magesan 和 D. C. McKay，《交叉共振门运行的第一性原理分析》，《物理评论 A》102，042605（2020），出版方：美国物理学会。[75] J. R. Garbow、D. P. Weitekamp 和 A. Pines，《同核标量相互作用的双线性旋转去耦》，《化学物理快报》93，504（1982）。[76] M. Takita、A. W. Cross、A. D. C´orcoles、J. M. Chow 和 J. M. Gambetta，《超导量子比特容错态制备的实验演示》，《物理评论快报》119，180501（2017），出版方：美国物理学会。[77] L. M. K. Vandersypen 和 I. L. Chuang，《用于量子控制与计算的核磁共振技术》，现代物理评论76，1037（2005），出版方：美国物理学会。[78] N. Goss、A. Morvan、B. Marinelli、B. K. Mitchell、L. B. Nguyen、R. K. Naik、L. Chen、C. J¨unger、J. M. Kreike- baum、D. I. Santiago、J. J. Wallman 和 I. Siddiqi，《超导量子电路的高保真三能级量子比特纠缠门》，《自然·通讯》13，7481（2022）。[79] A. M. Forney、S. R. Jackson 和 F. W. Strauch，《多能级超导系统的多频控制脉冲量子电路，《物理评论 A》81, 012306 (2010)，出版者：美国物理学会。[80] E. Champion、Z. Wang、R. Parker和M. Blok，编码于transmon qudit中的自旋7/2系统的多频控制与测量（ 2024 2405 15857 ），[ ] arXiv: . 量子物理 .[81] N. Lambert、E. Gigu`ere、P. Menczel、B. Li、P. Hopf、G. Su´arez、M. Gali、J. Lishman、R. Gadhvi、R. Agarwal、A. Galicia、N. Shammah、P. Nation、J. R. Johansson、S. Ahmed、S. Cross、A. Pitchford和F. Nori，Qutip 5：Python中的量子工具箱，(2024年)，arXiv:2412.04705 [量子物理]。[82] D. C. McKay、C. J. Wood、S. Sheldon、J. M. Chow和J. M. Gambetta，用于量子计算的高效 Z 门，《物理评论 A》96, 022330 (2017)，出版者：美国物理学会。[83] D. Gottesman，基于高维系统的容错量子计算，《混沌、孤子与分形》10, 1749 (1999)。[84] Y.-M. Di和H.-R. Wei，用基本门综合多值量子逻辑电路，《物理评论 A》87, 012325 2013( )。[85] S. J. Beale、A. Carignan-Dugas、D. Dahlen、J. Emerson、I. Hincks、P. Iyer、A. Jain、D. Hufnagel、E. Ospadov、J. Saunders，*et al.*，True-Q，版本2，13 (2020)。[86] SU(3)作为量子色动力学的色规范群出现，并且在低能极限下采用无质量夸克近似，我们得到一个具有全局左右对称性SU(3)$_L$ ×SU(3)$_R$ 的有效低能理论，该对称性因手征凝聚而自发破缺为SU(3)矢量对称性。[87]E. Magesan、J. M. Gambetta和J. Emerson，量子过程的可扩展且稳健的随机基准测试，物理评论快报 106, 180504 (2011)，arXiv:1009.3639 [量子物理]。[88] E. Magesan *et al.*，通过交错随机基准测试高效测量量子门误差，物理评论快报 **109**, 080505 2012 1203 4550 ( )，[ ] arXiv: . 量子物理 .[89] A. Hashim、R. K. Naik、A. Morvan、J.-L. Ville、B. Mitchell、J. M. Kreikebaum、M. Davis、E. Smith、C. Iancu、K. P. O'Brien、I. Hincks、J. J. Wallman、J. Emerson和I. Siddiqi，面向噪声超导量子处理器上可扩展量子计算的随机编译，《物理评论X》11, 041039 (2021年)。[90] A. Erhard、J. J. Wallman、L. Postler、M. Meth、R. Stricker、E. A. Martinez、P. Schindler、T. Monz、J. Emerson和R. Blatt，通过循环基准测试表征大规模量子计算机，自然·通讯 10, 5347 (2019)，arXiv:1902.08543 [量子物理]。[91] A. Carignan-Dugas、D. Dahlen、I. Hincks、E. Ospadov、S. J. Beale、S. Ferracin、J. Skanes-Norman、J. Emerson和J. J. Wallman，量子计算周期的误差重构与编译校准，(2023年)，arXiv:2303.17714 [量子物理]。[92] *Cirq* (Zenodo, 2025年)。[93] J. Wilkens、M. Ioannou、E. Derbyshire、J. Eisert、D. Hangleiter、I. Roth和J. Haferkamp，玻色子与费米子动力学的基准测试 (2024年)，arXiv:2408.11105 [量子物理]。[94] V. P. Canelles、M. G. Algaba、H. Heimonen、M. Papi˘c、M. Ponce、J. R¨onkk¨o、M. J. Thapa、I. d. Vega 和A. Auer，数字-模拟量子Com-

putation (2023年)，arXiv:2307.07335 [量子物理]。[95] C. H. Valahu、T. Navickas、M. J. Biercuk和T. R. Tan，利用随机位移对量子信息中的玻色模式进行基准测试，PRX Quantum 5, 040337 (2024年)，出版者：美国物理学会。[96] T. Steckmann、D. Luo、Y.-X. Wang、S. R. Muleady、A. Seif、C. Monroe、M. J. Gullans、A. V. Gorshkov、O. Katz和A. Schuckert，模拟量子模拟器中逐次采样涨落的误差缓解 (2025年)，arXiv:2506.16509 [量子物理]。[97] R.-C. Guo、Y. Gu和D. E. Liu，通过哈密顿量重塑或哈密顿量重标度缓解模拟量子模拟中的误差，npj Quantum Information 11, 14 2025年( )，出版者：自然出版集团。[98] N. A. Zemlevskiy、H. F. Froland和S. Caspar，模拟量子模拟中算法误差的优化，《物理评论 A》109, 052425 (2024年)，出版者：美国物理学会。[99] F. Petiziol、M. Sameti、S. Carretta、S. Wimberger和F. Mintert，弱驱动量子系统中三体相互作用的量子模拟，物理评论快报 126, 250504 (2021年)。[100] L. B. Nguyen、N. Goss、K. Siva、Y. Kim、E. Younis、B. Qing、A. Hashim、D. I. Santiago和I. Siddiqi，通过遍历双玻色阶梯增强基于qudit的量子处理器，自然·通讯 15, 7117 (2024年)。[101] E. Champion、A. Schwartz、M. A. Ijaz、X. Xu、S. Campbell、G. T. Landi和M. S. Blok，在transmon qudit中对Lipkin-Meshkov-Glick模型进行模拟量子模拟 (2025年)，版本号：1。[102] U. Haeberlen和J. S. Waugh，磁共振中的相干平均效应，Phys. Rev. 175, 453 (1968)。[103] W. Magnus，线性算符微分方程的指数解，Commun. Pure Appl. Math. 7, 649 (1954)。[104] S. Blanes、F. Casas、J. A. Oteo和J. Ros，Magnus 展开及其若干应用，Phys. Rep. 470, 151 2009( )。[105] J. M. Gambetta、F. Motzoi、S. T. Merkel和F. K. Wilhelm，弱非线性振子中高保真幺正操作的解析控制方法，《物理评论 A》83, 012308 (2011)，出版者：美国物理学会。[106] B. Li、F. C´ardenas-L´opez、A. Lupascu和F. Motzoi，超导多能级量子比特阶梯门的通用脉冲，PRX Quantum 6, 030357 (2025年)，出版者：美国物理学会。[107] P. Groszkowski和J. Koch，Scqubits：用于超导量子比特的Python软件包，Quantum 5, 583 (2021年)。[108] S. P. Chitta、T. Zhao、Z. Huang、I. Mondragon-Shem和J. Koch，超导电路的计算机辅助量子化与数值分析，New J. Phys. 24, 103020 (2022年)。[109] A. Messiah，*Quantum Mechanics*，第1版，第2卷（约翰威立，纽约，1962）。[110] B. K. Mitchell、R. K. Naik、A. Morvan、A. Hashim、J. M. Kreikebaum、B. Marinelli、W. Lavrijsen、K. Nowrouzi，D. I. Santiago 和 I. Siddiqi，《超导量子比特之间硬件高效的微波激活可调耦合》，《物理评论快报》127，200502（2021年），出版方：美国物理学会。[111] K. X. Wei、E. Magesan、I. Lauer、S. Srinivasan、D. F. Bogorin、S. Carnevale、G. A. Keefe、Y. Kim、D. Klaus、W. Landers、N. Sundaresan、C. Wang、E. J. Zhang、M. Steffen、O. E. Dial、D. C. McKay 和 A. Kandala，《利用多色驱动进行哈密顿量工程，实现快速纠缠门和量子串扰消除》，《物理评论快报》129，060501（2022年），出版方：美国物理学会。[112] C. Cohen-Tannoudji、J. Dupont-Roc 和 G. Grynberg，*Atom-photon Interactions: Basic Processes andApplications*，《物理学教科书》（Wiley，Weinheim-VCH，2004年）。[113] Y. Y. Gao、M. A. Rol、S. Touzard 和 C. Wang，《构建超导量子器件实用指南》，PRX Quantum 2，040202（2021年），出版方：美国物理学会。[114] J. Schwinger，《酉算符基》，美国国家科学院院刊 46，570（1960年），出版方：美国国家科学院院刊。[115] H. Carmichael，*An Open Systems Approach to Quantum Optics: Lectures Presented at the Université Libre de Bruxelles October 28 to November 4*，1991年，H. Araki、E. Br´ezin、J. Ehlers、U. Frisch、K. Hepp、R. L. J affe、R. Kippenhahn、H. A. Wei-denm¨uller、J. Wess、J. Zittartz 和 W. Beiglb¨ock 编，《物理学讲义专著》第18卷（Springer Berlin Heidelberg，柏林、海德堡，1993年）。[116] J. Li、M. A. Sillanp¨a¨a、G. S. Paraoanu 和 P. J. Hakonen，《超导三能级系统中的纯退相干》，J. Phys.: Conf. Ser. 400, 042039（2012年）。[117] H.-P. Breuer 和 F. Petruccione，*The theory of open quantum systems* 2002（OUP Oxford，）。[118] F. Turro、T. Chistolini、A. Hashim、Y. Kim、W. Livingston、J. M. Kreikebaum、K. A. Wendt、J. L. Dubois、F. Pederiva、S. Quaglioni、D. I. Santiago 和 I. Siddiqi，《展示用于模拟核反应的量子-经典协同处理协议》，Phys. Rev. A 108，032417（2023年）。[119] M. A. Graydon、J. Skanes-Norman 和 J. J. Wallman，《随机信道设计》（2022年），arXiv:2201.07156 [量子物理]。[120] A. Hashim *et al.*，《量子计算机基准测试与表征实用入门》，PRX Quantum 6, 030202（2025年），arXiv:2408.12064 [量子物理]。[121] N. P. D. Sawaya、T. Menke、T. H. Kyaw、S. Johri、A. Aspuru-Guzik 和 G. G. Guerreschi，《面向光子、振动和自旋s哈密顿量的d能级系统资源高效数字量子模拟》，npj Quantum Inf. 6，49（2020年），arXiv:1909.12847 [量子物理]。[122] E. Younis、C. C. Iancu、W. Lavrijsen、M. Davis 和 E. Smith，伯克利量子综合工具包（BQSKIT）v1，[计算机软件] https://doi.org/10.11578/dc.20210603.2（2021年）。