arXiv:2603.12425v1 [math.NT] 12 Mar 2026

连分数中拉格朗日定理的几何证明

A安东·Lukyanenko 与 Joseph Vandehey EY

摘要。对于正规连分数（CF），具有有限展开的点恰好是有理数；根据拉格朗日定理，具有最终周期展开的点恰好是具有整数系数的非退化二次方程的根。我们将这两项结果推广到适当且离散的岩泽连分数，包括实数、复数、三维、四元数、八元数和海森堡连分数。具体而言，对于点 p，以下三个条件等价： p 具有有限展开，$p \in \mathcal{M}(\infty)$，对应的模群为$\mathcal{M}$；以及 p是 $\mathcal{M}$中某个抛物变换的不动点。最终周期点恰好对应于$\mathcal{M}$中双曲型 元素的不动点；借助 Ahlfors 的克利福德代数形式体系，这些不动点可解释为非退化二次方程的根。特别是，这为最近整数实连分数和 Hurwitz 复连分数中的拉格朗日定理提供了一种新的几何证明。最后，我们讨论恒等变换 $\mathbb{i}+1/\mathbb{i}=0$的推广。

1. 引言

点 $x \in [0,1]$ 具有有限的正规连分数（CF）展开，当且仅当它是有理数；具有无限（最终）周期连分数展开，当且仅当它是二次无理数——也就是说，它是一个系数为整数的非退化二次多项式的根。前者是欧几里得算法的推论，后者则是欧拉定理和拉格朗日定理的内容。这两个结果很容易推广到实数上的其他连分数算法，包括最近整数连分数和 α-CFs [2], ，以及某些复连分数 [6], ；但推广到高维连分数时则更加困难。事实上，除了复数情形之外，二次无理数恰当的推广形式已经不那么显而易见。在 [19],中，海森堡连分数的推广形式是某类二次型的解。

ˆ 本文将采用几何视角。在实数中， $x \in \mathbb{R}$ 是有理数，当且仅当它被一个非平凡矩阵 $M \in SL(2,\ \mathbb{Z})$ 固定，该矩阵满足 $|\mathrm{tr}\ M| = 2$, ˆ 称为抛物矩阵，并通过莫比乌斯变换作用于 $\mathbb{R}$ ，如下所示:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

ˆ 类似地， $x \in \mathbb{R}$是二次无理数，当且仅当它是满足条件 $|\mathrm{tr}\ M| > 2$ 的矩阵 $M \in SL(2,\ \mathbb{Z})$的不动点；这种矩阵称为斜驶矩阵，见定理 4.1 和注 2.7。在一般情形下，我们将证明，具有有限连分数展开等价于是广义模

2020 数学主题分类。 11K50, 11R52, 20F67 .关键词和短语。 连分数、复数连分数、四元数、八元数、岩泽连分数、拉格朗日定理。

群中抛物元的不动点，而具有最终周期连分数展开等价于是同一群中双曲元素的不动点。我们将研究的情形是恰当且离散的岩泽连分数展开 [11], , 其中包括作为特例的最近整数实连分数、 $\alpha \notin \{0, 1\}$的 α-连分数，以及定义在复数、 $\mathbb{R}^3$、四元数和海森堡群上的多个无限族连分数。

我们将在第2节中完整描述岩泽连分数展开；不过，目前只需知道， $\mathbb{X}$是一个环境空间， $\mathcal{Z}$ 是$\mathbb{X}$ 的等距变换格，它们将构成我们连分数展开中的数字， $K \subset \mathbb{X}$ 是 $\mathcal{Z}$ 的基本域，而 ι 是 $\mathbb{X}$上的反演。若模群$\mathcal{M} = \langle \mathcal{Z}, \iota \rangle$ 是离散的，则岩泽连分数是离散的；若 K 的闭包包含于以原点为中心的开单位球内，则它是适当的（因此， ι 是 K上的一致扩张映射）。

前向移位映射 $T\colon K \to K$ 对非零元素的作用为 $Tx = [\iota x]^{-1}\iota x$，其中 $[\iota x] \in \mathcal{Z}$ 是满足 $[\iota x]^{-1}\iota x \in K$的唯一元素。因此， T 在 x 上的作用可以自然地表示为 $\mathcal{M}$ 中的一个元素。请注意，在大多数语境中，我们将 $\mathcal{Z}$ 视为加法对象，因此也可以将其写作$Tx = \iota x - [\iota x]$。于是， $x \in K$ 的连分数展开就是由数字$a_i = [\iota T^{i-1}x]$ 组成的序列。若 $T^i x = 0$，则数字 a_i及其后续数字未定义，展开也就有限。若 a_i 的序列最终呈周期性，即存在某个 $i \neq j$使得 $T^i x = T^j x$，则称该展开最终周期。

我们的主要结果如下：

定理1.1. 设$(\mathbb{X}, \mathcal{Z}, \iota, K)$ 是一个适当且离散的岩泽连分数。当且仅当 $x \in X$是抛物元 $\mathcal{M} = \langle \mathcal{Z}, \iota \rangle$的不动点时，它有有限展开；当且仅当它是 $\mathcal{M}$的双曲元素的不动点时，它有最终周期展开。

例1.2. 考虑数据 $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, $\mathcal{Z} = \mathbb{Z}$, $\iota(x) = -1/x$，以及 $K = [-1/2, 1/2)$，它们给出反向最近整数连分数。相应的模群 $\mathcal{M}$ 是熟悉的 $SL(2, \mathbb{Z})$，因为平移和反演都可以写成 $SL(2, \mathbb{Z})$中的矩阵。这个连分数是离散的，因为 $\mathcal{M}$ 是 $SL(2, \mathbb{R}) = \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}})$的离散子群。这个连分数是适当的，因为区域 K 的闭包包含于开区间$(-1,1)$中，因此 ι 是 K上的一致扩张映射。

没有适当性假设时，定理1.1不成立：

例1.3。 对于偶连分数的负变体（即 $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, $\iota(z) = -1/z$,$\mathcal{Z} = 2\mathbb{Z}$）以及J.Hurwitz连分数（即 $\mathbb{X} = \mathbb{C}$, $\iota(z) = -1/z$, $\mathcal{Z} = \langle 1, \pm\mathrm{i} \rangle$），有 $1 \notin \Gamma(\infty)$。此外，$-1 = [2]$ 是一种给出抛物对称的循环展开 $x \mapsto \frac{-1}{2+x}$。

例1.4。 Schmidt 和 Sheingorn [16]研究了非双曲型不动点的周期展开现象。他们研究的是一种称为 $n\lambda F$ 连分数的 Rosen 连分数变体，由 $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, $\iota(x) = -1/x$, $\mathcal{Z} = \mathbb{Z}\lambda_q$ 和 $K = (0, \lambda_q]$ 给出。他们证明，抛物元的不动点要么具有有限展开，要么以周期 $[2\lambda_q, \lambda_q, \ldots \lambda_q \underbrace{\qquad}_{q-1 \text{ 次}}]$ 周期展开。所有其他周期展开是双曲型矩阵的不动点（反之亦然）。

更多示例，包括对二次无理数与双曲型矩阵不动点之间关系的讨论，可见第4节。

1.1. 实数情形。 现在，我们来概述最近整数连分数情形下定理1.1的证明，而不调用岩泽连分数的全部理论。我们将指出，在一般情形下证明中哪些部分会变得更复杂。随后，我们将在注 1.5 中讨论该证明与经典代数证明的比较。

最近整数连分数情形下定理*1.1*的证明概要。 要证明有限连分数是不动点，首先注意到 ∞是与矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$相关联的抛物变换 $z \mapsto z+1$ 的不动点。若 x 有有限连分数展开，则 $T^n x = 0$对某个 n成立。将 ιT^n写成矩阵 $M \in SL(2,\mathbb{Z})$，并注意到 x是 $M^{-1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}M$的不动点； $M^{-1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}M$是一个抛物矩阵的共轭，因此也是抛物型的。这一步可直接推广到一般情形。

要看出抛物不动点具有有限展开，只需注意到这类不动点是退化二次多项式的解，也就是有理点。现在，将每个有理点 p/q （既约形式）与复上半平面中的相应福特圆联系起来，该圆的半径为 $1/q^2$ ，与实轴上的点 p/q 相切；其中还包括由区域 $\{x+\mathbb{i}y:\ y=1\}$组成的“无穷远处的圆”。利用 $\mathcal{M}$的生成元 $z\mapsto z+a$ 和 ι ，可以证明所有福特圆的集合在相应模群 $\mathcal{M}=SL(2,\ \mathbb{Z})$的作用下保持不变。现在，给定一个有理点 $p/q\in(-1/2,\ 1/2]$，考虑映射 T 对位于 p/q处的福特圆的作用。可以证明，反演会使圆增大一个确定的量（适当性在此处至关重要），而平移保持圆的半径不变。因此，迭代映射 T 会移动 p/q ，同时使其相应的福特圆按一个确定的倍数扩大。由于有限圆的直径有界，它们最终必定变为无穷远处的圆，因此该有理点必须到达 ∞。在定理1.1的完整证明中，我们利用 $\mathcal{M}$ 是一个格这一事实得到广义福特圆，因此每个抛物等距变换的不动点都对应一个 horosphere 球。

接下来，考虑一个最终周期点 $x\in K=(-1/2,\ 1/2]$，为简便起见，假设它是周期为 n 的纯周期点。那么，作用于 x 的映射 T^n 与矩阵 $M\in SL(2,\ \mathbb{Z})$ 相关联。由此可知， M 是双曲型的，因为它在 x 附近具有扩张性：事实上，广义高斯映射是由（等距）平移和反演 ι 复合而成，这些变换在 K 中的点附近具有扩张性。注意，在 $\mathbb{R}$ 上，双曲不动点恰好对应于非退化的整数二次方程的解，参见定理 4.1。

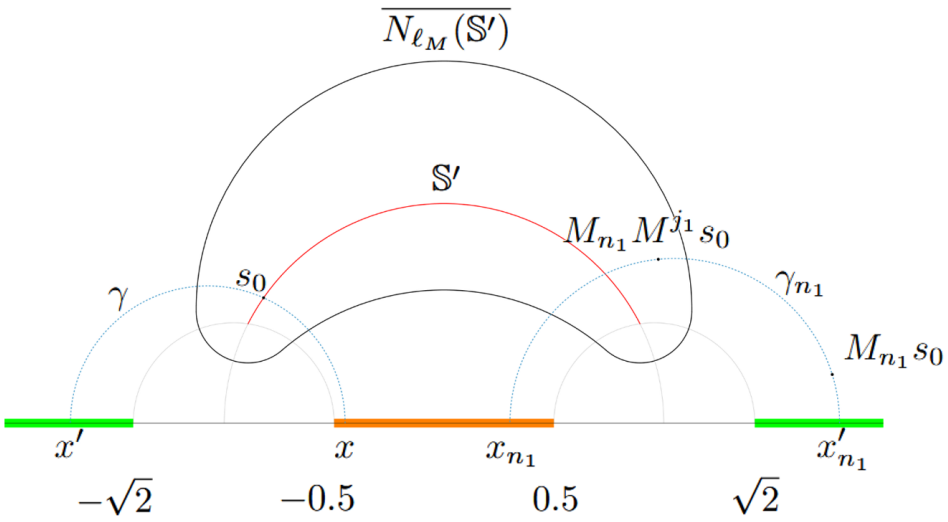
证明的最后一部分依赖于一个关于模群在双曲空间上的作用的引理：对于 $K_1,\ K_2\subset\mathbb{H}$ 紧集，集合 $\{g\in\mathcal{M}:\ gK_1\cap K_2\neq\emptyset\}$是有限的。为证明这一点，将点 $x+\mathbb{i}y\in\mathbb{H}$ 与矩阵 $f(x+\mathbb{i}y)=\begin{pmatrix}y & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in SL(2,\ \mathbb{R})$对应起来，该矩阵将$\mathbb{i}$ 映射到 $x+\mathbb{i}y$。注意到$\mathbb{i}\in\mathbb{H}$ 的稳定子是

紧集，我们有集合

$$\{g_1 g_2 g_3^{-1} : g_1 \in f(K_2), g_2 \in \mathrm{Stab}_{SL(2,\mathbb{R})}(\mathrm{i}), g_3 \in f(K_1)\}$$

是紧的，并且由所有将 K_1 中某点映射到 K_2 中某点的等距变换组成。由于模群 $\mathcal{M} = SL(2, \mathbb{Z})$ 是离散的，它在这个紧集中的点只有有限多个，正如所需。

图 1. 最近整数连分数的拉格朗日定理证明的几何设置，假设（x, x'）间距较大以简化论证，即 $|x| < 0.5$ 和 $|x'| > \sqrt{2}$。



我们还需要一个几何构造，见图 1。在本证明中，如果一对点（a, b）满足 $|a| < 1/2$ 和 $|b| > \sqrt{2}$，我们就称其为间距较大。双曲空间中连接这两点的测地线会在单位圆上经过一个点，该点的虚部下界为 $C = (1/7)\sqrt{3(9 - 4\sqrt{2})} > 0$。令 $\mathbb{S}' = \{z \in \mathbb{S} : \mathrm{Im}(z) \geq C\}$。对于任意 $\epsilon > 0$, $\mathbb{S}'$ 的闭双曲邻域$N_\epsilon(\mathbb{S}')$ 仍然是紧的。

现在，设 M 为一个具有不同的不动点 $x, x' \in \hat{\mathbb{R}}$ 的斜驶矩阵，这两点由双曲测地线 γ连接。于是， M 沿 γ 移动某段距离 ℓ_M。我们假设 $x \in K$，并观察到 x 在 T 下具有无限正向轨道：正如我们已经证明的，有限轨道将意味着对某个 $M' \in SL(2, \mathbb{Z})$有 $x = M'\infty$，但那样$M'MM'^{-1}$就会是 $SL(2, \mathbb{Z})$中固定 ∞的双曲元素，这是不可能的，因为 $M'MM'^{-1}\infty = \infty$与$\det M'MM'^{-1} = 1$蕴含 $|\mathrm{tr}\ M'MM'^{-1}| = 2$。令 M_n 为广义高斯映射在 x 处的第 n 次迭代所对应的矩阵，使得 $M_n x = T^n(x)$, 并令 $x_n = M_n x$、 $x'_n = M_n x'$ 和 $\gamma_n = M_n \gamma$。我们首先断言，对于某个 n，有 $|x'_n| > \sqrt{2}$，从而数对（x, x'）具有宽间距。为此，假设 $|x'| < \sqrt{2}$，并令 a 为 x 的第一个数字。利用反演恒等式 $|x||y||1/x - 1/y| = |x - y|$ 以及事实 $|x| \leq 1/2$, 我们得到 $|x_1 - x'_1| = |M_1(x) - M_1(x')| = |(1/x - a) - (1/x' - a)| = |x|^{-1}|x'|^{-1}|x - x'| \geq \sqrt{2}|x - x'|$。

在进一步迭代下，这些点继续彼此排斥，直到 x' 被推出区间 $(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$ 为止。进一步的迭代可能会使 $\overline{x},\ \overline{x'}$ 的迭代点重新靠近，但它最终必定再次将它们推开，从而得到一个无限序列n_i，使得对于每个 $i \geq 0$，都有 $|x'_{n_i}| > \sqrt{2}$。为简单起见，我们假设 $n_1 = 0$，并令 $s_0 = \gamma \cap \mathbb{S} \in \mathbb{S}'$。现在，对于 $i > 1$，点 $M_{n_i} s_0$ 可能远离 $\mathbb{S}$，但我们可以利用双曲映射 M 的幂沿着 γ_i 移动它，使得对于某个 j_i，有 $M_{n_i} M^{j_i} s_0 \in N_{\ell_M}(\mathbb{S}')$。因此，我们得到无穷多个矩阵 $M_{n_i} M^{j_i}$，它们将 s_0 送入 $N_{\ell_M}(\mathbb{S}')$。由于上述几何引理，这样的矩阵只有有限多个，因此存在指标 $i_1 \neq i_2$ 使得$M_{n_{i_1}} M^{j_{i_1}} = M_{n_{i_2}} M^{j_{i_2}}$。由于 M 固定 x，这意味着 $M_{n_{i_1}} x = M_{n_{i_2}} x$，从而 x 在广义高斯映射下的轨道最终具有周期性，因此 x 的数字也最终具有周期性，正如所需。□

注 1.5. 上述论述中最困难的部分是拉格朗日定理的证明。该定理指出，任意二次无理数的连分数展开最终都会成为周期连分数。关于这一定理，已有许多不同的证明：

> (1) 一种方法（见 [12]）证明，$T^n x$ 的最小整系数多项式都具有相同的判别式。接着证明这些多项式的系数有界，由此可知，多项式（因而 $T^n x$ 的值）最终必会重复。这也是 [6]所采用的方法。(2) 另一种方法（见 [3, 第 2] 章）沿用前一种方法的第一步，但随后证明，在 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ 中，最小多项式具有给定判别式的元素只有有限多个。(3) 第三种方法（见 [8, 定理 1.2]）证明，每个 $T^n x$ 都可以写成 $\frac{a+\sqrt{d}}{b}$ 的形式，其中 $b|(a^2 - d)$。这一关系将 $T^n x$ 的可能取值限制在一个有限集合中。

上述许多方法都隐含地利用了 $\mathbb{Z}$ 是有序离散集这一事实来证明有限性；即使 Dani 关于复数的工作，也利用了 $\mathbb{C}$ 是一个带有满足三角不等式的乘法范数的交换环。本文所给出的方法巧妙地避免了对环结构或序的任何假设，因为有限性直接源于模群的离散性。因此，我们的结果可以推广到不具备此类结构的空间，包括 $\mathbb{R}^3$ 和海森堡群。

1.2. 组织。 我们在 §2 中定义岩泽连分数，并描述相关几何。随后在 §3 中证明主定理。接着，我们在 §4 中重点刻画双曲元素的不动点。在 4.1 节中，我们证明，$\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 的双曲型不动点恰好是非退化二次方程的解。随后在 §4.2 节中，我们给出克利福德矩阵框架，并分别在 §4.3 和 §4.4 节中将其应用于三维和四维（四元数）连分数。最后，我们在 §5 中谈及四元数的一些有趣恒等式，并推广连分数恒等式 $\mathbb{i} + 1/\mathbb{i} = 0$。

1.3. 致谢。 本研究部分由第一作者获得的西蒙斯基金会资助 MPS-TSM：“高维连分数的几何与动力学”提供支持。

2. 岩泽连分数的几何

我们采用如下定义的岩泽连分数框架 [11], 。

取一个实结合除法代数 $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}$,四元数$\}$ 和 $n \in \mathbb{N}$。岩泽反演空间 $\mathbb{X} = \mathbb{X}_k^n$ 建模于 $k^n \times \mathrm{Im}(k)$，其群运算为 $(z,t) * (z',t') = (z + z', t + t' + 2\mathrm{Im}(z \cdot z'))$，恒等变换为 $0 = (0,0)$，群逆元由 $(z,t) * (-z,-t) = (0,0)$ 给出。通过选取规范 $|(z,t)| = \sqrt[4]{\|z\|^4 + \|t\|^2}$，可在 ~~$\mathbb{X}$ 上~~定义一个左不变度量，并令 $d((z,t),(z',t')) = |(-z,-t) * (z',t')|$。 $\mathbb{X}$ 上的自然反演是 Korányi反演 $\iota_-(z,t) = \left(\frac{-z}{\|z\|^2+t}, \frac{-t}{\|\|z\|^2+t\|^2}\right)$，

满足以下恒等式

$$|\iota_-(p)| = |p|^{-1}, \qquad d(\iota_- p, \iota_- p') = |p|^{-1} |p'|^{-1} d(p,p'). \tag{2.1}$$

与之关联的双曲空间 $\mathbb{H}$（一种负曲率秩一对称空间）以极限球面坐标表示为 $\mathbb{X} \times \mathbb{R}_+$。将 $\mathbb{R}$ 与 $\mathrm{Re}(k)$ 等同，我们把 $\mathbb{H}$ 中的一个点视为三元组 $(z,\ t,\ s)$，其中 $z \in k^n$、 $t \in \mathrm{Im}k$，且 $s \in \mathrm{Re}(k)$；此外，记 $w = s + t \in k$，使得 $(z,\ t,\ s) = (z,\ w)$ 成为 k^{n+1}中上半空间的一个点。我们将 $\mathrm{ht}_\infty(z,\ t,\ s) = s$ 称为从无穷远处[1] 起算的 *horosphere* 高度。

考虑以下群作用：群 $\mathbb{X}$ 通过 $(p,s) \mapsto (p_0 * p, s)$ 作用， $\mathbb{R}_+$ 通过 $(p,s) \mapsto (\delta_r p, r^2 s)$ 作用，其中 $\delta_r(z,t) = (rz, r^2 t)$，以及阶为二的扩展Korányi反演 $\iota_-(z,w) = \left(\frac{-z}{\|z\|^2+w}, \frac{w}{\|\|z\|^2+w\|^2}\right)$。规范度量通过规范 ~~$|(z,w)| = \|\|z^2\| + w\|^{1/2}$~~ 并利用 $\mathbb{X}$ 作用下的不变性扩展到 $\mathbb{H}$，从而得到 $\mathbb{H}$ 上的 Cygan度量 d_C，它推广了环境空间上的欧几里得度量。 $\mathbb{H}$上的负曲率黎曼度量（此处不作定义）在 $\mathbb{X}$、 $\mathbb{R}_+$以及Korányi反演的作用下保持不变。根据岩泽（或 KAN）分解， $\mathbb{H}$ 的等距变换群可写成直和 $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}) = KAN$，其中 $N = \mathbb{X}$、 $A = \mathbb{R}_+$，而 K 是固定点 $(0,1) \in \mathbb{H}$的紧李群。注意，在不讨论岩泽分解时，我们会以其他方式使用变量K、 A、 N，希望读者能根据上下文辨明其含义。

注 2.1。 最简单的情形是 $k = \mathbb{R}$和 $n = 2$，得到带有通常度量的 $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ ，以及一种特殊的双曲上半平面模型。具体而言， $\mathbb{H}$ 是具有坐标 (z,w) 的 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ ，其扩展 Cygan 度量由 $|(z,w)| = \sqrt{z^2 + w}$刻画，而 Korányi 反演为 $\iota_-(z,w) = \left(\frac{-z}{z^2+w}, \frac{w}{z^2+w}\right)$。要转换为带欧几里得度量和反演 $x + \mathbb{i}y \mapsto \frac{-1}{x+\mathbb{i}y}$的 Poincaré 上半平面，只需取 $x + \mathbb{i}y = z + \mathbb{i}\sqrt{w}$。

我们需要以下关于 $\mathbb{H}$ 的等距变换离散群作用的著名引理；为完整起见，我们略述其证明。

引理 2.2. 对于 K_1，若 $K_2 \subset \mathbb{H}$ 为紧集且 $\mathcal{M}$ 为$\mathbb{H}$的等距变换离散群，则集合 $\{g \in \mathcal{M} : gK_1 \cap K_2 \neq \emptyset\}$ 是有限的。

[1]由于在 $k = \mathbb{R}$ 和 $k \neq \mathbb{R}$ 的情形下度量的归一化不同，因此对于 $k = \mathbb{R}$ ，函数 ht_∞ 实际上是从无穷远处量起的 horosphere 高度的平方，参见注 2.1。

证明。 群 $U(k,\ n,\ 1)$ =等距变换群(ℍ)在 $\mathbb{H} = \mathbb{H}^n_k$ 上的作用具有岩泽分解 $U(k,\ n,\ 1) = KAN$。群 A与 N已在上文描述： A同构于 $\mathbb{R}_+$，并通过广义伸缩作用于极限球面坐标，而 N 同构于 $\mathbb{X}$，并通过第一坐标中的左乘作用于极限球面坐标。群 AN 在 $\mathbb{H}$上单可迁地作用。这给出了由 $an \mapsto an(0,\ 1)$确定的从 AN 到 $\mathbb{H}$ 的双射，其逆映射随之为微分同胚 $f:\ \mathbb{X} \to AN$。最后，群 K 同构于紧群 $U(k,\ n-1)$，并对应于绕点$(0,\ 1)$的旋转。由此可得，集合

$$\{g_1 g_2 g_3^{-1} : g_1 \in f(K_2), g_2 \in U(k, n-1), g_3 \in f(K_1)\}$$

是紧的，即 $U(k,\ n,\ 1)$ 在 $\mathbb{H}$上的作用是恰当的。由于 $\mathcal{M}$ 是离散的，它与上述集合相交于有限个点，正如所需。□

我们还需要了解 $\mathbb{H}$ 中的测地线如何与球面 $\mathbb{S} = \{(z,\ w)$ 相交：$|(z,\ w)| = 1\}$。我们将使用以下引理得到集合 $\mathbb{S}'$，见图 1。

引理 2.3。 设 $0 < \epsilon < 1 < \epsilon'$。那么存在 $h_0 > 0$，使得任意一条测地线γ，其端点为（a, b）且满足 $|a| < \epsilon$ 和 $|b| > \epsilon'$，都与规范球面 $\mathbb{S}$相交于一些点，这些点相对于无穷远的 *horosphere* 高度有下界 h_0。

证明。 根据介值定理，测地线必定与规范单位球面相交。

固定一条光滑参数化 $\gamma_0:\ [0,\infty] \to \mathbb{H}$，表示连接点 0、∞的测地线，例如 $\gamma_0(t) = (0,\ 0,\ t)$。我们可以通过作用幂零群 N中的元素，使第一个端点在紧集$B(0,\ \epsilon)$内变化。同样，我们可以通过作用 $\iota_- N \iota_-$ 中的元素移动第二个点，其中 ι_- 是 Korányi反演。综上，这给出了一个光滑映射 $\phi:[0,\infty] \times B(0,\ \epsilon) \times (\mathbb{X} \setminus B(0,\ \epsilon')) \to \mathbb{H}$，它将所有相关测地线上的点参数化，包括边界上的点。令 $\psi(t,\ a,\ b) = |\phi(t,\ a,\ b)|$，则 $\psi^{-1}(1)$ 包含所有与球面的交点。这是一个闭集，因此也是紧集。

$\psi(t,\ a,\ b)$从无穷远处量起的 horosphere 高度当且仅当 $t \in \{0, \infty\}$ 时等于 0，ˆ但测地线端点位于 $B(0,\ \epsilon)$ 或 $X \setminus B(0,\ \epsilon')$ 中，而这两个集合都不与𝕊相交。因此，$\psi^{-1}(1)$ 中每个点的 horosphere 高度实际上都为正，并且在 $\psi^{-1}(1)$ 上达到最小值。□

现在，为了在 $\mathbb{X}$ 上定义一个特定的连分数算法，固定一个离散群$\mathcal{Z} \subset$ Isom(𝕏)，它同时作用于 $\mathbb{X}$和 $\mathbb{H}$；再固定一个属于 $\mathcal{Z}$ 的基本域 $K \subset \mathbb{X}$ （包含在闭单位球内），以及一个反演 $\iota = \mathcal{O} \circ \iota_-$。根据数据 $(k,\ n,\ \mathcal{Z},\ K,\ \iota)$，定义：

(1) 取整函数 $[\cdot]_K:\ \mathbb{X} \to \mathcal{Z}$ 由 $[p]_K^{-1}(p) \in K$刻画，(2) 广义高斯映射 T: $K \setminus \{0\} \to K$ 由 $T(p) = [\iota p]^{-1}(\iota p)$定义，(3) 点 $p \in K$的连分数位 $\{a_i(p)\}$ 由 $a_i(p) = [\iota T^{i-1} p]$ 给出，若 $T^n p = 0$ 则以 $i = n$ 结尾，(4) 对应于一个由 $a_i \subset \mathcal{Z}$ 构成的序列，其连分数为 $[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n] = a_1 \iota a_2 \iota \cdots a_n(0)$，对于无限序列取极限，(5) 广义模群 $\mathcal{M} = \langle \mathcal{Z},\ \iota \rangle$，

(6) K的半径：$\mathrm{rad}(K) = \sup\{|p|\colon p \in K\}$,~(7) 由满足$p \in K$和 $d_C((p,\ s),\ (0,\ 0)) \geq 1$的点 $(p,\ s)$组成的球门柱区域 $K \subset \mathbb{X} \times \mathbb{R}_+ = \mathbb{H}$。

例 2.4. 正则连分数通过 $\mathbb{X} = \mathbb{R}$，$\iota(x) = 1/x$，$K = [0, 1)$ 给出 $[x]_K = \lfloor x \rfloor$和 $\mathcal{Z} = \mathbb{Z}$，其对应的双曲空间为 $\mathbb{H} = \mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ 实双曲平面，模群为 $\mathcal{M} \cong SL(2,\ \mathbb{Z})$。

例 2.5. Hurwitz 复连分数通过 $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2$，$\iota(x) = \frac{(x,\ -y)}{x^2+y^2}$，$K = [-1/2, 1/2) \times [-1/2, 1/2)$ 以及 $\mathcal{Z} = \mathbb{Z}[\mathbb{i}]$, 给出，其对应的双曲空间为 $\mathbb{H} = \mathbb{H}^3_{\mathbb{R}}$，广义模群为 $\mathcal{M} \cong SL(2,\ \mathbb{Z}[\mathbb{i}])$。

若一个岩泽连分数是真的，则 $\mathrm{rad}(K) < 1$，此时 $\iota|_K$ 是一致扩张的。若 $\mathcal{M}$ 是离散的，则该连分数是离散的。对于离散且真性的岩泽连分数，广义模群 $\mathcal{M}$ 是一个非一致格，也就是说，商模流形 $\mathcal{M}\backslash\mathbb{H}$ 具有有限体积，但并不紧致。事实上，可以证明（见 [11]）~，$\mathbb{H}$ 中的任意一点都可以通过一系列平移（不会影响 s）和反演移入 K （当 $p \in K$时，反演会增大 s ）。对于最近邻整数实连分数，球门柱区域 K 本身就给出了 $SL(2,\ \mathbb{Z})$ 的熟知基本~域。更一般地，K 仅在有限指数下包含一个针对$\mathcal{M}$的基本域，参见 [11]中关于隐藏对称性的讨论。尽管如此，真性假设仍意味着 K 具有有限体积。

对于点 $(p, s) \in \mathbb{X} \times \mathbb{R}_+ = \mathbb{H}$，定义从无穷远出发的 horosphere 高度为 $\mathrm{ht}_\infty(p, s) = s$。形如 $\{(p, s) : s = s_0\}$ 的集合是位于 ∞的 horosphere，而形如 $\{(p, s) : s \geq s_0\}$ 的集合是位于 ∞的 horoball。位于其他点的 horosphere（分别为 horoball）是任意$g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H})$作用下 horosphere（分别为 horoball）的像，并在点 $g(\infty)$处与边界相切。特别地，对于 horoball $\mathcal{B}$，当且仅当 $\mathcal{B}$以 ∞为基点时，$\sup\{\mathrm{ht}_\infty(p, s) : (p, s) \in \mathcal{B}\}$ 为无穷大。对于 $\mathbb{H} = \mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$，horosphere 是圆或水平直线，而 Γ-不变的 horosphere 集合是 Ford 圆的推广。

注 2.6。无穷远点稳定子 $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Isom}(\mathbb{H})}(\infty)$ 将 ∞ 处的 horosphere 映到 ∞处的 horosphere，并将 ∞ 处的 horoball 映到 ∞处的 horoball，因此可以内在地讨论 horosphere 和 horoball，但不能讨论它们的高度。在 [11], 中，我们只关注以形如 $g(\infty)$（其中 $g \in \mathcal{M}$）的点为基点的 horoball。在这种情形下，$\mathrm{Stab}_{\mathcal{M}}(\infty)$ 仅由保持 ∞ 处 horosphere 高度不变的变换构成，因此对于 $g \in \mathcal{M}$，可以定义 $\mathrm{ht}_{g(\infty)}(p,\ s) := \mathrm{ht}_\infty(g^{-1}(p,\ s))$。本文不会使用这一定义。

Gromov 双曲空间 H 的等距变换 g 属于四种互斥类型之一，参见例如 [7]:

(1) 恒等变换。(2) 椭圆型：若它不是恒等变换，且在 H 中有一个不动点。边界上的任何不动点都既非吸引的，也非排斥的。(3) 抛物型：若它在 ∂H 中恰有一个不动点，且该点既非吸引的，也非排斥的。(4) 双曲型：若它在 ∂H 中恰有两个不动点，其中一个是吸引的，另一个是排斥的。

对于以极限球面坐标表示的 $\mathbb{H} = \mathbb{H}_k^{n+1}$，可以通过用 Isom($\mathbb{H}$) 中的元素进行共轭，进一步规范化抛物型和斜驶等距。映射 g 是：

（1）抛物型当且仅当它等价于形如 $(p, s) \mapsto (p_0, 0) * (p, s)$ 的映射，其中 $p_0 \neq 0$；（2）双曲型当且仅当它等价于形如 $(p, s) \mapsto O(\delta_r(p, s))$ 的映射，其中 δ_r 是因子为 $r > 0$ 的伸缩，且 O 是仅作用于第一坐标的 $\mathbb{X}$旋转；（3）双曲型，若它是双曲型且 $O = \mathrm{id}$。

特别地，螺旋测地等距变换沿连接其边界上不动点的测地线移动；若该等距变换不是双曲型，则还会绕该测地线扭转。

注记 2.7. 对于 $SL(2, \mathbb{R}) =$ 等距变换群$^+(\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}})$ 中的矩阵，条件双曲型与双曲型 一致，并且在该语境中，双曲型 是更为常见的术语。

3. 主定理的证明

我们分两部分证明定理1.1。首先，我们刻画有限连分数：

引理 3.1. 固定一个真的实岩泽连分数。则对于点 $p \in \mathbb{X}$，下列各项等价：

(1) p 是 $\mathcal{M}$ 中某个抛物元的不动点，*(2)* $p \in \mathcal{M}(\infty)$，*(3)* p 只有有限多个连分数数字。

为了理解 $\mathcal{M}$ 的任意抛物元，我们将需要几何有限群理论。在包含实连分数、复连分数和四元数连分数的 $\mathbb{R}^n$ 这一特殊情形中，主要参考文献是 Ratcliffe 的著作 [15]。在包含与复双曲空间相关联的海森堡连分数的更广泛背景下，我们遵循 Bowditch [4]。

引理 3.2. 设 $\Gamma \subset$ 等距变换群$(\mathbb{H}^n_k)$ 是一个格。则它是几何有限的。

证明。Bowdich [4] 给出了四个等价条件，用以刻画夹曲率情形下的几何有限性，其中包括秩一对称空间 $\mathbb{H}^n_k$。条件 F5 指出，Γ的每个有限子群的阶都有一个上界，并且 $\Gamma\backslash\mathbb{X}$的凸核的某个邻域具有有限体积。根据 [4]的命题 5.4.2，对于格而言，第一个条件是多余的。由于 Γ 是一个格， $\Gamma\backslash\mathbb{X}$的整体具有有限体积（且凸核与 $\Gamma\backslash\mathbb{X}$ 重合），因此第二个条件也成立。□

在几何有限群中，抛物元可以扩展为较大的子群。借鉴 [4], 的引理 6.4，我们有：

ˆ**引理 3.3**。 假设 $\Gamma \subset$ *Isom*$(\mathbb{H})$ 是几何有限的，且 $p \in \mathbb{X} = \mathbb{X} \cup \{\infty\}$是一个抛物元的不动点。那么 p 是一个有界抛物不动点，即ˆ$\mathit{Stab}_\Gamma(p)\backslash(\mathbb{X} \setminus \{p\})$ 是紧的。

[4] 的引理 6.2 为离散群极限集中的每个有界抛物点关联一个标准尖 cusp 区域。在我们的情形中，所有抛物点都是有界抛物点，且标准尖 cusp 区域都是 horosphere 球，因此该结果为我们在每个抛物不动点处给出一个广义福特圆：

ˆ**引理 3.4.** 假设 $\Gamma \subset \mathit{Isom}(\mathbb{H})$ 是一个格。设 $\Pi \subset \mathbb{X}$ 是 Γ的抛物不动点集。那么存在一组两两不相交的 *horoball* $B = \{\mathcal{B}_p : p \in \Pi\}$，它在 Γ作用下保持不变，即对于每个 $\gamma \in \Gamma$ 和 $\mathcal{B} \in B$，都有$\gamma(\mathcal{B}) \in B$。

根据引理 3.4 的一个推论，我们可以区分 $\mathbb{X}$ 中的抛物不动点与 $\mathbb{X}$中的双曲型不动点：

推论 3.5. 假设 $\Gamma \subset \mathit{Isom}(\mathbb{H})$ 是一个格。若 $p \in \mathbb{X}$ 是 Γ中某个抛物元的不动点，则它不是 Γ中任何双曲元素的不动点。

ˆ证明. 由于 Isom($\mathbb{H}$) 在 $\mathbb{X}$上具有传递性，我们不妨假设 $p = \infty$ 及其对应的 horosphere 球 $\mathbb{B}$ 由 $\mathrm{ht}_\infty(z, t, s) = s \geq s_0$ 定义，其中 s_0。若 p是保持 $\mathbb{B}$不变的双曲元素 γ 的不动点，那么它在 $\mathbb{X}$中还有另一个不动点，我们可将其归一化为 $(0, 0) \in \mathbb{X}$。但这样一来，它会保持点 $(0, 0, s_0)$ 不变，这意味着 γ 实际上是抛物型而非双曲型，矛盾。□

有了这些结果，我们就可以证明引理 3.1：

引理 *3.1* 的证明。 (3→2) 若 p 只有有限个数字，设为 $\{a_i(p)\}_{i=1}^n$，则根据定义，$p = a_1\iota a_2\iota \dots a_n(0)$，因此 $p = a_1\iota a_2\iota \dots a_n\iota(\infty)$。故 $p \in \mathcal{M}(\infty)$。
(2→1) 若 $p \in \mathcal{M}(\infty)$，则 $p = \gamma\infty$ 对于某个 $\gamma \in \mathcal{M}$成立，因此它被每个抛物元 $\gamma a\gamma^{-1}$ 固定，其中 $a \in \mathcal{Z} \setminus \mathrm{id}$。
(1→3) 令 $B = \{\mathcal{B}_p\}$ 为引理 3.4 给出的互不相交的 horoball 集合，其指标由 $\mathcal{M}$ 中抛物元的不动点给出。特别地，由于 $\mathcal{Z}$ 含有非平凡抛物元，点 $\infty \in \mathbb{X}$ 是一个抛物不动点，而 B在无穷远处包含一个高度为 h_0 的 horosphere 球：$\mathcal{B}_\infty = \{(p, s) \in \mathbb{X} \times \mathbb{R}_+ : s > h_0\}$。现在，设 $p \in \mathbb{X}$ 是另一个抛物不动点，其对应的 horoball 为 $\mathcal{B}_p$。我们可以通过施加 $[p]_K^{-1}$ 对 p 进行归一化，使得 $p \in K$。回顾一下，对于集合 $A \subset \mathbb{H}$，从 ∞ 出发的 horosphere 高度由 $\mathrm{ht}_\infty(A) = \sup\{s : (p, s) \in A\}$ 给出。显然，我们的归一化不会影响 $\mathcal{B}_p$的 horosphere 高度。若此时有 $p = 0$，则证明完毕。否则，施加 ι 会产生一个新的 horoball $\mathcal{B}_{\iota p}$；根据 [9], 的引理 3.8，其 horosphere 高度满足 $\mathrm{ht}_\infty(\iota(\mathcal{B}_p)) = |p|^{-1}\,\mathrm{ht}_\infty(\mathcal{B}_p) > (\mathrm{rad}\, K)^{-1}\,\mathrm{ht}_\infty(\mathcal{B}_p)$。重复进行归一化和反演 i 步后，将得到一个从无穷远处量起的 horosphere 高度至少为 $(\mathrm{rad}\, K)^{-i}\,\mathrm{ht}_\infty(\mathcal{B}_p)$ 的 horoball。若此过程无限重复，该高度将超过 $\mathcal{B}_\infty$ 的 horosphere 高度，从而导致它们之间存在非平凡交集，这与互不相交矛盾。由于每一步反演后再归一化都通过映射 T 作用，我们可知经过有限步后必有 $T^i p = 0$，如所求。□

为证明定理1.1的后半部分，我们证明广义欧拉–拉格朗日定理：

引理 3.6。 设给定一个适当且离散的岩泽连分数。则 $x \in \mathbb{X}$具有最终周期展开，当且仅当它是相应双曲空间 $\mathbb{H}$中某个螺旋测地等距变换的不动点。

证明。 不妨先假设 $x \in K$ 是纯周期的，因此$T^n x = x$对某个 $n > 0$成立。也就是说，$a_n^{-1}\iota a_{n-1}^{-1}\iota \cdots a_1^{-1}\iota x = x$，其中数字为 $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{Z}$ ⊂等距变换群(𝕏)。将这些映射扩展为双曲空间上的等距变换，可得$M_n x = x$，其中 $M_n \in$属于等距变换群(ℍ)。为证明 M_n 是双曲型，注意到 x 是一个排斥不动点：对于邻近点 y，根据反演恒等式 (2.1)，有

$$d(\iota x, \iota y) = |x|^{-1} |y|^{-1} d(x, y) > \mathrm{rad}(K)^{-1} |y|^{-1} d(x, y).$$

由于 a_1 是等距变换，

$$d(a_1^{-1}\iota x, a_1^{-1}\iota y) > \mathrm{rad}(K)^{-1} |y|^{-1} d(x, y).$$

重复上述过程，可得

$$d(M_n x, M_n y) \geq \mathrm{rad}(K)^{-n} |M_{n-1} y|^{-1} \cdots |y|^{-1} d(x, y)$$

我们可以选取足够接近 x 的 y，使得对于每个 $m < n$，迭代 $M_m y$ 都满足 $|M_m y| < 1$，从而得到 $d(M_n x, M_n y) \geq$rad$(K)^{-n} d(x, y)$。这表明 x 是 M_n 的排斥不动点，证毕。

反之，假设 $M \in \mathcal{M}$ 是双曲型的，具有不同的不动点 x，x'，其中$x \in K$，并由一条双曲测地线 γ 连接。固定与 x 的广义高斯映射相关联的序列映射 $M_n \in \mathcal{M}$，使得 $T^n x = M_n x$。令 $x_n = M_n x$、$x'_n = M_n x'$ 和 $\gamma_n = M_n \gamma$。根据推论 3.5 和引理 3.1，该序列是无限的。

我们称点对 (a, b) 具有间距较大性质，如果 $|a| <$ rad(K) 且 $|b| >$rad$(K)^{-1/2}$。我们断言，存在一个 $n_0 > 0$，使得点对 (x_{n_0}, x'_{n_0}) 具有间距较大性质。事实上，如果在最初的 n 次迭代中均不满足此条件，那么根据 (2.1)，有 $d(M_n(x)\ M_n(x')) \geq$ rad$(K)^{-n/2} d(x, x')$，这将导致矛盾，因为随着 n 增大，这些点被迫相距任意远，而$M_n(x)$仍保留在 K 中。当 (x_n, x'_n) 具有间距较大性质时，引理 2.3 保证，连接它们的测地线 γ_n 至少有一个点经过规范单位球面 $\mathbb{S}$，且该点的 horosphere 高度有某个 $h_0 > 0$ 作为下界。令 $\mathbb{S}' = \{s \in \mathbb{S} : \mathrm{ht}_\infty(s) \geq h_0\}$，注意到它是 $\mathbb{H}$ 的紧子集，并令 $s_0 \in \gamma \cap \mathbb{S}'$ 为某个交点；由于非恒定曲率，该交点可能并不唯一。

为简化记号，假设 $n_0 = 0$。继续迭代，可能会出现 $|M_{n_0+1} x'| <$rad$(K)^{-1/2}$ 的情况，此时 (2.1) 再次使 x 和 x' 的迭代结果彼此远离。因此，对于某个 $n_1 > n_0$，我们将再次有 (x_{n_1}, x'_{n_1}) 是宽间距的，其中 γ_{n_1} 经过集合 $\mathbb{S}'$。由于 $s_0 \in \gamma$，我们知道 $M_{n_1} s_0 \in \gamma_{n_1}$，但 $M_{n_1} s_0 \in \mathbb{S}'$ 未必仍然成立。相反，注意映射 M 沿着 γ 移动点，平移距离为 ℓ_M，且 M_{n_1} 保持这一距离不变，因此 $M_{n_1} M^j s_0$、$j \in \mathbb{Z}$ 是沿着 γ_{n_1} 排列、彼此相距 ℓ_M 的一列点。特别地，存在某个 $j_1 \in \mathbb{N}$ 使得 $M_{n_1} M^{j_1} s_0 \in N_{\ell_M} \mathbb{S}'$。继续迭代，我们得到一个递增指标的无限序列 n_i，其中 (x_{n_i}, x'_{n_i}) 是宽间距的，且相应的幂 j_i 满足 $M_{n_i} M^{j_i} s_0 \in N_{\ell_M} \mathbb{S}'$。由引理 2.2，只有有限多个 $\mathcal{M}$ 能将 s_0 送入 $N_{\ell_M} \mathbb{S}'$，因此必存在某个 $i_1 < i_2$ 使得 $M_{n_{i_1}} M^{j_{i_1}} = M_{n_{i_2}} M^{j_{i_2}}$。

因此， $M_{n_{i_2}}^{-1} M_{n_{i_1}} = M^{j_{i_2}} M^{-j_{i_1}}$。我们得出 $M_{n_{i_2}}^{-1} M_{n_{i_1}} x = M^{j_{i_2}} M^{-j_{i_1}} x = x$，从而得到 $T^{n_{i_1}} x = T^{n_{i_2}} x$，所以 x 具有周期展开，正如所需。

□

4. 双曲型不动点

经典的欧拉–拉格朗日定理将循环连分数刻画为二次无理数，而我们的定理1.1则将其刻画为双曲型矩阵的不动点。本节中，我们先在实数与复数情形下调和这两种观点，然后研究高维情形。

4.1. 实数与复数情形。 以下定理可由欧拉–拉格朗日定理证明。我们给出一个不依赖连分数理论的直接证明。

定理 4.1。 </style}数 是二次无理数，当且仅当它是 (2, $\mathbb{Z}$) 中某个双曲型变换的不动点。

注 4.2。 在 $SL(2,\mathbb{Z})$ 中，双曲型变换与双曲变换相同。

证明。 首先假设 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 是双曲型。设 x_1 和 x_2 是 M 在 $\hat{\mathbb{R}}$ 上的线性分式作用下的不动点，使得 $\frac{Ax_i+B}{Cx_i+D} = x_i$ 和 $x_1 \neq x_2$。那么，每个 x_i 都满足方程 $Cx^2 + (D-A)x - B = 0$，因此每个 x_i 都是 $\mathbb{Z}$ 上一个非退化二次方程的解。

反过来，考虑一个非退化二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$，其中 $a, b, c \in \mathbb{Z}$。该方程的解都是无理数，因此判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 是一个非平方整数。我们要寻找一个矩阵 $M \in SL(2,\mathbb{Z})$，使其不动点为给定二次方程的解。 M 的不动点满足方程 $Cx^2 + (D-A)x - B = 0$ 及其倍数，因此我们需要有 $C = \lambda a$、$D - A = \lambda b$ 和 $-B = \lambda c$，其中某个 $\lambda \neq 0$。事实上，我们要求 $\lambda \in \mathbb{N}$。

我们要求 $M \in SL(2,\ \mathbb{Z})$，因此需要 $1 = AD - BC = A(\lambda b + A) + \lambda^2 ac$。也就是说，我们需要 $A = (-\lambda b \pm \sqrt{\lambda^2 \Delta + 4})/2$。由于 Δ 不是平方数，佩尔方程 $\mu^2 \Delta + 1 = n^2$ 有一个非平凡解（$\mu,\ n$） $\in \mathbb{Z}^2$，参见 [17, 定理 34.1]。固定一个满足 $\mu > 0$ 的解，并取 $\lambda = 2\mu$。由此得到的 $A,\ B,\ C,\ D$ 满足 $\det M = 1$，且具有所需的不动点。最后，可以观察到，在 $SL(2,\ \mathbb{Z})$ 中恰有两个不动点的矩阵是双曲型的。事实上，可以通过 $SL(2,\ \mathbb{R})$ 中的一个元素将这两个点映到 0 和 ∞，使得 M 与某个 $\alpha \neq \pm 1$共轭。 □

为了推广到复数情形，我们需要佩尔方程的一个解：

定理 4.3 (Oswald [13])**.** 设 $d \in \mathbb{N}$ 和 $\Delta \in \mathbb{Z}[\mathbb{i}\sqrt{d}]$ 均为非平方数。那么方程 $x^2 + \Delta y^2 = 1$ 有无穷多组解 $x, y \in \mathbb{Z}[\mathbb{i}\sqrt{d}]$。

证明概要。为完整起见，我们简要介绍 Oswald 的方法。首先，Oswald 证明，无理数值 $z \in \mathbb{C}$ 可以由无穷多个有理数 p/q 逼近，且 $p, q \in \mathbb{Z}[\mathbb{i}\sqrt{d}]$ by $|z - p/q| \leq C/|q|^2$，其中 $C > 0$为某个常数。

对于 d 的某些取值，这可以用连分数理论证明，但 Oswald 使用的是数论几何的结果。然后，在写出 $x^2-\Delta y^2=(x-y\sqrt{\Delta})(x+y\sqrt{\Delta})$后，可以选取 x/y 作为逼近 $\sqrt{\Delta}$的一个优良有理逼近，从而保证 $x^2-\Delta y^2$ 属于一个有限的整数集合。通过对这些解进行变换，可以找到 $x^2-\Delta y^2=1$的一个解。□

与实数情形一样， $x\in\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{Z}[\mathbb{i}\sqrt{d}]$ 上的二次无理数，如果它是系数属于 $\mathbb{Z}[\mathbb{i}\sqrt{d}]$ 的二次多项式的解，但不是线性多项式的解。
应当强调的是，尽管系数在 $\mathbb{Z}[x]$中的多项式的所有根与系数在 $\mathbb{Z}[\mathbb{i}][x]$ 中的多项式的所有根所成的集合相同，它们并不一定具有相同的最小多项式次数。例如，$\sqrt{1+\mathbb{i}}$ 的最小多项式是 x^4-2x^2-2，属于 $\mathbb{Z}[x]$；而 $x^2-(1+\mathbb{i})$属于 $\mathbb{Z}[\mathbb{i}][x]$。还可以验证， $[1;\ -2\mathbb{i},2]$是 $\sqrt{1+\mathbb{i}}$的一个周期复连分数展开。

我们现在可以陈述复情形下的结果，其证明与定理 4.1 的证明完全相同，只需作上述调整。

定理 4.4. 设 $x\in\mathbb{C}$，并设 $d\in\mathbb{N}$。则 x 是 $\mathbb{Z}[\mathbb{i}\sqrt{d}][x]$上的二次无理数，当且仅当它是$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}[\mathbb{i}\sqrt{d}])$中某个双曲变换的不动点。

4.2. **克利福德代数形式体系**。 实数和复数连分数通常分别用 $SL(2,\mathbb{R})$ 和 $SL(2,\mathbb{C})$ 中的矩阵来表示。对于底层空间为 $\mathbb{R}^n$ 的岩泽连分数（包括四元数和八元数连分数），可以使用相应克利福德代数上的 2×2 克利福德矩阵来表示连分数。现在我们回顾这一形式体系，沿用 Ahlfors [1] 的论述；Ahlfors 的工作建立在 Vahlen [18] 的基础上。

克利福德代数 A_n, $n\geq 0$, 是实数上的结合代数，由元素 $e_1,\dots e_n$ 生成，这些元素满足关系式 $e_i^2=-1$ 和 $e_ie_j=-e_je_i$，其中$1\leq i,j\leq n$。 A_n 中的元素可以唯一地写成如下求和形式

$$\sum_{I\subset\{1,2,\dots,n\}} a_I\prod_{i\in I}e_i \tag{4.1}$$

其中，乘积按指标递增的顺序从左向右排列。为简便起见，我们用 a_0 代替 $a_\emptyset$，并忽略下标中的集合记号，因此 $a_{12}=a_{\{1,2\}}$。于是， A_2 由形如 $a_0+a_1e_1+a_2e_2+a_{12}e_1e_2$ 的元素构成，其系数均为实数。

对 A_n 进行对合 运算，会将 a 变为 a'；其定义是将所有 e_i替换为 $-e_i$。对 A_n 进行反转 运算，会将 a变为 a^*；其定义是将 e_i的乘积中各因子的顺序全部颠倒。于是，a 定义为 $a=a'^*$。

将 $\mathbb{R}^n$ 与 A_{n-1} 中形如 $a_0+a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_{n-1}e_{n-1}$的元素对应起来。于是，克利福德群 Γ_n 是由 $\mathbb{R}^n$的非零元素生成的 A_{n-1} 的乘法子群。在 Γ_n上，我们可以定义一个实值函数 $|a|^2=aa$，满足 $|ab|=|a|\,|b|$。于是， Γ^n 中的逆元为 $a^{-1}=a/|a|^2$。

现在，一个矩阵

$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \tag{4.2}$$

是一个克利福德矩阵，当且仅当它满足

(1) a, b, c, $d \in \Gamma_n \cup \{0\}$(2) $ad^* - bc^* = 1$
(3) ac^{-1} 和 $c^{-1}d$ 属于 $\mathbb{R}^n$，如果 $c \neq 0$。
(4) db^{-1} 和 $b^{-1}a$ 属于 $\mathbb{R}^n$，如果 $b \neq 0$。

可以证明，克利福德矩阵构成一个群，并以通常的方式通过分式线性变换作用于扩展实向量$\frown\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (ax + b)(cx + d)^{-1}. \tag{4.3}$$

反演 $z \mapsto -1/z$ 和在 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \subset \Gamma_n$ 上的平移 $z \mapsto z + a$ 分别对应于熟悉的克利福德矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。。事实上，根据 Vahlen 定理 [18]（证明概要见 [1]），作用于双曲上半空间 $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 的克利福德矩阵（模去 $\pm$Id）就是 $\mathbb{H}$ 的保向等距变换。

我们记录一个关于任意代数上的二阶矩阵的简单但有用的结果：
我们在处理克利福德矩阵时面临的主要挑战是，很难识别 Γ_n 中的元素，因此也很难判断一个整数值矩阵是否为克利福德矩阵。虽然我们在此不会彻底解决这个问题，但会说明它仍然是可处理的。

引理 4.5。设 A 是一个代数，且 a、$b \in A$ 是逆元。那么，

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

4.3. 中的双曲型不动点。这里我们将考察 $\mathbb{R}^3$ 中的连分数，以及与之相关的克利福德代数

$$A_2 = \{a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_{12}e_1e_2 : a_0, a_1, a_2, a_{12} \in \mathbb{R}\}. \tag{4.4}$$

事实上，我们可以用四元数来表示 A_2，其中 $e_1 = \mathbb{i}$、$e_2 = \mathbb{j}$ 和 $e_1e_2 = \mathbb{k}$。A_2 上的所有运算都与四元数上的相应运算相同。
我们的连分数的数字取自 $\mathbb{Z}^3 = \{a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 :$ a_0、a_1、$a_2 \in \mathbb{Z}\}$，因此我们将对.....作如下记号

$$A_2(\mathbb{Z}) = \{a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_{12}e_1e_2 : a_0, a_1, a_2, a_{12} \in \mathbb{Z}\} \tag{4.5}$$

以及 $\Gamma_3(\mathbb{Z})$，它们是 $\mathbb{Z}^3$ 中非零元素的乘积。我们将用 $SL(2, \mathbb{Z}^4)$ 表示坐标均属于受限集合$\Gamma_3(\mathbb{Z}) \cup \{0\}$的克利福德矩阵集合。

现在我们证明，$SL(2, \mathbb{Z}^4)$ 是由以下数据定义的三维连分数算法的广义模群 $\mathcal{M}$ $\mathbb{X} = \mathbb{R}^3$：将其视为不含 $\mathbb{k}$ 分量的四元数、$\iota(z) = -1/z$、$\mathcal{Z} = \mathbb{Z}^3$，以及以原点为中心的单位立方体 K（注意，我们在此不会使用 K）。

引理 4.6. 设 $\mathcal{M}$ 为由反演$(x, y, z) \mapsto_{(-x,y,z)} x^2+y^2+z^2$和平移生成的克利福德矩阵群，其中平移位于$\mathbb{Z}^3$。则 $\mathcal{M} = SL(2, \mathbb{Z}^4)$。

证明. $\mathcal{M}$ 的生成元由克利福德矩阵 $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 和$\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$编码，其中 $a \in \mathbb{Z}^3$。因此， $\mathcal{M}$ 是 $SL(2, \mathbb{Z}^4)$ 的子群。

反过来，我们假设 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}^4)$ 且 $c \neq 0$。我们将在 $\mathbb{R}^3$ 中对该矩阵的第一列应用欧几里得算法。

如果 $|c| > |a|$，那么我们将矩阵替换为

$$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \tag{4.6}$$

因此 $|C| = |a| < |c| = |-c| = |A|$。
如果 $|c| \leq |a|$，注意根据克利福德矩阵的定义，$ac^{-1} \in \mathbb{R}^3$。我们计算最近整数 $a_0 = \left[ac^{-1}\right] \in \mathbb{Z}^3$，并将矩阵替换为 $\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -a_0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$。于是有 $\left|ac^{-1} - a_0\right| < 1$，因此 $|A| = |a - a_0 c| \lhd |C|$，从而 $|A| < |C|$。

我们重复上面前两个段落的步骤，将矩阵替换为 $\mathcal{M}$ 中的另一个矩阵。每一步中，左列的最大范数要么保持不变（若应用了求逆矩阵），要么比之前更小（若应用了平移矩阵）；并且我们每隔一步应用一次平移矩阵。由于 $\Gamma(\mathbb{Z})$ 中元素的范数属于离散集 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$，该算法会在有限步内终止，得到一个具有 $c = 0$ 的矩阵。

因此，我们已将情形化简为一个满足 $c = 0$、bd^{-1} 为向量且 $ad^* = 1$ 的克利福德矩阵。左乘 $\begin{pmatrix}1 & -bd^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 后，便可化简为一个满足 $ad^* = 1$ 的对角矩阵。

由于 $|a|\,|d^*| = 1$，我们必有 $|a| = 1$，因此 $a \in \{\pm 1, \pm \mathbb{i}\ \pm \mathbb{j}\ \pm \mathbb{k}\}$。我们将证明，在 $\mathcal{M}$ 中可以得到所有这 8 个矩阵。对于 $a \in \{\pm 1, \pm \mathbb{i}\ \pm \mathbb{j}\}$，每一种 a 的选择在 $\Gamma(\mathbb{Z})$ 中都是可逆的，因此所需的分解由引理 4.5 给出。对于 $a = \pm \mathbb{k}$，我们不能直接在引理 4.5 中将 $\mathbb{k}$ 用作数字，但我们有 $\mathbb{k} = \mathbb{i}\mathbb{j}$，所以可以先像上面那样用 $\mathbb{i}$ 和 $\mathbb{j}$ 分别表示，再将所得的对角矩阵相乘，从而把它写成生成元的乘积。这说明 $SL(2, \mathbb{Z}^4) \subset \mathcal{M}$，证明完毕。□

将四元数矩阵划分为椭圆型、抛物型和双曲型的分类方法相当复杂。我们在此给出作者所知的最简单分类，归功于 Parker 和 Short [14]。

给定任意具有四元数条目的矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，定义下列量：

$$\begin{aligned}
\alpha &= |a|^2 |d|^2 + |b|^2 |c|^2 - 2\mathrm{Re}(a\bar{c}d\bar{b}) \\
\beta &= \mathrm{Re}\left((ad - bc)\overline{a} + (da - cb)\overline{d}\right) \\
\gamma &= |a + d|^2 + 2\mathrm{Re}(ad - bc) \\
\delta &= \mathrm{Re}(a + d)
\end{aligned}$$

Parker 和 Short 将群 $SL(2, \mathbb{H})$ 定义为所有满足 $\alpha = 1$ 的此类矩阵。这些矩阵不一定是克利福德矩阵，但确实包含 $SL(2, \mathbb{Z}^4)$ 作为子群；通过比较相应的莫比乌斯变换即可轻松看出这一点。对于 $SL(2, \mathbb{H})$ 中的矩阵，还需要两个量：

$$\sigma = \begin{cases} cac^{-1}d - cb, & c \neq 0, \\ bdb^{-1}a, & c = 0, b \neq 0, \\ (d-a)a(d-a)^{-1}d, & b = c = 0, a \neq d, \\ a\overline{a}, & b = c = 0, a = d, \end{cases}$$

$$\tau = \begin{cases} cac^{-1} + d, & c \neq 0, \\ bdb^{-1} + a, & c = 0, b \neq 0 \\ (d-a)a(d-a)^{-1} + d, & b = c = 0, a \neq d, \\ a + \overline{a}, & b = c = 0, a = d, \end{cases}$$

它们的作用分别类似于四元数行列式和迹。最后，若一个矩阵共轭于一个实数条目的矩阵，则称其为简单矩阵；若一个矩阵可表示为若干简单矩阵的乘积，且所需矩阵数目最少为 k，则称其为 k -简单矩阵。$SL(2, \mathbb{H})$ 中的所有矩阵至多为 3-简单矩阵。

我们注意到，$SL(2, \mathbb{Z}^4)$ 的生成元属于 $SL(2, \mathbb{H})$，因此前者是后者的离散子群。因此，我们可以使用 Parker 和 Short 对矩阵给出的以下刻画，对 $SL(2, \mathbb{Z}^4)$ 中的矩阵进行分类。

命题 4.7（定理 1。4, [14]）。设 $A \in SL(2, \mathbb{H})$。

(1) 若 $\sigma = 1$ 且 $\tau \in \mathbb{R}$，则 A 是1-单纯的；*(a)* 若 $0 \leq \delta^2 < 4$，则 A 是椭圆型；*(b)* 若 $\delta^2 = 4$，则 A 是抛物型；*(c)* 若 $\delta^2 > 4$，则 A 是双曲型。*(2)* 若 $\beta = \delta$ 且 $\tau \notin \mathbb{R}$ 或 $\sigma \neq 1$，则 A 是 2- 单纯的；*(a)* 若 $\gamma - \delta^2 < 2$，则 A 是椭圆型；*(b)* 若 $\gamma - \delta^2 = 2$，则 A 是抛物型；*(c)* 若 $\gamma - \delta^2 > 2$，则 A 是双曲型。*(3)* 若 $\beta \neq \delta$，则 A 是3-单纯的双曲型。

我们注意到，如果 A 是一个克利福德矩阵，那么这里的椭圆型、抛物型和双曲型概念，与 Parker 和 Short 的著作中的含义相同。

例4.8. Cao、Parker 和 Wang [5] 给出了一种与上文命题 4.7 类似的四元数矩阵分类，但针对那些保持

单位球。他们的工作可以借助矩阵 $\begin{pmatrix} /2 & 1/2 \\ \mathbb{k}-1 & - \quad \mathbb{k} \end{pmatrix}$ 转化为我们所研究的情形，该矩阵将单位球双射地映到上半空间。 [5] 中的例4.3表明，矩阵 $\begin{pmatrix} \quad ^1(\mathbb{i} \\ + \quad /2\,\mathbb{j})\mathbb{i}\mathbb{j}\,3 \end{pmatrix}$ 是双曲型的，并固定点 $\frac{-1\pm\sqrt{3}}{4}(\mathbb{i}+\mathbb{j})$。这两者都具有周期连分数展开：

$$\frac{-1+\sqrt{3}}{4}(\mathbb{i}+\mathbb{j}) = [3(\mathbb{i}+\mathbb{j}), \overline{-2(\mathbb{i}+\mathbb{j}), 4(\mathbb{i}+\mathbb{j})}]$$
$$\frac{-1-\sqrt{3}}{4}(\mathbb{i}+\mathbb{j}) = [-1(\mathbb{i}+\mathbb{j}), \overline{2(\mathbb{i}+\mathbb{j}), -4(\mathbb{i}+\mathbb{j})}].$$

例4.9. 反过来，我们考虑一个矩阵，它固定一个已知点，该点具有周期连分数展开，并证明这个矩阵确实是双曲型的。我们来考虑矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

其中 a 是三维连分数的数字集中的一个元素，满足 $\|a\| > (4+\sqrt{3})/2$。与普林斯海姆定理中一样，这个大小条件保证矩阵将 K 完全映入 K，从而保证周期连分数 $[a]$ 收敛。此外，容易看出 M 固定 $[a]$。现在我们运用上文的命题4.7。首先，我们很快就能看出 $\alpha = 0|a|^2 + 1 - 0 = 1$，因此该矩阵属于 $SL(2,\mathbb{H})$。此外，$\beta = \mathrm{Re}((0\cdot -a+1)\ 0 + (-a\cdot 0+1)-a) = -\mathrm{Re}(a)$ 且 $\delta = \mathrm{Re}(0-a) = -\mathrm{Re}(a)$，因此 $\beta = -\delta$。另外，$\sigma = 1\cdot 0\cdot 1^{-1}\cdot -a+1 = 1$ 且 $\tau = 1\cdot 0\cdot 1^{-1} - a = -a$。若 a 为实数，那么我们处于命题的情形1，必有 $|a| \geq 3$，从而 $\delta^2 > 4$，所以我们的矩阵是1-单纯双曲型。若 a 不是实数，我们处于命题的情形2，此时 $\gamma = |0-a|^2 + 2\mathrm{Re}(0\cdot -a+1) = |a|^2 + 2$。因此 $\gamma - \delta^2 = |a|^2 + 2 - \mathrm{Re}(a)^2,$，且由于 a 不是实数，$|a|^2 > \mathrm{Re}(a)^2$，我们有 $\gamma - \delta^2 > 2$，所以 A 是2-单纯双曲型，证毕。

4.4. 在 $\mathbb{R}^4$ 中的双曲型不动点。 现在我们考察 $\mathbb{R}^4$ 中的连分数，其对应的克利福德代数

$$\begin{aligned} A_3 = \{&a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_{12}e_1e_2 \\ &+ a_{13}e_1e_3 + a_{23}e_2e_3 + a_{123}e_1e_2e_3 : a_I \in \mathbb{R}\}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

与之前一样，我们将 $\mathbb{R}^4$ 视为子空间 $\{a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 : \ a_i \in \mathbb{R}\}$。最后，用 $\mathbb{Z}^8$ 表示 A_3 的子群，其中所有系数都属于 $\mathbb{Z}$。

注 4.10。 $\mathbb{R}^4$ 上的连分数算法包括四元数连分数算法（例如参见 [10] 及其中的参考文献），正如 $\mathbb{R}^2$ 上的连分数算法包括复连分数算法一样。为避免与所涉及的克利福德代数混淆，此处我们不明确讨论四元数连分数。下面对格和反演的选择将体现我们对四元数连分数的兴趣。

由于具有格 $\mathbb{Z}^4$ 的连分数算法并不恰当，我们将关注具有赫尔维茨整数格 $\mathcal{H} = \mathbb{Z}^4 + h\mathbb{Z}^4$ 的连分数算法，其中

$$h = (1 + e_1 + e_2 + e_3)/2.$$

用 $\Gamma_{\mathcal{H}}$ 表示由 $\mathcal{H} \setminus \{0\}$生成的 A_3 中的乘法群。我们首先证明 $\Gamma_{\mathcal{H}}$ 是离散的。

引理 4.11. 群 $\Gamma_{\mathcal{H}}$ 是离散的；事实上， $\Gamma_{\mathcal{H}} \cup \{0\} \subset \mathbb{Z}^8 + h\mathbb{Z}^8$。

证明。只需证明 $\mathbb{Z}^8 + h\mathbb{Z}^8$ 乘法封闭。若 $a - b \in \mathbb{Z}^8$，则写作 $a \equiv b$。不难验证 $h^2 \equiv h$；对于每个 i，都有 $e_i h \equiv h e_i$；因此，对于任意 $\alpha \in \mathbb{Z}^8$，都有 $h\alpha \equiv \alpha h$。接着计算，当$\alpha_1 + h\beta_1$， $\alpha_2 + h\beta_2 \in \mathbb{Z}^8 + h\mathbb{Z}^8$时，

$$\begin{aligned}(\alpha_1 + h\beta_1)(\alpha_2 + h\beta_2) &\equiv h\beta_1\alpha_2 + \alpha_1 h\beta_2 + h\beta_1 h\beta_2 \\ &\equiv h\beta_1\alpha_2 + (h\alpha_1 + \gamma_1)\beta_2 + h(h\beta_1 + \gamma_2)\beta_2 \\ &\equiv h(\beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_2\beta_2),\end{aligned}$$

其中 $\gamma_1 = \alpha_1 h - h\alpha_1$、 $\gamma_2 = \beta_1 h - h\beta_1$ 均属于 $\mathbb{Z}^8$。这表明乘积 $(\alpha_1 + h\beta_1)($ $\alpha_2 + h\beta_2)$仍属于 $\mathbb{Z}^8 + h\mathbb{Z}^8$。□

引理 4.12。 设 $\mathcal{M}$ 为由反演 $(x, y, z, w) \mapsto_{(-x,y,z,w)} {}^{x^2+y^2+z^2+w^2}$ 以及 $\mathcal{H}$中的平移生成的矩阵群。则 $\mathcal{M}$ 是由条目属于 $\Gamma_{\mathcal{H}}$的克利福德矩阵组成的群 $SL(2, \Gamma_{\mathcal{H}})$ 。

证明。 如引理 4.6 的证明所示，只需将对角矩阵$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ 表示为 $\mathcal{M}$的生成元，

其中 $a \in \Gamma_{\mathcal{H}}$ 具有 $|a| = 1$。群$\Gamma_{\mathcal{H}}$ 是由 $\mathcal{H}$的非零元素生成的乘法群。由于范数具有乘法性，且 $\mathcal{H}$ 的非零元素的范数至少为 1，因此只需考虑能够表示为 $\mathcal{H}$中单位范数元素之积的 $a \in \Gamma_{\mathcal{H}}$ 。此外，只需考虑 $\mathcal{H}$中的单位范数元素。对于 $\mathcal{H}$中的单位范数元素，使用引理 4.5。□

最后提及，在 $SL(2, \Gamma_{\mathcal{H}})$ 中识别椭圆型、抛物型或双曲型矩阵相当复杂，参见 Wang 等人 [20]。

5. 四元数恒等式札记

在撰写本文的过程中，我们观察到恒等变换 $\mathbb{i} + {}^{1}\mathbb{i} = 0$在四元数上的一个推广，很容易验证：

命题 5.1. 设 $p = \mathbb{i} + \mathbb{j}$ 且 $q = \mathbb{i} + \mathbb{j} + \mathbb{k}$。则 $p + {}^{1}_{p+1/p} = 0$ 且

$$q + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{q}}}} = 0. \tag{5.1}$$

若将 $\mathbb{i}$、$\mathbb{j}$、$\mathbb{k}$ 的系数取反或重新排列，这些恒等变换仍然成立。

这种反演在高维中不存在类似的恒等式。也就是说，固定 $d > 0$，并考虑带有反演 $\iota(x_1, \ldots, x_d) = {}_{(x_1,-x_2,\ldots,-x_d)}{}^{x_1^2+\cdots+x_d^2}$的空间 $\mathbb{R}^d$。令 $a = (0, 1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^d$。该命题指出，对于复数

($d = 2$)，我们有 $a + [a] = 0$；在 $\mathbb{R}^3$ 中，我们有 $a + [a, a] = 0$；而在 $\mathbb{R}^4$ 中，我们有$a + [a, a, a, a] = 0$。

命题 5.2。对于 $d > 4$，适用于任意长度的连分数 $a + [a, \dots, a] \neq 0$。

证明。考虑一个长度为 n 的连分数 $a + [a, \dots, a]$。注意，第一个数字是 0，其余数字都相等；我们将这个值记为 x_n。向 $a + [a, \dots, a]$ 添加一个额外的连分数数字，会使 x_n 变为

$$x_{n+1} = 1 + \frac{-x_n}{\|(0, x_n, \dots, x_n)\|^2} = 1 + \frac{-1}{(d-1)x_n}.$$

对于 $d = 5$，可直接证明 $x_n = \frac{n+1}{2n} \neq 0$。当 $d \geq 5$ 时，该动力系统有不动点 $x_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4/(d-1)}}{2}$。对于 $d > 5$，区间 $I = [x_-, x_+]$ 非退化，且在该动力系统作用下映射到自身。特别地，由于我们有 $x_1 = 1 \in I$，因此对于任意 n，都不可能有 $x_n = 0$。□

参考文献

1. Lars V Ahlfors. 关于 $\mathbb{R}^n$中 M¨obius 变换的不动点。《芬兰数学年刊》，10(1):15–27，1985。 2. Erwin PJ Beltz. α- 连分数的周期性。学士论文，代尔夫特理工大学，2014。 3. Jonathan Borwein、Alf van der Poorten、Jeffrey Shallit 和 Wadim Zudilin。《永无止境的连分数：连分数导论》，第23卷。剑桥大学出版社，2014。 4. B. H. Bowditch。变负曲率下的几何有限性。《杜克数学杂志》，77(1):229–274，1995。 5. Wensheng Cao、John R Parker 和 Xiantao Wang。关于四元数 M¨obius 变换的分类。载于《剑桥哲学学会数学汇刊》，第137卷，第349–361页。剑桥大学出版社，2004。 6. S. G. Dani。复数的连分数展开——一种通用方法。《算术学报》，171(4):355–369，2015。 7. Tushar Das 、 David Simmons 和 Mariusz Urba´nski。《格罗莫夫双曲度量空间中的几何与动力学》，《数学调查与专著》第218卷。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2017。 8. Doug Hensley。《连分数》。世界科学出版社有限公司，新泽西州哈肯萨克，2006。 9. Anton Lukyanenko 和 Joseph Vandehey。卡诺群以及海森堡群西格尔模型中的内在丢番图逼近。《月刊》¨《数学》，192(3):651–676，2020。 10. Anton Lukyanenko 和 Joseph Vandehey。非正规岩泽连分数的收敛性。*arXiv*预印本 *arXiv:2205.12801*，2022。 11. Anton Lukyanenko 和 Joseph Vandehey。通过可标记双曲测地线研究岩泽连分数的遍历性。《遍历理论与动力系统》，第1–46页，2022。 12. Sam Northshield。关于连分数拉格朗日定理的简短证明与推广。《美国数学月刊》，118(2):171–175，2011。 13. Nicola MR Oswald。复数的丢番图逼近。《绍莱数学研讨会》，10(18):91–102，2015。 14. John R Parker 和 Ian Short。四元数 M¨obius 变换的共轭分类。《计算方法与函数理论》，9(1):13–25，2009。 15. John G. Ratcliffe。《双曲流形基础》，《数学研究生教材》第149卷。施普林格，瑞士沙夫豪森，第三版，2019。 16. Thomas A Schmidt 和 Mark Sheingorn。海克三角群的长度谱。《数学杂志》，220(1):369–397，1995。

17. J.H. Silverman。《数论友好导论》。培生教育出版公司，第四版，2012。 18. K. Th. Vahlen。论运动与复数。《数学年刊》，55(4):585–593，1902。 19. Joseph Vandehey。海森堡群上连分数的拉格朗日定理。《伦敦数学学会通报》，47(5):866–882，2015。 20. X Wang、W Yang、F Maitani 和 Y Jiang。关于空间中 M¨obius 变换的一则注记。《京都工艺纤维大学工学与设计学院纪要》，47 8，1998 1: – 。

数学系，乔治梅森大学，4400 University Drive，MS: 3F2，费尔法克斯，弗吉尼亚州 22030

电子邮件地址：alukyane@gmu.edu

数学系，德克萨斯大学泰勒分校，泰勒，TX 75799电子邮件地址：jvandehey @uttyler.edu