arXiv:2603.12428v1 [math.QA] 12 Mar 2026

# 切瓦莱群上的Hopf代数

´Nicolas Andruskiewitsch 和 Giovanna Carnovale

Abstract. 我们证明，对于有限单切瓦莱群上的每个有限维点状霍普夫代数，除 $\mathbf{PSL}_2(q)$（模 4）以及 PSL**(2)** $\simeq$ $\mathbf{PSL}_2$**(7)**）之外，它都与相应的群代数同构。为此，我们完成了对这类群上支撑为半单轨道的 Yetter-Drinfeld 模的 Nichols 代数的分析；该分析始于 [4, 7]。除沿用该文中的方法外，我们还引入了一种通用程序，用以判定切瓦莱群或斯坦贝格群中的半单共轭类何时属于 C 型；此外，我们基于 [12] 的结果提出了一项适用于任意架的新判据。在整个研究过程中，我们还获得了关于架上的 Nichols 代数的若干结果，其适用范围超出了切瓦莱群的框架。

2010年数学学科分类：16T05, 20D06.*Keywords:* Nichols 代数；霍普夫代数；架；有限李型群；共轭类。

Contents

1. 引言 1.1. 尖点 Hopf 代数 1.2. 架上的 Nichols 代数 1.3. 策略 1.4. 记号 2. 架上的 Nichols 代数 2.1. Kthulhu 共轭类 2.2. 通过拟单子群检测 C 型 2.3. 可解架 2.4. 关于 Nichols 代数的一项新判据 2.5. 传播 3. 有限李型群预备知识 3.1. 李型群 3.2. 半单共轭类 3.3. $B_n$ 型魏尔群中的尖点类 $D_n$4. 检测 C 型半单类 4.1. 概述 4.2. 关键定理 4.3. 定理 4.3 的应用 4.4. 定理 4.3 适用的若干情形 5. 切瓦莱群中的 C 型半单类 5.1. $\mathrm{P}\Omega^+_{2n+1}(q)$ 中的半单类 5.2. $\mathrm{P}\Omega^+_{2n}(q)$ 中的半单类 5.3. $E_6(q)$ 中的半单类 5.4. $E_7(q)$ 中的半单类 5.5. $E_8(q)$ 中的半单类 5.6. $F_4(q)$ 中的半单类 5.7. $G_2(q)$ 中的半单类 6. 由 C 型判据判定为坍缩的 Kthulhu 类 $\Omega$6.1. 群 $\mathrm{P}\Omega^+_{2n+1}(q)$ 6.2. 群 $\mathrm{P}\Omega^+_{2n}(q)$ 6.3. 辛群中的幺幂类 6.4. 酉群中的幺幂类 6.5. 切瓦莱群中的分裂半单类 7. 阿贝尔方法 7.1. $E_8(q)$ 和 $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$ 上的 Nichols 代数 7.2. $\mathrm{PSL}_2(q)$ 上的 Nichols 代数 致谢 参考文献

3
3
4
6
8
9
9
10
12
13
15
16
16
17
19
21
21
22
24
28
33
34
42
47
52
57
64
66
69
69
70
71
72
73
74
74
75
77
77

# 1. Introduction

## 1.1. 尖点 Hopf 代数。

在代数闭域 [13] 上对有限维尖点霍普夫代数进行分类的方法 $\Bbbk$ （特征为零）包含以下问题这一基本步骤:

**问题 1.1**。 确定有限群 $V$ 上的 *Yetter-Drinfeld* 模 $G$ ， 使得 *Nichols* 代数 $\mathscr{B}(V)$ 是有限维的。

这个问题必须通过考察不同类型的群来解决。

- 对于 $G$ 阿贝尔群， [25]给出了完整的答案。这份列表内容丰富：其中包含单位根处小量子群和超群的正部分，以及正特征下一些李代数和超代数的限制包络代数的量子类比。

- 对于 $G$ 可解的情形，当 $V$ 为单群时，问题已在 [12] 中得到解答（本质上只有 10 种可能的 Nichols 代数）；当 $V$ 可分解时，问题已在 [28, 29] 中得到解答（除少数例外外，这些 Nichols 代数均源自阿贝尔情形）。

对于非阿贝尔单群，情况大不相同，而极端情形则由以下概念来刻画。若一个有限群 $G$ 坍缩，则称其具有此性质，即以下三个等价陈述之一成立，见 [9, 引理 1.4]:

- 若 $H$ 是一个有限维尖点霍普夫代数，其类群为$G$（$H$） $\simeq G$，则 $H$ 同构于 $\Bbbk G$。
- 若 $0 \neq V \in {}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD}$是 $G$上的 Yetter-Drinfeld 模范畴，则 $\dim \mathscr{B}$（$V$） $= \infty$。
- 若 $V \in {}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD}$ 不可约，则 $\dim \mathscr{B}$（$V$） $= \infty$。对于有限单群，过去 17 年来收集的证据支持以下猜想，它为这个问题提供了指导原则:

猜想 *1.2. </style]*如果 $G$是一个非阿贝尔有限单群，那么 *{v4]*会坍缩。

事实上，这一猜想虽曾在演讲和文章中被含蓄地提出，却直到 [7]，才首次以印刷形式出现，当时谦称其为“民间传说”。目前，我们知道下列群会坍缩:

- [9] 交错群 $\mathbb{A}_n$、 $n \geq 5$。
- [10]散在群，包括蒂茨群，但不包括菲舍尔群 $Fi_{22}$、小怪兽群 $B$和怪兽群 $M$。
- [16]铃木–Ree 群。
- [7]群 $\mathbf{PSL}_{n+1}(q)$、$(n \geq 3)$、$\mathbf{PSL}_3(q)$ $(q > 2)$，以及 $\mathbf{PSp}_{2n}(q)$ $(n \geq 3)$。
- [4], [21] 群 $\mathbf{PSL}_2(q)$，其中 $q \equiv 1$ 模 4 或 $q > 2$ 为偶数。

其他有限李型群已被证明会在 [5]中坍缩。本文证明：

**定理 1.3.** 除 $\mathbf{PSL}_2(q)$ 且$q \equiv 3$ 模 4 的情形，以及 $\mathbf{PSL}_3(2) \simeq \mathbf{PSL}_2(7)$之外，有限单李型群均会坍缩。

换言之，若 $G$ 是定理中所述的有限单李型群，且 $H$ 是一个有限维尖点 Hopf 代数，其类群为$G(H) \simeq G$，那么 $H$ 同构于 $\Bbbk G$。

由于有限单群分类定理，我们知道，猜想 1.2 目前仅对以下对象仍未解决：$\mathbf{PSL}_2(q)$ 且 $q \equiv 3$ 模 4 的情形、斯坦伯格群、菲舍尔群 $Fi_{22}$、小怪兽群 $B$ 和怪兽群 $M$。本文引入的技术将有助于处理这些群，但看来这些技术还不够，还需要新的方法。

定理 1.3 的证明依赖于 [2, 3, 4, 5, 6, 7, 21,22]中给出的结果。实际上，我们必须证明，只要 $\dim \mathscr{B}(V) = \infty$ 且 $V \in {}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD}$不可约，那么对任意有限谢瓦莱群 $G$均有此结论。回顾一下，不可约 Yetter-Drinfeld 模 $V$ 在 $G$ 上的支撑是 $G$的一个共轭类。上述系列工作已经证明，当 supp $V$是非半单共轭类时，除少数几种情形外，均有 $\dim \mathscr{B}(V) = \infty$。

对于半单共轭类，由于这类共轭类具有算术性质，分析要复杂得多。在本文中，我们采用两种新的主要技术来处理与半单共轭类相关的 Nichols 代数：

- 适用于一般群的 Ω 型新判据，可用于判定 Yetter-Drinfeld 模的 Nichols 代数是无限维的。该判据基于 [12] 的主要结果，并且仅取决于该模的支撑。参见 §2.4。

- 一种基于三个李理论条件的一般判据，用于确保切瓦莱群或斯坦贝格群中的半单共轭类满足 [4] 中引入的强力 C 型判据。参见定理 4.3。

注意，定理 4.3 由定理 2.3推出；定理 2.3 是一种工具，用于通过拟单子群检测有限群中的 C 型共轭类。定理2.3 很可能还可应用于其他有限群族。

我们还要指出，这里所用的大多数方法并不能计算 Nichols 代数，而只是为其维数为无穷大提供充分条件。

### 1.2. 架上的 Nichols 代数。

正如 [11], 中所解释的，处理类型为 $\mathscr{B}(X, \mathfrak{q})$ 的 Nichols 代数可以节省工作量，它对应于编织向量空间 $(\Bbbk^n \otimes \Bbbk X, c^{\mathfrak{q}})$。这里

TABLE 1. Kthulhu 半单类于 $G \neq \mathbf{P\Omega}_N^+(q)$。

| $G$ | $q$ | 共轭类 | 注 |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{PSL}_{n+1}(q)$, $n+1$ 奇素数 | all | 不可约 | kthulhu 没有类型为 $\Omega$ 的 |
| $\mathbf{PSp}_4(q)$ | 3, 5, 7 | 分裂对合 | $q = 3,\ 5$ kthulhu 全部为类型 $\Omega$ |
| $E_8(q)$ | all | 正则，包含于一个环面中 由共轭类 $E_8$ 中的 $w$ 索引，或 $E_8(a_5)$。 | |

◦ $X$ 是一个架，即 $X = (X, \triangleright)$，其中 $X \neq \emptyset$ 与 $\triangleright\colon X \times X \to X$ 是一个自分配运算，使得对任意 $x \in X$，$y \mapsto x \triangleright y$ 为双射；

◦ $\mathfrak{q}\colon X \times X \to \mathrm{GL}(n, \Bbbk)$是一个非阿贝尔 2-余循环，即它满足

$$\mathfrak{q}_{x,y\triangleright z}\mathfrak{q}_{y,z} = \mathfrak{q}_{x\triangleright y,x\triangleright z}\mathfrak{q}_{x,z}, \qquad \text{for all } x, y, z \in X;$$

◦ 相对于基 $(e_x)_{x\in X}$，$\Bbbk X$ 上的编织 $c^{\mathfrak{q}} \in \mathrm{GL}((\Bbbk^n \otimes \Bbbk X)^{\otimes 2})$ 由下式给出

$$c^{\mathfrak{q}}(ve_x \otimes we_y) = \mathfrak{q}_{x,y}(w)e_{x\triangleright y} \otimes ve_x, \qquad x, y \in X, \quad v, w \in \Bbbk^n.$$

例如，有限群 $G$中非空的共轭类之并是一个架——我们只考虑这类架。这里，架运算是共轭，记作 $\triangleright$，即 $x \triangleright y = xyx^{-1}$。

若 $V \in {}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD}$ 是不可约的，且其支撑为 $X$，那么存在一个余循环 $\mathfrak{q}$使得 $\mathscr{B}(V) \simeq \mathscr{B}(X, \mathfrak{q})$；但同一对 $(X, \mathfrak{q})$ 可能来自不同的 Yetter-Drinfeld 模，也可能来自不同的群。因此，讨论问题1.1 以处理以下问题是方便的：

**问题 1.4**。 [9, 问题 2] 确定所有满足以下条件的配对 $(X, \mathfrak{q})$，其中 $X$ 是有限架，且 $\mathfrak{q}$ 是一个 2-余循环，并且 $\dim \mathscr{B}(X, \mathfrak{q}) < \infty$。

与有限群坍缩的概念相对应，引入以下术语会很方便。

◦ 有限群 $G$ 的共轭类 $X$ 会坍缩，若 $\dim \mathscr{B}(V) = \infty$ 对任意支撑为 $X$ 的 $V \in {}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD}$ 都成立。

◦ [9, 2.2] 有限架 $X$ 会坍缩，若对任意 2-余循环 $\mathfrak{q}\colon X \times X \to \mathrm{GL}(n, \Bbbk)$，只要存在有限群 $\Upsilon$ 和 $W \in {}^{\Bbbk\Upsilon}_{\Bbbk\Upsilon}\mathcal{YD}$，使得 $W \simeq (\Bbbk X, c^{\mathfrak{q}})$ 是编织向量空间，就必有 $\dim \mathscr{B}(X, \mathfrak{q}) = \infty$。

如果一个共轭类会坍缩，那么它会坍落，但反之不成立。

现在，任意有限架都投影到一个单架上；也就是说，这种架至少有两个元素，且不能投影到一个元素更少、但至少有两个元素的架上。自然会产生这样一个问题：

**问题 1.5.** 哪些有限单架会坍缩?

稍后我们将看到，我们有 C、D 或 F 型的判据，用以确保一个架坍缩。如果一个架满足其中任一判据，那么任何包含它的架（我们称之为上架），或投射到它之上的架（覆盖架，或简称覆盖），也同样满足。因此，对属于 C、D 或 F 型的架的刻画便具有更大的意义。我们称一个架为$kthulhu$，当它不属于这些类型中的任何一种时。见§2.1。

所有单架的分类已知 [11]；有限单群的非平凡共轭类是单架。作为对问题1.5的贡献，我们在本文中证明：

**定理 1.6.** 谢瓦莱群的一个半单非平凡共轭类 $X$，除$\mathbf{PSL}_2(q)$外，是

○ 属于 *C*、*D* 或 *F* 型，因而它坍缩；或者

○它出现在表*1*、*2*或*3*中。若 $X$ 属于 $\Omega$型与否，均在表中标明。在第一种情形下，它也会坍缩。

在各表中，字母 $w$ 指外尔群中的一个元素，它是与该共轭类相交的环面的参数，见 §3.2。

证明。对于 $\mathrm{PSL}_{n+1}(q)$，见 [7, 定理 5.4] 及注记 6.10。对于 $\mathrm{PSp}_n(q)$，见 [7, 定理 7.1]。对于 $\mathrm{P\Omega}_{2n+1}(q)$ 或 $\mathrm{P\Omega}_{2n}(q)$，见 §5.1、§5.2 及 §6。对于 $E_6(q)$、$E_7(q)$、$E_8(q)$、$F_4(q)$、$G_2(q)$，见 §5.3、§5.4、§5.5、§5.6 及 §5.7。□

注 1.7。 表2的第一行，当 $d = 1$时，也出现在表1的第二行；为便于递归论证，保留这一重叠较为方便。

1.3. **策略**。

设 $X$ 是一个架。如上所述，我们有 C、D 或 F 型的判据，可确保 $X$ 发生坍缩，参见 §2.1。这里我们给出新的 $\Omega$型判据，见 §2.4。该判据补充而非取代 C、D 或 F 型判据：一方面，存在 kthulhu 架，但属于$\Omega$型，见第6节。另一方面，$\Omega$ 型可传递至上架，但就目前的研究现状而言，尚不清楚它是否可传递至覆盖。

基于这些原因，我们采用三步策略。设 $X$ 是单 Chevalley 群 $G$中的一个半单共轭类。第一步基于定理 4.3 中的表述：

- 使 $X$ 属于 C 型的充分李理论条件。

这些条件可以用组合术语重新表述，从而大幅减少逐案分析。事实上，我们不再单独考察各个共轭类，而是考察由对应于外尔群元素 $w$ 的稳定环面中的元素所代表的共轭类，并着重研究包含 $w$ 而非 $w$ 的外尔群的极小抛物子群。这样一来

TABLE 2. PΩ 中的 Kthulhu 半单类$\mathbf{P\Omega}^{+}_{2n+1}(q)$。这里 $\Theta := \prod_{i=1}^{d} \alpha^{\vee}_{2i-1}(-1)$ 和 $d \geq 1$。

| $n$ | $w$ | $q$ | $t$ | 参数类型 $\Omega$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $2d$ | $e$ | $3, 5, 7$ | $\Theta\alpha^{\vee}_{n}(\zeta)$ | $\zeta = \pm 1$ | yes |
| $2d+1$ | $e$ | $5$ | $\Theta\alpha^{\vee}_{n}(\omega)$ | $\mathbb{F}_5^{\times} = \langle\omega\rangle$ | yes |
| | $s_n$ | $\equiv 3$ 模 4 | $\Theta\alpha^{\vee}_{n}(\zeta)$ | $\zeta^2 = -1$ | yes |
| | $s_n s_{\alpha_{n-1}+\alpha_n}$ | $3$ | $\Theta\alpha^{\vee}_{n-1}(-\omega^2)\alpha^{\vee}_{n}(\omega)$ | $\mathbb{F}_9^{\times} = \langle\omega\rangle$ | yes |

TABLE 3. PΩ 中的 Kthulhu 半单类$^{+}_{2n}(q)$。

| $n$ | $w$ | $q$ | $t$ | 参数类型 $\Omega$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | $s_1 s_3 s_4$ | $\equiv 3$ 模 4 | $\alpha^{\vee}_{1}(\omega)\alpha^{\vee}_{3}(\omega)\alpha^{\vee}_{4}(\omega)$ | $\omega^2 = -1$ | yes |
| 4 | $s_1 s_3 s_4$ | $2$ | $\alpha^{\vee}_{1}(\omega)\alpha^{\vee}_{3}(\omega)\alpha^{\vee}_{4}(\omega)$ | $\mathbb{F}_4 = \langle\omega\rangle$ | yes |

我们便从对 $\boldsymbol{G}$ 中半单元素的考察，转向在根子系统及其外尔群层面进行考察。

策略如下：

步骤 1. 对定理4.3的假设进行验证，考察在环面所有共轭类中出现的半单类的一般代表元。若假设成立，则该共轭类为 C 型，因此根据定理2.1 ，该共轭类及其上架和覆盖都会坍缩。我们在小节5.1、5.2、5.3、5.4、5.5、5.6和5.7中逐一处理了这一步骤。这一步骤需要对外尔群中的共轭类进行深入分析。此外，我们还通过基于先前论文结果的归纳论证处理了一些共轭类。

步骤 2. 找出前述方法不适用且属于类型 $\Omega$的共轭类。在这种情形下，该共轭类及其上架都会坍缩。我们在第 6 节中完成这一步骤，从而完成定理1.6的证明。

步骤 3. 对于上述方法失效的那些共轭类，利用关于该共轭类的平凡子架的知识，证明它不支撑 Nichols 代数为有限维的 Yetter-Drinfeld 模。此时，该共轭类作为架可能不会坍缩，而且一般而言，结论无法推广到上架或覆盖。这部分内容将在第 7 节中完成。

总之，定理 1.3 是通过逐一遍历有限单切瓦莱群的列表而得到证明的：

• 群$\mathbf{PSL}_{n+1}(q)$，其中或者 $n \geq 3$ 且 $q$ 为任意，否则 $n = 2$且 $q > 2$，由 [7, 定理 III]坍缩。
• 群 $\mathbf{PSL}_2(q)$，其中 $q \equiv 1$模 4 或 $q > 2$ 为偶数时，根据 [4], [21] 坍缩；参见定理 7.5。
• 群 $\mathbf{P\Omega}^+_{2n+1}(q)$，$q$ 为奇数且 $n \geq 2$，根据定理 6.3 坍缩。
• 群 $\mathbf{PSp}_{2n}(q)$，$n \geq 2$ 以及（$n$，$q$）$\neq (2, 2)$，根据定理 7.3 坍缩。
• 群 $\mathbf{P\Omega}^+_{2n}(q)$，任意 $q$ 和 $n \geq 4$，根据定理 6.5 坍缩。
• 群 $E_6(q)$，任意 $q$，根据定理5.20 坍缩。
• 群 $E_7(q)$，任意 $q$，根据定理5.24 坍缩。
• 群 $E_8(q)$，任意 $q$，由定理7.2坍缩。
• 群 $F_4(q)$，任意 $q$，由定理5.32坍缩。
• 群 $G_2(q)$，任意 $q > 2$，由定理5.35坍缩。

上述列表中的定理以及定理1.6，均已利用来自 [2, 3, 4, 5, 6, 7, 22],的结果加以证明，如各情形中所说明的那样。

定理4.3 以及对 $\Omega$ 型的验证，都需要对李型群中包含半单元的子群族有充分的理解。在这一问题上，我们的工作在很大程度上受到 [36,节 3] 以及 [37]中结果的启发。

我们以两则注结束引言。

注 1.8. 某些切瓦莱群中，对于 $q$ 的特殊取值或共轭类的特殊族，kthulhu 类的存在性表明，逐案分析在某种意义上不可避免，并且与半单类的算术方面相关。

注 1.9. $\mathbf{PSL}_2(q)$中当 $q \equiv 3$ 模4时的不可约半单类，以及某些酉群中的不可约半单类，似乎无法用该策略处理，因而需要不同的方法。我们预期，对 [26, 12]中所发展的变形技术加以改进，将推动这些情形取得进展。

1.4. **记号**。
对于 $a, b \in \mathbb{N}$，在 $a < b$ 下，集合 $\{a, \ldots, b\}$ 记为$\mathbb{I}_{a,b}$。我们将$\mathbb{I}_{1,b}$记作 $\mathbb{I}_b$。若 $X$ 与 $Y$ 是集合 $Z$的子集，则 $Y$ 在$X$ 中的补集记为 $X \setminus Y$。

$\mathbb{C}$ 中的 $n$次单位根群记为 $\mu_n$ 与$\mu_\infty = \bigcup_{n\geq 0} \mu_n$。算子 $A$的特征多项式记为 $c_A(X)$，第$n$个圆分多项式记为 $\varphi_n(X)$。

设 $G$ 是一个群；其自同构群记为 $\mathrm{Aut}\, G$，其中心记为 $Z(G)$。我们用 $N \leqslant G$ 表示 $N$ 是一个子群或 $G$；$N \lhd$ 表示 $N$ 是正规子群。

若 $p$ 是一个素数，则 $G_p$ 是 $G$ 中所有 $p$-元素的集合。

设 $X \subset G$。$X$ 在 $H \leqslant G$中的中心化子和正规化子分别记作 $\mathsf{Cent}_H(X)$ 和 $N_H(X)$；由 $X$ 生成的子群记作 $\langle X\rangle$。

若对任意 $x, y \in X$，均有 $x \triangleright y = y$，则架称为平凡的[1]（不过，平凡共轭类是单位元的共轭类）。若 $x, y \in G$，则 $x \triangleright y := xyx^{-1}$；这使得 $G$ 成为一个架；在共轭作用下稳定的 $G$ 的任意子集都是子架。$g \in G$ 的共轭类记作 $\mathcal{O}_g^G$。我们将这一记号推广到 $H \leqslant G$ 对 $G$的共轭作用，其上 $g \in G$ 的轨道记作 $\mathcal{O}_g^H$。若 $g \in N_G(H)$，则 $\mathcal{O}_g^H$是 $\mathcal{O}_x^G$的子架。关于架的基础知识，参见 [11]。

我们汇集了关于有限李型群的记号和约定，见 §3.1。

关于霍普夫代数和 Nichols 代数的背景知识，以及本文中提及但未定义的概念，见 [2, 3, 4, 5, 6, 7, 1, 13]。

## 2. Nichols algebras over racks

### 2.1. **Kthulhu 共轭类**。

首先，回顾一下：如果满足以下对应条件，则有限群 $G$ 的共轭类 $\mathcal{O}$ 属于 C、D 或 F 型。

(C) 存在 $H \leqslant G$ 和 $r,\ s \in H \cap \mathcal{O}$，使得 $rs \neq sr$、$H = \langle \mathcal{O}_r^H,\ \mathcal{O}_s^H\rangle$、$\mathcal{O}_r^H \neq \mathcal{O}_s^H$，且 $\min\{|\mathcal{O}_r^H|, |\mathcal{O}_s^H|\} > 2$ 或 $\max\{|\mathcal{O}_r^H|, |\mathcal{O}_s^H|\} > 4$。(D) 存在 $r$、$s \in \mathcal{O}$，使得 $\mathcal{O}^{\langle r,\ s\rangle}_{r} \neq \mathcal{O}^{\langle r,\ s\rangle}_{s}$，且 $(rs)^2 \neq (sr)^2$。(F) 存在 $r_a \in \mathcal{O}$、$a \in \mathbb{I}_4 = \{1, 2, 3, 4\}$，使得 $\mathcal{O}^{\langle r_a:\ a\in\mathbb{I}_4\rangle}_{r_a} \neq \mathcal{O}^{\langle r_a:\ a\in\mathbb{I}_4\rangle}_{r_b}$，且对于 $a \neq b \in \mathbb{I}_4$，$r_a r_b \neq r_b r_a$。

C、D 或 F 型是底层 rack 的性质，并非其作为共轭类的特定实现的性质，见 [2, 4, 9]。

既非 C 型、D 型也非 F 型的共轭类是*kthulhu*。下一个定理是 [27, 29]的推论。

**定理 2.1.** [9, 定理 3.6], [2, 定理 2.8], [4, 定理 2.9]。*若一个共轭类 $\mathcal{O}$ 属于 C、D 或 F 型，则它会 $\mathcal{O}$ 坍缩。*□

设 $Y$ 是一个 C 型有限架。C 型的性质很容易传递：

(i) 若 $Y \hookrightarrow Z$ 是架之间的单射架态射，则 $Z$ 属于 C 型。

(ii) 若 $X \twoheadrightarrow Y$ 是架之间的满射态射，则 $X$ 属于 C 型。

性质 (i) 和 (ii) 对于 D 型和 F 型也成立，参见 [9, 2]。

[1]有时称为阿贝尔，但为避免与其他概念混淆，最好称为平凡。

下面介绍一种检测 C 型共轭类的方法。

**引理 2.2**。设 $G$ 是一个群，且 $N \lhd G$。假设 $N$ 是单非阿贝尔群，并设 $r \in N$。若 $\mathcal{O}_r^G \cap N \neq \mathcal{O}_r^N$，则 $\mathcal{O}_r^G$是 $C$ 型。

证明。显然，$r \neq e$。取 $y \in \mathcal{O}_r^G \cap N \setminus \mathcal{O}_r^N$。显然，$\mathcal{O}_r^N \cap \mathcal{O}_y^N = \emptyset$。群 $\langle \mathcal{O}_r^N \rangle$ 和 $\langle \mathcal{O}_y^N \rangle$ 是 $N$的非平凡正规子群，因此 $N = \langle \mathcal{O}_r^N \rangle = \langle \mathcal{O}_y^N \rangle = \langle \mathcal{O}_r^N,\ \mathcal{O}_y^N \rangle$。此外，由于 $Z(N) = e$，存在 $s \in \mathcal{O}_y^N$使得 $s \triangleright r \neq r$。最后，若 $\left|\mathcal{O}_r^N\right| \leq 2$，则 $N = \langle \mathcal{O}_r^N \rangle$ 将是阿贝尔群；对于 $\left|\mathcal{O}_r^N\right| \leq 2$，情况类似。□

引理 2.2 的一个应用见引理 5.36，§5.7。

2.2. **通过拟单子群判定 C 型**。

这里给出一种方法，用于证明含有拟单子群的有限群中的某些共轭类是 C 型。我们固定以下数据：

- G 是一个有限群，
- $\mathsf{M} \leqslant \mathsf{G}$,
- $\mathsf{T} \leqslant N_{\mathsf{G}}(\mathsf{M})$ 是一个阿贝尔子群，且
- $\mathsf{r} \in \mathsf{T}$。

**定理 2.3**。假设

| | |
|---|---|
| q | $\mathsf{M} \leqslant \mathsf{G}$ *is quasi-simple*, |
| n | $\mathsf{r} \notin \mathrm{Cent}_{\mathsf{G}}(\mathsf{M})$, |
| w | $(\mathcal{O}_{\mathsf{r}}^{\mathsf{G}} \cap \mathsf{T}) \setminus \left( \left( \mathcal{O}_{\mathsf{r}}^{\mathsf{M}} \cap \mathsf{T} \right) \cup \mathrm{Cent}_{\mathsf{G}}(\mathsf{M}) \right) \neq \emptyset.$ |

那么 $\mathcal{O}_{\mathsf{r}}^{\mathsf{G}}$是 $C$ 型。

此处 $\mathcal{O}_{\mathsf{r}}^{\mathsf{M}}$表示r 在M通过共轭作用于G所得的轨道，参见§ 1.4。记号q、n 和w 源自定理4.3中的对应记号。

我们需要一个H 和s ∈ H，满足(C)中的条件，见第9页。下面的引理为H 和s 提供候选对象，并验证其中一个条件。我们沿用之前的记号，但仍不假设 q, 或n 或w。

**引理 2.4.** 假设存在s $\in (\mathcal{O}_{\mathsf{r}}^{\mathsf{G}} \cap \mathsf{T}) \setminus (\mathcal{O}_{\mathsf{r}}^{\mathsf{M}} \cap \mathsf{T})$，并令H := ⟨r,s, M⟩ = ⟨r, s⟩M = M⟨r, s⟩。那么

$$\mathcal{O}_{\mathsf{s}}^{\mathsf{H}} \neq \mathcal{O}_{\mathsf{r}}^{\mathsf{H}}.$$

证明。假设 $\mathcal{O}_{\mathsf{s}}^{\mathsf{H}} = \mathcal{O}_{\mathsf{r}}^{\mathsf{H}}$，即 $\mathsf{s} \in \mathcal{O}_{\mathsf{r}}^{\mathsf{H}}$。这说明

$$\mathsf{s} \in \mathsf{H} \triangleright r = \mathsf{M} \triangleright (\langle \mathsf{r}, \mathsf{s} \rangle \triangleright \mathsf{r}) \overset{\star}{=} \mathsf{M} \triangleright \mathsf{r} = \mathcal{O}_{\mathsf{r}}^{\mathsf{M}},$$

这与假设矛盾。这里 $\star$ 是成立的，因为 T 是阿贝尔群。 □

下面的引理有助于验证其他条件。

**引理 2.5**。 假设 $q$ 成立。若存在 $\mathsf{y} \in N_{\mathsf{G}}(\mathsf{M}) \setminus \mathrm{Cent}_{\mathsf{G}}(\mathsf{M})$，则

$$\langle \mathcal{O}^{\mathsf{K}}_{\mathsf{y}} \rangle = \mathsf{K} \qquad \textit{and} \qquad \left| \mathcal{O}^{\mathsf{K}}_{\mathsf{y}} \right| \geq 3.$$

其中我们定义

$$\mathsf{K} := \langle \mathsf{y}, \mathsf{M} \rangle = \langle \mathsf{y} \rangle \, \mathsf{M}.$$

证明。 考虑子群

$$N_1 := \langle \mathcal{O}^{\mathsf{K}}_{\mathsf{y}} \rangle \geq N_2 := N_1 \cap \mathsf{M}.$$

由于 $\mathsf{y}$ 正规化 $\mathsf{M}$，可知 $\mathsf{M} \lhd \mathsf{K}$。此外，$N_1 \lhd \mathsf{K}$ 且包含 $\langle \mathsf{y} \rangle$。现在 $\mathsf{y} \in N_{\mathsf{G}}(N_2)$，因此 $N_1 = \langle \mathsf{y} \rangle N_2$ 且 $N_2 \lhd \mathsf{M}$。由于 $\mathsf{M}$ 是拟单的，可知要么 $N_2 = \mathsf{M}$，否则 $N_2 \subseteq Z(\mathsf{M})$。若 $N_2 = \mathsf{M}$，则 $N_1 = \langle \mathsf{y} \rangle N_2 = \langle \mathsf{y} \rangle \mathsf{M} = \mathsf{K}$，因此 $\mathsf{K} = \langle \mathcal{O}^{\mathsf{K}}_{\mathsf{y}} \rangle$，如所需。

我们证明第二种情形不可能发生。反设 $N_2 \subseteq Z(\mathsf{M})$。注意，对任意 $\mathbf{m} \in \mathsf{M}$，$[\mathbf{m}, \mathsf{y}] \in N_2$。映射 $\mathbf{m} \mapsto [\mathbf{m}, \mathsf{y}]$ 由此确定一个群同态 $\psi : \mathsf{M} \to Z(\mathsf{M})$。事实上，给定 $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathsf{M}$，我们有

$$[\mathbf{m}, \mathsf{y}][\mathbf{n}, \mathsf{y}] = \mathbf{m}(\mathsf{y}\mathbf{m}^{-1}\mathsf{y}^{-1})(\mathbf{n}\mathsf{y}\mathbf{n}^{-1}\mathsf{y}^{-1}) = \mathbf{m}(\mathbf{n}\mathsf{y}\mathbf{n}^{-1}\mathsf{y}^{-1})(\mathsf{y}\mathbf{m}^{-1}\mathsf{y}^{-1}) = [\mathbf{m}\mathbf{n}, \mathsf{y}].$$

再者，要么 $\ker \psi \subset Z(\mathsf{M})$，要么 $\ker \psi = \mathsf{M}$。在第一种情形下，我们有一个典范满射 $\mathsf{M}/\ker \psi \to \mathsf{M}/Z(\mathsf{M})$；但 $\mathsf{M}/\ker \psi$ 是阿贝尔群，而 $\mathsf{M}/Z(\mathsf{M})$ 是非阿贝尔单群，这就导致矛盾。因此 $\ker \psi = \mathsf{M}$，也就是说，$[\mathsf{M}, \mathsf{y}] = e$，换言之，$\mathsf{y} \in \mathsf{Cent}_{\mathsf{G}}(\mathsf{M})$，这与假设矛盾。

最后，$\left| \mathcal{O}^{\mathsf{K}}_{\mathsf{y}} \right| \geq 3$：否则 $\mathsf{K}$（进而 $\mathsf{M}$）将是阿贝尔群。 □

定理2.3的证明。假设w 表明存在$\mathsf{x} \in \mathcal{O}^{\mathsf{G}}_{\mathsf{r}} \cap \mathsf{T}$使得

$$\mathsf{x} \notin \mathcal{O}^{\mathsf{M}}_{\mathsf{r}} \cap \mathsf{T}, \qquad \mathsf{x} \notin \mathrm{Cent}_{\mathsf{G}}(\mathsf{M}).$$

令 $\mathsf{H} := \langle \mathsf{r}, \mathsf{x}, \mathsf{M} \rangle = \langle \mathsf{r}, \mathsf{x} \rangle \mathsf{M} = \mathsf{M} \langle \mathsf{r}, \mathsf{x} \rangle$。由引理 2.4 可得

$$\mathcal{O}^{\mathsf{H}}_{\mathsf{x}} \neq \mathcal{O}^{\mathsf{H}}_{\mathsf{r}}.$$

显然，$\mathsf{x} \in N_{\mathsf{G}}(\mathsf{M}) \setminus \mathrm{Cent}_{\mathsf{G}}(\mathsf{M})$; 事实上，$\mathsf{x} \in \mathsf{T} \subset N_{\mathsf{G}}(\mathsf{M})$ 根据假设。然后，将引理 2.5 应用于 $\mathsf{y} = \mathsf{r}$ 和 $\mathsf{y} = \mathsf{x}$ 可推出

$$\langle \mathcal{O}^{\langle \mathsf{r} \rangle \mathsf{M}}_{\mathsf{r}} \rangle = \langle \mathsf{r} \rangle \, \mathsf{M} \qquad \text{and} \qquad \langle \mathcal{O}^{\langle \mathsf{x} \rangle \mathsf{M}}_{\mathsf{x}} \rangle = \langle \mathsf{x} \rangle \, \mathsf{M}.$$

因此

$$\mathsf{H} = \langle \mathsf{r}, \mathsf{x} \rangle \mathsf{M} = \langle \mathsf{r} \rangle \, \langle \mathsf{x} \rangle \mathsf{M} = \langle \mathsf{r} \rangle \, \langle \mathcal{O}^{\langle \mathsf{x} \rangle \mathsf{M}}_{\mathsf{x}} \rangle = \langle \mathsf{r} \rangle \, \langle \mathcal{O}^{\mathsf{H}}_{\mathsf{x}} \rangle$$

因为 $[\mathsf{r},\ \mathsf{x}]=e$。交换 $\mathsf{r}$ 和 $\mathsf{x}$ 的角色，得到 $\mathsf{H}=\langle\mathsf{x}\rangle\langle\mathcal{O}_{\mathsf{r}}^{\mathsf{H}}\rangle$。因此

$$\mathsf{H}\geqslant\langle\mathcal{O}_{\mathsf{r}}^{\mathsf{H}},\mathcal{O}_{\mathsf{x}}^{\mathsf{H}}\rangle\geqslant\langle\mathcal{O}_{\mathsf{r}}^{\mathsf{H}},\mathsf{x}\rangle=\mathsf{H}.$$

因此，$\mathsf{H}=\langle\mathcal{O}_{\mathsf{r}}^{\mathsf{H}},\ \mathcal{O}_{\mathsf{x}}^{\mathsf{H}}\rangle$。引理 2.5 还意味着 $\left|\mathcal{O}_{\mathsf{r}}^{\mathsf{H}}\right|,\ \left|\mathcal{O}_{\mathsf{x}}^{\mathsf{H}}\right|\geq 3$。

最后，我们断言存在 $\mathsf{s}\in\mathcal{O}_{\mathsf{x}}^{H}$满足 $[\mathsf{r},\ \mathsf{s}]\neq e$。事实上，如果$[\mathsf{r},\ \mathsf{y}]=e$ 对所有 $\mathsf{y}\in\mathcal{O}_{\mathsf{x}}^{H}$都成立，那么 $[\mathsf{r},\ \mathsf{y}]=e$ 对所有 $\mathsf{y}\in\langle\mathcal{O}_{\mathsf{x}}^{H}\rangle=\langle\mathsf{s}\rangle\mathsf{M}$，但这与 n 矛盾。□

2.3. **可解架**。

在本小节中，我们引入可解架的概念，这是类型 $\Omega$ 的新判据所需要的，该判据将在小节2.4中讨论。

我们先介绍一些记号；未定义的术语请参见 [11]。给定一个集合 $I$，其双射群 $I\to I$ 记作 $\mathbb{S}_I$。设 $(X,\triangleright)$ 是一个架，并设 $\phi\colon X\to\mathbb{S}_X$ 由 $\phi_x(y)=x\triangleright y$给出。内群 $\operatorname{Inn}X$ of $X$是由 $\mathbb{S}_X$ 的像生成的 $\phi$的子群。

**引理 2.6.** [11, 引理 1.9] 设 $X$ 是一个架，存在一个群 $G$ 及一个架的单射态射 $\varphi\colon X\to G$，使得 $\operatorname{Im}\varphi$ 是 $G$ 的共轭类之并。若 $\varphi(X)$ 生成 $G$，则 $\operatorname{Inn}X\simeq G/Z(G)$。

**定义 2.7.** 若存在一个有限可解群 $G$ 及其一个共轭类 $\mathcal{O}$，使得.....，则非平凡架 $X$ 称为可解。

$$X\simeq\mathcal{O}\qquad\text{and}\qquad\mathcal{O}\text{ generates }G.$$

注 2.8. 假设 $\langle\mathcal{O}\rangle=G$ 相当强；例如，它意味着 $\mathcal{O}$ 是不可分解的，见 [11, 引理 1.15]（此处，不可分解是指它不能表示为两个子架的不交并）。此外，由于要求 $X$ 非平凡，群 $G$ 必然是非交换的，因而也必然不是循环群。

注 2.9. 设 $X$ 是一个可解架，$H$ 是一个有限群，且有一个共轭类 $\mathcal{O}\simeq X$。那么，由 $\mathcal{O}$ 生成的子群 $L$ 是可解的。

证明。设 $G$ 如定义 2.7所述。由引理 2.6，$\operatorname{Inn}X$ 是可解的。由于 $\operatorname{Inn}X\simeq L/Z(L)$，$L$ 也是可解的。□

设 $\Gamma$ 是有限阿贝尔群，$\langle t\rangle$ 是一个通过群自同构作用于 $\Gamma$ 的循环群，且 $\mathfrak{t}\in\operatorname{Aut}\Gamma$, $\mathfrak{t}(a)=t\cdot a$, $a\in\Gamma$。仿射架 $\operatorname{Aff}(\Gamma,\ \mathfrak{t})$的底集为 $\Gamma$，其架乘法为

$$a\triangleright b=\mathfrak{t}(b)+(\mathrm{id}-\mathfrak{t})(a),\qquad a,b\in\Gamma.$$

就半直积 $\Gamma\rtimes\langle t\rangle$ 中的共轭而言，我们有

$$(a\triangleright b,t)=(a,t)(b,t)(a,t)^{-1},\qquad a,b\in\Gamma.$$

因此，$\mathbf{Aff}(\Gamma,\ \mathfrak{t})$ 可视为 $\Gamma\rtimes\langle t\rangle$ 中的子架 $\Gamma\times\{t\}$（将其视为带有共轭运算的架），而 $\mathcal{O}^{\Gamma\rtimes\langle t\rangle}{}_{(0,\ t)}$ 可视为 $\mathbf{Aff}(\Gamma,\ \mathfrak{t})$ 的一个子架。

**引理 2.10.** 以下各项等价：

(a) $\mathrm{Aff}(\Gamma,\mathfrak{t})$ 是不可分解的，(b) $\mathrm{Aff}(\Gamma,\mathfrak{t})\simeq\mathcal{O}^{\Gamma\rtimes\langle t\rangle}{}_{(0,t)}$，(c) 恒等元 $-\mathfrak{t}\in\mathrm{End}\,\Gamma$ 是满射，(d) 恒等元 $-\mathfrak{t}\in\mathrm{End}\,\Gamma$ 是单射，(e) 中心化子 $\mathrm{Cent}_\Gamma(t)$ 是平凡的。

此外，不可分解的仿射架 $\mathrm{Aff}(\Gamma,\mathfrak{t})$ 是可解的。

证明. 留给读者。 □

**命题 2.11.** 设 $G$ 是一个有限群，$t\in G$ 与 $\Gamma\leqslant G$ 为阿贝尔的，且满足以下条件：

(a) $t$ 正规化 $\Gamma$；令 $\mathfrak{t}\in\mathrm{Aut}\,\Gamma$, $\mathfrak{t}(a)=t\triangleright a$, $a\in\Gamma$。

(b) 中心化子 $\mathrm{Cent}_\Gamma(t)$ 是平凡的。

那么 $\mathrm{Aff}(\Gamma,\mathfrak{t})$ 可以认作是 $\mathcal{O}_t^G$的一个子架，大小为 $|\Gamma|$。

证明。 留给读者。 □

2.4. **Nichols 代数的新判据。**

以下结果讨论可解架上的有限维 Nichols 代数。

**定理 2.12。** [12, 定理 6.14，推论 6。15] 设 $G$ 是一个有限可解非循环群，并且 $V\in{}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD}$ 满足 $\mathrm{supp}\,V$ 是$G$ 的一个生成共轭类 $G$ 且 维数 $\mathscr{B}(V)<\infty$。那么架 $\mathrm{supp}\,V$同构于以下对象之一：

(i) $\mathrm{Aff}(\Gamma,\mathfrak{t})$ 其中 $\Gamma=\mathbb{F}_q$, $\mathfrak{t}$ 是乘以 $d\in\mathbb{F}_q^\times$

$$(\mathbb{F}_q,d)\in\{(\mathbb{F}_3,2),(\mathbb{F}_4,\omega),(\mathbb{F}_5,2),(\mathbb{F}_5,3),(\mathbb{F}_7,3),(\mathbb{F}_7,5)\},\tag{2.1}$$

其中 $\omega\in\mathbb{F}_4$ 不等于 *0* 或 *1*。

(ii) $\mathbb{S}_4$ 中由 $j=2$ 或 4 个 $j$-循环构成的共轭类 $\mathcal{O}_j^4$。 □

(i) 涵盖了 $\mathrm{supp}\,V$ 是仿射不可分解非平凡架的情形。此外，$\mathcal{O}_2^4$ 和 $\mathcal{O}_4^4$ 都不是仿射的，参见 [12, 推论 6 的证明。15]。

反过来，(i) 或 (ii) 中的任意一个架，都是某个或多个有限维 Nichols 代数的支撑。参见 [12, 例 2.19、2.20、2.21、2.22]。

定理 2.12 提供了一种判定 Nichols 代数是否为无限维的准则。

**定义 2.13.** 有限架 $Y$ 是类型 $\Omega$，如果它有一个可解子架 $X$，该子架既不属于列表（2.1），也不同构于 $\mathcal{O}_2^4$ 或 $\mathcal{O}_4^4$。

例如，若有限架具有一个不属于列表（2.1）的非平凡不可分解仿射子架，则它是类型 $\Omega$。

**定理 2.14.** 设 $Y$ 是类型为 $\Omega$的有限架。那么 $Y$ 会坍缩。

证明。假设存在一个 2-余循环 $\mathfrak{q}: Y \times Y \to \mathrm{GL}(n, \Bbbk)$、一个有限群 $\Upsilon$ 和 $W \in {}^{\Bbbk\Upsilon}_{\Bbbk\Upsilon}\mathcal{YD}$，使得 $W \simeq (\Bbbk Y, c^{\mathfrak{q}})$ 是编织向量空间。根据假设，$W = \bigoplus_{g \in Y} W_g$。设 $X$ 是 $Y$ 的一个可解子架，该子架既不属于（2.1），也不同构于 $\mathcal{O}_2^4$ 或 $\mathcal{O}_4^4$。设 $G = \langle X \rangle \leqslant \Upsilon$；那么$V := \bigoplus_{g \in X} W_g \in {}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD}$。根据注记 2.8 和 2.9，$G$ 是可解的，但不是循环的。根据定理 2.12，$\dim \mathscr{B}(V) = \infty$，因此 $\dim \mathscr{B}(W) = \infty$。□

**推论 2.15。** 设 $G$ 为有限群，$\mathbf{S} \leq G$ 可解，且 $t \in \mathbf{S} \backslash Z(\mathbf{S})$满足 $\mathbf{S} = \langle \mathcal{O}_t^{\mathbf{S}} \rangle$ 且 $|\mathcal{O}_t^{\mathbf{S}}| \notin \{3, 4, 5, 6, 7\}$。那么 $\mathcal{O}_t^G$属于类型 $\Omega$，因此会坍缩。

证明。架 $\mathcal{O}_t^G$非平凡；否则$\mathbf{S}$是阿贝尔群，这与$t \notin Z(\mathbf{S})$ 相矛盾。因此，$\mathcal{O}_t^{\mathbf{S}}$ 是 $\mathcal{O}_t^G$的一个可解子架。根据大小可知，它既不属于（2.1），也不同构于 $\mathcal{O}_2^4$ 或 $\mathcal{O}_4^4$。□

在有利的情况下，可以使用以下结果。其条件相当严格，但或许容易验证。

**推论 2.16。** 设 $G$ 为有限群，$t \in G$ 且 $\Gamma \leqslant G$为阿贝尔群，满足命题 (a) 和 (b) 中的条件，其中命题编号为 2.11。若 $(\Gamma, \mathfrak{t})$ 不属于 (2.1)，特别是当 $|\Gamma| \notin \{2, 3, 4, 5, 7\}$时，则 $\mathcal{O}_t^G$属于类型 $\Omega$，因此会坍缩。□

**例 2.17.** 令 $G = \mathbf{SL}_2(2^m) \simeq \mathbf{PSL}_2(2^m)$ 满足 $m > 1$。其中非平凡对合的（唯一）共轭类 $\mathcal{O}$（即非平凡幺幂元的共轭类）在 $G$ 中属于 $\Omega$ 型，因此会坍缩。

证明。事实上，$G$ 包含一个二面体子群 $D$，其阶为 $2(2^m+1)$（即非分裂环面的正规化子），因此 $D$ 中的任意反射都是 $\mathcal{O}$的代表元。群 $\Gamma$ 中的旋转子群 $D$ 被 $t$正规化；又因为 $t$ 在其上作用为取逆，所以它仅中心化 $e$，因为 $2^m + 1$ 是奇数。如果 $m \neq 2$，那么$|\Gamma| \notin \{2, 3, 4, 5, 7\}$。如果 $m = 2$，那么 $|\Gamma| = 5$，但 $(\Gamma, \mathfrak{t})$ 不属于 (2.1)。□

2.5. **传播**。

我们将定理2.14 给出的判据与 C、D 或 F 型的判据进行比较。

∘ 存在一些 kthulhu 架，其类型为 $\Omega$，参见例 2.17和第 6 节。

事实上，C、D 或 F 型的架按定义都有一个可分解子架；而对于类型 $\Omega$，我们需要不可分解（可解）子架。

∘ 类型 $\Omega$ 的传播能力不如 C、D 或 F 型。

设 $Y$ 是一个类型为 $\Omega$的有限架。若 $Y \hookrightarrow Z$ 是架的单射态射，则 $Z$ 也具有类型 $\Omega$。但若 $X \twoheadrightarrow Y$ 是架的满射态射，则不清楚 $X$ 是否也具有类型 $\Omega$。我们提出:

**问题 2.18**。若 $X \twoheadrightarrow Y$ 是架的满射态射且 $Y$ 具有类型 $\Omega$，那么 $X$ 是否必然具有类型 $\Omega$?

解决这个问题的一种可能方法是关注余循环。具体而言，设 $X$ 是一个有限架，并设 $\mathfrak{q}: X \times X \to \mathrm{GL}(n, \Bbbk)$ 是一个 2-余循环。若存在架之间的满射态射 $\varpi: X \to Y$ 以及一个 2-余循环 $\mathfrak{p}: Y \times Y \to \mathrm{GL}(n, \Bbbk)$，使得$\mathfrak{q} = \mathfrak{p}(\varpi \times \varpi)$，则称 $\mathfrak{q}$可由架提升 $Y$。于是，$\varpi$ 诱导出编织向量空间之间的满射态射 $(\Bbbk X, \mathfrak{q}) \twoheadrightarrow (\Bbbk Y, \mathfrak{p})$，进而诱导出 Nichols 代数之间的满射态射$\mathscr{B}(X, \mathfrak{q}) \twoheadrightarrow \mathscr{B}(Y, \mathfrak{p})$。

**问题 2.19**。设 $X$ 是一个有限架。任意 2-余循环 $\mathfrak{q}: X \times X \to \mathrm{GL}(n, \Bbbk)$ 都可由某个单架 $Y$ 提升吗?

常值余循环沿任意架之间的满射态射 $\varpi: Y \to X$ 都可提升。由定理 2.14:

**引理 2.20.** 设 $X$ 是有限架，且 $\mathfrak{q}: X \times X \to \mathrm{GL}(n, \Bbbk)$ 是常值 2-余循环。若存在架的满射态射 $\varpi: X \to Y$，其中 $Y$属于 $\Omega$型，则 维数 $\mathscr{B}(\Bbbk Y, \mathfrak{q}) = \infty$。□

以下注突出体现了不同判据之间的相互作用。

注 2.21。设 $G$ 是有限群，且 $t \in G$。假设 $t \neq t^j \in \mathcal{O}_t^G$，其中某个 $j \in \mathbb{N}$，并且 $\Gamma \leqslant G$ 是阿贝尔的，且满足命题 (a) 和(b)中的条件 2.11。

若 $|\Gamma| > 4$，或 $|\Gamma| = 3$ 且 $\mathsf{Cent}_\Gamma(t^j) \neq \Gamma$，或 $|\Gamma| = 4$ 且 $|\mathsf{Cent}_\Gamma(t^j)| \neq 2$，则 $\mathcal{O}_t^G$属于 C 型，其中 $r := t^j$、$s := tx$，对某些 $x \in \Gamma$ 和 $H = \langle t, \Gamma \rangle$。

在这种情况下，由于传播效果更好，使用 C 型判据比使用推论2.16更方便。不过，在处理对合的共轭类时，类型 $\Omega$ 可能更有效，见例2.17。

## 3. Preliminaries on finite groups of Lie type

### 3.1. 李型群。

我们固定 $q = p^m$，其中 $p$ 是一个素数，且 $m \geq 1$。含有 $q$ 个元素的伽罗瓦域记作 $\mathbb{F}_q$。

设 $\mathbb{G}$ 是定义在 $\Bbbk$ 上的单代数群: $= \mathbb{F}_p$ 秩为 $\overline{n}$ 如 [34]所述。我们将使用以下记号:

- $\mathbb{G}_{sc}$ 和 $\mathbb{G}_{ad}$ 分别是$\mathbb{G}$的单连通覆盖和伴随商;
- $\pi$: $\mathbb{G} \to \mathbb{G}_{ad}$ 是自然同源;
- $\mathbb{T}$ 是 $\mathbb{G}$中的一个固定极大环面， $W = N_{\mathbb{G}}(\mathbb{T})/\mathbb{T}$ 是 $\mathbb{G}$的外尔群;
- $\Phi$ 是相对于 $\mathbb{T}$ 的 $\mathbb{G}$ 的根系， $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ 是固定的一组单根，其对应的正根集为 $\Phi^+$，编号遵循 [30];
- $\alpha_0$ 是相对于 $\Delta$的 $\Phi$ 中的最高根;
- 对于 $\gamma \in \Phi$， $\gamma^\vee$: $\Bbbk \to \mathbb{T}$ 是满足以下条件的余特征标

$$\chi(\gamma^\vee(\zeta)) = \zeta^{\frac{2(\chi,\gamma)}{(\gamma,\gamma)}}$$

对于 $\mathbb{G}$的权格中的 $\zeta \in \Bbbk^\times$ 和 $\chi$ 。对于任意 $t \in \mathbb{T}$ ，存在$\zeta_1$， $\ldots$ ，$\zeta_n \in \Bbbk^\times$ ，使得 $t = \prod_{j=1}^n \alpha_j^\vee(\zeta_j)$，且当 $\mathbb{G} = \mathbb{G}_{sc}$时唯一。

- $\mathbb{U}_\alpha$ 是 $\mathbb{G}$ 中与 $\alpha$ 对应的根子群，其中 $\alpha$ 属于 $\Phi$ ，而 $x_\alpha$: $\Bbbk \to \mathbb{U}_\alpha$ 是代数群之间的一个固定同构;
- $\mathbb{B} := \langle \mathbb{T}, \ \mathbb{U}_\alpha, \ \ \alpha \in \Phi^+ \rangle$ 是与 $\Delta$相关联的Borel 子群;
- $s_i : = s_{\alpha_i}$， $i \in \mathbb{I}_{0,\ n}$; 因此 $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ 是$W$ 的一组考克斯特生成元，而 $w_0$ 是相应的最长元素;
- 若 $J \subseteq S$ ，则 $\Delta_J \subseteq \Delta$ 是相应的单根集， $\Phi_J = \Phi \cap \mathbb{Z}\Delta_J$与 $\mathbb{L}_J$，分别地 $\mathbb{P}_J$是 $\mathbb{G}$中相应的标准 Levi 子群和抛物子群。
- $F$ 表示弗罗贝尼乌斯端同态或 Steinberg 端同态，即 $F = \vartheta \circ \mathrm{Fr}_q$ ，其中 $\vartheta$ 是 $\mathbb{G}$ 的一个（可能平凡的）自同构，保持 $\mathbb{T}$与 $\mathbb{B}$，而 $\mathrm{Fr}_q$ 是一个 Frobenius 端同态，其作用于 $\mathbb{T}$ 的方式是将每个元素升至 $q$次幂;
- $\mathbb{G}^F$、 $\mathbb{B}^F$等是被 $F$固定的点的子群;
- $\theta$ 是由 $\vartheta$诱导的 $\mathbb{R}\Phi$的自同构，并且，滥用记号，也是由 $\theta$的共轭所诱导的 $W \leqslant \mathrm{GL}(\mathbb{R}\Phi)$的自同构;
- $\mathcal{F}$ 是以下有限群列表:

$$\mathcal{F} := \{\mathrm{SL}_2(2), \mathrm{SL}_2(3), \mathrm{SU}_3(2), \mathrm{Sp}_4(2), G_2(2), {}^2B_2(2), \ {}^2G_2(3), \ {}^2F_4(2)\}.$$

回顾一下，非平凡有限群 $H$ 是拟单的，当且仅当它是完美群，并且 $H/Z(H)$ 是单群。于是 $H/Z(H)$ 是非交换群， $H$ 的每个真正规子群都是中心子群，且 $H$ 的每个非平凡同态像都是拟单群， [42, 第 6]章。

若 $\mathbb{G}_{sc}^F \notin \mathcal{F}$ ，则它是拟单的，且典范投影 $\pi$ 到 $\mathbb{G}_{sc}^F$ 的限制是群同态 $\pi : \mathbb{G}_{sc}^F \to \mathbb{G}_{ad}^F$ ，其像为 $[\mathbb{G}_{ad}^F, \mathbb{G}_{ad}^F]$ ，核为 $\mathbf{Z} := Z(\mathbb{G}_{sc})^F = Z(\mathbb{G}_{sc}^F)$，因此

$$\boldsymbol{G} := \mathbb{G}_{sc}^F/Z(\mathbb{G}_{sc})^F = [\mathbb{G}_{sc}^F, \mathbb{G}_{sc}^F]/Z(\mathbb{G}_{sc}^F) \simeq [\mathbb{G}_{ad}^F, \mathbb{G}_{ad}^F] \tag{3.1}$$

是一个非阿贝尔有限单群。

若 $\Phi$ 是典型的，滥用记号时，我们有时会用矩阵表示 $\mathbb{G}$ 或 $\mathbb{G}^F$ 中的元素，并约定该元素通过通常的同源对应于这个矩阵。

我们称双边标记根系中的根子系统是 $\widetilde{\ }$ 型 $A_n$（分别为 $A_n$ 型），如果它是 $A$ 型、秩为 $n$，且由短根（分别由长根）组成。

3.2. **半单共轭类**。

主要文关注半单共轭类，即半单元素的共轭类。若 $x \in \mathbb{G}$ 是半单的，则 $\mathcal{O}_x^{\mathbb{G}}$ 与极大环面 $\mathbb{T}$ 相交，因为所有极大环面在 $\mathbb{G}$ 中共轭。然而，对于 $x \in \mathbb{G}^F$ 半单的情形， $\mathcal{O}_x^{\mathbb{G}^F}$ 不一定与 $\mathbb{T}^F$ 相交；由于 $x$ 属于 $\mathbb{G}$ 的某个极大环面，因此我们需要考察 $\mathbb{G}$ 中由 $F$ 稳定的极大环面。我们总结所需的信息如下:

- 众所周知，也很容易看出， $\mathbb{G}$ 中一个由 $F$ 稳定的极大环面是一个共轭像 $g\mathbb{T}g^{-1}$ ，其中 $g \in \mathbb{G}$ 满足 $g^{-1}F(g) \in N_{\mathbb{G}}(\mathbb{T})$。因此，我们将 $\mathbb{G}^F$ 中的极大环面称为 $F$ 中由 $F$ 固定的元素所组成的子群。

- $\mathbb{G}^F$ 中的两个极大环面 $(g\mathbb{T}g^{-1})^F$ 和 $(h\mathbb{T}h^{-1})^F$ 是 $\mathbb{G}^F$-共轭的，当且仅当 $g^{-1}F(g)$ 和 $h^{-1}F(h)$ 在 $W$ 中表示 $\theta$-共轭的元素，见 [34, 命题 25。1], 其中， $\theta$-共轭由 $\sigma \cdot_\theta \tau = \sigma\tau\theta(\sigma)^{-1}$ 给出。元素 $g^{-1}F(g) \in N_{\mathbb{G}}(\mathbb{T})/\mathbb{T} = W$ （其 $\theta$-共轭类）称为外尔群中的关联元素。

- 对于 $w \in W$ ，我们用 $\mathbb{T}_w^F$ 表示 $\mathbb{G}^F$-共轭类极大环面在 $\mathbb{G}^F$ 中的一个代表元，其关联元素为 $w$。也就是说，

$$\mathbb{T}_w = g\mathbb{T}g^{-1}, \qquad \text{for some } g \text{ such that} \qquad \overline{g^{-1}F(g)} = w \in N_{\mathbb{G}}(\mathbb{T})/\mathbb{T}.$$

- 设 $n_w \in N_{\mathbb{G}^F}(\mathbb{T})$，设 $w := n_w\mathbb{T} \in W$ ，并设 $g \in \mathbb{G}^F$ 满足$g^{-1}F(g) = n_w$。我们定义

$$F_w := \mathrm{Ad}(n_w) \circ F. \tag{3.2}$$

显然， $\mathbb{T}$ 是 $F_w$-稳定的。因此 $\mathbb{T}_w^F = g\mathbb{T}^{F_w}g^{-1}$。我们设

$$G_w := \mathbb{G}^{F_w} \simeq \mathbb{G}^F \qquad \text{so} \qquad \mathbf{Z} = Z(\mathbb{G}^F) = Z(\mathbb{G})^F = Z(\mathbb{G}^{F_w}). \tag{3.3}$$

TABLE 4. $\mathbb{G}_{\mathrm{sc}}^F$的中心

| $\Phi$ | $n$ | $q$ | $\mathbf{Z}$ |
|---|---|---|---|
| $B_n$ | any | even | $e$ |
| | any | odd | $\langle \alpha_n^\vee(-1)\rangle$ |
| $D_n$ | any | even | $e$ |
| | even | odd | $\langle \prod_{i=1}^n \alpha_i^\vee((-1)^i)\ \alpha_{n-1}^\vee(-1)\alpha_n^\vee(-1)\rangle$ |
| | odd | $\equiv 1$ 模 4 | $\langle \prod_{i=1}^{n-1} \alpha_i^\vee((-1)^i)\alpha_{n-1}^\vee(\omega)\alpha_n^\vee(\omega)\rangle$ $\omega^4=e,\ \omega^2=-1$ |
| | odd | $\equiv 3$ 模 4 | $\langle \alpha_{n-1}^\vee(-1)\alpha_n^\vee(-1)\rangle$ |
| $E_6$ | | $\equiv 0$, 模 3 | $e$ |
| | | $\equiv 1$ 模 3 | $\langle \alpha_1^\vee(\omega)\alpha_3^\vee(\omega^2)\alpha_5^\vee(\omega)\alpha_6^\vee(\omega^2)\rangle$ $\omega\neq e,\quad \omega^3=e$ |
| $E_7$ | | even | $e$ |
| | | odd | $\langle \alpha_2^\vee(-1)\alpha_5^\vee(-1)\alpha_7^\vee(-1)\rangle$ |
| $E_8,\ F_4,\ G_2$ | | any | $e$ |

表 4汇总了关于以下群的信息：$\mathbf{Z}$ 对所有群 $\mathbb{G}$ 我们将要处理的。

接下来我们定义尖点元素：

- 如果对于任意满足 $\theta(J)=J$ 的 $J\subsetneq S$， $w$ 的任何共轭元都不属于 $\langle J\rangle$，则元素 $w\in W$ 称为尖点的（或椭圆的）。

等价地， $w$ 是尖点元素，当且仅当 $w\theta$ 在 $W$ 的几何表示中的特征多项式不被 $X-1$整除， [23, 练习 3。16]，[24,引理 7。2], [19,命题 2.2。1]。

- $\mathbb{G}^F$ 中的半单元素若仅属于由 $F$稳定的极大环面 $\mathbb{T}_w$ ，且 $w$ 尖点，则称为尖点的。 $\mathbb{G}^F$ 中的尖点元素 $s$ 是正则的，即，$\mathsf{Cent}_{\mathbb{G}}(s)^\circ$ 的恒等连通分支是包含 $s$的唯一极大环面，其中 $\mathsf{Cent}_{\mathbb{G}}(s)$，见 [7,命题 3.13]。

设 $s\in\mathbb{G}^F$ 为半单元素。则存在满足 $g^{-1}F(g)\mathbb{T}=w\in N_{\mathbb{G}}(\mathbb{T})/\mathbb{T}=W$的 $w\in W$ 和 $g\in\mathbb{G}$，使得 $s\in\mathbb{T}_w^F=g\mathbb{T}^{F_w}g^{-1}$。也就是说，存在一个有限环面 $\mathbb{T}^{F_w}$、$t\in\mathbb{T}^{F_w}$ 和 $g\in\mathbb{G}$，使得

$$s=gtg^{-1}. \tag{3.4}$$

由 $g$ 共轭诱导出一个架同构，以下称为标准同构，它介于$\mathcal{O}_t^{G_w}$与 $\mathcal{O}_s^{\mathbb{G}^F}$ 之间。

**定义3.1**。 对于一个 $F$-稳定的半单共轭类 $\mathcal{O}_s^{\mathbb{G}^F}$ ，我们定义

$$W[\mathcal{O}_s^{\mathbb{G}^F}]:=\{w\in W\mid \mathcal{O}_s^{\mathbb{G}^F}\cap\mathbb{T}_w^F\neq\emptyset\}=\{w\in W\mid \mathcal{O}_t^{\mathbb{G}}\cap\mathbb{T}^{F_w}\neq\emptyset\}. \tag{3.5}$$

换言之，集合 $W[\mathcal{O}_s^{\mathbb{G}^F}]$ 记录了与共轭类 $\mathcal{O}_s^{\mathbb{G}^F}$ 相交的极大环面；它是 $W$ 中若干 $\theta$-扭共轭类的并。

注 3.2。设 $\boldsymbol{\pi}\colon\ \mathbb{G}\to\mathbb{G}_1$ 是单代数群之间的同源，且其$F$-稳定核。我们将 $F$ 所诱导的态射记为 $\mathbb{G}_1$，因此 $W[\mathcal{O}_{\boldsymbol{\pi}}^{\mathbb{G}_1^F}(s)]$也有定义。类似于（3.5），我们定义

$$W[\mathcal{O}_{\boldsymbol{\pi}(s)}^{\boldsymbol{\pi}(\mathbb{G}^F)}] := \{w\in W \mid \mathcal{O}_{\boldsymbol{\pi}(s)}^{\boldsymbol{\pi}(\mathbb{G}^F)}\cap(\boldsymbol{\pi}(\mathbb{T}_w))^F\neq\emptyset\}.$$

我们有一串包含关系

$$W[\mathcal{O}_s^{\mathbb{G}^F}]\subseteq W[\mathcal{O}_{\boldsymbol{\pi}(s)}^{\boldsymbol{\pi}(\mathbb{G}^F)}]\subseteq W[\mathcal{O}_{\boldsymbol{\pi}(s)}^{\mathbb{G}_1^F}]. \tag{3.6}$$

事实上，我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi}(\mathcal{O}_s^{\mathbb{G}^F}\cap\mathbb{T}_w^F)\subseteq\boldsymbol{\pi}(\mathcal{O}_s^{\mathbb{G}^F})\cap\boldsymbol{\pi}(\mathbb{T}_w^F)&=\mathcal{O}_{\boldsymbol{\pi}(s)}^{\boldsymbol{\pi}(\mathbb{G}^F)}\cap\boldsymbol{\pi}(\mathbb{T}_w^F)\\&\subseteq\mathcal{O}_{\boldsymbol{\pi}(s)}^{\mathbb{G}_1^F}\cap(\boldsymbol{\pi}(\mathbb{T}_w))^F.\end{aligned}$$

- （3.6）中的第一个包含关系是相等关系。

  因为，若 $\mathbf{x}\in\boldsymbol{\pi}(\mathcal{O}_s^{\mathbb{G}^F})\cap\boldsymbol{\pi}(\mathbb{T}_w^F)$，则对于某个 $x\in\mathcal{O}_s^{\mathbb{G}^F}$，有 $\mathbf{x}=\boldsymbol{\pi}(x)$，并且对于某个 $x'\in\mathbb{T}_w^F\cap Z(\mathbb{G})^F x\subset\mathbb{T}_w^F\cap\mathbf{Z}x$，有 $\mathbf{x}=\boldsymbol{\pi}(x')$。但于是 $x\in\mathbb{T}_w^F$。

- （3.6）中的第二个包含关系不一定是相等关系，因为 $\boldsymbol{\pi}$ 到 $\mathbb{G}^F$ 的限制在一般情况下并非满射到 $\mathbb{G}_1^F$。

例 3.3. 设 $\mathbb{G}=\mathrm{SL}_2(\Bbbk)$、$\mathbb{G}_1=\mathrm{PSL}_2(\Bbbk)$ 和 $=\mathrm{PGL}_2(\Bbbk)$，$F=\mathrm{Fr}_q$，其中 $q$ 为奇数，并令 $\mathbb{T}_1$ 为 $\mathbb{G}$ 中由对角矩阵组成的极大环面。则 $\mathbb{G}^F=\mathrm{SL}_2(q)$，且 $\boldsymbol{\pi}(\mathbb{G}^F)=\mathrm{PSL}_2(q)\subsetneq\mathrm{PGL}_2(q)=\mathbb{G}_1^F$。若对 $a\in\Bbbk^\times$ 有 $a^q=-a$，且 $t:=\mathrm{diag}(a,a^{-1})$，则 $W[\mathcal{O}_s^{\mathbb{G}^F}]$ 仅包含 $W$中的非平凡元，但 $\boldsymbol{\pi}(s)\in\boldsymbol{\pi}(\mathbb{T}_1)^F$，所以 $W[\mathcal{O}_{\boldsymbol{\pi}}^{\mathbb{G}_1^F}(s)]=W$。

架 $\mathcal{O}_t^{G_w}$与 $\mathcal{O}_s^{\mathbb{G}^F}$ 同构（通过标准同构）。对于任意 $w\in W[\mathcal{O}_s^{\mathbb{G}^F}]$，我们将使用前者。

### 3.3. $B_n$ 型和 $D_n$型外尔群中的尖点类。

为后续讨论起见，我们回顾一下 $B_n$ 型和 $D_n$ 型外尔群中的尖点共轭类 [23]的描述。

3.3.1. 尖点类，$B_n$型。$B_n$ 型外尔群中的尖点共轭类由 $n$的分拆 $\lambda=(\lambda_1,\ldots\ldots,\lambda_r)$参数化，[23, 命题 3.4。6]更确切地说，给定一个分拆 $\lambda$，我们定义

$$\Lambda_1:=0,\qquad \Lambda_j:=\sum_{i=1}^{j-1}\lambda_i,\ \text{for } j\in\mathbb{I}_{2,r},\qquad \gamma_j:=\sum_{i=0}^{\Lambda_j}\alpha_{n-i},\ \text{for } j\in\mathbb{I}_r.$$

考虑

$$w_{\lambda_j}=s_{\gamma_j}s_{n-\Lambda_j-1}s_{n-\Lambda_j-2}\cdots s_{n-\Lambda_j-(\lambda_j-1)},\qquad j\in\mathbb{I}_r.$$

注意到$w_{\lambda_j}$是外尔群$W_{\Phi_{\lambda,\ j}}$中根子系统$\Phi_{\lambda,\ j}$的一个Coxeter元，其类型为$B_{\lambda_j}$，基为

$$\{\alpha_{n-\Lambda_j-\lambda_j+1},\ \alpha_{n-\Lambda_j-\lambda_j+2},\ \ldots,\ \alpha_{n-\Lambda_j-1},\ \gamma_j\}.$$

若将$B_{\lambda_j}$型外尔群嵌入$\mathbb{S}_{2\lambda_j+1}$，如 [15, 第 3 节4],所述，Coxeter 元对应于 $2\lambda_j$ 循环。因此

$$\mathrm{Cent}_{W_{\Phi_{\lambda,j}}}(w_{\lambda,j}) = \mathrm{Cent}_{\mathbb{S}_{2\lambda_j+1}}(w_{\lambda_j}) \cap W_{\Phi_{\lambda,j}} = \langle w_{\lambda,j}\rangle \text{ and } |w_{\lambda_j}| = 2\lambda_j.$$

此外，若 $i \neq j$ 则 $\Phi_{\lambda,\ j} \perp \Phi_{\lambda,\ i}$，由此 $w_{\lambda_j} w_{\lambda_i} = w_{\lambda_i} w_{\lambda_j}$，故

$$|\mathrm{Cent}_{\langle J_{w_\lambda}\rangle}(w_\lambda)| \geq 2^r \prod_{i=1}^{r} \lambda_i.$$

根据 [23, 命题 3.4，6], 与 $\lambda$ 对应的尖点共轭类的一个代表元为

$$w_\lambda = \prod_{j=1}^{r} w_{\lambda_j}. \tag{3.7}$$

因此，$\langle s_{n-l+1}$，……，$s_n\rangle$中的尖点共轭类，其中 $1 \leq l \leq n$，由 $l$ 的分拆 $\lambda$ 而非 $n$参数化，并由上述描述的$w_\lambda$ 表示。

3.3.2. 尖点共轭类，$D_n$型。型为 $D_n$ 的外尔群 $W_D$ 中尖点共轭类的分类见 [23, 命题 3.4，11]是根据 $\Phi_D$ 型根系 $D_n$ 包含于 $\Phi_B$ 型根系 $B_n$ （作为长根集合）给出的。

我们记 $\alpha'_n$，仅在本节剩余部分中，将 $n$阶单根记为 $\Phi_D$，以区别于 $n$ 阶单根 $\alpha_n \in \Phi_B$，因此 $\alpha'_n = \alpha_{n-1} + 2\alpha_n$。通过将 $W_D$ 包含到 $W_B$ 的外尔群 $\Phi_B$中，$W_D$ 中的尖点元素恰好是 $W_B$ 中包含于 $W_D$的尖点元素。沿用（3.7）中的记号，$W_D$ 中的尖点元素是 $w_\lambda$ 所对应的元素，其中分拆 $\lambda$ 的 $n$ 项数为 $r = 2c$ 偶数。

注意，对于任意 $i \in \mathbb{I}_l$，$w_{\lambda_i} \in W_B \setminus W_D$ 都成立；但由于 $[W_B :\ W_D] = 2$, 对于任意 $i$，$j$都有 $w_{\lambda_i} w_{\lambda_j} \in W_D$。具体而言，与 $\lambda =$（$\lambda_1$、……、$\lambda_{2c}$）相关联的 $W_D$ 中的尖点元素为

$$w_\lambda = \prod_{i=1}^{c} (w_{\lambda_{2i-1}} w_{\lambda_{2i}}),$$

其中 $w_{\lambda_{2i-1}} w_{\lambda_{2i}}$ 属于由根系中的长根构成的$D_{\lambda_{2i-1}+\lambda_{2i}}$ 型根子系统$\Phi_{\lambda,2i-1,2i}$ 的外尔群

$$(\mathbb{Z}\Phi_{\lambda,2i-1} + \mathbb{Z}\Phi_{\lambda,2i}) \cap \Phi_B$$

$B_{\lambda_{2i-1}+\lambda_{2i}}$型。$w_{\lambda_{2i-1}}w_{\lambda_{2i}}$ 的阶为

$$|w_{\lambda_{2i-1}}w_{\lambda_{2i}}| = 2\mathrm{lcm}(\lambda_{2i}, \lambda_{2i-1}), \qquad i \in \mathbb{I}_c.$$

注意，对于任意 $\lambda_{2i-1} \geq 3$，元素 $w_{\lambda_{2i-1}}w_{\lambda_{2i}}$ 都保持根系 $\Phi'_{\lambda,\ 2i-1} := \Phi_{\lambda,\ 2i-1} \cap \Phi_D$，该根系的类型为 $D_{\lambda_{2i-1}}$。对于 $i = 1$，这是以 $\{\alpha'_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_{n-\lambda_1+1}\}$ 为基的根系。

$W_D$ 中 $w_\lambda$ 的中心化子对于任意 $i$，$j \in \mathbb{I}_{2c}$ 都包含 $w_{\lambda_i}w_{\lambda_j}$。如果 $\lambda_i = \lambda_{i+1}$，那么它还包含下述对合，该对合交换 $w_{\lambda_i}$ 和 $w_{\lambda_{i+1}}$:

$$\prod_{d=0}^{\lambda_i-1} s_{\alpha_{n-\Lambda_{i+1}-d}+\cdots+\alpha_{n-\Lambda_i-1-d}}.$$

类型 $D_n$ 的讨论对类型 $D_3 = A_3$ 仍然有效。在此情形下，只有一个尖点类，即包含 Coxeter 元的共轭类，对应于分拆 (2，1)。

## 4. Detecting semisimple classes of type C

### 4.1. **概述**。

本节假设 $\mathbb{G} = \mathbb{G}_{sc}$ 是单连通单代数群，且 $F$ 是 $\mathbb{G}$的弗罗贝尼乌斯或 Steinberg 端同态。我们假设 $\mathbb{G}_{sc}^F$ 不属于族 $\mathcal{F}$。令 $\boldsymbol{G} = \mathbb{G}_{sc}^F/Z(\mathbb{G}_{sc}^F)$，如 (3.1) 中所示。

我们要寻找一种方法，以判定半单轨道 $\mathcal{O}_x^{\boldsymbol{G}}$ $\boldsymbol{G}$ 是否为 C 型，从而保证其上的任意 Nichols 代数都是无限维的。现在，$\mathcal{O}_x^{\boldsymbol{G}}$与至少一个极大环面 $\mathbb{T}_w^F$、$w \in W$ 相交。此前，我们已经求出了与某些特殊环面 $\mathbb{T}_w^F$相交的共轭类，例如：

- [4, 定理 1.1] 若 $\boldsymbol{G} = \mathbf{PSL}_{n+1}(q)$，$n \geq 2$，且 $x$ 不可约，则$\mathcal{O}_x^{\boldsymbol{G}}$ 坍缩。这里，“$x$ 不可约”等价于“$\mathcal{O}_x^{\boldsymbol{G}}$ 只与极大环面 $\mathbb{T}_w^F$ 相交，其中 $w \in W$ 属于 Coxeter 元的共轭类”。

- [7, 定理 4.1] 若 $\boldsymbol{G} \neq \mathbf{PSL}_{n+1}(q)$，再加上一项次要的技术性假设，并且 $\mathcal{O}_x^{\boldsymbol{G}}$ 与分裂环面 $\mathbb{T}^F$相交，则其坍缩。

关于坍缩半单类的前项结果的更多信息，请参见第 33页。

我们聚焦于与给定极大环面相交的共轭类。具体而言，

在另行通知之前，我们固定一个元素 $w \in W$。

我们感兴趣的对象是共轭类 $\mathcal{O}_{\pi(s)}^{\boldsymbol{G}}$，其中 $s = gtg^{-1}$如（3.4）中对 $t \in \mathbb{T}^{F_w} \setminus e$所述。

换言之，设 $\mathfrak{O} = \mathcal{O}_t^{G_w}$，其中 $G_w = \mathbb{G}^{F_w}$ 如（3.3）中所述，且 $F_w$ 如（3.2）中所述。那么 $\mathcal{O} := \pi(\mathfrak{O}) = \mathcal{O}^{\pi(G_w)}\ \pi\ (t)$ 是中的一个轨道

$$G_w/Z(G_w) = G_w/\mathbf{Z} \simeq \mathbb{G}^F/Z(\mathbb{G})^F = \boldsymbol{G}.$$

注意到 $\mathcal{O} \simeq \mathcal{O}^{\boldsymbol{G}}_{\pi(s)^\circ}$。为简便起见，我们将处理 $\mathfrak{O}$ 和 $\mathcal{O}$，而不是 $\mathcal{O}_s^{\mathbb{G}^F}$ 和 $\mathcal{O}^{\boldsymbol{G}}_{\pi(s)^\circ}$

在本节中，我们借助以下概念给出半单类属于 C 型的充分条件。回顾一下，$\mathbb{G}$ 的极大环面 $\mathbb{T}$ 既是 $F$-稳定的，也是 $F_w$-稳定的。

**定义 4.1**。 $\mathbb{G}$ 的一个连通约化子群若是 $w$-适合的，则它是 $F_w$-稳定的，并且包含 $\mathbb{T}$。

我们的目标是从一个 $w$-适合子群 $\mathbb{M}$构造出一个 $H$，其定义见 C 型的定义，第 9 页。现在，有许多 $w$-适合子群（例如 $\mathbb{G}$ 本身），但为了使这一方法奏效，我们需要一些强条件。事实上，我们证明了：如果一个 $w$-适合子群 $\mathbb{M}$ 和 $t \in \mathbb{T}^{F_w} \setminus e$ 满足下述 Q 、N 和 W 条件，那么 $\mathcal{O} \simeq \mathcal{O}^{\boldsymbol{G}}_{\pi(s)}$（见上文）属于 C 型，参见 4.3 节 §4.2。

然后，我们在§4.3 中分析这些条件，并在§4.4 中描述定理4.3适用的一些情形。

4.2. **关键定理**。

我们需要以下记号。设 $\mathbb{M}$ 是 $w$—适合的 $\mathbb{G}$ 子群。

- $\Phi_{\mathbb{M}}$ 是由半单群 $[\mathbb{M}, \mathbb{M}]$ 的根组成的 $\Phi$ —稳定根子系统，其中 $w\theta$—稳定，且 $\Phi^+_{\mathbb{M}} := \Phi^+ \cap \Phi_{\mathbb{M}}$，因此

$$\mathbb{M} = \langle \mathbb{T}, \mathbb{U}_{\pm\gamma} : \gamma \in \Phi_{\mathbb{M}} \rangle, \qquad [\mathbb{M}, \mathbb{M}] = \langle \mathbb{U}_{\pm\gamma} : \gamma \in \Phi_{\mathbb{M}} \rangle;$$

也就是说，$\mathbb{G}$ 的 $w$—适合子群与 $\Phi$ 的 $w\theta$—稳定根子系统之间存在双射对应。

- $\Delta_{\mathbb{M}}$ 是与正系 $\Phi^+_{\mathbb{M}}$ 对应的 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 的基；
- $W_{\mathbb{M}} := N_{\mathbb{M}}(\mathbb{T})/\mathbb{T}$ 是 $\mathbb{M}$的外尔群，因此也是 $[\mathbb{M}, \mathbb{M}]$的外尔群；
- $M := [\mathbb{M}, \mathbb{M}]^{F_w}$，一个有限李型群；

注 4.2。由于 $\mathbb{T}$ 正规化了 $\mathbb{M}$，它也正规化了 $[\mathbb{M}, \mathbb{M}]$，因此 $\mathbb{T}^{F_w}$ 正规化了 $M$和 $[M, M]$。

**定理 4.3**。 设 $\mathbb{G} = \mathbb{G}_{sc}$。设 $\mathbb{M}$ 是 $\mathbb{G}$ 和$t \in \mathbb{T}^{F_w} \setminus e$的一个 $w$-适用子群。假设以下条件成立：

Q $\pi([M,M])$ 是拟单的（拟单性）；
N $\mathrm{Cent}_W(w\theta) \cdot t \setminus ((\mathbf{Z}\,\mathrm{Cent}^{W_{\mathbb{M}}}(w\theta) \cdot t) \cup \mathrm{Cent}_{\mathbb{T}}([M,M]_p)) \neq \emptyset$
W （轨道条件）。

那么， $\mathcal{O}$ 是 $C$ 型。

这里 Q 表示拟单性，N 表示非中心性，而W指的是我们正在将问题化归为 Weyl 群上的一个问题这一事实。

证明。 这是将定理 2.3 应用于以下数据的结果：

- $\mathsf{G} = \pi(G_w) \simeq G_w/\mathbf{Z}$,
- $\mathsf{M} = \pi([M,M])$,
- $\mathsf{T} = \pi(\mathbb{T}^{F_w})$ and
- $\mathsf{r} = \pi(t)$.

我们已经注意到， $\pi(\mathbb{T}^{F_w})$正规化了 $\pi([M,M])$。

我们需要验证定理2.3 的假设成立。假设q 就是Q ，而假设n 由N推出。事实上，若$\pi(t)$ $\pi([M,M])] = e$，则对任意 $x \in [M,M]_p$都有 $t \triangleright x \in [M,M]_p \cap \mathbf{Z}x = \{x\}$，这与N矛盾。

还需验证 w 成立，也就是说，

$$\left(\mathcal{O}_{\mathsf{r}}^{\mathsf{G}} \cap \mathsf{T}\right) \setminus \left(\left(\mathcal{O}_{\mathsf{r}}^{\mathsf{M}} \cap \mathsf{T}\right) \cup \mathrm{Cent}_{\mathsf{G}}(\mathsf{M})\right) \neq \emptyset.$$

我们证明，这可由 W 推出。

首先，我们断言

$$\mathcal{O}_t^{G_w} \cap \mathbb{T}^{F_w} = \mathcal{O}_t^{N_{G_w}(\mathbb{T})} = \mathrm{Cent}_W(w\theta) \cdot t.$$

第一个相等于结合 [34, 习题30.13]与 $G_w = \mathbb{G}^{F_w}$ [34, 定理24.1] 中的布鲁哈分解而得出，如下所示。假设 $t_1 = x_1 \triangleright t \in \mathbb{T}^{F_w}$对某个 $x_1 \in G_w$成立。将布鲁哈分解应用于 $x_1$ 与 $x_1 t = t_1 x_1 \in G_w$ 时， $N_{G_w}(\mathbb{T})$中因子的唯一性保证 $x_1$ 可替换为 $N_{G_w}(\mathbb{T})$中的一个元素。第二个相等于同构$\mathrm{Cent}_W(w\theta)$ $\simeq N_{G_w}(\mathbb{T})/\mathbb{T}^{F_w}$， [34, 命题25.3 (a)]得出。

我们以类似的方式证明

$$\mathcal{O}_t^{[M,M]} \cap \mathbb{T}^{F_w} \subseteq \mathcal{O}_t^M \cap \mathbb{T}^{F_w} = \mathcal{O}_t^{N_M(\mathbb{T})} = \mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w\theta) \cdot t. \tag{4.1}$$

因此，W 和包含关系 $\mathbb{T}^{F_w} \leq G_w$ 给出

$$\left(\mathcal{O}_t^{G_w} \cap \mathbb{T}^{F_w}\right) \setminus \left(\mathbf{Z}\left(\mathcal{O}_t^{[M,M]} \cap \mathbb{T}^{F_w}\right) \cup \mathrm{Cent}_{G_w}([M,M]_p)\right) \neq \emptyset.$$

设 $y \in \mathcal{O}_t^{G_w} \cap \mathbb{T}^{F_w}$ 满足 $y \notin \mathbf{Z}\left(\mathcal{O}_t^{[M,M]} \cap \mathbb{T}^{F_w}\right)$ 和 $y \notin \mathsf{Cent}_{G_w}([M,M]_p)$。

我们声称

$$\pi(y) \in \left(\mathcal{O}_{\mathsf{r}}^{\mathsf{G}} \cap \mathsf{T}\right) \setminus \left(\left(\mathcal{O}_{\mathsf{r}}^{\mathsf{M}} \cap \mathsf{T}\right) \cup \mathrm{Cent}_{\mathsf{G}}(\mathsf{M})\right).$$

包含关系 $\pi(y) \in \mathcal{O}_{\mathsf{r}}^{\mathsf{G}} \cap \mathbb{T}$ 是显然的。若 $\pi(y) \in \mathcal{O}_{\mathsf{r}}^{\mathsf{M}} \cap \mathbb{T} = \pi(\mathcal{O}_t^{[M,M]}) \cap \pi(\mathbb{T}^{F_w})$，则包含关系 $\mathbf{Z} \subset \mathbb{T}^{F_w}$ 给出 $y \in \mathbf{Z}(\mathcal{O}_t^{[M,M]} \cap \mathbb{T}^{F_w})$，矛盾。最后，若 $[\pi(y), \mathbf{M}] = e$，则 $[\pi(y), \mathbf{M}_p] = e$，这与 $y \notin \mathsf{Cent}_{G_w}([M,M]_p)$ 矛盾。□

4.3. **定理4.3的实现。**

为了实现第1步（第7页）的策略，我们首先验证，对于给定的 $t \in \mathbb{T}^{F_w} \subset \mathbb{G}_{sc}$，是否可以构造一个 $w$-适合的群 $\mathbb{M}$，对应于一个 $w$-稳定的根子系统 $\Phi_{\mathbb{M}}$，它属于 $\Phi$，并满足条件Q、N 和W，从而可以应用定理4.3。

接下来我们给出一些论证，它们有助于构造这样的子群并验证所需条件，同时沿用 § 4.2中的记号。

4.3.1. 拟单性条件。

当 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 不可约时，寻找满足 Q 的群是最简单的情形。

**引理 4.4.** 若 $[\mathbb{M}, \mathbb{M}]$ 是单的且 $M$ 是完美的，则 $Q$ 成立。特别地，若 $\mathbb{M}$ 是一个 *Levi* 子群，具有 $w\theta$-稳定的不可约根系 $\Phi_{\mathbb{M}}$，且满足

$$(\Phi_{\mathbb{M}}, q) \notin \{(A_1, 2), (A_1, 3), (B_2, 2)\}, \text{ 并且若 } (\Phi_{\mathbb{M}}, q) = (A_2, 2), \tag{4.2}$$

则 $w\theta$ 在 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 上的作用是一个 $W_{\mathbb{M}}$ 的元素。

证明。 根据 [34, 推论 24。14]群 $M$ 是拟单群，因此其同态像 $\pi(M) = \pi([M,M])$ 是拟单的。□

注意，（4.2）要求 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 和 $q$ 不能太小，但$\Phi_{\mathbb{M}}$ 太大可能会导致W 失效。

现在我们将看到，$M$ 完美这一条件并非必要。

**引理 4.5。** 如果 $q = 2$ 和 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 是 $B_2$型的，则 $Q$ 成立。

证明。在此情形下， $\Phi$ 是双边标记的， $\theta$ = 是恒等元，且 $\mathbb{G} = \mathbb{G}_{sc} = \mathbb{G}_{ad}$ 作为抽象群，因此 $Z(\mathbb{G}) = e$ ，而 $\pi$ 是恒等映射。此外， $[\mathbb{M},\mathbb{M}] \simeq \mathbf{Sp}_4(\Bbbk) \simeq \mathbf{PSp}_4(\Bbbk)$作为抽象群，于是 $M \simeq \mathbf{Sp}_4(2) \simeq \mathbb{S}_6$ 和$\pi([M,M]) = [M,M] \simeq \mathbb{A}_6$，这是一个非阿贝尔单群。□

下面的引理讨论这样一种情形：不存在满足引理 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 4.4 的假设的自然候选根系 。

**引理 4.6**。设 $d \geq 1$，并令 $\Phi_1$、……、 $\Phi_d$ 为 $_\sim\Phi_{\mathbb{M}}$ 的不可约分支，且假设对于所有 $i \in \mathbb{I}_d$， $w\Phi_i = \Phi_{i+1 \text{ 模 } d}$ 。令 $\mathbb{M}$ 为 $[\mathbb{M},\mathbb{M}]$ 的单连通覆盖，其分解为单因子 $\widetilde{\mathbb{M}} = \prod_{i=1}^{d} \widetilde{\mathbb{M}}_i$，并令 $\mathbf{F}w$ 为 $F_w$ 在 $\widetilde{\mathbb{M}}$ 上的提升。若 $\widetilde{\mathbb{M}}_1^{\mathbf{F}_w^d}$ 是拟单的，则 $Q$ 成立。

证明。由 $\mathbf{F}w$ 的存在性可由 [34, 命题 9.18]，和 [34,习题 30.2、30.4] 得出 $\widetilde{\mathbb{M}} \simeq \widetilde{\mathbb{M}}_1^{\mathbf{F}_w^d}$。

令 $Z$ 为投影 $\mathbb{M} \to [\mathbb{M},\mathbb{M}]$的核。根据构造，它是 $\widetilde{\mathbb{M}}$ 和 $[\mathbb{M},\mathbb{M}] \simeq \prod_{i=1}^{d} \widetilde{\mathbb{M}}_i/Z$的中心 $\mathbf{F}w$-稳定子群。我们断言 $[M,M] \simeq \widetilde{\mathbb{M}}_1^{\mathbf{F}_w^d}/Z^{\mathbf{F}_w}$。

一方面，包含关系 $\widetilde{\mathbb{M}}^{\mathbf{F}_w} \hookrightarrow \widetilde{\mathbb{M}}$导出包含关系 $\widetilde{\mathbb{M}}^{\mathbf{F}_w}/Z^{\mathbf{F}_w} \hookrightarrow \widetilde{\mathbb{M}}/Z \simeq [\mathbb{M},\mathbb{M}]$，由此得到包含关系 $\widetilde{\mathbb{M}}_1^{\mathbf{F}_w^d}/Z^{\mathbf{F}_w} \hookrightarrow M$，进而得到典范包含关系 $\iota := \widetilde{\mathbb{M}}_1^{\mathbf{F}_w^d}/Z^{\mathbf{F}_w} \hookrightarrow [M,M]$，这是由 $\mathbb{M}_1^{\mathbf{F}_w^d}$的拟单性所致。

另一方面，令 $x$， $y \in M$。那么，存在 $x_i$， $y_i \in \mathbb{M}_i$，使得对于 $i \in \mathbb{I}_d$

$$x = (x_1, \ldots, x_d)Z, \qquad y := (y_1, \ldots, y_d)Z,$$
$$\mathbf{F}_w(x_i) \in x_{i+1 \bmod d}Z, \qquad \mathbf{F}_w(y_i) \in y_{i+1 \bmod d}Z \qquad \text{for any } i \in \mathbb{I}_d.$$

对它们取换位子，得到

$$[x,y] = ([x_1,y_1], \ldots, [x_d,y_d])Z, \quad \mathbf{F}_w([x_i,y_i]) = [x_{i+1 \bmod d}, y_{i+1 \bmod d}].$$

因此， $[M,M]$ 的任意生成元都属于 $Z$的一个陪集，该陪集由 $[\widetilde{\mathbb{M}},\widetilde{\mathbb{M}}]^{\mathbf{F}_w} = \widetilde{\mathbb{M}}^{\mathbf{F}_w} \simeq \widetilde{\mathbb{M}}_1^{\mathbf{F}_w^d}$中的一个元素代表，这表明 $\iota$ 也是满射。

$\mathbb{M}_1^{\mathbf{F}_w^d}$的拟单性蕴含 $[M,M]$ 及其所有同态像也拟单，从而得到 Q。□

情形 $d = 1$，即 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 不可约时，也可由[34, 命题 24.21、定理 24.17]推出。

4.3.2. 非中心性条件。

令 $x \in \mathbb{T}^{F_w}$。为估计 $\mathrm{Cent}^{[M,M]}(x)$ 或 $\mathrm{Cent}_M(x)$，我们利用关于 $\mathrm{Cent}^{[\mathbb{M},\mathbb{M}]}(x)$ 的知识。即使 $x$ 未必属于 $[\mathbb{M},\mathbb{M}]$，由 $x$ 共轭所诱导的 $[\mathbb{M},\mathbb{M}]$ 上的半单自同态，如果后者是单连通的，那么 [40, 定理 8.1] 保证 $\mathrm{Cent}^{[\mathbb{M},\mathbb{M}]}(x)$ 是连通的。

当 $[\mathbb{M},\mathbb{M}]$ 是 $\mathbb{M}$ 的一个 Levi 子群，且它是 $\mathbb{G}$的一个抛物子群时，或者当 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 由 $\Phi$中的所有长根构成时，[39,推论 第二卷.5.4]。

如果 $\mathrm{Cent}^{[\mathbb{M},\mathbb{M}]}(x)$ 是连通的，那么根据 [32, 定理 2.2]，我们有

$$\mathrm{Cent}_{[\mathbb{M},\mathbb{M}]}(x)=\langle \mathbb{T}\cap[\mathbb{M},\mathbb{M}],\mathbb{U}_\gamma \mid \gamma\in\Phi_{\mathbb{M}},\ \gamma(x)=1\rangle. \tag{4.3}$$

**引理 4.7.** 假设 $[\mathbb{M},\mathbb{M}]$ 是单连通的，且 $n_w$ 在 $\mathbb{M}$上的作用是一个内自同构。如果对于某个 $\gamma\in\Phi_{\mathbb{M}}$，有 $\gamma(x)\neq 1$，那么 $[M_p,x]\neq e$。

证明。在上述假设下，$\mathrm{Cent}^{[\mathbb{M},\mathbb{M}]}(x)$ 是一个 $F_w$-稳定的约化群，其根系为 $\Phi_x=\{\gamma\in\Phi_{\mathbb{M}}\mid\gamma(x)=1\}$，且 $\Phi_x\subsetneq\Phi_{\mathbb{M}}$。根据 [34,推论 24.6]，，$M$ 的任意 Sylow $p$-子群的阶为 $q^{|\Phi_{\mathbb{M}}^+|}$，而 $\mathrm{Cent}_M(x)=\mathrm{Cent}^{[\mathbb{M},\mathbb{M}]}(x)^{F_w}\simeq\mathrm{Cent}^{[\mathbb{M},\mathbb{M}]}(x)^F$ 的任意 Sylow$p$-子群的阶为 $q^{|\Phi_x^+|}$。因此，$M$ 中存在不属于 $\mathrm{Cent}_M(x)$ 的 $p$-元。□

注 4.8。(i) 若 $[M,M]=\langle[M,M]_p\rangle$，则 $[t,[M,M]_p]\neq e$当且仅当 $[t,[M,M]]\neq e$。若 $[\mathbb{M},\mathbb{M}]$ 是单连通的，或 $[M,M]$ 是单群，则 $[M,M]=\langle[M,M]_p\rangle$ 总是成立，[34, 定理 24.15]。

(ii) 若 $[\mathbb{M},\mathbb{M}]$ 是单连通的，$[M,M]$ 是非交换的，且对于任意 $\gamma\in\Phi_{\mathbb{M}}$，$\gamma(t)\neq 1$，则 $\mathrm{Cent}^{[\mathbb{M},\mathbb{M}]}(t)=\mathbb{T}\cap[\mathbb{M},\mathbb{M}]$，也就是说，$t$ 在$[\mathbb{M},\mathbb{M}]$中是正则的，因此 $[M,M]_p\cap\mathrm{Cent}^{[M,M]}(t)=e$。

我们以描述一种构造来结束本小节：该构造给出一个 $F_w$-稳定的标准 Levi 子群，它满足比 N 更强的条件。□

任意 $\sigma\in W[\mathfrak{O}]$ 都在某个 $\theta$-稳定的 $J_\sigma\subseteq S$ 中是尖点的，其中该 $J_\sigma\subseteq S$ 属于某个 $\langle J_\sigma\rangle$。对于$\sigma\in W[\mathfrak{O}]$，我们令 $E_{J_\sigma}:=\mathbb{R}\Delta_{J_\sigma}$。于是，$\sigma$作用于 $E_{J_\sigma}$，并由尖点性可得，$\mathrm{rk}(\mathrm{id}-\sigma\theta)=\dim E_{J_\sigma}=|J_\sigma|$。

若 $|J_\sigma|\leq|J_{\sigma'}|$ 对任意 $\sigma'\in W[\mathfrak{O}]$均成立，则称 $W[\mathfrak{O}]$ 中的元素 $\sigma$ 为极小。特别地，$J_\sigma$ 关于包含关系是极小的。若 $\mathfrak{O}$是尖点的，则$J_\sigma=S$；若 $\mathrm{id}\in W[\mathfrak{O}]$，则 $\sigma=\mathrm{id}$且 $J_\sigma=\emptyset$。反过来，若对某个极小 $\sigma\in W[\mathfrak{O}]$，$J_\sigma=S$，则 $\mathfrak{O}$ 是尖点的。

**引理 4.9.** 假设 恒等元 $\notin W[\mathfrak{O}]$，并设 $w\in W[\mathfrak{O}]$ 为极小。则，$\gamma(t)\neq 1$对任意 $\gamma\in\Phi_{J_w}$。因此，中心化子$_{\mathbb{M}}(t)=\mathbb{T}$对任意 $\mathbb{M}\subseteq\mathbb{L}_{J_w}$。

证明。首先，我们借用一个来自 [17, 引理 2] 的论证来证明$s_\alpha w$不是尖点的，在 $\langle J_w\rangle$ 中对任意 $\alpha\in\Phi_{J_w}=\Phi\cap E_{J_w}$。

由于 $w$ 在 $\langle J_w\rangle$中是尖点的，自同态 $(\mathrm{id}-w\theta)$ 具有最大秩，因此存在 $v\in E_{J_w}$使得 $(\mathrm{id}-w\theta)v=\alpha$，即 $w\theta v=v-\alpha$。于是，根据 $w\in W$ 与 $\theta$ 的正交性，我们有

$$(v,v)=(w\theta v,w\theta v)=(v-\alpha,v-\alpha)=(v,v)-2(v,\alpha)+(\alpha,\alpha).$$

因此， $s_\alpha v = v - 2\,\frac{(v,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha = v - \alpha_\circ$ 但是， $v \in \mathrm{Ker}(\mathrm{id} - s_\alpha w\theta)$，从而得证。

现在，如果对于某个 $\alpha \in \Phi_{J_w}$， $\alpha(t) = 1$，那么， $s_\alpha w\theta \cdot t^q = s_\alpha \cdot t = t$，由此$t \in \mathbb{T}^{F_{s_\alpha w}}$。由于 $s_\alpha w$ 在 $J_w$中不是尖点的，因此存在 $s_\alpha w$ 的一个共轭元包含于 $\langle J\rangle \subsetneq \langle J_w\rangle$中，这与 $w$的极小性矛盾。

最后一个结论由（4.3）得出，因为

$$\begin{aligned}\mathbb{T} \subseteq \mathrm{Cent}_{\mathbb{M}}(t) \subseteq \mathrm{Cent}_{\mathbb{L}_{J_w}}(t) &= \mathbb{T}\,\mathrm{Cent}_{[\mathbb{L}_{J_w},\mathbb{L}_{J_w}]}(t) = \mathbb{T}\,\mathrm{Cent}_{[\mathbb{L}_{J_w},\mathbb{L}_{J_w}]}(t)^\circ \\ &= \langle \mathbb{T}, \mathbb{U}_{\pm\gamma},\, \gamma \in \Phi_{J_w},\, \gamma(t) = 1\rangle = \mathbb{T}. \quad \square\end{aligned}$$

处理切瓦莱群时，我们通常取 $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{L}_{J_w}$ 作为 $W[\mathfrak{O}]$中的一个极小 $w$。

4.3.3. 轨道条件。

条件 W 成立，当且仅当存在满足以下两个要求的 $\sigma \in \mathrm{Cent}_W(w\theta)$:

W1 $\quad \sigma \cdot t \notin \mathbf{Z}\,\mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w\theta) \cdot t$, (disjoint orbit condition),

W2 $\quad \sigma \cdot t \notin \mathrm{Cent}_{\mathbb{T}}([M,M]_p)$ (non centrality condition).

注 4.10。 如果 $t$ 满足 N，那么对于任意将 $\Phi_{\mathbb{M}}$正规化的 $\sigma$， W2 都成立。特别地，如果 $\mathbb{M} \subsetneq \mathbb{L}_{J_w}$ 和 $\sigma \in \langle J_w\rangle$，则 W2 成立。

**引理 4.11**。 如果 $\Phi_{\mathbb{M}} \subset \Phi_{J_w}$ 和 $[\text{中心化子}_{\langle J_w\rangle}(w\theta) : \text{中心化子}_{W_{\mathbb{M}}}(w\theta)] > |\mathbf{Z}|$, 那么$W$ 成立。

证明。 引理 4.9给出

$$\mathrm{Cent}_{\mathbb{M}}(\sigma \cdot t) \subseteq \mathrm{Cent}_{\mathbb{L}_{J_w}}(\sigma \cdot t) \subseteq \sigma \cdot \mathbb{T} = \mathbb{T}, \qquad \forall \sigma \in \langle J_w\rangle. \tag{4.4}$$

令 $\sigma =$ 恒等元，则 $\mathrm{Cent}_{\mathbb{M}}(t) \cap N_{\mathbb{G}}(\mathbb{T}) \subseteq \mathrm{Cent}^{\mathbb{L}_{J_w}}(t) \cap N_{\mathbb{G}}(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$，因此

$$|\,\mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w) \cdot t| = |\,\mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w)|, \quad |\,\mathrm{Cent}_{W_{\langle J_w\rangle}}(w) \cdot t| = |\,\mathrm{Cent}_{W_{\langle J_w\rangle}}(w)|.$$

由于 $[\mathrm{Cent}_{\langle J_w\rangle}(w\theta) : \mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w\theta)] > |\mathbf{Z}|$，我们有

$$|C_{W_{\langle J_w\rangle}}(w\theta) \cdot t| > |\mathbf{Z}||C_{W_{\mathbb{M}}}(w\theta) \cdot t|$$

从而确保 W1 对某个 $\sigma \in \langle J_w\rangle$成立，因此 W2 由（4.4）得出。 $\square$

一般而言，我们处理 W1 的策略是寻找一个或多个 $\sigma$ 的候选对象，并考察 W1 不成立的条件。这通常会对 $t$ 施加严格限制，而这些限制要么与 N矛盾，要么迫使 $t$属于我们已经处理过的李型子群。

当最长元素 $w_0$ 在 $W$ 中作用为 $-$恒等元时，它自然是 $\sigma$的一个候选。

注 4.12。 假设 $w_0$ in $W$ 的作用为 $-$恒等元。那么对于任意 $w \in W$, $w_0 \cdot t = t^{-1}$ and$w_0 \in \mathrm{Cent}_W(w\theta)$。

(i) 若条件 N 成立，则 $[[M,M]_p, t^{-1}] \neq e$ because $[[M,M]_p, t] \neq e$，因此 W2 对 $\sigma = w_0$ 成立。因此，为了验证 W，只需证明 $t^{-1} \notin \mathbf{Z}\mathrm{Cent}^{W_{\mathbb{M}}}(w\theta) \cdot t$。

(ii) 假设 $\theta =$ 恒等元，即 $\mathbb{G}^F$ 是切瓦莱群，且 $\mathrm{id} \notin W[\mathfrak{O}]$，并令 $w \in W[\mathfrak{O}]$ 为极小。如果对于某个 $z \in \mathbf{Z}$，有 $w_0 \cdot t = zt$，那么 $w^2 =$ 恒等元。

事实上，如果 $w_0 \cdot t = t^{-1} = zt$，那么 $z^2 = e$，因此 $t^4 = e$。由于恒等元 $\notin W[\mathfrak{O}]$，则必然有 $|z| = 2$ 且 $q \equiv 3$ 模 4。但此时，$F(t) = t^q = t^{-1}$，因此$t = F_w(t) = wt^{-1}$，而引理 4.9 迫使 $w^2 =$ 恒等元。

以下观察有助于验证 W1。 □

注 4.13。 如果 $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{L}_J$ 对于某个 $J \subsetneq S$成立，那么由于对于任意 $\alpha \in \Delta$ 都有 $s_\alpha \cdot t \in t\alpha^\vee(\Bbbk^\times)$，可得 $W_{\mathbb{M}}(w) \cdot t \subseteq t\prod_{\alpha\in\Delta_J} \alpha^\vee(\Bbbk^\times)$。因此，对于任意 $\beta \in \Delta\setminus\Delta_J$，$\mathrm{Cent}^{W_{\mathbb{M}}}(w)\cdot t$中任意元素的表达式中 $\beta^\vee$ 的系数，都与 $t$的表达式中 $\beta^\vee$ 的系数一致。特别地，如果对于某个 $\beta \in \Delta \setminus \Delta_J$，$z \in \mathbf{Z}$ 中 $\beta^\vee$ 的系数非平凡，那么$\sigma \cdot t \notin z\mathrm{Cent}_{\mathbb{M}}(w) \cdot t$。

4.4. **定理4.3 适用的一些情形。**

这里汇总了若干满足 Q 、N 和 W 的情形，因此定理 4.3适用。这有助于下一节进行逐案分析。

**引理 4.14.** 令 $t \in \mathbb{T}^{F_w} \setminus \mathbf{Z}$。假设存在 $J \subsetneq S$ 使得

*(i)* $\Delta_J = \Delta_{J_1} \coprod \Delta_{J_2}$ 其中 $\emptyset \neq \Delta_{J_i} \subseteq \Delta$ 且 $w(\Phi_{J_i}) = \Phi_{J_i}$，对于 $i = 1, 2$；*(ii)* $\Delta_{J_1}$ 不可约且 $\Delta_{J_1} \perp \Delta_{J_2}$；*(iii)* 对任意 $\gamma \in \Phi_J$，$\gamma(t) \neq 1$；*(iv)* $(\Phi_{J_1}, q)$ 满足 $F_w$ 的 *(4.2)* 中的条件；*(v)* $|Z| < |Cent^{\langle J_2\rangle}(w\theta)|$。那么 $\mathcal{O}$ 为 *C* 型。

证明。 我们证明 Q、N 和 W 对 $\mathbb{M} = \mathbb{L}_{J_1}$在 $\mathbb{G} = \mathbb{G}_{sc}$中的单群成立。根据 [39, 推论 第二卷.5。4] 我们有 $[\mathbb{M},\mathbb{M}] = [\mathbb{M},\mathbb{M}]_{sc}$，这是一个单代数群，因此(iv) 保证 $M$ 是完美的，从而根据引理 4.4得到 Q 。 □

由(iii)和（4.3）可得 $\mathrm{Cent}_{\mathbb{M}}(t) = \mathrm{Cent}^{\mathbb{L}_J}(t) = \mathbb{T}\mathrm{Cent}^{[\mathbb{L}_J,\mathbb{L}_J]}(t) = \mathbb{T}$，因此N 由 $[M,M]_p \cap \mathrm{Cent}_M(t) = e$ 得出。

我们验证W。若 $\tau \cdot t = \sigma \cdot t$，其中某个 $\tau \in \mathsf{Cent}^{\langle J_2\rangle}(w\theta) \cdot t$ 和某个 $\sigma \in \mathsf{Cent}^{\langle J_1\rangle}(w\theta) \cdot t$，那么对于 $N_{\mathbb{G}}(\mathbb{T})$ 中分别属于 $\sigma$ 的任一代表元 $\dot{\sigma}$，以及属于 $\tau$ 的任一代表元 $\dot{\tau}$，都有 $\dot{\sigma}^{-1}\dot{\tau} \in \mathsf{Cent}^{\mathbb{L}_J}(t) = \mathbb{T}$，因此 $\sigma = \tau$；这只有在 $\sigma = \tau =$id 时才可能。因此，

$$|\operatorname{Cent}_{\langle J\rangle}(w\theta) \cdot t| = |\operatorname{Cent}_{\langle J_2\rangle}(w\theta)||\operatorname{Cent}_{\langle J_1\rangle}(w\theta) \cdot t| > |\mathbf{Z}\operatorname{Cent}_{\langle J_1\rangle}(w\theta) \cdot t|.$$

此外，$\dot{\tau}$ 的共轭保持 $\mathbb{L}_J$ 和 $\mathbb{T}$，因此 $\mathsf{Cent}^{\mathbb{L}_J}(\sigma \cdot t) =\mathsf{Cent}^{\mathbb{L}_J}(t) = \mathbb{T}$，而 $M_p \not\subset \mathbb{T}$，这证实了W。□

**推论 4.15.** 假设$\mathbf{Z} = e$ 且 $w$ 是尖点的。若存在一个满足 $Q$ 的$\mathbb{M}$，并且

$$\operatorname{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w) \subsetneq \operatorname{Cent}_W(w) \tag{4.5}$$

则 $\mathcal{O}$ 是 $C$ 型。

证明。由于 $w$ 是尖点的，$J_w = S$ 因此 $\mathsf{Cent}_{\mathbb{G}}(\sigma \cdot t) = \mathbb{T}$ 对任意 $\sigma \in W$由引理4.9，（另见 [7, 命题 3.13]）。因此N 和W2 是显然的，并且 $\mathsf{Cent}^{W_{\mathbb{M}}}(w) \subsetneq \mathsf{Cent}_W(w)$ 由 $t$ 的正则性推出 W1 。□

**引理 4.16.** 假设 $F$ 是一个 *Chevalley* 端同态，并且 $w_0 \in W$在 $\Phi$上作用为恒等元 $-$。此外，假设恒等元 $\notin W[\mathfrak{O}]$，并令 $w$ 在 $W[\mathfrak{O}]$中极小。若 $\Delta_{J_w}$有一个分支 $\Delta_J$（可能等于 $\Delta_{J_w}$），其对于某个 $l \geq 1$而言属于 $A_{2l}$ 型，则 $\mathcal{O}$ 是 $C$ 型。

证明。我们验证 $\mathbb{M} := \mathbb{L}_J = \langle \mathbb{T}, \mathbb{U}_\gamma, \gamma \in \Phi_J\rangle$ 的 Q、N 和 W。首先，$[\mathbb{M}, \mathbb{M}] \simeq \mathsf{SL}_{2l+1}(\Bbbk)$，因为 $\mathbb{G}$ 是单连通的，而 $\mathbb{M}$ 是 $\mathbb{G}$ 的一个抛物子群的 Levi 子群。由于 $w \in \langle J\rangle$，自同态$F_w$ 在 $\mathbb{L}_J$ 和 $[\mathbb{L}_J, \mathbb{L}_J]$ 上作用为 Chevalley 端同态，因此引理 4.4 适用，从而得到 Q。引理 4.9 保证 $\mathsf{Cent}_{\mathbb{M}}(t) = \mathsf{Cent}^{\mathbb{L}_{J_w}}(t) = \mathbb{T}$，所以 $[M_p, t] \neq \emptyset$，从而得到 N。

为验证W，我们使用注 4.12 (i)，并证明 $w_0 \cdot t = t^{-1}$ 不属于 Z Cent $_{W_{\mathbb{M}}}(w) \cdot t$。注意，按构造，$w$ 在 $\langle J_w\rangle$ 中是尖点的，因此 $w$ 在 $\langle J\rangle$ 中的分支 $w_J$ 是 $\mathbb{S}_{2l+1}$中的一个 Coxeter 元，也就是说，是一个 $(2l+1)$-循环。于是，$\mathsf{Cent}^{W_{\mathbb{M}}}(w) = \langle w_J\rangle$，并且 $w_0 \in \mathsf{Cent}_W(w) \setminus \mathsf{Cent}^{W_{\mathbb{M}}}(w)$。

为得出矛盾，假设对某个 $a \in \mathbb{I}_0$、$_{2l}$ 以及某个 $z \in \mathsf{Z}$ 有 $t^{-1} = w_0 \cdot t = z w_J^a \cdot t$。于是，$t = w_0^2 \cdot t = z^2 w_J^{2a} \cdot t$。现在，由于 $w_0$ 在 $\Phi$ 上的作用为 $-$恒等元，故 Z 的指数为 $\leq 2$，从而迫使 $w_J^{2a} t = t$。由于 $\mathsf{Cent}_{\mathbb{M}}(t) = \mathbb{T}$，必然 $|w_J| = 2l+1$ 整除 $2a$，因此 $a = 0$ 且 $w_0 \cdot t = zt$。备注 4.12 (ii) 给出 $w^2 = e$，矛盾。□

**引理 4.17.** 假设 $F$ 是 *Chevalley* 端同态，且 $w \neq e$ 在 $W[\mathfrak{O}]$ 中极小。若对某个 $d \geq 4$， $J_w$ 有一个 $D_d$ 型分支，则 $\mathcal{O}$ 为 $C$ 型。

证明。在这种情形下， $\Phi$ 属于类型 $D_n$， $E_6$， $E_7$ 或 $E_8$。因此 $|\mathbf{Z}| \leq 4$。我们使用第 $D_n$ 类外尔群中尖点元素的描述，见小节3.3，并沿用其中的记号。

设 $J$ 是 $J_w$ 中类型为 $D_d$ 的分支，并设 $w_J$ 是$w$ 在 $\langle J\rangle$中的因子。我们用 $\Phi_J$表示 $\beta_1$，……， $\beta_d$的单根，沿用 [30]中的编号。不失一般性， $w_J = w_\lambda \in \langle J\rangle$ 对某个 $\lambda = (\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_{2c})$分拆 $d$成立。我们根据 $\lambda$的形状对证明进行分类。

**情形** $\lambda_1 = 1$。那么必有 $d = 2c$ 且 $c \geq 2$。在这种情形下， $w_J$ 在$-$ 上作用为 $\Phi_J$的恒等自同构，因此它保持其所有根子系统不变，并且属于 $\langle J\rangle$的中心。我们验证 Levi 子群4.3 满足定理的假设$\mathbb{M} = \langle \mathbb{T}, \ \mathbb{U}_{\pm\beta_{d-2}}, \ \mathbb{U}_{\pm\beta_{d-1}}, \ \mathbb{U}_{\pm\beta_d}\rangle \leq \mathbb{L}_{\langle J\rangle}$。于是 $[\mathbb{M}, \mathbb{M}]$ 是类型 $A_3$ 的单连通群，并且 $w_J$ 作为外自同构作用。条件Q 由引理4.4 推出，而N 由引理4.9推出。 □

□

为证明 W 我们验证引理4.11的假设。由构造，

$$\mathrm{Cent}_{\langle J\rangle}(w) = \mathrm{Cent}_{\langle J\rangle}(w_J) = \langle J\rangle$$

是型为 $D_{2c}$ 的外尔群，阶为 $\geq 8|\mathbb{S}_4|$ 且

$$\mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w) = \mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w_J) = W_{\mathbb{M}} \simeq \mathbb{S}_4,$$

从而

$$[\mathrm{Cent}_{\langle J_w\rangle}(w\theta) : \mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w\theta)] \geq [\mathrm{Cent}_{\langle J_w\rangle}(w\theta) : \mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w\theta)] \geq 8 > |\mathbf{Z}|.$$

**情形** $\lambda_1 = 2$。 则要么 $\lambda_2 = 2$ 要么 $c \geq 2$ 且 $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$。我们验证定理 4.3 关于 Levi 子群 $\mathbb{M} = \langle \mathbb{T}, \ \mathbb{U}_{\beta_d}, \ \mathbb{U}_{\beta_{d-1}}\rangle$ 的条件。由于 $[\mathbb{M}, \mathbb{M}]$ 是单连通的，它同构于 $\mathbf{SL}_2(\mathbb{k}) \times \mathbf{SL}_2(\mathbb{k})$。通过直接计算，我们看到 $w_\lambda(\beta_d) = \beta_{d-1}$ 且 $w_\lambda(\beta_{d-1}) = -\beta_d$，因此$M \simeq \mathbf{SL}_2(q^2)$，从而得到 Q ，由引理 4.4。引理 4.9 给出 N。为验证条件 W 我们证明 □

□

$$[\mathrm{Cent}_{\langle J\rangle}(w) : \mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w)] = [\mathrm{Cent}_{\langle J\rangle}(w_J) : \mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w_J)] \geq 5$$

并援引引理 4.11。若 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$，则

$$e, \quad w_{\lambda_1} w_{\lambda_2}, \quad s_{\beta_{n-2}+\beta_{n-1}} s_{\beta_{n-3}+\beta_{n-2}}, \quad w_{\lambda_2}^2, \quad s_{\beta_{n-2}+\beta_{n-1}} s_{\beta_{n-3}+\beta_{n-2}} w_{\lambda_2}^2$$

表示 $\mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w_J)$ 在 $\mathrm{Cent}_{\langle J\rangle}(w_J)$ 中的不同陪集。

反之，若 $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$，则我们使用

$$e, \qquad w_{\lambda_1} w_{\lambda_2}, \qquad w_{\lambda_1} w_{\lambda_3}, \qquad w_{\lambda_1} w_{\lambda_4}, \qquad w_{\lambda_2} w_{\lambda_3}.$$

**情形** $\lambda_1 \geq 3$。我们验证定理 4.3 对 $\Phi_{\mathbb{M}} = \Phi'_{\lambda,\ 1}$的假设。由构造可知，$\mathbb{M}$ 是一个标准 Levi 子群，因此 $[\mathbb{M}, \mathbb{M}]$ 是 $D_{\lambda_1}$型的单连通单群，并且 $w$ 在$\Phi_{\mathbb{M}}$上作为外自同构作用。条件 Q 由引理4.4得到，因为 $\lambda_1 \geq 3$。引理 4.9确保了 $\mathsf{Cent}_{\mathbb{M}}(t) \subseteq \mathbb{T}$，从而得到条件 N 。 □

现在我们验证条件 W。由构造可知

$$\begin{aligned} \mathrm{Cent}_{\langle J \rangle}(w_J) &= \mathrm{Cent}_{\langle J \rangle}(w) \leq \mathrm{Cent}_{\langle J_w \rangle}(w), \\ \mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w_J) &= \mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w) = \langle w_{\lambda_1}^2 \rangle, \end{aligned}$$

其中后一个相等由 [17, 命题 30] 应用于包含 $w_{\lambda_1}$的 $B_{\lambda_1}$ 型外尔群$B_{\lambda_1}$ 得到。我们分别分析不同情形。

**子情形** $\lambda_1 \geq 3$ **和** $\lambda_2 \geq 3$ **或** $c \geq 2$。我们给出 $\geq 5$ 个 $\mathsf{Cent}^{W_{\mathbb{M}}}(w)$ 在 $\mathsf{Cent}^{\langle J_w \rangle}(w)$ 中不同左陪集的代表元，并应用引理4.11。如果 $\lambda_2 \geq 3$，则 $|w_{\lambda_2}| = 2\lambda_2 \geq 6$，我们取 $w_{\lambda_1}^{2-a} w_{\lambda_2}^a$ 作为$a \in \mathbb{I}_{0,\ 2\lambda_2 - 1}$。如果 $c \geq 2$，则取 $w_{\lambda_i} w_{\lambda_j}$ 作为 $1 \leq i < j \leq 2c$。

**子情形** $\lambda = (\lambda_1,\ 1)$ **满足** $\lambda_1 \geq 3$。于是 $w_J = w_{\lambda_1} w_{\lambda_2}$ 满足 $|w_{\lambda_2}| = 2$ 且

$$w_J = w_\lambda = s_{\beta_1 + \cdots + \beta_{d-1}} s_{\beta_1 + \cdots + \beta_{d-2} + \beta_d} s_{\beta_{d-1}} \cdots s_{\beta_2}$$

与 $\langle J \rangle$的一个 Coxeter 元共轭，因为

$$\mathbf{c} := s_{\beta_d} s_{\beta_{d-1}} \cdots s_{\beta_1} = s_{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{n-1} + \beta_n} w_J s_{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{n-1} + \beta_n}. \tag{4.6}$$

因此，[17, 命题 30] 给出 $\mathsf{Cent}^{\langle J \rangle}(w) = \mathrm{Cent}^{\langle J \rangle}(w_J) = \langle w_J \rangle$ 以及 $\mathsf{Cent}^{W_{\mathbb{M}}}(w_J) = \langle w_J^2 \rangle = \langle w_{\lambda_1}^2 \rangle$。

反设 W 不成立。特别是 □

$$w_{\lambda_1} w_{\lambda_2} \cdot t = z w_{\lambda_1}^{2a} \cdot t \qquad \text{for some } z \in \mathbf{Z} \text{ and some } a \in \mathbb{I}_{0, \lambda_1 - 1}. \tag{4.7}$$

$t$ 在 $\mathbb{L}_J \leq \mathbb{L}_{J_w}$ 中的正则性保证 $z \neq e$，因此对于 $E_8$，这样的相等绝不会发生，并且必有 $|z| \in \{2, 3, 4\}$。只有当 $\Phi$ 属于类型 $E_6$时，才可能出现情形 $|z| = 3$；但这不可能，因为我们会有

$$(w_{\lambda_1}^3 w_{\lambda_2}) \cdot t = (w_{\lambda_1} w_{\lambda_2})^3 \cdot t = w_{\lambda_1}^{6a} \cdot t,$$

与 $t$ 在 $\mathbb{L}_J$中的正则性相矛盾。因此，如果（4.7）成立，$\Phi$ 则或者属于类型 $D_n$，或者属于 $E_7$，$q$ 为奇数，且 $|z| \in \{2, 4\}$。

我们首先关注 $E_7$，因此 $z=\alpha_2^\vee(-1)\alpha_5^\vee(-1)\alpha_7^\vee(-1)$ 且 $4\le d\le 6$。如果 $d<6$，则将注记4.13应用于 $\beta=\alpha_7$ 以及 $\mathbb{M}\le\mathbb{L}_{J_w}$中的 $t$ 的正则性，即可得到 W。令 $d=6$，于是 $J=J_w$ 且 $|w_{\lambda_1}|=2\lambda_1=10$。由于我们假设 W 不成立，根据注 4.12 (i)，还有 $w_0\cdot t\in Z\,\mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w)\cdot t$。于是，对于某个 $b\in\mathbb{I}_0$、$\lambda_1-1=\mathbb{I}_0$、4 以及某个 $z'\in Z$，有 $t^{-1}=w_0\cdot t=z'w_{\lambda_1}^{2b}\cdot t$。因此 $t=w_{\lambda_1}^{4b}\cdot t$，所以 $\mathbb{M}$ 中的 $t$ 的正则性迫使 $10|4b$。于是，$b=0$，而注 4.12 (ii)给出 $|w|=|w_{\lambda_1}w_{\lambda_2}|\le 2$，这就产生了矛盾。当 $\Phi$ 属于类型 $E_7$时，这就完成了对 W 的验证。 □

现在让我们关注 $D_n$。这里 $\beta_i=\alpha_{n-d+i}$for $i=1,\dots,d$。如同 (4.6) 中那样，将 $w_J$替换为其 $\langle J\rangle$-共轭元素 $\mathrm{c}=s_{n-d+1}\cdots s_n$ 更为方便，因此 $\mathrm{c}^{\lambda_1}_J=w_{0J}$是 $\langle J\rangle$中的最长元素，参见 [31, 练习 2，§3.19]。相应地，我们将 $t$ 替换为与 $G_w$ 共轭的元素 $t'$，它位于与$w'=s_{\alpha_{n-d+1}+\cdots+\alpha_n}ws_{\alpha_{n-d+1}+\cdots+\alpha_n}$关联的环面中。根据构造，$w'$ 再次是极小的，并且 $J_{w'}=J_w$。此外，$\mathrm{c}=\mathrm{c}_1\mathrm{c}_2$，其中 $\mathrm{c}_i:=s_{\alpha_{n-d+1}+\cdots+\alpha_n}w_{\lambda_i}s_{\alpha_{n-d+1}+\cdots+\alpha_n}$for $i=1,2$。我们用 $s_{\alpha_{n-d+1}+\cdots+\alpha_n}(\Phi_{\mathbb{M}})$ 替换 $\Phi_{\mathbb{M}}$，于是 $\mathrm{Cent}_{\langle J\rangle}(w)=\langle\mathrm{c}\rangle$，且 $\mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w)=\langle\mathrm{c}_1^2\rangle$。那么，若 (4.7) 成立，

$$w_{0J}\cdot t'=\mathbf{c}^{\lambda_1}\cdot t'=z^{\lambda_1}\mathbf{c}_1^{2a\lambda_1}\cdot t'=z^{\lambda_1}t',\qquad z^{2\lambda_1}=e, \tag{4.8}$$

因此 $z^{\lambda_1}=\alpha_{n-1}^\vee(\eta)\alpha_n^\vee(\eta)$，对于某个 $\eta\in\{\pm1\}$。现在我们证明（4.8）不可能成立。令 $t'=\prod_{i=1}^n\alpha_i^\vee(\xi_i)$，其中 $\xi_i\in\mathbb{F}_q^\times$。

如果 $d$ 是奇数，则 $n\ge d\ge 5$，而（4.8）给出

$$\xi_i^2=1,\ \text{ for } n-4\le i\le n-2,\qquad\qquad \xi_n\xi_{n-1}=\eta.$$

因此

$$\alpha_{n-3}(t')=\xi_{n-2}\xi_{n-4},\qquad \alpha_{n-2}(t')=\xi_{n-3}\eta,$$
$$\alpha_{n-1}(t')=\xi_{n-1}^2\xi_{n-2},\qquad \alpha_n(t')=\xi_{n-1}^{-2}\xi_{n-2}.$$

如果 $d$ 是偶数，则 $n\ge d\ge 4$，而（4.8）给出

$$\xi_i^2=1,\ \text{ for } i\in\{n-2,n-3\},\qquad \xi_i^2=\eta,\ \text{ for } i\in\{n-1,n\}.$$

因此

$$\alpha_{n-3}(t')=\xi_{n-2}\xi_{n-4},\qquad \alpha_{n-2}(t')=\xi_{n-3}\xi_{n-1}\xi_n,$$
$$\alpha_{n-1}(t')=\eta\xi_{n-2},\qquad \alpha_n(t')=\eta\xi_{n-2}.$$

对于 $d$的奇偶性的两种可能情形，$\alpha_{n-3}(t')$、$\alpha_{n-2}(t')$ 和 $(\sum_{j=n-3}^n\alpha_j)(t')$ 中至少有一个等于 1，这与引理 4.9 矛盾。

子情形 $\lambda = (\lambda_1, 2)$，其中 $\lambda_1 \geq 3$。我们用根系由正交根 $\beta_{d-\lambda_1}$和 $w_J\beta_{d-\lambda_1} = w_{\lambda_2}\beta_{d-\lambda_1}$生成的非标准Levi子群替换 $\mathbb{M}$ 。根据引理 4.6 可得条件 Q，而 N 成立是因为 $\mathbb{M} \subset \mathbb{L}_J$。对于 W，我们验证引理 4.11 的假设。直接计算表明，$\mathsf{Cent}_{W_\mathbb{M}}(w) = \mathsf{Cent}_{W_\mathbb{M}}(w_J) = \langle w_{\lambda_2}^2 \rangle$ ，并且 $\mathsf{Cent}_{\langle J \rangle}(w) = \mathsf{Cent}_{\langle J \rangle}(w_J) = \langle w_J \rangle$。于是，对于 $a \in \mathbb{I}_0$、$_{2\lambda_1-1}$，$w_J^a = (w_{\lambda_1} w_{\lambda_2})^a$ 分别表示 $\mathsf{Cent}_{W_\mathbb{M}}(w)$ 在 $\mathsf{Cent}_{\langle J \rangle}(w)$ 中的不同陪集。□

## 5. Semisimple classes of type C in Chevalley groups

我们先总结一下关于切瓦莱群中半单类的已有知识。

- 半单类见于 $\mathbf{PSL}_{n+1}(q)$，对于 $n > 1$ 已在 [4, 7]中处理。除表 1所列的 kthulhu 类外，所有共轭类都会坍缩；这些类则会下落， [7, 定理 II、III]。关于$\mathbf{PSL}_2(q)$，请参见第 7节。
- 半单类见于 $\mathbf{PSp}_{2n}(q)$ 的处理见 [7, 定理 6。1]。除表 1 所列的 kthulhu 类外，所有共轭类都会坍缩；当1 时，$n = 2$ 以及 $q \in \{3, 5, 7\}$。

•半单类中，由 $w$ 表示且属于 $W$ 中类型为 $A_{n-1}$ 的极大抛物子群 $W_{A_{n-1}}$ 的 $\mathbb{T}^{F_w}$ ，涉及 $\mathbf{P\Omega}^+_{2n}(q)$ 和 $\mathbf{P\Omega}^+_{2n+1}(q)$，其处理见 [7, 定理 6。2], 仍有少数未解决的情形，出现在 $w = e$和 $q \in \{3, 5, 7\}$中。后者将在第 6 节处理，同时也会处理 $\mathbf{PSp}_4(3)$、$\mathbf{PSp}_4(5)$ 和 $\mathbf{PSp}_4(7)$ 中尚未解决的情形。

- 除上述关于 $\boldsymbol{G} = \mathbf{P\Omega}^+_{2n+1}(q)$ 的$q \in \{3, 5, 7\}$情形外，如果 $\boldsymbol{G} \neq \mathbf{PSL}_{n+1}(q)$ 中任何与分裂环面相交的非平凡共轭类 $\mathbb{T}^F$ 都会坍缩，见 [7, 定理 4。1]。

本节讨论除$\mathbf{PSL}_{n+1}(q)$ 和 $\mathbf{PSp}_{2n}(q)$ 之外的单 Chevalley 群中的非分裂半单共轭类。我们验证定理 4.3 的假设是否成立，并列出可能的例外。

在本节中， $\mathbb{G} = \mathbb{G}_{\mathrm{sc}}$ 和 $\mathfrak{O} \subseteq \mathbb{G}^F$ 是一个半单类。我们固定 $t \in \mathbb{T}^{F_w} \subseteq \mathbb{G}$ ，使得$\mathcal{O}_t^{G_w} \simeq \mathfrak{O}$是一个标准同构，并设$\mathcal{O} := \mathcal{O}^{\pi(G_w)}{}_{\pi(t)} \simeq \pi(\mathfrak{O})$。我们还固定以下记号：

$$t = \prod_{j=1}^{n} \alpha_j^\vee(\zeta_j), \qquad \zeta_j \in \overline{\mathbb{F}_q},$$

单根的编号如 [30]所示。约定 $\zeta_j = 1$ 对于 $j \leq 0$。

我们假设 $w$ 是 $W[\mathfrak{O}]$ 中的一个极小元，并且除非另有说明，均假设 $e \notin W[\mathfrak{O}]$。定理 4.3的假设验证主要取决于 $J_w$ 的形式，而非 $w$ 在 $\langle J_w \rangle$中的具体情况。

以下观察将用于归纳论证。

注 5.1. 假设 $\zeta_j = 1$对于某个 $j \in \mathbb{I}_n$成立，且由 $\Delta \setminus \{\alpha_j\}$ 生成的根系在 $w$作用下稳定。那么， $\mathbb{H} := \langle \mathbb{U}_{\pm\alpha_i},\ \alpha_i \in \Delta \setminus \{\alpha_j\}\rangle$ 是半单且单连通的，而 $\mathbb{H}^{F_w}$是有限李型群的乘积$\mathbf{H}_1 \times \cdots \times \mathbf{H}_d$。因此， $\mathcal{O}$包含子架 $\mathcal{O}^{\pi(\mathbf{H}_1\times\cdots\times \mathbf{H}_d)\,\pi(t)}$，它是 $\pi(\mathbf{H}_i)$ 中共轭类的乘积，其中 $i \in \mathbb{I}_d$。如果其中一个因子投影到 C 型（分别为 D 型、F 型）的架上，那么 $\mathcal{O}$ 就是 C 型（分别为 D 型、F 型）。

5.1. $\mathbf{P\Omega}^+_{2n+1}(q)$**中的半单类。**

Inethis $n \geq 3$，当 $q$为偶数时，$\mathbf{G}_w \simeq \mathbf{PSp}_{2n}(q)$；因此，我们只考虑 $q$ 为奇数的情形。的中心$\mathbb{G}^F$ 在表 4中给出。本小节中我们仅固定 $z := \alpha_n^\vee(-1)$，即 $[\mathbb{G}^F, \mathbb{G}^F]$中的非平凡中心元。我们回顾一下，在 $-$ 上作用为恒等元$\Phi$。由 [7, 定理 6.2], 我们只考虑 $W[\mathfrak{O}] \cap W_{A_{n-1}} = \emptyset$的情形。

利用 [34, 引理8.19]直接计算可得

$$s_1 \cdot t = \alpha_1^\vee(\zeta_1^{-2}\zeta_2)t, \qquad s_j \cdot t = t\alpha_j^\vee(\zeta_{j-1}\zeta_j^{-2}\zeta_{j+1}),\ j \neq 1, n-1, n,$$
$$s_{n-1} \cdot t = t\alpha_{n-1}^\vee(\zeta_{n-2}\zeta_{n-1}^{-2}\zeta_n^2), \quad s_n \cdot t = t\alpha_n^\vee(\zeta_{n-1}\zeta_n^{-2}).$$

**引理5.2**。 假设 $\Phi_{J_w}$ 不是不可约的，且满足以下条件之一：

(i) 根系 $\Phi_{J_w}$ 有一个秩为 $\geq 2$ 的分支 $\Phi_J$，而$\Phi_{J_w} \setminus \Phi_J$（一个可能可约的根系）的秩为 $\geq 2$。(ii) $q > 3$，根系 $\Phi_{J_w}$ 有一个秩为1的分支 $\Phi_J$，而 $\Phi_{J_w} \setminus \Phi_J$（一个可能可约的根系）的秩为 $\geq 2$。$\tilde{}$(iii) $\Phi_{J_w}$ 属于 $A_{2l} + A_1$型，且 $l \geq 1$。$\tilde{}$(iv) $\Phi_{J_w}$ 属于$A_1 + A_1$ 型，且 $q > 3$。(v) 对于某个$j \in \mathbb{I}_2$， $\Phi_{J_w}$ 属于 $A_1 + B_j$ 型，$n-2$。那么 $\mathcal{O}$ 属于

ype C.

证明。若(i) 或(ii) 成立，则引理4.14 的假设已得到验证，这是由于引理4.9。若(iii) 成立，则我们援引引理4.16。假设(iv)。不失一般性，$\Delta_{J_w} = \{\alpha_1, \alpha_n\}$ 且$t \in \mathbb{T}^{F_{s_1 s_n}}$，即

$$s_1 s_n \cdot t^q = \alpha_1^\vee(\zeta_1^{-q}\zeta_2^q)\left(\prod_{j=2}^{n-1}\alpha_j(\zeta_j^q)\right)\alpha_n^\vee(\zeta_{n-1}^q\alpha_n^{-q}) = t,\ \text{i.e.,} \tag{5.1}$$
$$\zeta_1^{q+1} = \zeta_2, \quad \zeta_j \in \mathbb{F}_q^\times \text{ for } j = 2, \ldots, n-1, \quad \zeta_n^{q+1} = \zeta_{n-1}^2.$$

我们考虑标准 Levi 子群 $\mathbb{M} = \langle \mathbb{T}、\ \mathbb{U}_{\pm\alpha_n} \rangle$。于是，由引理 4.4，Q 成立，并且引理 4.9 保证了 N。由注 4.12 (i)，若能证明对任意 $a$、$b \in \{0,1\}$ 均有 $w_0 \cdot t \neq z^a s_n^b \cdot t$，则条件 W 成立。假设我们有一个相等。将备注 4.12 (ii) 应用于 $\alpha_1^\vee$，可知 $\zeta_1^2 = 1$，从而 $\zeta_1 \in \mathbb{F}_q$ 且 $\zeta_2 = 1$。但这样一来，$\alpha_1(t) = 1$，与引理 4.9 矛盾。

假设 (v) 成立。不失一般性 $J_w = \{s_1\} \cup J$ 满足 $J = \{s_{n-j+1}, \dots, s_n\}$，因此 $t \in \mathbb{T}^{F_w}$ 给出

$$t = w \cdot t^q \in \alpha_1^\vee(\zeta_1^{-q}\zeta_2^q)\alpha_2^\vee(\zeta_2^q) \prod_{i=3}^{n} \alpha_i(\Bbbk)$$

满足 $\zeta_2 \in \mathbb{F}_q$ 且 $\zeta_1^{q+1} = \zeta_2$。取 $\mathbb{M} = \mathbb{L}_J$，于是 Q 由引理4.4 得证，N 由引理 4.9推出。我们利用注 4.12 来验证 W。若$t^{-1} = z\sigma \cdot t$ 对某个 $\sigma \in W_{\mathbb{M}}$ 成立，则 $\zeta_1^2 = \zeta_2^2 = 1$。因此 $\zeta_2 = \zeta_1^{q+1} = 1$ 且$\alpha_1(t) = 1$，这与引理 4.9矛盾。□

**~引理5.3**。假设 $\Phi_{J_w}$ 是 $A_d + A_1$ 型，且 $d \geq 2$。那么 $\mathcal{O}$ 是 $C$ 型。

证明。若 $d$ 为偶数，则应用引理 4.16，因此在证明的其余部分中，我们假设 $d = 2l - 1$ 对于某个 $l \geq 2$。在 $W$-共轭意义下，不妨设 $J_w = J_1 \cup \{s_n\}$ 满足 $J_1 = \{s_1, \dots, s_d\}$ 且 $w = w_1 s_n = s_n w_1$其中 $w_1 = s_1 \cdots s_d \in \langle J_1 \rangle \simeq \mathbb{S}_{2l}$是一个 $2l$-循环。因此 $|w_1| = |w| = 2l$。

我们验证定理 4.3 对群的假设

$$\mathbb{M} = \langle \mathbb{T}, \mathbb{U}_\delta,\ \delta \in \Phi_{\mathbb{M}} \rangle$$

其中 $\Phi_M$是类型为 $lA_1$、基为 $\beta_j := \alpha_j + \cdots + \alpha_{j+l-1}$对于 $j = 1, \dots, l$，它与 $\alpha_n$正交。由于 $\beta_j = w_1\beta_{j-1} = w\beta_j$对于$j = 2, \dots, l$ 以及 $w_1\beta_l = w\beta_l = -\beta_1$，系统 $\Phi_{\mathbb{M}}$是 $w$-稳定的。由于 $l \geq 2$，条件 Q 由引理 4.6得出。条件 N 由引理 4.9以及包含关系 $\Phi_{\mathbb{M}} \subset \Phi_{J_w}$得出。

直接计算表明 $\mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w) = \langle w_1^l \rangle = \langle \prod_{j=1}^{l} s_{\beta_j} \rangle$。根据构造，$w_1 \in \mathrm{Cent}_W(w) \setminus \mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w)$，且由于 $w_1 \in \langle J_w \rangle$ 和 $\mathbb{M} \subset \mathbb{L}_{J_w}$，有 $\mathrm{Cent}_{\mathbb{M}}(w_1 \cdot t) = \mathbb{T}$。我们断言 $w_1 \cdot t \notin Z\,\mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w) \cdot t$。事实上，若对某些 $a$、$b \in \{0,1\}$，有 $w_1 \cdot t = z^a w_1^{lb} \cdot t$，那么考察等式中 $\alpha_n^\vee$ 的系数，可推得必有 $a = 0$，进而推出 $w_1^{l-1} \cdot t = t$。然而，$w_1^{l-1} \in W_{\mathbb{M}}$，且 $\mathrm{Cent}_{\mathbb{M}}(t) = \mathbb{T}$，这就产生了矛盾。定理 4.3 适用。□

**引理 5.4**。 假设 $q=3$，且 $\Phi_{J_w}$ 属于 $A_1+A_1$ 型。那么 $\mathcal{O}$ 属于 $C$ 型。

证明。 不失一般性，我们可以假设 $\Delta_{J_w}=\{\alpha_1,\alpha_n\}$ 从而 $\alpha_2,\ \alpha_{n-1}\notin\Delta_{J_w}$。关系式（5.1）仍然成立。我们验证定理 4.3 的假设，考虑子群 $\mathbb{M}=\langle\mathbb{T},\ \mathbb{U}_\delta,\ \delta\in\Phi_{\mathbb{M}}\rangle$，其中 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 由 $\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}$ 与 $\beta=w\alpha=\alpha+2\alpha_n-\alpha_1$ 生成。首先，$\Phi_{\mathbb{M}}$ 是 $A_2$ 型的，且 $w$ 作用在 $w$ 上并交换单根 $\alpha$ 与 $\beta$，因此 $M:=[\mathbb{M},\mathbb{M}]^F\simeq\mathbf{SU}_3(3)=\mathbf{PSU}_3(3)$ 是一个非阿贝尔有限单群，从而给出 Q。

我们验证 W 利用注 4.12。由构造，我们有

$$\mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w)=\langle s_{\alpha+\beta}\rangle=\langle s_0\rangle.$$

假设 $t^{-1}=w_0\cdot t=z^a s_0^b\cdot t$ 对某个 $a,\ b\in\{0,1\}$。若 $b=0$，则该相等蕴含 $\zeta_1^2=1$，从而 $\zeta_2=\zeta_1^4=1$ 给出 $\alpha_1(t)=1$，与引理 4.9 矛盾。因此 $b=1$。

直接计算可得

$$s_0\cdot t=t\,(\alpha_0)^\vee(\zeta_2^{-1})=t\,\alpha_1^\vee(\zeta_2^{-1})\left(\prod_{i=2}^{n-1}\alpha_i^\vee(\zeta_2^{-2})\right)\alpha_n^\vee(\zeta_2^{-1}).$$

比较相等式中 $\alpha_1^\vee$ 的系数 $t^{-1}=z^a s_0\cdot t$ 可得 $\zeta_1^2=\zeta_2$。但于是 $\alpha_1(t)=1$，这与引理 4.9 矛盾。因此，$w_0\cdot t\notin\mathbf{Z}\,\mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w)$。

最后，我们检验 N。直接计算可得，对于任意 $n\geq 3$，we have

$$\alpha(t)=\zeta_1\zeta_n^{-2}\zeta_{n-1},\qquad \beta(t)=\zeta_1^{-1}\zeta_2\zeta_n^2\zeta_{n-1}^{-1},\qquad (\alpha+\beta)(t)=\zeta_2.$$

首先假设 $(\alpha(t),\ \beta(t),\ (\alpha+\beta)(t))\neq(1,\ 1,\ 1)$。那么，$M$ 的正根子群 $U:=\langle\mathbb{U}_\alpha,\ \mathbb{U}_\beta\rangle^{F_w}$ 是一个阶为 27 的 3-西洛子群，它不包含于 $\mathrm{Cent}_M(t)$。

现在假设 $(\alpha(t),\ \beta(t),\ (\alpha+\beta)(t))=(1,\ 1,\ 1)$。在这种情形下，我们用 $\Phi'_{\mathbb{M}}=s_1\Phi_{\mathbb{M}}$ 替换 $\Phi_{\mathbb{M}}$，取以 $\alpha'=s_1\alpha$ 为基、$\beta'=s_1\beta$ 为根系的根系。注意到 $\alpha+\beta=s_1(\alpha+\beta)$，因此 $\mathrm{Cent}_{s_1W_{\mathbb{M}}s_1}(w)=\mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w)$。此外，

$$(s_1\alpha)(t)=\alpha(t)\alpha_1(t)^{-1}=\alpha_1(t)^{-1}\neq 1$$

由引理 4.9 可知。因此，我们像处理 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 时那样验证 Q 和 W。此外，N 成立，因为 $(\alpha'(t),\ \beta'(t),(\alpha'+\beta')(t))\neq(1,1,1)$。□

剩下最繁琐的情形： $q$ 是奇数且 $w$ 在$\langle J_w\rangle$中是尖点的，其中 $\Delta_{J_w} = \{\alpha_{n-l+1}, \dots, \alpha_n\}$属于类型 $B_l$，其中某个 $l \in \mathbb{I}_{n\circ}$ 我们采用小节 3.3中回顾的尖点元素描述，并沿用其中的记号。本小节余下部分中，我们假设$w = w_\lambda = \prod_{i=1}^r w_{\lambda_i}$对应某个分拆 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$，其和为 $l \le n_\circ$

**引理 5.5.** 假设 $\lambda_1 \ge 3$ 且为奇数。那么 $\mathcal{O}$ 属于类型 $C$。

证明。 取 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 为$\Phi_{\lambda,1}$中由所有长根组成的、 $w$-稳定的类型为 $D_{\lambda_1}$ 的根子系统。它的基为 $\alpha_{n-\lambda_1+1}, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_{n-1} + 2\alpha_n$。 于是， Q 由引理 4.6可知成立。由于 $\Phi_{\lambda,1} \subseteq \Phi_{J_w}$， 引理 4.9 保证 N.

现在我们利用注4.12来证明 W 。注意到

$$\mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w) = \mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w_{\lambda_1}).$$

此外， Coxeter 元 $w_{\lambda_1} \in W_{\Phi_{\lambda,1}}$ 不属于 $W_{\mathbb{M}}$ ， 因为 $\Phi_{\lambda,1}$ 的所有单根中，除一个之外都属于 $\Phi_{\mathbb{M}}$。另一方面， $w_{\lambda_1}^2 \in W_{\mathbb{M}}$， 因为 $[W_{\Phi_{\lambda,1}} : W_{\mathbb{M}}] = 2_\circ$ 因此，

$$\mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w) = \mathrm{Cent}_{W_{\Phi_{\lambda,1}}}(w_{\lambda_1}) \cap W_{\mathbb{M}} = \langle w_{\lambda_1}^2\rangle.$$

反设 $t^{-1} = z^a w_{\lambda_1}^{2b} \cdot t$ 对某个 $a \in \{0, 1\}$ 且$b \in \mathbb{I}_{0,\lambda_1-1}$成立。那么， $t = z^a w_{\lambda_1}^{2b} \cdot t^{-1} = w_{\lambda_1}^{4b} \cdot t = w_{\lambda_1}^{4b} \cdot t_\circ$ 因此 $2\lambda_1 | 4b$， 因为 $\mathsf{Cent}_{\mathbb{M}}(t) = \mathbb{T}$ ， 根据引理 4.9。由于 $\lambda_1$ 为奇数， $\lambda_1 | b$， 所以$t^{-1} = z^a t_\circ$ 我们运用注 4.12 (ii) 得到矛盾，因为 $|w|$ 是 $2\lambda_1 \ge 6$的倍数。 □

**引理 5.6**。 若对于某个 $d \ge 1$， 有 $\lambda_1 = 2d$ ， 则 $\mathcal{O}$ 属于 $C$ 型。

证明。 我们取 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 为 $\Phi_{\lambda,\ 1}$ 的根子系统，它由 $\langle w_{\lambda_1}\rangle$-轨道中的 $2\lambda_1$ 长根组成，该轨道

$$\alpha := \alpha_{n-\lambda_1+1} + \cdots + \alpha_{n-d}.$$

现在，当 $a - b \not\equiv 0$ 模 $\lambda_1$ 且 $w_{\lambda_1}^{\lambda_1} \cdot \alpha = -\alpha$ 时， $w_{\lambda_1}^a \cdot \alpha \perp w_{\lambda_1}^b \cdot \alpha$ ， 因此 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 属于 $\lambda_1 A_1$ 型，并且 $w$ 循环地置换这些分支。现在， $F_{w^{\lambda_1}}$ 作用为 $\langle \mathbb{U}_{\pm\alpha}\rangle$ 的一个自同态，它与 $\mathsf{Fr}^{q^{\lambda_1}}$ 相差一个内自同构。引理 4.6 给出 Q 。由于 $\mathbb{M} \le \mathbb{L}_{J_w}$， 由引理 4.9 可得 $\mathsf{Cent}_{\mathbb{M}}(t) = \mathbb{T}$， 从而 N 成立。 □

现在， $\langle w_{\lambda_1}\rangle \le \mathsf{Cent}_W(w_\lambda)$ 与包含关系 $\Phi_{\mathbb{M}} \subset \Phi_{\lambda,\ 1} = \Phi_{J_w}$ 给出

$$\mathrm{Cent}_{\mathbb{M}}(w_{\lambda_1} \cdot t) \subseteq \mathrm{Cent}_{\mathbb{L}_{J_w}}(w_{\lambda_1} \cdot t) = \mathbb{T}.$$

因此，W 成立，只需证明 $w_{\lambda_1}\cdot t\notin \mathbf{ZCent}^{W_{\mathbb{M}}}(w)\cdot t$。首先，$W_{\mathbb{M}}$ 仅由对合构成，并且

$$\mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w_\lambda)=\mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w_{\lambda_1})=\langle\prod_{i=1}^{\lambda_1}s_{w_{\lambda_1}^i\alpha}\rangle=\langle w_{\lambda_1}^{\lambda_1}\rangle$$

其阶为 2。此外，$w_{\lambda_1}\cdot t\notin\{t,w_{\lambda_1}^{\lambda_1}\cdot t\}$ 因为 $\mathbf{Cent}^{\mathbb{L}_{J_w}}(t)=\mathbb{T}$。反设 $w_{\lambda_1}\cdot t=zw_{\lambda_1}^{a\lambda_1}\cdot t$ 对某个 $a\in\{0,1\}$成立。那么，要么$w_{\lambda_1}\cdot t=zt$，要么 $w_{\lambda_1}\cdot t=z^{\lambda_1+1}t$。在这两种情形下，$w_{\lambda_1}^2t=t$ 且 $|w_{\lambda_1}|=2\lambda_1$，这再次与 $\mathbf{Cent}^{\mathbb{L}_{J_w}}(t)=\mathbb{T}$矛盾。□

剩下需要考虑的是这样的情形：$r=l\leq n$且 $\lambda_j=1$对$j\in\mathbb{I}_l$成立，也就是说，对所有 $j$，都有 $\Lambda_j=j-1$。在这种情形下，$w_{\lambda_j}=s_{\gamma_j}$ 且 $\gamma_j=\sum_{i=n-j+1}^{n}\alpha_i$ 对所有 $j$ 成立。因此，$\gamma_j\perp\gamma_i$对 $i\neq j$成立，所以 $w=w_\lambda=s_{\gamma_1}\cdots s_{\gamma_l}$是一个对合。具体而言，在 $t$上的作用为

$$s_{\gamma_j}\cdot t=\begin{cases}t\gamma_n^\vee(\zeta_1^{-1}), & \text{if } j=n,\\ t\gamma_j^\vee(\zeta_{n-j}\zeta_{n-j+1}^{-1}), & \text{if } 1<j<n,\\ t\alpha_n^\vee(\zeta_{n-1}\zeta_n^{-2}), & \text{if } j=1,\end{cases}$$

$$\gamma_j^\vee(\eta)=\left(\prod_{i=n-j+1}^{n-1}\alpha_i^\vee(\eta^2)\right)\alpha_n^\vee(\eta),\qquad \eta\in\Bbbk^\times,\ \text{if } j>1,$$

$$\gamma_1^\vee(\eta)=\alpha_n^\vee(\eta),\qquad \eta\in\Bbbk^\times,$$

$$w\cdot t=t\left(\prod_{i=n-l+1}^{n-1}\alpha_i^\vee(\zeta_i^{-2}\zeta_{n-l}^2)\right)\alpha_n^\vee(\zeta_n^{-2}\zeta_{n-l}),\qquad \text{if } 1<l<n,$$

$$w\cdot t=s_n\cdot t=t\alpha_n^\vee(\zeta_n^{-2}\zeta_{n-1}),\qquad \text{if } l=1,$$

$$w\cdot t=w_0\cdot t=t^{-1},\qquad \text{if } l=n.$$

根据 $l$，条件 $t\in\mathbb{T}^{F_w}$ 为：

$$\zeta_i^{q-1}=1,\ \text{for } 1\leq i\leq n-1,\qquad \zeta_n^{q+1}=\zeta_{n-1},\qquad \text{when } l=1;$$
$$\zeta_i^{q+1}=1,\ \text{for } 1\leq i\leq n,\qquad \text{when } l=n;$$

and

$$\zeta_i^{q-1}=1,\ \text{for } 1\leq i\leq n-l,\qquad \zeta_n^{q+1}=\zeta_{n-l},$$
$$\zeta_i^{q+1}=\zeta_{n-l}^2,\ \text{for } n-l+1\leq i\leq n-1,\qquad \text{when } 1<l<n.$$

**引理 5.7**。 假设 $\lambda_1 = 1$，且以下情况均未发生：

$$l = 1, \qquad t = \Big(\prod_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \alpha_{2i-1}^\vee(-1)\Big)\alpha_n^\vee(\zeta_n), \quad \zeta_n^{q+1} = (-1)^{n-1}; \tag{5.2}$$

$$l = 2, \qquad t = \Big(\prod_{i=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \alpha_{2i-1}^\vee(-1)\Big)\alpha_{n-1}^\vee(\zeta_{n-1})\alpha_n^\vee(\zeta_n), \quad \zeta_n^{q+1} = (-1)^n,\ \ \zeta_{n-1}^{q+1} = 1. \tag{5.3}$$

则 $\mathcal{O}$ 为 *C* 型、*D* 型或 *F* 型。

证明。 我们考虑根子系统 $\Phi_{\mathbb{M}}$，其基为 $\{\alpha_{n-1}, \alpha_n\}$。则$[\mathbb{M}, \mathbb{M}]$ 是单的、单连通的，且型为 $B_2$，故 $[\mathbb{M}, \mathbb{M}] \simeq \mathbf{Sp}_4(\Bbbk)$，从而$M = \mathbf{Sp}_4(q) = [M, M]$，得到 Q（由引理 4.4）。由于 $\alpha_n(t) \neq 1$，条件 N 由引理 4.7 推出。

我们转而讨论条件 W 。在当前情形下，$w$ 作为 $-$恒等元作用在 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 上，从而 $\mathsf{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w) = W_{\mathbb{M}}$。若 $\zeta_i^2 \neq 1$ 对某个 $i \leq n-2$成立，则我们援引注 4.12与 4.13。

在证明的其余部分，我们假设对所有 $i \leq n-2$，$\zeta_i^2 = 1$。

我们注意到，若 $j \neq n-l$ 且 $j \leq n-2$，则 $s_j \in \mathsf{Cent}_W(w) \setminus W_{\mathbb{M}}$ 且 $\alpha_n(s_j \cdot t) = \alpha_n(t) \neq 1$。将引理 4.7 应用于 $s_j \cdot t$，得到 $s_j \cdot t \notin \mathsf{Cent}_{\mathbb{T}}(M)$。因此，若对某个 $j \in \mathbb{I}_{n-2} \setminus \{n-l\}$ 有 $s_j \cdot t \notin \mathbf{Z}W_{\mathbb{M}} \cdot t$，则 W 成立。

反设对所有 $j \in \mathbb{I}_{n-2} \setminus \{n-l\}$，都有 $s_j \cdot t \in \mathbf{Z}W_{\mathbb{M}} \cdot t$。在 $s_j \cdot t$ 的表达式中，$\alpha_j^\vee$的系数在 $j = 1$ 时为 $\zeta_1^{-1}\zeta_2$，而在 $j \in \mathbb{I}_{2,n-2}$时为 $\zeta_{j-1}\zeta_j^{-1}\zeta_{j+1}$。另一方面，$\mathbf{Z}W_{\mathbb{M}} \cdot t$ 中任意元素的表达式里，$\alpha_j^\vee$的系数对所有 $j \leq n-2$ 均为 $\zeta_j$。因此，我们必然有

$$\zeta_2 = 1 \quad \text{if } l \neq n-1, \qquad \zeta_{j+1} = \zeta_{j-1} \quad \text{for all } j \neq 1, n-l,\ j \leq n-2. \tag{5.4}$$

令 $l \geq 3$。那么，对于 $j = n-l+1$，(5.4) 给出 $\zeta_{n-l} = \zeta_{n-l+2}$，若 $n \neq l$；而若 $n = l$，则给出$\zeta_2 = 1$。在这两种情形下，$t \in \mathbb{T}^{F_{s_{\gamma_1} \cdots s_{\gamma_{l-2}}}}$，这与 $l$ 的极小性矛盾。因此，条件 W 对 $l \geq 3$ 成立。

设 $l \leq 2$。那么，W 已经得到验证，除非 $l = 2$ 和

$$t = \Big(\prod_{i=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \alpha_{2i-1}^\vee(\epsilon)\Big)\alpha_{n-1}^\vee(\zeta_{n-1})\alpha_n^\vee(\zeta_n), \quad \epsilon^2 = 1, \quad \zeta_n^{q+1} = \epsilon^n, \quad \zeta_{n-1}^{q+1} = 1,$$

或 $l=1$ 和

$$t=\Big(\prod_{i=1}^{[\frac{n}{2}]}\alpha_{2i-1}^{\vee}(\epsilon)\Big)\alpha_n^{\vee}(\zeta_n),\qquad \epsilon^2=1,\qquad \zeta_n^{q+1}=\epsilon^{n-1}.$$

若 $\epsilon=1$，则 $t\in\langle\mathbb{U}_{\pm\alpha_n},\ \mathbb{U}_{\pm\alpha_{n-1}}\rangle^{F_{s_n}}\simeq\mathbf{Sp}_4(q)$，且它不属于其中的分裂环面。此外，$\mathbf{Z}=Z(\mathbf{Sp}_4(q))$，因此，$\mathcal{O}$ 根据 [7, 定理 I]，属于 C、D 或 F 型。情形 $\epsilon=-1$ 根据假设予以排除。□

注 5.8。若 $q=3$ 且 $n$ 为偶数，则不可能出现（5.3）。事实上，将引理 4.9 应用于根：$\alpha_{n-1}+\alpha_n$，$\alpha_{n-1}+2\alpha_n$，$\alpha_{n-1}$，可得

$$\zeta_{n-1}\neq 1,\qquad \zeta_n^2=-1,\qquad \zeta_{n-1}^2\neq -1$$

因此 $\zeta_{n-1}=-1$ 由此 $\alpha_n(t)=1$，矛盾。

**引理 5.9**。设以下情形均不成立：

$$\begin{aligned}&n=2d+1,\ d\geq 1,\qquad q\equiv 3 \mod 4,\\ &t=\big(\prod_{i=1}^{d}\alpha_{2i-1}^{\vee}(-1)\big)\alpha_n^{\vee}(\zeta_n),\quad \zeta_n^2=-1;\end{aligned}\tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}&n=2d+1,\ d\geq 1,\qquad q=3,\\ &t=\big(\prod_{i=1}^{d}\alpha_{2i-1}^{\vee}(-1)\big)\alpha_{n-1}^{\vee}(-\omega^2)\alpha_n^{\vee}(\omega),\quad \mathbb{F}_9^{\times}=\langle\omega\rangle.\end{aligned}\tag{5.6}$$

那么 $\mathcal{O}$ 属于 *C*、*D* 或 *F* 型。

证明。只需考虑 $t$ 如（5.2）或（5.3）所示，因此要么 $w=s_n$ 要么 $w=s_ns_{\alpha_{n-1}+\alpha_n}$。

首先假设 $q>3$。令 $\gamma=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$。我们考虑 $F_w$-稳定的非标准 Levi子群 $\mathbb{M}:=\langle\mathbb{T},\ \mathbb{U}_{\pm\gamma}\rangle$。那么 $[\mathbb{M},\mathbb{M}]\simeq\mathbf{SL}_2(\Bbbk)$ 并且

$$M:=[\mathbb{M},\mathbb{M}]^{F_{s_n}}\simeq[\mathbb{M},\mathbb{M}]^{F_{s_ns_{\gamma_2}}}\simeq[\mathbb{M},\mathbb{M}]^{Fr_q}\simeq\mathbf{SL}_2(q).$$

于是，$M\simeq[M,M]$，引理 4.4 给出 Q。此外，$\gamma_n(t)=-1$，因此 $\mathsf{Cent}_{\mathbb{M}}(t)=\mathbb{T}$，故 N 成立。□

现在，$W_{\mathbb{M}}=\langle s_\gamma\rangle=\mathsf{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w)$ 且 $s_\gamma\cdot t=\gamma^{\vee}(-1)t=t\alpha_n^{\vee}(-1)$，因此$\mathbf{Z}\mathsf{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w)\cdot t=\mathbf{Z}t$。除非 $t^2=1$ 或 $t^2=z$，注 4.12 适用。因此，除非 $(\zeta_{n-1}^2,\zeta_n^2)=(1,\pm 1)$，否则W 成立。我们分析这种情况何时可能发生。

条件 $e\notin W[\mathfrak{O}]$ 迫使 $(\zeta_{n-1}^2,\ \zeta_n^2)=(1,\ -1)$，且 $q\equiv 3$ 模 4，因此也有 $\zeta_n^{q+1}=1$。因此，只有当我们处于（5.2）且 $n$ 为奇数，或者处于（5.3）且 $n$为偶数时，这种情况才会发生。第一种情形是被舍弃的情形（5.5）。

在第二种情形下，相等式 $(\zeta_{n-1}^2,\ \zeta_n^2)\ =(1,\ -1)$不成立，因为引理 4.9给出

$1\neq\alpha_n(t)\ =\zeta_n^2\zeta_{n-1}^{-1}=-\zeta_{n-1}$ 和 $1\neq(\alpha_{n-1}+\alpha_n)(t)\ =\zeta_{n-2}^{-1}\zeta_{n-1}=\zeta_{n-1}$，这意味着 $\zeta_{n-1}^2\neq 1$。

在证明的其余部分，我们假设 $q=3$。根据注 5.8 ，情形（5.3）仅在 $n$ 为奇数时出现。于是，根据引理 $\zeta_n^2\neq\zeta_{n-1}$ 4.9 ，因此这是被舍弃的情形（ 5.6）。

情形（5.2）满足 $n=2d+1$ ，结果是被舍弃的情形（5.5），因为 $\zeta_n^{q+1}=\zeta_n^4=1$ 且 $\zeta_n^2\neq 1$ ，这是由于 $e\notin W[\mathfrak{O}]$。

假设我们处于 (5.2) 中，且 $n\ =\ 2d$。那么 $t$ 属于子群$\langle\prod_{i=1}^{d-1}\alpha_{2i-1}^\vee(-1)\rangle\times\langle\mathbb{U}_{\pm\alpha_{n-1}},\mathbb{U}_{\pm\alpha_n}\rangle\ \simeq\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathrm{Sp}_4(\Bbbk)$，这是若干个 $s_n$-稳定子群的乘积。于是， $\pi(t)$ 的共轭类包含一个子架，该子架与 $\mathrm{PSp}_4(q)$ 中 $t':=\pi(\alpha_{n-1}^\vee(-1)\alpha_n^\vee(\zeta_n))$ 的共轭类同构。由于 $\zeta_n^4=-1$，元素 $\pi(t')\ \in\mathrm{PSp}_4(q)$ 不是对合，因此根据 [7, 定理 I]，其共轭类属于 C、D 或 F 型。由注 5.1 得证。□

结合本小节的结果与 [7] 中的结果，我们得到关于任意 $W[\mathfrak{O}]$ 的半单共轭类的以下结论。

**定理 5.10.** 设 $\mathcal{O}=\pi(\mathfrak{O})$ 是 $\mathbf{P\Omega}_{2n+1}(q)$中的非平凡半单共轭类。假设 $t\in\mathbb{T}^{F_w}$ 且 $w$ 是极小，并且我们不属于以下任何一种情形： (5.5) 且 $w=s_n$，或 (5.6) 且 $w=s_ns_{\alpha_{n-1}+\alpha_n}$，也不是

$$w=e,\ n=2d+1,\ d\geq 1,\qquad q=5,\tag{5.7}$$
$$t=\Big(\prod_{i=1}^{d}\alpha_{2i-1}^\vee(-1)\Big)\alpha_n^\vee(\omega),\qquad \mathbb{F}_5^\times=\langle\omega\rangle,$$
$$w=e,\ n=2d,\ d\geq 1,\qquad q=3,5,7,\tag{5.8}$$
$$t=\Big(\prod_{i=1}^{d}\alpha_{2i-1}^\vee(-1)\Big)\alpha_n^\vee(\zeta),\qquad \zeta=\pm 1.$$

那么， $\mathfrak{O}$ 和 $\mathcal{O}$ 属于 *C*、*D* 或 *F* 型。

证明。若 $n=2$ ，则该结论由 [7, 定理 I]得出。令 $n\geq 3$。若 $e\in W[\mathfrak{O}]$，则应用 [7, 定理 4.1]。注意，若 $n$ 为奇数，则公式 (4.2)] 中的元素仅在 $q\ \equiv\ 1$ 模 4 时出现，因此仅当 $q\ =\ 5$时出现。若 $e\ \notin\ W[\mathfrak{O}]$ ，则该结论由引理 5.2、5.3、5.4、5.5、5.6、5.7 和 5.9 得出。□

注 5.11。若 $t$ 如（5.5）、（5.7）及（5.8）所示，则 $\pi(t)$ 是对角矩阵 $\mathrm{diag}(-\text{恒等元}_n,1,-\text{恒等元}_n)\ \in\ \pi(\mathbb{T})^F$。若 $n$ 为偶数，或若 $n$ 为奇数

且 $q \equiv 1$ 模 4，则 $\pi(t) \in \pi(\mathbb{T}^F)$。若 $t$ 如（5.6）所示，则 $\pi(t) =$ diag(– 恒等元$_{n-2}, \omega^2,$ 恒等元$_3, \omega^{-2},$ –恒等元$_{n-2}$)。

5.2. $\mathbf{P\Omega}^+_{2n}(q)$**中的半单类。**

在本节中，我们假设 $\mathbb{G}$ 属于类型 $D_n$，其中 $n \geq 4$。对于递归论证，我们采用通常的约定：$D_2 = 2A_1$ 且$D_3 = A_3$。表 4描述了 $\mathbb{G}^F$ 的中心。我们将用到以下等式

$$w_0 \cdot t = \begin{cases} t^{-1} & \text{if } n \text{ is even,} \\ \left(\prod_{j=1}^{n-2} \alpha_j^\vee(\zeta_j^{-1})\right) \alpha_{n-1}^\vee(\zeta_n^{-1})\alpha_n^\vee(\zeta_{n-1}^{-1}) & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

$$\alpha_0 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n, \tag{5.9}$$

$$s_0 \cdot t = \alpha_1^\vee(\zeta_1\zeta_2^{-1}) \left(\prod_{i=2}^{n-2} \alpha_i^\vee(\zeta_i\zeta_2^{-2})\right) \alpha_{n-1}^\vee(\zeta_{n-1}\zeta_2^{-1})\alpha_n^\vee(\zeta_n\zeta_2^{-1}).$$

满足 $\alpha_n \notin J_w$ 的情形由 [7, 定理 62]涵盖。若 $\alpha_{n-1} \notin J_w$，则对 $\mathbb{G}$ 应用交换 $\alpha_n$ 和 $\alpha_{n-1}$的外自同构，可归约到情形 $\alpha_n \notin J_w$。因此，我们可以假设 $\alpha_{n-1}, \alpha_n \in J_w$。于是，$J_w$ 总是 $w_0$-稳定的，而引理 4.9 给出

$$\alpha_j(w_0 \cdot t) = (w_0(\alpha_j))(t) \neq 1 \qquad \text{if} \qquad s_j \in J_w.$$

记 $J_n$ 为 $J_w$ 中包含 $s_n$的分支。我们将根据 $J_n$的大小或类型，分别分析各种情形，以验证定理4.3的假设。回顾一下，在$\langle J_w\rangle$ 的每个不可约分支中，按照构造，$w$ 的因子在该分支中是尖点的。在类型为 $A_l$的分支中，该因子与 Coxeter 元共轭。在类型为 $D_l$ 的分支中，该因子的描述见小节3.3。

**引理 5.12.** 若 $|J_n| \geq 3$，则 $\mathcal{O}$ 是 $C$ 型。

证明. 若 $|J_n| \geq 4$，则 $J_n$ 是 $D_{|J_n|}$，结论即为引理 4.17。

因此，我们假设 $J_n = \{\alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}, \alpha_n\}$ 是 $A_3$ 型。不失一般性，可以假设 $w$ 是 Coxeter 元 $\tau := s_n s_{n-2} s_{n-1} \in \langle J_n\rangle$ 与其他元素的乘积，其中该 Coxeter 元的阶为 4，而其他元素与之可交换，且属于 $\langle J_w\rangle$ 的其他（可能为空）分支。

考虑与以 $\{\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1}, \alpha_{n-2} + \alpha_n\}$ 为基的 $w$-稳定根系相关联的非标准Levi子群 $\mathbb{M}$，其类型为 $2A_1$。由于 $w$ 交换这两个分支，$M = [M, M] \simeq \mathbf{SL}_2(q^2)$; 由此得到 Q. 条件N 由引理4.9 以及包含关系 $\Phi_{\mathbb{M}} \subseteq \Phi_{J_w}$。

此外，$W_{\mathbb{M}} = \langle s_{\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}} s_{\alpha_{n-2}+\alpha_n}\rangle = \langle \tau^2\rangle$。假设对于某个 $z \in \mathbf{Z}$ 和某个 $a \in \mathbb{I}_{0,\ 3}$，有 $\tau \cdot t = z\tau^{2a} \cdot t$。由 $t$ 在 $\mathbb{L}_{J_w}$ 中的正则性，我们排除

这种可能性 $z = e$。此外，比较相等式中 $\alpha_1^\vee$ 的系数可知， $z$ 唯一可接受的可能是 $\alpha_{n-1}^\vee(-1)\alpha_n^\vee(-1)$。但是

$$\tau^2 \cdot t = z^2\tau^{4a} \cdot t = t$$

这与 $t$ 的正则性相矛盾。非中心性条件 W2由引理 4.9 得出，因为 $\Phi_w$ 是 $\tau$-稳定的。□

**引理 5.13**。若 $\Delta_{J_w}$ 有一个秩为 $l \geq 2$ 且满足 $J \neq J_n$的分支 $\Delta_J$，则$\mathcal{O}$是 $C$ 型。

证明。根据引理 5.12，只需考虑 $J_n = \{s_n\}$ 的情形。由于 $s_{n-1} \in J_w$ 且 $s_{n-2} \notin J_w$，我们不妨假设 $\Delta_J = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$，其中 $l \leq n-3$。因此 $n \geq 5$。

我们先取 $\mathbb{M} := \mathbb{L}_J \leq \mathbb{L}_{J_w}$。根据构造， $F_w$ 是 $\mathbb{M}$ 的切瓦莱自同构，因此 Q 由引理 4.4 得出，N 则由引理 4.9得出。□

我们验证 W。根据构造， $s_{n-1}$， $s_n \in \mathsf{Cent}^{\langle J_w\rangle}(w)$ 且

$$\mathrm{Cent}_{\mathbb{M}}(s_n \cdot t) = \mathrm{Cent}_{\mathbb{M}}(s_{n-1} \cdot t) = \mathbb{T}.$$

假设W1 不成立。那么

$$s_n \cdot t = z_1\sigma_1 \cdot t, \quad \text{and} \quad s_{n-1} \cdot t = z_2\sigma_2 \cdot t \tag{5.10}$$

对于某个 $z_1$， $z_2 \in \mathbf{Z}$ 以及 $\sigma_1$， $\sigma_2 \in \mathrm{Cent}^{\langle J\rangle}(w)$。在 $\mathbb{L}_{J_w}$ 中的正则性迫使$z_1$， $z_2 \neq e$ 因此 $q$ 是奇数。比较等式（5.10）中 $\alpha_{n-1}^\vee$ 和 $\alpha_n^\vee$ 的系数，我们看到 $n$ 是偶数，

$$z_1 = \Big(\prod_{i=1}^{n-2} \alpha_i^\vee((-1)^i)\Big)\alpha_n^\vee(-1) \quad \text{and} \quad z_2 = \Big(\prod_{i=1}^{n-2} \alpha_i^\vee((-1)^i)\Big)\alpha_{n-1}^\vee(-1).$$

由此得到 $\zeta_n^2 = \zeta_{n-1}^2 = -\zeta_{n-2}$。W1 不成立且 $n$ 的奇偶性还可得出 $w_0 \cdot t = t^{-1} = z_3\sigma_3 \cdot t$ 对于某个 $z_3 \in \mathbf{Z}$ 以及 $\sigma_3 \in \mathsf{Cent}^{\langle J\rangle}(w)$。那么

$$\zeta_{n-2} = -\zeta_n^2 = -\zeta_{n-2}^2 = \pm 1.$$

若 $\zeta_{n-2} = -1$，则 $\alpha_n(t) = 1$ 这与引理 4.9矛盾。若 $\zeta_{n-2} = 1$，则 $t$属于单连通群

$$\langle \mathbb{U}_{\pm\gamma}, \gamma \in \Delta \setminus \alpha_{n-2}\rangle \simeq \mathbf{SL}_{n-2}(\Bbbk) \times \mathbf{SL}_2(\Bbbk) \times \mathbf{SL}_2(\Bbbk)$$

且 $w$ 在其根系上作为韦伊群元素作用。因此，

$$t \in \langle \mathbb{U}_{\pm\gamma}, \gamma \in \Delta \setminus \alpha_{n-2}\rangle^{F_w} \simeq \mathbf{SL}_{n-2}(q) \times \mathbf{SL}_2(q) \times \mathbf{SL}_2(q),$$

且为 $n-2 \geq 4$，并且为偶数。分支 $t_1$ 的 $t$ 在$\mathbf{SL}_{n-2}(q)$ 中不是中心的。应用 [7, 命题 5.9] 和注5.1，我们得出结论。□

**引理 5.14**。 若 $J_w = J_n = \{s_{n-1}, s_n\}$，则 $\mathcal{O}$ 为 $C$、$D$ 或 $F$ 型。

证明。 若 $n = 4$，则试三性自同构将 $\mathcal{O}$ 映到一个非分裂半单共轭类，该共轭类经标准同构对应于某个 $t' \in \mathbb{T}^{w'}$且满足 $J_{w'} = \{\alpha_1, \alpha_3\}$。此情形由 [7, 定理 6。2]涵盖。对于证明的其余部分 $n \geq 5$。

由于 $t \in \mathbb{T}^{F_{s_{n-1}s_n}}$，我们有

$$\zeta_i^q = \zeta_i \qquad \text{if} \qquad i \in \mathbb{I}_{n-2} \qquad \text{and} \qquad \zeta_{n-1}^{q+1} = \zeta_n^{q+1} = \zeta_{n-2}.$$

若 $q = 2$，则 $\mathbf{Z} = e$ 且 $t \in \langle \mathbb{U}_{\pm\alpha_{n-2}}, \mathbb{U}_{\pm\alpha_{n-1}}, \mathbb{U}_{\pm\alpha_n} \rangle^{F_w} \simeq \mathbf{SL}_4(2)$，并且它在其中非中心。根据注 5.1 以及 [7, 定理 5。4] 结论在此情形下成立。

若 $q = 3$，则对于 $i \in \mathbb{I}_{n-2}$有 $\zeta_i = \pm 1$。假设 $\zeta_{n-3} = 1$ （若 $n$ 为偶数，则总可以通过将 $t$乘以 $\mathbf{Z}$ 中的一个元素来实现）。那么

$$t \in \langle \mathbb{U}_{\pm\alpha_j}, j \in \mathbb{I}_{n-4} \rangle^{F_w} \times \langle \mathbb{U}_{\pm\alpha_{n-2}}, \mathbb{U}_{\pm\alpha_{n-1}}, \mathbb{U}_{\pm\alpha_n} \rangle^{F_w} \simeq \mathbf{SL}_{n-3}(3) \times \mathbf{SL}_4(3)$$

且分支 $t_1$ 在 $\mathbf{SL}_4(3)$ 中并非中心元。同样，注 5.1和 [7, 定理 5.4]可推出该结论。

假设 $n$ 是奇数且 $\zeta_{n-3} = -1$。那么我们总可以假设$\zeta_{n-4} = 1$。事实上，若对所有 $j \in \mathbb{I}_{n-3}$都有 $\zeta_j = -1$，则我们用 $t$ 替换

$$s_{n-4}s_{n-5} \cdots s_2 s_1 \cdot t \in \mathbb{T}^{F_w}.$$

相反，若对某个 $a \geq 1$ 有 $\zeta_a = 1$，且对 $j \in \mathbb{I}_{a+1}$有 $\zeta_j = -1$，$n-3$，则我们用 $t$ 替换

$$s_{n-4}s_{n-5} \cdots s_{a+1} \cdot t \in \mathbb{T}^{F_w}.$$

那么，$t \in \langle \mathbb{U}_{\pm\alpha_j}, j \in \mathbb{I}_{n-5} \rangle^{F_w} \times \langle \mathbb{U}_{\pm\alpha_j}, j \in \mathbb{I}_{n-3,\ n} \rangle^{F_w}$。第二个因子属于 $D_4$ 型，且 $t$ 的分支 $t_1$ 在其中并非中心元。它位于与韦伊群元素 $w_1$ 对应的环面中，其中 $J_{w_1} = \{s_4, s_3\}$。我们应用一个外自同构，并利用 [7, 定理 6.2] 得到该结论。

在证明的其余部分 $q > 3$。首先假设存在 $j \in \mathbb{I}_{n-3}$，使得 $\alpha_j(t) \neq 1$。那么对于 $\mathbb{M} = \mathbb{L}_{s_j} = \langle \mathbb{T}, \mathbb{U}_{\pm\alpha_j} \rangle$, N 和 Q 成立。我们验证 W。根据构造，$\alpha_j(s_n \cdot t) = \alpha_j(t) \neq 1$。若对于某个 $z \in \mathbf{Z}$ 和某个 $a \in \{0, 1\}$，有 $s_n \cdot t = z s_j^a \cdot t$，则 $z^2 = e$。比较相等式中 $\alpha_{n-1}^\vee$ 的系数，可得 $z = e$，或者 $n$ 是偶数且 $z = \prod_{i=1}^{n-2} \alpha_i^\vee((-1)^i)\alpha_n^\vee(-1)$。然而在后一种情形下 $n \geq 6$，因此存在一个奇数 $i \in \mathbb{I}_{n-3} \setminus \{j\}$。比较相等式 $s_n \cdot t = z s_j^a \cdot t$ 中 $\alpha_i^\vee$ 的系数会导致矛盾，因此 $z = e$。接着比较 $\alpha_n^\vee$ 的系数将会导致 $\zeta_n^2 = \zeta_{n-2}$，所以 $\alpha_n(t) = 1$，这与引理 4.9 矛盾。因此在此情形下 W 成立。

现在假设对于所有 $j \in \mathbb{I}_{n-3}$，都有 $\alpha_j(t) = 1$。那么

$$t = \Big(\prod_{i=1}^{n-2} \alpha_i^\vee(\zeta_1^i)\Big)\alpha_{n-1}^\vee(\zeta_{n-1})\alpha_n^\vee(\zeta_n).$$

如果 $\zeta_1^2 = 1$，那么要么 $\zeta_{n-3} = 1$，要么 $\zeta_{n-4} = 1$，我们按照处理 $q = 3$ 的方式继续。

在证明的其余部分，假设 $\zeta_1^2 \neq 1$。那么 $\alpha_0(t) \neq 1$。我们考虑非标准 Levi子群 $\mathbb{M} = \langle \mathbb{T}, \mathbb{U}_{\pm\alpha_0}\rangle$，因此 $M \simeq \mathbf{SL}_2(q)$ 以及 Q和 N 均满足。另有，$\alpha_0(s_n \cdot t) = \alpha_0(t) \neq 1$。

我们断言 $s_n \cdot t \notin \mathbf{Z}W_{\mathbb{M}} \cdot t$。反设存在矛盾，即 $s_n \cdot t = z s_0^a \cdot t$对于某个 $z \in \mathbf{Z}$ 和 $a \in \{0, 1\}$。那么 $z^2 = e$。比较 $\alpha_1^\vee$的系数并利用（5.9）可知，相等 $s_n \cdot t = z s_0 \cdot t$只有在 $n$ 为偶数时才可能成立，$\zeta_1^2 = -1$ 且

$$z = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i^\vee((-1)^i) \qquad \text{or} \qquad z = \Big(\prod_{i=1}^{n-2} \alpha_i^\vee((-1)^i)\Big)\alpha_n^\vee(-1).$$

然而，比较 $\alpha_3^\vee$ 的系数便会得到 $\zeta_1^4 = -1$，这与此矛盾。因此，$a = 0$，而 $\mathbb{L}_{J_w}$ 中 $t$ 的正则性给出 $z \neq e$。但是，比较相等式 $s_n \cdot t = zt$ 中 $\alpha_1^\vee$ 和 $\alpha_{n-1}^\vee$ 的系数，又会得到矛盾。□

**引理 5.15.** 假设 $(n, q) \neq (4, 2)$，且我们不处于这种情形

$$\begin{aligned} &n = 4, && q \equiv 3 \mod 4, \\ &\omega_1^2 = \omega_3^2 = \omega_4^2 = -1, && t = \alpha_1^\vee(\omega_1)\alpha_3^\vee(\omega_3)\alpha_4^\vee(\omega_4). \end{aligned} \tag{5.11}$$

如果 $J_w$ 属于 $rA_1$ 型且满足 $r \geq 3$，那么 $\mathcal{O}$ 属于 *C*、*D* 或 *F* 型。

证明。不失一般性，可假设 $\{s_{n-3}, s_{n-1}, s_n\} \subseteq J_w$，因此 $s_{n-2}$, $s_{n-4} \notin J_w$。根据构造，当 $s_i \notin J_w$ 时，$\zeta_i^q = \zeta_i$；此外

$$\zeta_n^{q+1} = \zeta_{n-1}^{q+1} = \zeta_{n-2} \quad \text{and} \quad \zeta_{n-3}^{q+1} = \zeta_{n-2}\zeta_{n-4}.$$

如果 $q = 2$，则 $n \geq 5$ 且

$$\begin{aligned} t &\in \langle \mathbb{U}_{\pm\alpha_j}, j \in \mathbb{I}_{n-3}\rangle^{F_w} \times \langle \mathbb{U}_{\pm\alpha_{n-1}}\rangle^{F_{s_{n-1}}} \times \langle \mathbb{U}_{\pm\alpha_n}\rangle^{F_{s_n}} \\ &\simeq \mathbf{SL}_{n-2}(2) \times \mathbf{SL}_2(2) \times \mathbf{SL}_2(2) \end{aligned}$$

且 $\mathbf{SL}_{n-2}$（2）中的分支是非平凡且非尖点的（即不可约）。由注 5.1 以及 [4, 定理 **1**。1], 该断言成立。

现在令 $q=3$。在此情形下，对于满足 $s_i \notin J_w$ 的所有 $i$， $\zeta_i^2=1$，

$$\zeta_n^4=\zeta_{n-1}^4=\zeta_{n-2} \qquad \text{and} \qquad \zeta_{n-3}^4=\zeta_{n-2}\zeta_{n-4}.$$

情形 $\zeta_{n-2}=1$ 与 $n=4$ 为（5.11），故将其舍弃。若 $\zeta_{n-2}=1$ 且 $n\geq 5$，则应用注 5.1。事实上，

$$t\in\langle \mathbb{U}_{\pm\alpha_j},\, j\in\mathbb{I}_{n-3}\rangle^{F_w}\times\langle \mathbb{U}_{\pm\alpha_{n-1}},\mathbb{U}_{\pm\alpha_n}\rangle^{F_w}\simeq \mathbf{SL}_{n-2}(3)\times\mathbf{SL}_2(3)\times\mathbf{SL}_2(3)$$

且 $t$ 在同构于 $\mathbf{SL}_{n-2}(3)$ 的分支中的因子是非平凡且非尖点的（即非不可约），故 [4, 定理1.1] 适用。

现设 $\zeta_{n-2}=-1$ 与 $n\geq 5$。我们考虑 $F_w$-稳定的 Levi 子群$\mathbb{M}=\langle \mathbb{T},\, \mathbb{U}_{\pm\alpha_j},\ j\in\mathbb{I}_{n-3}\rangle$，故 $M\simeq\mathbf{SL}_{n-2}(3)\simeq[M,M]$满足 Q。此外，$\alpha_{n-3}(t)\neq 1$ 由引理 4.9，故引理 4.7 给出 N。我们验证条件 W，考虑元素 $s_n\cdot t$。

首先，$\alpha_{n-3}(s_n\cdot t)=\alpha_{n-3}(t)\neq 1$ 因此引理4.7 给出W2。此外，$\alpha_n^\vee$ 在 $s_n\cdot t$ 中的系数是 $\zeta_n^{-1}\zeta_{n-2}=-\zeta_n^{-1}$，而 $\alpha_n^\vee$ 在$\mathbf{Z}W_{\mathbb{M}}\cdot t$ 的任意元素中的系数是 $\pm\zeta_n$。若它们相等，我们就会得到$\zeta_n^4=1\neq\zeta_{n-2}=-1$，这是一个矛盾。因此在此情形下W 成立。

接下来我们假设 $n=4$ 且 $\zeta_2=-1$，因此

$$\alpha_2(t)=-\zeta_1^{-1}\zeta_3^{-1}\zeta_4^{-1} \qquad \text{and} \qquad \zeta_1^4=\zeta_3^4=\zeta_4^4=-1.$$

循环群 $\mathbb{F}_9^\times$ 中3个生成元的乘积的阶绝不会是2，因此$\alpha_2(t)\neq 1$。于是，

$$(w\alpha_2)(t)=\alpha_2(w^{-1}\cdot t)=\alpha_2(t^3)=\alpha_2(t)^3\neq 1.$$

然后我们考虑类型为 $A_2$的 $\mathbb{M}:=\langle \mathbb{T},\mathbb{U}_{\pm\alpha_2},\mathbb{U}_{\pm(w\alpha_2)}\rangle$，因此

$$[\mathbb{M},\mathbb{M}]\simeq\mathbf{SL}_3(\Bbbk)=\mathbf{PSL}_3(\Bbbk)$$

作为抽象群。这里 $w$ 作为 $[\mathbb{M},\mathbb{M}]$ 的根系上的非平凡 Dynkin 图自同构作用，因此 $M\simeq\mathbf{SU}_3(3)\simeq\mathbf{PSU}_3(3)$，从而得到 Q。

此外，$\mathsf{Cent}_{\mathbb{M}}(t)\leq\langle \mathbb{T},\mathbb{U}_{\pm(\alpha_2+w\alpha_2)}\rangle$，因此 $\mathsf{Cent}_M(t)$ 中 Sylow 3-子群的阶为 $\leq 3$，从而得到 N。

我们验证 W。这里 $W_{\mathbb{M}}=\langle s_{\alpha_2+w\alpha_2}\rangle=\langle s_0\rangle=\mathsf{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w)$，并且

$$s_0\cdot t=t\alpha_1^\vee(-1)\alpha_3^\vee(-1)\alpha_4^\vee(-1).$$

此外，由于 $s_1\in\mathsf{Cent}_W(w)$和 $s_1\cdot t\notin\mathbf{Z}W_{\mathbb{M}}\cdot t$，其中 $\alpha_1^\vee$在$s_1\cdot t$ 中的系数为$-\zeta_1^{-1}$和 $\zeta_1^4=-1$。这就完成了对 $q=3$的证明。

在证明的其余部分中，我们假设 $q > 3$。取 $\mathbb{M} = \mathbb{L}_{\{s_n\}}$，因此 $M \simeq \mathbf{SL}_2(q)$ 和 $\mathsf{Cent}_{\mathbb{M}}(t) = \mathbb{T}$，从而得到 Q 和 N。我们通过证明W成立来说明 $\{s_{n-3}\cdot t,\, s_{n-1}\cdot t,\, w_0\cdot t\} \not\subseteq \mathbf{Z}W_{\mathbb{M}}\cdot t$：非中心性条件由引理 4.9得出。

假设对于某个 **Z** 和某个，有。那么，且在中的正则性迫使。比较相等式中和的系数，可排除。于是，我们得到。比较和的系数可知，该相等式仅在时成立，其中 ()()，且。

假设我们处于这种情形。于是考虑。仿照上面的论证可知，若对于某个 **Z** 且，则；比较和的系数可知，且 ()()，因此。接下来考虑

$$w_0 \cdot t = t^{-1} = \alpha_1^\vee(-\zeta_2\zeta_1)\alpha_2^\vee(\zeta_2^{-1})\alpha_3^\vee(-\zeta_2\zeta_3)\alpha_4^\vee(-\zeta_2\zeta_4).$$

若它属于 $\mathbf{Z}W_{\mathbb{M}}\cdot t$，则 $\zeta_2^2 = 1$。若 $\zeta_2 = -1$，则 $\zeta_i \in \mathbb{F}_q$ 对所有 $i$均成立，这与 $J_w$的极小性矛盾。若 $\zeta_2 = 1$，则 $J_w$ 的极小性$q \equiv 3$ 迫使其模 4 同余，但这是被排除的情形（ 5.11 ）。□

注 5.16。 设 $n = 4$，并设 $t = \alpha_1^\vee(\omega_1)\alpha_3^\vee(\omega_3)\alpha_4^\vee(\omega_4) \in \mathbb{T}^{F_{s_1s_3s_4}}$。那么， $s_i$ 的共轭作用将 $\omega_i$ 映到其逆元，同时保持另外两个系数不变。因此，若 $q = 2$ ，或者处于情形（5.11），则在 $J_w = \{s_1, s_3, s_4\}$条件下，半单元素只有一个共轭类。

我们汇总关于 $\boldsymbol{G}$ 中半单类的结果。

**定理 5.17**。 设 $\boldsymbol{G} = \mathbf{P\Omega}^+_{2n}(q)$。若 $n = 4$ 且 $w = s_1s_3s_4$，假设$q \neq 2$ 并且 $t$ 不属于 (5.11)中的情形。则 $\mathcal{O}$ 属于 $C$ 型、$D$ 型或 $F$ 型。

证明。 如果 $s_n \notin J_w$，或者 $s_{n-1} \notin J_w$ 这是 [7, 定理 6。2]。如果 $\{s_{n-1}, s_n\} \subseteq J_w$我们使用引理5.12、5.13、5.14 和 5.15。 □

5.3. $E_6$ **中的半单类**（$q$）。

在本小节中，我们假设 $\mathbb{G}$ 属于类型 $E_6$。 $\mathbb{G}^F$ 的中心见表4。我们将使用以下公式

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6,\\
s_0 \cdot t &= \alpha_1^\vee(\zeta_1\zeta_2^{-1})\alpha_2^\vee(\zeta_2^{-1})\alpha_3^\vee(\zeta_3\zeta_2^{-2})\alpha_4^\vee(\zeta_4\zeta_2^{-3})\alpha_5^\vee(\zeta_5\zeta_2^{-2})\alpha_6^\vee(\zeta_6\zeta_2^{-1}),\\
w_0 \cdot t &= \alpha_1^\vee(\zeta_6^{-1})\alpha_2^\vee(\zeta_2^{-1})\alpha_3^\vee(\zeta_5^{-1})\alpha_4^\vee(\zeta_4^{-1})\alpha_5^\vee(\zeta_3^{-1})\alpha_6^\vee(\zeta_1^{-1}).
\end{aligned}$$

我们验证定理4.3的假设，分别分析 $J_w$在 $W$共轭意义下的各种可能性。

**引理 5.18.** 若 $w$ 不是尖点的，则 $\mathcal{O}$ 属于 *C*、*D* 或 *F* 型。

证明。根据假设，$J_w$ 不是类型 $E_6$。如果 $J_w$ 有一个类型为 $D_d$的分支，其中 $d \geq 4$，那么我们调用引理4.17。如果 $J_w$ 是类型$A_2 + A_1 + A_1$、$A_2 + A_1 + A_1$ 或 $A_2 + A_2$，那么我们调用引理4.14。

设 $J_w$ 是某个 $l \geq 2$ 的类型 $A_l + A_1$，并令 $\Delta_1 \coloneqq \{\beta_1, \ldots, \beta_l\}$ 以及 $\{\beta\}$ 为对应于这些分支的单根集合。不失一般性地，设 $w = w_1 s_\beta$，其中$w_1 = \prod_{i=1}^{l} s_{\beta_i}$ 是其分支中的 Coxeter 元，因此 $|w_1| = l + 1$。令 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 为以 $\Delta_1$为基的根系。于是，

$$M = [M, M] = \mathbf{SL}_{l+1}(q)$$

且 $t$ 在 $\mathbb{M}$ 中是正则的，从而得到 Q 和 N。我们验证 W。这里 $\mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w) = \langle w_1 \rangle$。假设对于某个 $a \in \mathbb{I}_{0,l}$ 和某个 $z \in \mathbf{Z}$，有 $s_\beta \cdot t = z w_1^a \cdot t$。那么，$t = s_\beta^3 w_1^{3a} \cdot t = s_\beta w_1^{3a} \cdot t$，这与 $t$ 在 $\mathbb{L}_{J_w}$ 中的正则性矛盾。

现在假设对于 $l \in \mathbb{I}_{2,5}$，$J_w$ 属于类型 $A_l$。经过 $W$-共轭后，不妨设 $\{s_1\} \subseteq J_w \subseteq \{s_1, s_3, s_4, s_5, s_6\}$，且 $w$ 是 $\langle J_w \rangle$ 中的 Coxeter 元。分为两种子情形：若 $\zeta_2 = 1$，则

$$t \in \langle \mathbb{U}_{\pm\gamma}, \gamma \in \Delta \setminus \{\alpha_2\} \rangle^{F_w} \simeq \mathbf{SL}_6(q)$$

因此 $\mathcal{O}$ 有一个子架，其投影是 $\mathbf{PSL}_6(q$中的一个非平凡半单类。根据注 5.1 和 [7,定理 I]，该结论成立。

接下来假设 $\zeta_2 \neq 1$，因此 $s_0 \cdot t \neq t$。取 $\Delta_{\mathbb{M}} = \Delta_{J_w}$，因此$M \simeq \mathrm{SL}_{l+1}(q)$ 且 $\mathrm{Cent}_{\mathbb{M}}(t) = \mathbb{T}$，从而得到 Q 和 N。我们验证 W。我们有 $\mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w) = \langle w \rangle$，并且 $s_0 \in \mathrm{Cent}_W(w) \setminus \mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w)$。此外，$\alpha_1(s_0 \cdot t) = \alpha_1(t) \neq 1$，因此由引理 4.7 可得 W2。

设对于某个 $a \in \mathbb{I}_{0,\ l}$ 以及某个 $z \in \mathbf{Z}$，有 $s_0 \cdot t = z w^a \cdot t$。比较 $\alpha_2^\vee$ 的系数可知，只有当 $\zeta_2 = -1$ 时这才可能，因此 $q$ 是奇数；在这种情形下，$s_0 \cdot t = t\alpha_1^\vee(-1)\alpha_4^\vee(-1)\alpha_6^\vee(-1)$。但是，比较 $\alpha_6^\vee$ 的系数可知，只有当 $l = 5$ 时，相等 $s_0 \cdot t = z w^a \cdot t$ 才可能成立，这就证明了对 $l \in \mathbb{I}_{2,\ 4}$ 的结论。于是令 $l = 5$，从而 $|w| = 6$。然后

$$t\alpha_1^\vee(-1)\alpha_4^\vee(-1)\alpha_6^\vee(-1) = s_0 \cdot t = s_0^3 \cdot t = w^{3a} \cdot t \tag{5.12}$$

且 $a$ 必然为奇数，因此 $w^{3a} = w^3$。不失一般性，可假设 $w = s_1 s_6 s_3 s_5 s_4$。在 $W_{\mathbb{M}} \simeq \mathbb{S}_6$ 中的直接计算表明，在此情形下 $w^3$ 是 $W_{\mathbb{M}}$中的最长元素。于是 $w_0 = s_0 w^3$，由此（5.12）迫使 $w_0 \cdot t = t$，即 $\zeta_1\zeta_6 = \zeta_3\zeta_5 = \zeta_4^2 = 1$。另一方面，$t \in \mathbb{T}^{F_w}$ 给出 $t = s_1 s_6 s_3 s_5 s_4 \cdot t^q$。比较 $\alpha_4^\vee$ 在两

边的系数，得到 $\zeta_4 = \zeta_2\zeta_4^{-1}\zeta_3\zeta_5 = -\zeta_4$，矛盾。因此， $w_0 \cdot t \neq t$ 且W 对 $l = 5$ 也成立。

最后考虑 $J_w$ 为 $rA_1$ 型且满足 $r \in \{1, 2, 3\}$ 的情形。不失一般性， $J_w$ 分别为 $\{s_1\}$、 $\{s_1, s_6\}$ 或 $\{s_1, s_2, s_6\}$。取以 $\{\alpha_1, \alpha_3\}$ 为基的 $\Phi_{\mathbb{M}}$。于是， $M = [M, M] \simeq \mathrm{SL}_3(q)$，且 $w$ 在 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 上的作用是 $W_{\mathbb{M}}$ 的一个元素，因此由引理 4.4 可得 Q。由引理 4.9 可得$\alpha_1(t) \neq 1$，故由引理 4.7 得出 N。

接下来验证 W。这里，我们有 $\mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w) = \langle s_1 \rangle$, $s_6 \in \mathrm{Cent}_W(w)$ 和 $s_6 \cdot \Delta_{\mathbb{M}} = \Delta_{\mathbb{M}}$，因此 $\mathrm{Cent}_M(t) \simeq \mathrm{Cent}_M(s_6 \cdot t)$。假设存在$a \in \{0, 1\}$ 和 $z \in \mathbf{Z}$ 使得

$$s_6 \cdot t = z s_1^a \cdot t.$$

于是， $s_6 \cdot t = s_6^3 \cdot t = s_1^a \cdot t$。如果 $r$ 是 2 或 3，这与引理 4.9 矛盾，结论得证。令 $r = 1$ 和 $s_6 \cdot t = s_1^a \cdot t$。比较两边 $\alpha_6^\vee$ 的系数，得到 $s_6 \cdot t = t$，因此 $\alpha_6(t) = 1$。用 $s_2$ 代替 $s_6$ 重复上述论证可知，条件 W 只有在 $\alpha_6(t) = \alpha_2(t) = 1$ 时才可能不成立。假设这种情况成立。用 $s_0$ 重复上述论证，并利用 $\alpha_2^\vee$ 的系数可知，条件 W 只有在 $\zeta_2 = \pm 1$ 时才可能不成立。如果 $\zeta_2 = 1$，那么

$$t \in \langle \mathbb{U}_{\pm\gamma}, \gamma \in \Delta \setminus \{\alpha_2\} \rangle^{F_w} \simeq \mathbf{SL}_6(q)$$

并且我们运用 [7, 定理 I] 和注5.1 来得到所要结论。

如果 $\zeta_2 = -1$，那么 $1 = \alpha_2(t) = \zeta_2^2\zeta_4^{-1}$，因此 $\zeta_4 = 1$ 并且

$$t \in \langle \mathbb{U}_{\pm\gamma}, \gamma \in \Delta \setminus \{\alpha_4\} \rangle^{F_w}.$$

后者同构于以下群的直积：$\mathbf{SL}_2(q)$，以及两个 $\mathbf{SL}_3(q)$ 的中心积。与$\mathbf{SL}_3(q$的分支中对应于$\alpha_1$ 和 $\alpha_3$ 的因子不是中心的，也不是不可约的。接着，我们引用注5.1和 [4, 定理 1。1] 即可得到所述结论。□

根据 [23, 表 B.4]， $W$中有 5 个尖点类。按照[17], 的记号，它们分别标记为 $E_6$（考克斯特类）、 $E_6(a_1)$、 $E_6(a_2)$、 $A_5 + A_1$和 $3A_2$。这些标记表示包含共轭类代表元的 $W$的极小 Weyl 子群的类型。

**引理 5.19**。若 $w$ 是尖点的，则 $\mathcal{O}$ 为 *C* 型、*D* 型或 *F* 型。

证明。 我们回顾一下，在这种情形下 $\mathrm{Cent}_{\mathbb{G}}(t) = \mathbb{T}$，因此 $\mathrm{Cent}_{\mathbb{G}}(\sigma \cdot t) = \mathbb{T}$ 对所有 $\sigma \in W$都成立。因此 N 和 W2 总是成立。因此，在所有情形下，我们只需找出满足 $\Phi_{\mathbb{M}}$ satsfying Q 和 W1的元素。

我们分别讨论不同的尖点类，利用从[23,表 B.4、表 B.8]中提取的代表元、其阶以及其中心化子的大小。

**情形** $E_6$，$w = s_1s_2s_3s_4s_5s_6$。 </style}这里 $|w| = 12$。令

$$\beta_1 \coloneqq \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4,\quad \beta_2 \coloneqq \alpha_2,\quad \beta_3 \coloneqq \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5,\quad \beta_4 \coloneqq \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6.$$

Then

$$w\beta_1 = \beta_2 + \beta_3,\qquad w\beta_2 = \beta_1,\quad w\beta_3 = \beta_2 + \beta_4,\quad w\beta_4 = -\beta_1 - \beta_2,$$
$$s_{\beta_1}s_{\beta_2}w\beta_1 = \beta_3,\quad s_{\beta_1}s_{\beta_2}w\beta_2 = \beta_2,\quad s_{\beta_1}s_{\beta_2}w\beta_3 = \beta_4,\quad s_{\beta_1}s_{\beta_2}w\beta_4 = \beta_1.$$

因此 $w$ 稳定根子系统 $\Phi_{\mathbb{M}}$，其基为 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$，类型为$D_4$，且 $s_{\beta_1}s_{\beta_2}w$ 在 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 上作用为阶为3的图自同构。于是条件 Q 由引理4.6得出。 □

我们验证W1。在此情形下，$\mathsf{Cent}_W(w) = \langle w\rangle$，且$\langle w$中的 $wW_{\mathbb{M}}$ $W_{\mathbb{M}}\rangle$的陪集的阶为3，因此 $\mathsf{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w) = \langle w^3\rangle$。若对某个 $z \in \mathbf{Z}$及某个 $a \in \mathbb{I}_{0,\ 3}$有 $w\cdot t = zw^{3a}\cdot t$，则 $t$ 的正则性迫使 $|z| = 3$，而这只有在 $q \equiv 1$模3时才成立。由于 $w^3\cdot t = w^{9a}\cdot t$，正则性还会推出 $12|9a - 3$，即$4|3a - 1$，从而迫使 $a = 3$。因此，$w^4\cdot t = zt$。直接计算可得

$$\begin{aligned}
w\cdot t =& \alpha_1^\vee(\zeta_2\zeta_6^{-1})\alpha_2^\vee(\zeta_3\zeta_6^{-1})\alpha_3^\vee(\zeta_1\zeta_2\zeta_6^{-1})\alpha_4^\vee(\zeta_2\zeta_3\zeta_6^{-1})\alpha_5^\vee(\zeta_4\zeta_6^{-1})\alpha_6^\vee(\zeta_5\zeta_6^{-1}),\\
w^2\cdot t =& \alpha_1^\vee(\zeta_3\zeta_5^{-1})\alpha_2^\vee(\zeta_1\zeta_2\zeta_5^{-1})\alpha_3^\vee(\zeta_2\zeta_3\zeta_5^{-1}\zeta_6^{-1})\alpha_4^\vee(\zeta_1\zeta_2\zeta_3\zeta_5^{-1}\zeta_6^{-1})\times\\
& \alpha_5^\vee(\zeta_2\zeta_3\zeta_5^{-1})\alpha_6^\vee(\zeta_4\zeta_5^{-1}),\\
w^4\cdot t =& \alpha_1^\vee(\zeta_6^{-1})\alpha_2^\vee(\zeta_1\zeta_5^{-1})\alpha_3^\vee(\zeta_1\zeta_2\zeta_4^{-1}\zeta_6^{-1})\alpha_4^\vee(\zeta_1\zeta_2\zeta_3\zeta_4^{-1}\zeta_5^{-1}\zeta_6^{-1})\times\\
& \alpha_5^\vee(\zeta_1\zeta_2\zeta_5^{-1}\zeta_6^{-1})\alpha_6^\vee(\zeta_1\zeta_6^{-1}),
\end{aligned}$$

但这样一来，$w^4\cdot t = zt$ 给出 $t^3 = e$，而对于 $q \equiv 1$ 模3，这给出 $t \in \mathbb{T}^F$，与假设 $e \notin W[\mathfrak{O}]$相矛盾。

情形 $E_6(a_1)$。由 [23, 表 B.8] 可知，$w$ 的特征多项式 $c_w(X)$ 是第九次分圆多项式 $\varphi_9(X)$，且 $|\mathsf{Cent}_W(w)| = 9$。于是 $c_{w^3}(X) = \varphi_3(X)^3 = (X^2 + X + 1)^3$。因此，$w^3$ 是尖点的；经检验，它必然标记为 $3A_2$。令 $W_1$ 为包含 $w^3$ 的$W$ 的一个 Weyl 子群，并令 $\Phi_1$ 为 $\Phi$的相应根子系统。由[17, 表 9] 可知，$\Phi$ 中与 $\Phi_1$在 $W$下共轭且包含 $w^3$ 的根子系统集合 $A$ 恰有 4 个元素。群 $\langle w\rangle/\langle w^3\rangle$ 作用于$A$。由阶数关系，$w$ 固定 $A$ 中的一个元素 $\Phi'$，令 $\Phi_{\mathbb{M}} \coloneqq \Phi'$。按构造，$\Phi_{\mathbb{M}}$ 的类型为 $3A_2$。由于 $c_w(X)$ 不可约，$w$ 置换各个分支而不保留其中任何一个，且 $w^3 \in W_{\mathbb{M}}$。因此，$[\mathbb{M}, \mathbb{M}]$

是由 3 个$\mathbf{SL}_3(\mathbb{k})$ 的中心积，且 Q 由引理4.6推出。由于 $\mathsf{Cent}_W(w) = \langle w\rangle$，我们有 $\mathsf{Cent}_{W_\mathbb{M}}(w) = \langle w^3\rangle$。假设$w\cdot t = zw^{3a}\cdot t$ 对某个 $a\in\mathbb{I}_{0,\ 2}$ 以及某个 $z\in\mathbf{Z}$。那么， $w^3\cdot t = w^{9a}\cdot t = t$，这与 $t$ 的正则性矛盾。由此得到 W1。

**情形** $E_6(a_2)$**,** $w = s_1s_2s_3s_1s_4s_2s_3s_4s_5s_4s_6s_5$。其中 $|\mathsf{Cent}_W(w)| = 2^3\cdot 3^2$和 $|w| = 6$。令

$$\begin{aligned}\gamma_1 &:= \alpha_1+\alpha_3,\\ \gamma_2 &:= w\gamma_1 = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5,\\ \gamma_3 &:= w\gamma_2 = \alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6,\\ \gamma_4 &:= w\gamma_3 = \alpha_5+\alpha_6.\end{aligned}$$

直接计算表明 $w\gamma_4 = -\gamma_1-\gamma_3$，并且 $\{\gamma_1,\gamma_3\}\perp\{\gamma_2,\gamma_4\}$因此，由 $\{\gamma_1,\ \gamma_2,\gamma_3,\gamma_4\}$ 生成的根系 $\Phi_\mathbb{M}$ 是一个 $w$-稳定的 $2A_2$ 型子系统，其分支由 $w$互换。引理4.6 给出 Q 。

条件 W 由引理4.11 推出，因为

$$|\mathbf{Z}||\operatorname{Cent}_{W_\mathbb{M}}(w)| \le |\mathbf{Z}||W_\mathbb{M}| \le 18 < 72 = |\operatorname{Cent}_W(w)|.$$

**情形** $A_5+A_1$。根据 [17, 命题 32]（见 [20, 第 142]页）我们可以假设 $w = s_1s_6s_3s_5s_4s_0$，它包含于 Weyl 子群

$$W' := \langle s_1,s_3,s_4,s_5,s_6,s_0\rangle$$

的 $W$ 型 $A_5+A_1$。取 $\Delta_\mathbb{M} := \{\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6\}$。因此$M\simeq\mathbf{SL}_6(q)$，得到Q，且 $\mathsf{Cent}_{W_\mathbb{M}}(w) = \langle s_1s_6s_3s_5s_4\rangle$，其阶为 6。仿照引理 5.18 中情形 $A_5$ 的证明，我们可知，只有当 $s_0\cdot t = (s_1s_6s_3s_5s_4)^3\cdot t$ 时，对某个 $z\in\mathbf{Z}$ 和某个$a\in\mathbb{I}_{0,5}$，等式 $s_0\cdot t = z(s_1s_6s_3s_5s_4)^a\cdot t$ 才可能成立。但在这种情况下，我们有 $(s_1s_6s_3s_5s_4)^4\cdot t^q = w\cdot t^q = t$，这与 $t$ 的尖点性矛盾。

情形 $3A_2$。这里 $|\mathsf{Cent}_W(w)| = 2^3\cdot 3^4$。根据 [17, 命题 32]（参见[20, 第 142] 页），我们可以假设 $w = s_1s_3s_0s_2s_5s_6$，它包含于 $W$ 的 $3A_2$ 型 Weyl 子群 $W' := \langle s_1,s_3,s_0,s_2,s_5,s_6\rangle$ 中。取$\Delta_\mathbb{M} := \{\alpha_1,\alpha_3\}$，于是 $M\simeq \mathsf{SL}_3(q)$ 满足 Q。引理 4.11 及估计

$$|\operatorname{Cent}_W(w)| > |\mathbf{Z}||\operatorname{Cent}_{W_\mathbb{M}}(w)| = 3|\langle s_1s_3\rangle| = 9$$

意味着条件W 成立。 □

于是我们便可以陈述型为 $E_6$的 $\boldsymbol{G}$ 的一个一般结果。

**定理 5.20.** 类型为$E_6$ 的单切瓦莱群中的每个非平凡共轭类都属于 $C$、$D$ 或 $F$ 型。

证明. 对于幺幂共轭类和混合共轭类，分别由 [5, 主定理]，和 [6, 定理 1.1] 得出。对于分裂半单共轭类，我们依据 [7, 定理 I]。非分裂半单类由引理 5.18和 5.19覆盖。 □

5.4. $E_7$**中的半单类**$(q)$。

In this Subsection, $\mathbb{G} = \mathbb{G}^{sc}$ 是 $E_7$ 型。因此 $w_0$ 在 $\mathbb{G}$ 上作用为恒等元 $\Phi$。的中心见表 4。

我们将用到以下公式

$$\alpha_0 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7; \tag{5.13}$$

$$s_0 \cdot t = \alpha_1^\vee(\zeta_1^{-1})\alpha_2^\vee(\zeta_2\zeta_1^{-2})\alpha_3^\vee(\zeta_3\zeta_1^{-3})\alpha_4^\vee(\zeta_4\zeta_1^{-4})\alpha_5^\vee(\zeta_5\zeta_1^{-3}) \times \alpha_6^\vee(\zeta_6\zeta_1^{-2})\alpha_7^\vee(\zeta_7\zeta_1^{-1}).$$

注 5.21。 比较系数可知，相等式 $s_0 \cdot t = zt$ 与 $z \in \mathbf{Z}$仅在 $z = e$ 和 $\zeta_1 = 1$ 时成立。假设这是这种情形。那么

(i) $\langle \mathbb{U}_{\pm\alpha_0} \rangle \leq \mathrm{Cent}_{\mathbb{G}}(t)$，因此 $t$ 不是正则的，并且

(ii) $t \in \mathbb{H} := \langle \mathbb{U}_{\pm\alpha}, \quad \alpha \in \Delta \setminus \{\alpha_1\} \rangle$，一个 $D_6$ 型的单代数群。如果$\mathbb{H}$ 是 $w$-适宜的，那么 $\mathbb{H}^{F_w}$ 是一个谢瓦莱群，且 $\pi$（$t$）的共轭类或者被 [7, 定理 6.2] 覆盖，或者被定理5.17覆盖；因此 $\mathcal{O}$是 C 型、D 型或 F 型。

我们考察定理 4.3 的假设，并考虑 $J_w$在 $W$-共轭意义下的各种可能选择。

**引理5.22**。 如果 $w$ 不是尖点的，那么 $\mathcal{O}$ 是 *C* 型、*D* 型或 *F* 型。

证明。 根据假设， $J_w$ 不是 $E_7$型。

如果 $J_w$ 有一个 $D_d$型的分支，且 $d \geq 4$，那么引理4.17 适用。

若 $J_w$属于类型 $A_3 + A_2 + A_1$， $A_4 + A_2$， $A_3 + 2A_1$， $A_3 + A_2$， $3A_2$， $A_2 + 3A_1$，$2A_2$ 或 $A_2 + 2A_1$，则我们使用引理4.14。

若 $J_w$属于类型 $A_6$， $A_4 + A_1$， $A_4$， $A_2 + A_1$，或 $A_2$，则引理4.16适用。

假设 $J_w$ 属于类型 $A_1 + A_l$ 且具有 $l = 3$、5。根据 [38, 2, 2], 中类型为 $A_1 + A_5$的 $S$ 子集只有一个 $W$轨道，而类型为 $A_1 + A_3$的 $S$ 子集有两个 $W$轨道。在所有情形下，我们都可以选择$J_w$ ，使得类型为 $A_1$ 的分支是 $\{s_1\}$。我们取 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 为对应于 $A_l$的根子系统。于是 $M \simeq \mathrm{SL}_{l+1}(q)$，故 Q 成立。引理 4.9 保证 $\alpha_1(t) \neq 1$，并且满足 $\sigma = s_1$的条件 N 和 W1。然后，通过比较 $\alpha_1^\vee$的系数，可以很容易验证 $s_1 \cdot t \notin \mathrm{Z}W_{\mathbb{M}} \cdot t$。

设 $J_w$ 属于类型 $A_l$ 且具有 $l = 3$、5。于是， $J_w$ 与 $W$-共轭于 $\{s_5, s_6, s_7\}$，或 $\{s_2, s_4, s_5, s_6, s_7\}$，或 $\{s_3, s_4, s_5, s_6, s_7\}$ 由 [38, 2。2]。在所有情形下，我们取 $\Phi_{\mathbb{M}} = \Phi_{J_w}$，从而得到Q 和N 。这里 $w$ 是 $W_{\mathbb{M}}$中的一个 Coxeter 元，因此 Cent$_{W_{\mathbb{M}}}(w) = \langle w \rangle$ 且 $|w| = l + 1$。

首先假设 $J_w$ 与 $\{s_5, s_6, s_7\}$ 或 $\{s_2, s_4, s_5, s_6, s_7\}$共轭。若$\alpha_1(t) \neq 1$，则我们像处理类型为 $A_1 + A_3$ 或类型为 $A_1 + A_5$的 $J_w$ 那样验证 W。若 $\alpha_1(t) = \zeta_1^2\zeta_3^{-1} = 1$，则要么 $\zeta_3 \neq 1$，由此 $w_0 \cdot t \in$Z Cent$_{W_{\mathbb{M}}}(w)$，且 W 可由注 4.12 得出；要么 $\zeta_3 = 1$。在后一种情形下， $t \in \langle \mathbb{U}_{\pm\alpha}, \alpha \in \Delta \setminus \{\alpha_3\}\rangle^{F_w} \simeq$ SL$_2$($q$) $\times$ SL$_6$($q$)，且 SL$_6$($q$) 中的分支非平凡。于是我们应用注 5.1 和 [7, 定理 I]。

现在假设 $J_w$ 与 $\{s_3, s_4, s_5, s_6, s_7\}$共轭，因此 $|w| = 6$。于是， $s_0 \in$ Cent$_W$ ($w$) 和 Cent$_{\mathbb{M}}(s_0 \cdot t) =$ Cent$_{\mathbb{M}}(t) = \mathbb{T}$ 由引理 4.9 得出。反设 $s_0 \cdot t = zw^a \cdot t$ 对于某个 $z \in$ **Z** 和某个 $a \in \mathbb{I}_{0,5}$成立。比较 $\alpha_1^\vee$ 和 $\alpha_2^\vee$ 的系数，得到 $\zeta_1^2 = 1$ 和 $z = e$。此外，$t = w^{2a} \cdot t$，因此 $t$ 的正则性迫使 $a \in \{0, 3\}$。

如果 $a = 0$，那么必然有 $z = e$ 且 $\zeta_1 = 1$ ，由此我们调用注5.21。于是， $t$ 属于一个类型为 $D_6$的群，在该群中它是非分裂的，并且 $w$ 属于一个类型为 $A_5$的抛物子群。于是由 [7,定理 6。2]得出结论。

因此我们不妨假设 $a = 3$。若 $w_0 \cdot t = z'w^b \cdot t$对于某个 $z' \in$**Z** 以及某个$b \in \mathbb{I}_{0,5}$，则 $t = w^{2b} \cdot t$，因此 $b \in \{0, 3\}$。注4.12 (ii) 迫使 $b = 3$ ，因此 $s_0 \cdot t = w^3 \cdot t = z'w_0 \cdot t$。利用 $\zeta_1^2 = 1$ 和（5.13）比较系数，得到 $t^4 = e$。由于 $t$ 是非分裂的，这只有在 $t^2 \neq e$ 且$q \equiv 3$ 模 4 的情形下才可能发生。在此情形下， $t = w \cdot t^q = w \cdot t^3$，因此 $w^2 \cdot t = t$，这就产生了矛盾。

现在设 $J_w$ 的类型为 $rA_1$，且 $r \in \mathbb{I}_4$。对于每个 $r$， $S$ 的子集只有一个 $W$-轨道，因此不妨设 $\{s_7\} \subseteq J_w \subseteq \{s_2, s_3, s_5, s_7\}$。取 $\Delta_{\mathbb{M}} = \{\alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$。于是 $M \simeq$ SL$_4$($q$)，从而得到 Q。由引理 4.9 可知 $\alpha_7(t) \neq 1$ ，故由引理 4.7 得到 N。现在， $\alpha_0 \perp \Phi_{J_w}$ ，因此 $s_0 \in$ Cent$_W$($w$) 且 $\alpha_7(s_0 \cdot t) \neq 1$。然后，由引理 4.7 可得带有 $\sigma = s_0$ 的 W2。假设 $s_0 \cdot t \in$Z Cent$_{W_{\mathbb{M}}}(w) \cdot t$。将注记4.13应用于 $\alpha_1$ 和 $\alpha_3$，得到 $\zeta_1 = 1$。因此，W1 成立，或者 $s_0 \cdot t = t$。在后一情形下，应用备注 5.21, 并在 $\{\alpha_2, \alpha_3\} \not\subset J_w$ 时调用定理 6.2] ，否则调用定理 5.17。

最后假设 $J_w$ 型为 $E_6$。在引理5.19的证明中，对 $\langle J_w \rangle$ 中的每个尖点类，我们已给出一个 $w$-稳定根子系统 $\Phi_{\mathbb{M}}$，它是 $\Phi_{J_w}$ 的，使得 $[\mathbb{M}, \mathbb{M}]$ 满足Q 。条件N 由引理4.9 □ □

因为 $[\mathbb{M},\mathbb{M}] \le \mathbb{L}_{J_w}$。在所有情形中

$$|\operatorname{Cent}_W(w)| \ge |\operatorname{Cent}_{\langle J_w\rangle}(w)| > 3|\operatorname{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w)|$$

因此 W 由引理4.11得出。 □

现在来看 $W$中的尖点类，共有 12 个。任一此类的代表元、其阶、中心化子的大小以及特征多项式 $c_w(X)$ 可见于 [23, 表 B.5, B.8]。

**引理5.23**。若 $w$ 是尖点的，则 $\mathcal{O}$ 是 $C$、$D$ 或 $F$ 型。

证明。若 $w$ 是尖点的，则 $\mathsf{Cent}_{\mathbb{G}}(t) = \mathbb{T}$，因此 $\mathsf{Cent}_{\mathbb{G}}(\sigma\cdot t) = \mathbb{T}$ 对所有$\sigma \in W$均成立。因此, N 和 W2 总是成立的。因此，只需为任意尖点类找到一个根系 $\Phi_{\mathbb{M}}$，使得 $\pi([M,M])$ 是准单的，且 $\mathsf{Cent}_W(w)\cdot t \not\subset \mathbf{Z}\,\mathsf{Cent}^{W_{\mathbb{M}}}(w)\cdot t$。

**情形** $2A_3+A_1$、$D_4+3A_1$、$A_5+A_2$。我们取 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 分别为类型 $A_3$、$D_4$或 $A_5$ 的分支 $\Phi_{J_w}$，因此 Q 由引理4.4保证。由于 $A_3+A_1$、$3A_1$和 $A_2$ 在 $\Phi_{J_w}$ 中的互补分量的外尔群阶大于 2，条件 W 由引理 4.11得出。

**情形** $7A_1$，$w = w_0$。我们取 $\Delta_{\mathbb{M}} = \{\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4\}$ 使得 $w_0$ 在 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 上的作用为一个元素与 $W_{\mathbb{M}}$ 以及一个非平凡图自同构的复合。于是，$M \simeq \mathbf{SU}_4(q)$，因此它是拟单的，从而得到 Q，而 W 由引理4.11 及估计式

$$|\operatorname{Cent}_W(w_0)| = |W| = 2^{10}\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7 > 2\cdot 4! > |\mathbf{Z}||W_{\mathbb{M}}|.$$

**情形** $A_7$，$w = s_0s_1s_3s_4s_5s_6s_7$，$|w| = 8$。我们取 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 为类型为 $4A_1$ 且具有基的根子系

$$\gamma_1 := \alpha_1+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5, \qquad \gamma_2 := w\gamma_1 = \alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6,$$
$$\gamma_3 := w^2\gamma_1 = \alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7, \quad \gamma_4 := w^3\gamma_1 = \alpha_0-(\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4).$$

由于 $w\gamma_4 = -\gamma_1$，条件 Q 由引理 4.6得到。此外，$|W_{\mathbb{M}}| \le 2$，因此 $|\operatorname{Cent}_W(w)| \ge |\langle w\rangle| = 8 > |\mathbf{Z}||\operatorname{Cent}^{W_{\mathbb{M}}}(w)|$，由引理W 4.11得到。

**情形** $D_6+A_1$**和** $D_6(a_1)+A_1$。不妨设 $w = s_0w_1$，其中 $w_1$ 在 $W_1 := \langle s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7\rangle$ 为尖点的。我们取$\mathbb{M}$ 为与 $\{\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7\}$相关的Levi 子群。于是

$$[M,M]/Z([M,M]) \simeq \mathbf{P\Omega}^+_{12}(q) \qquad \text{and} \qquad W_{\mathbb{M}} = W_1.$$

我们验证 W，利用 $s_0 \in \mathsf{Cent}_W(w) \setminus W_{\mathbb{M}}$。

若 $w$ 属于类型 $D_6 + A_1$，则 $w_1$ 属于 $W_1$ 的考克斯特类，因此 $\mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w) = \mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w_1) = \langle w_1 \rangle$，由 [17, 命题 30] 可知。反设 $s_0 \cdot t = z w_1^a \cdot t$ 对某个 $z \in Z$ 及某个 $a \in \mathbb{I}_{0,9}$ 成立。$t$ 的正则性与备注 5.21 迫使 $a \neq 0$。于是 $t = w_1^{2a} \cdot t$，而引理 4.9 迫使 $a = 5$。由于 $w_1^5$ 是抛物子群 $W_1$ 的最长元素，因此 $w_0 = s_0 w_1^5$，进而 $w_0 \cdot t = zt$。然而，这与备注 4.12 (ii) 矛盾。

若 $w$ 的类型为 $D_6(a_1) + A_1$，则根据阶的关系，$w_1$ 属于与分拆 (4, 2) 对应的 $W_1$ 的尖点类。假设对某个 $z \in Z$ 及某个 $\sigma \in \mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w)$，有 $s_0 \cdot t = z\sigma \cdot t$。$t$ 的正则性和备注 5.21 迫使 $\sigma \neq e$ 和 $\sigma^2 = e$ 成立。利用包含关系 $W_1 \leq \mathbb{S}_{12}$，我们看到 $\mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w) = \mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w_1) = \mathrm{Cent}_{\mathbb{S}_{12}}(w_1) \cap W_1$ 中唯一非平凡的对合是 $W_1$ 中的最长元素。然后我们按照情形 $D_6 + A_1$ 中的做法进行论证。

情形 $E_7$，考克斯特类。在此情形下，$|w| = 18$ 且 $\mathrm{Cent}_W(w) = \langle w \rangle$。由于 $w_0 \in Z(W)$，它必定是 $\mathrm{Cent}_W(w)$ 中唯一的对合，也就是 $w_0 = w^9$。群 $\langle w \rangle / \langle w_0 \rangle$ 在集合 $A$ 上作用，该集合由 $\Phi$ 中类型为 $E_6$ 的根子系统的 $W$-轨道组成。根据引理 34、表 10]，我们有 $|A| = 28$，因此 $w$ 必定保持这些根系中的至少一个不变，记作 $\Phi_{\mathbb{M}}$。于是由引理 4.6 得出 Q。由于 $w$ 是尖点的，它是关于线性无关根的 7 个反射的乘积，因此 $w \notin W_{\mathbb{M}}$。所以，要么 $|Z||\mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w)| < 9|Z| = |\mathrm{Cent}_W(w)|$，要么 $\mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w) = \langle w^2 \rangle$。在后一情形下，若对某个 $z \in Z$ 及某个 $a \in \mathbb{I}_{0,8}$ 有 $w_0 \cdot t = z w^{2a} \cdot t$，则由备注 4.12 (ii) 可排除 $a = 0$。对两项应用 $w_0$ 得到 $w^{4a} = e$，因此 $18|4a$，这迫使 $a = 9$，产生矛盾。

情形 $E_7(a_1)$。在此情形下，$|w| = 14$ and $\mathrm{Cent}_W(w) = \langle w \rangle$，因此 $w^7 = w_0$。令 $\Phi_1$ 为一个类型为 $7A_1$ 的根子系统，使得 $w_0$ 属于其外尔群。根据 [17, 引理 35、表 10]，在 $\Phi$ 中与 $\Phi_1$ 在 $W$ 下共轭且外尔群包含 $w_0$ 的根子系统集合 $A$ 的基数为 135。由阶的理由，$\langle w \rangle / \langle w^7 \rangle$ 作用于 $A$，并必然固定其中一个元素。我们取 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 为这样的根子系统。此外，$\langle w \rangle / \langle w^7 \rangle$ 作用于 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 的分支集合，且不可能固定所有分支，因为在这种情形下 $w^2 = e$。因此，$w$ 必定循环置换这些分支。引理 4.6 给出 Q。于是 W 由引理 4.11 得出，因为

$$|\mathrm{Cent}_W(w)| = 14 > 4 = |\mathbf{Z}||\mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w)|.$$

**情形** $E_7(a_2)$。此处，$|w| = 12$ 与 $[\mathrm{Cent}_W(w)\colon \langle w \rangle] = 2$。$w$ 的特征多项式为 $c_w(X) = \varphi_2(X)\varphi_6(X)\varphi_{12}(X)$，因此 $c_{w^3}(X) =$

$\varphi_2(X)^3\varphi_4(X)^2$。经检验， $w^3$ 是尖点的，且位于共轭类 $2A_3+A_1$ 中。因此它具有形式 $w^3=s_\alpha w_1 w_2$，其中 $w_1$ 与 $w_2$ 是关于型为 $A_3$的正交根系 $\Phi_1$ 与 $\Phi_2$ 的 Coxeter 元，且$\alpha\perp\Phi_i$ 对于 $i=1$，2。因此， $w^6=w_1^2w_2^2$ 是关于相互正交根的四个反射之积，记为 $\gamma_i$ ，其中 $i\in\mathbb{I}_4$。于是， $w$ 置换集合 $\{\pm\gamma_i\}$，至多有一个大小为 1 的轨道，因为 $w$ 没有特征值为 1 的特征子空间，且有一个特征值为 $-1$ 的一维特征子空间。我们取 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 为由位于大小为$d>1$的轨道中的子集 $\{\pm\gamma_i\}$ 生成。引理 4.6 给出 Q，而 W 由引理 4.11 得出，因为

$$|\operatorname{Cent}_W(w)|=24>2\cdot 2\geq|\mathbf{Z}||W_{\mathbb{M}}(w)|\geq|\mathbf{Z}||\operatorname{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w)|.$$

情形 $E_7(a_3)$。此处 $|w|=30$ 且 $\operatorname{Cent}_W(w)=\langle w\rangle$。由 [23, 表 B.8]， $w^2$ 的特征多项式为 $c_{w^2}(X)=\varphi_1(X)\varphi_3(X)\varphi_5(X)$，因此 $w^2$在一个秩 6 的 Weyl 子群 $W'$ 中是尖点的。检视 [17, 表 10]可知， $W'$的类型为 $A_2+A_4$，且不存在其他与 $W'$为 $W$-共轭并包含 $w^2$的子群。因此， $w$ 稳定一个类型为 $A_2+A_4$的根系，参见 [17, 引理 34]。设 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 为其中类型为 $A_4$的分支；由引理 4.6，我们有 Q。若 $w_1$ 是 $w^2\in W'$ 在类型为 $A_4$ 的分支中的因子，则 $\operatorname{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w)=\langle w_1^2\rangle$ 且

$$|\operatorname{Cent}_W(w)|=30>2\cdot 5=|\mathbf{Z}||\operatorname{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w)|.$$

于是引理 4.11 适用，得到 W。

情形 $E_7(a_4)$。比较特征多项式可知，对于某个 $w_1$，有 $w=w_1^3$，其中 $w_1$ 属于由 $E_7$标记的共轭类。我们取与 $w_1$的共轭类相同的根子系统$\Phi_{\mathbb{M}}$。于是，$w_1\in\operatorname{Cent}_W(w)\backslash\operatorname{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w)$。假设对于某个 $z\in\in\mathbf{Z}$ 以及某个 $\sigma\in\operatorname{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w)$，有 $w_1\cdot t=z\sigma\cdot t$。在等式两边应用$w_1$，得到 $w_1^2\cdot t=\sigma^2\cdot t$，因此由$t$的正则性可知 $w_1^2=\sigma^2\in W_{\mathbb{M}}$。由于 $c_{w_1}(X)=\varphi_2(X)\varphi_{18}(X)$，故有 $c_{\sigma^2}(X)=\varphi_1(X)\varphi_9(X)$，因此 $\sigma^2$的秩为 6，所以它在 $W_{\mathbb{M}}$中是尖点的。经检验，它属于其中的共轭类 $E_6(a_1)$，因此 $|\sigma^2|=9$。于是， $\sigma$ 也必须在 $W_{\mathbb{M}}$中是尖点的，并且根据阶的理由，它必与 $\sigma^2$共轭。但这时，

$$w_0\cdot t=w_1^9\cdot t=z^9\sigma^9\cdot t=zt,$$

与注相矛盾 4.12 第二卷。 □

因此，我们可以陈述一个关于类型 $E_7$ 的一般结果 $\boldsymbol{G}$ 。

**定理 5.24**。 单 *Chevalley* 群中每个非平凡共轭类均属于 *C* 型、*D* 型或 *F* 型。

证明。 对于幺幂类和混合类，分别由 [5, 主定理],和 [6, 定理 1。1]给出。对于分裂半单类，这由 [7, 定理 I]给出。其余共轭类由引理 5.22 和 5.23覆盖。□

5.5. $E_8$ **中的半单类**$(q)$。

在本小节中， $\mathbb{G}$ 为 $E_8$ 型，因此 $w_0$ 在 $\Phi$ 和 $\mathbf{Z} = e$ 上作用为 $-$ 恒等元。我们将使用以下公式。

$$\alpha_0 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8,$$
$$s_0 \cdot t = \alpha_1^\vee(\zeta_1\zeta_8^{-2})\alpha_2^\vee(\zeta_2\zeta_8^{-3})\alpha_3^\vee(\zeta_3\zeta_8^{-4})\alpha_4^\vee(\zeta_4\zeta_8^{-6})\alpha_5^\vee(\zeta_5\zeta_8^{-5})$$
$$\times\, \alpha_6^\vee(\zeta_6\zeta_8^{-4})\alpha_7^\vee(\zeta_7\zeta_8^{-3})\alpha_8^\vee(\zeta_8^{-1}).$$

我们验证定理 4.3 的假设，分别分析 $J_w$ 在 $W$-共轭意义下的各种可能性。

**引理 5.25**。 如果 $w$ 不是尖点的，那么 $\mathcal{O}$ 为 $C$ 型、$D$ 型或 $F$ 型。

证明。 根据假设， $J_w$ 不是 $E_8$ 型。如果 $J_w$ 有一个 $D_d$ 型分支，其中 $d \geq 4$，则使用引理 4.17。

如果 $J_w$ 有多个分支，其中一个的秩为 $\geq 2$，则使用引理 4.14。

若 $J_w$ 属于类型 $A_l$ 且 $l$ 为偶数，则应用引理 4.16。

剩下的情形是： $J_w$ 属于类型 $E_7$、 $E_6$、 $A_l$ 且 $l = 3$为5、7，或 $rA_1$ 且 $r = 1$为2、3、4，而 $w$ 在 $\langle J_w\rangle$中是尖点的。对于这些类型， $W$ 中各有唯一一个抛物子群共轭类，见 [38]。

情形 $rA_1$，其中 $r = 1$ 为 2、3、4。我们可以假设 $\{s_1\} \subseteq J_w \subseteq S \setminus \{s_3, s_4\}$，并取 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 为具有基 $\{\alpha_1, \alpha_3\}$ 的根系。然后 $w$ 以 $s_1$ 的方式作用于 $\Phi_{\mathbb{M}}$，由引理 4.4 得到 Q。引理 4.9 保证 $\alpha_1(t) \neq 1$，因此由引理 4.7 可得 N。于是 $\mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w) = \langle s_1\rangle$。假设 W 不成立。则 $w_0 \cdot t = s_1 \cdot t$，因为恒等元 $\notin W[\mathfrak{O}]$。比较系数可得$\zeta_2 = 1$。因此， $t \in \langle \mathbb{U}_{\pm\alpha}, \ \alpha \in \Delta \setminus \{\alpha_2\}\rangle^{F_w}$ 同构于 $\mathrm{SL}_2(q) \times \mathrm{SL}_6(q)$，结论由注 5.1 和 [4,定理 1.1] 得出。

**情形** $E_6$ **和** $E_7$。 假设 $J_w$ 属于类型 $E_6$ 或 $E_7$。在引理 5.19 和 5.23的证明中，对于 $\langle J_w\rangle$ 中的每个尖点类，我们都给出了 $\Phi_{J_w}$ 的一个$w$-稳定根子系统 $\Phi_{\mathbb{M}}$，使得 $[\mathbb{M}, \mathbb{M}]$ 满足Q 。条件 N 对 $t$，因 $[\mathbb{M}, \mathbb{M}] \leq \mathbb{L}_{J_w}$而成立。在所有情形下，我们有

$$|\,\mathrm{Cent}_W(w)| \geq |\,\mathrm{Cent}_{\langle J_w\rangle}(w)| > |\,\mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w)|.$$

条件 W 由引理4.11得出。

**情形** $A_3$, $A_5$。我们可以假设 $s_7$, $s_8 \notin J_w$。我们取 $\Phi_{\mathbb{M}} = \Phi_{J_w}$ 使得 $M = [M, M] \simeq \mathbf{SL}_4(q)$，分别为 $\mathbf{SL}_6(q)$，以及 $\mathsf{Cent}_{\mathbb{M}}(t)$，根据引理 4.9，得到 Q 和 N。于是 $\mathsf{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w) = \langle w \rangle$。假设 W 不成立。我们考虑

$$w_0, s_8 \in \mathrm{Cent}_W(w) \setminus \mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w).$$

由于 $s_8 \Phi_{\mathbb{M}} = \Phi_{\mathbb{M}}$，我们有 $\mathsf{Cent}_{\mathbb{M}}(s_8 \cdot t) = \mathbb{T}$。于是

$$s_8 \cdot t \in \langle w \rangle \cdot t, \qquad w_0 \cdot t \in \langle w \rangle \cdot t.$$

比较 $\alpha_8^\vee$ 的系数，我们看到，第一个包含关系迫使 $\zeta_8^2 = \zeta_7$，而第二个包含关系给出 $\zeta_7 = \zeta_8^2 = 1$。因此，如果 W 不成立，则 $t \in \langle \mathbb{U}_{\pm\alpha},\ \alpha \in \Delta \setminus \{\alpha_7\} \rangle^{F_w}$，其类型为 $E_6 + A_1$，并且类型为 $E_6$ 的分支中的因子不是中心的。于是我们调用注5.1 和定理 5.20。

**情形** $A_7$。我们不妨设 $J_w = \{s_1, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7\}$ 并选取代表元 $w = s_1 s_3 s_4 s_5 s_6 s_7$。令

$$\gamma_1 \coloneqq \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5, \qquad \gamma_2 \coloneqq w\gamma_1 = \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6,$$
$$\gamma_3 \coloneqq w^2\gamma_1 = \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7, \qquad \gamma_4 \coloneqq w^3\gamma_1 = \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8.$$

由于 $w\gamma_4 = -\gamma_1$ 且 $\gamma_i \perp \gamma_j$ 对于 $i \neq j$，带有基 $\{\gamma_i, i \in \mathbb{I}_4\}$ 的根系 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 是 $w$-稳定的，类型为 $4A_1$，并且包含于 $\Phi_{J_w}$中。因此，Q由引理 4.6 推出，而引理 4.9 给出 $\mathsf{Cent}_{\mathbb{M}}(t) = \mathbb{T}$，从而得到 N。最后，W 成立，这是因为 $\mathsf{Cent}_{\mathbb{M}}(w \cdot t) = \mathbb{T}$ 且 $w \cdot t \notin W_{\mathbb{M}} \cdot t$，由 $t$ 在 $\mathbb{M}$中的正则性可知。□

在 $W$中有 30 个尖点类。每个共轭类的一个代表元列于 [23, 表 B.6、B.8]，并附有其阶、中心化子的大小及其特征多项式 $c_w(X)$。我们还将使用 [17, 表 11]中的标记和信息。

**引理5.26**。若 $w$ 是尖点的，且不属于共轭类 $E_8$ 或 $E_8(a_5)$，则 $\mathcal{O}$ 是 *C*、*D* 或 *F* 型。

证明。我们验证推论4.15的假设。若 $w$ 或 $w_0 \notin W_{\mathbb{M}}$，则条件（4.5），即 $\mathsf{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w) \subsetneq \mathrm{Cent}_W(w)$，显然成立。

情形 $4A_2$、$2A_3 + 2A_1$、$2A_4$、$E_6(a_2) + A_2$、$A_5 + A_2 + A_1$、$A_7 + A_1$、$A_8$、$D_5(a_1) + A_3$、$E_6 + A_2$、$2D_4(a_1)$，$D_4 + 4A_1$、$E_7(a_4) + A_1$、$2D_4$、$D_6 + 2A_1$、$E_7 + A_1$、$E_7(a_2) + A_1$。此处，$w$ 位于由标签 $W'$指示的真韦尔子群中；我们取 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 为 $W'$的根系中秩为 $\geq 2$ 的任意不可约分支的根系。$w$ 在$\Phi_{\mathbb{M}}$ 上的作用是内作用，而 Q 由引理 4.6 得出。逐一检查每种情形可知$\{w, w_0\} \not\subset W'$。

**情形** $8A_1$，$w = w_0$。我们取 $\Delta_{\mathbb{M}} = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$ 使得 $w_0$ 通过 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 外自同构作用于其上。于是，$M \simeq \mathbf{SU}_4(q)$ 因此Q 成立，并且

$$|\operatorname{Cent}_W(w_0)| = |W| = 2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 > |W_{\mathbb{M}}| \geq |\operatorname{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w)|.$$

也就是说，(4.5) 是有效的。

情形 $D_8$，$D_8(a_1)$，$D_8(a_2)$ 和 $D_8(a_3)$。我们取 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 为类型 $D_8$ 的根子系统，其外尔群 $W'$ 包含 $w$，因此由引理 4.6 可得 Q。根据构造，$w$ 在 $W'$ 中是尖点的，并且由于它不属于 $W'$的任何真韦尔子群，因此对应于仅含两项的分拆 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$。第 3.4] 节中的包含关系 $W' \leq \mathbb{S}_{16}$ 在 [15, 将 $w$ 映射为乘积$c_\lambda$，其中包含两个大小分别为 $2\lambda_1$ 和 $2\lambda_2$的不相交循环。此外，$c_\lambda$ 的循环因子不属于 $W_{\mathbb{M}}$：它们只属于类型 $B_8$的上群，见第 3.3 小节。由此得到中心化子阶的估计

$$|\operatorname{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(w)| \leq \frac{|\operatorname{Cent}_{\mathbb{S}_{16}}(c_\lambda)|}{2}.$$

我们在下表中汇总相关数据。

| 标签 | $\lvert w\rvert$ | 分拆 $\lambda$ | $\lvert$中心化子$_W(w)\rvert$ | $\lvert$中心化子$_{\mathbb{S}_{12}}(c_\lambda)\rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| $D_8$ | 14 | (7, 1) | 28 | 28 |
| $D_8(a_1)$ | 12 | (6, 2) | 72 | 48 |
| $D_8(a_2)$ | 30 | (5, 3) | 60 | 60 |
| $D_8(a_3)$ | 8 | (4, 4) | 192 | 128 |

因此 $|$中心$_W(w)| > |$中心$_{W_{\mathbb{M}}}(w)|$，即 (4.5) 得证。

剩下需要考虑的情形是：对 $i \in \mathbb{I}_8 \setminus \{5\}$，$w$ 位于由 $E_8(a_i)$标记的共轭类中。在此情形下，$w$ 不位于 $W$的任何真韦尔子群中。因此，只需找到一个真的 $w$-稳定根子系统 $\Phi_{\mathbb{M}}$，使得Q 成立即可，因为在此情形下 $w \notin W_{\mathbb{M}}$。

□

**情形** $E_8(a_4)$ $E_8(a_6)$ $E_8(a_8)$. 在这些情形下，$|w|$ 为偶数，且

$$w^{\frac{|w|}{2}} = w_0 = -\operatorname{id},$$

正如使用 $c_w(X)$可以验证的那样。对于每个 $w$，我们给出一个合适的 $b \in \mathbb{N}$，使其与 $\frac{|w|}{2}$ 互素，且 $w^b$ 属于一个真韦尔子群 $W'$，其根系为 $\Phi'$。我们选取 $\Phi'$ 作为与 $w^b$的标签相对应的根系。后者通过 $w^b$的特征多项式计算得到。随后，$\langle w\rangle = \langle w^b, w^{\frac{|w|}{2}}\rangle$ 保持 $\Phi'$ 及其所有不可约分支不变。下表列出了 $w$的标签、阶和特征多项式，$b$的选取，以及 $w^b$的标签和特征多项式。

| $w$ | $c_w(X)$ | $\lvert w\rvert$ | $b$ | $c_{w^b}(X)$ | $w^b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $E_8(a_4)$ | $\varphi_6(X)\varphi_{18}(X)$ | 18 | 2 | $\varphi_3(X)\varphi_9(X)$ | $A_8$ |
| $E_8(a_6)$ | $\varphi_{10}(X)^2$ | 10 | 2 | $\varphi_5(X)^2$ | $2A_4$ |
| $E_8(a_8)$ | $\varphi_6(X)$ | 6 | 2 | $\varphi_3(X)$ | $4A_2$ |

我们选取 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 作为 $\Phi$的一个不可约分支。如果 $w$ 的标签为$E_8(a_4)$, 且 $E_8(a_6)$, 那么Q 由引理4.4得出。设 $w$ 的标签为$E_8(a_8)$。那么 $w = w_0 w^{-2}$ 通过外自同构作用于 $A_2$ 。因此，若$q \neq 2$，条件Q 由 [34, 命题 24.21 、定理 24.17] 得出。

我们断言，若 $q = 2$ 元素 $w$ 不可能是 $W[\mathfrak{O}]$中的极小元。事实上，对于 $q = 2$ 子群 $\mathbb{T}^{F_w}$ 是阶为 $= 3^4$的初等阿贝尔群， [33, 表8]。因此， $t^q = t^{-1}$ 由此 $t^{-1} = w \cdot t$。但这时 $w^2 \cdot t = t$ 与引理4.9矛盾。

**情形** $E_8(a_7)$。这里 $c_w(X) = \varphi_6(X)^2\varphi_{12}(X)$，因此 $c_{w^3}(X) = \varphi_2(X)^4\varphi_4(X)^2$，通过直接检查可知， $w^3$ 属于标记为 $2A_3 + 2A_1$ 的共轭类。令

$$\beta_1 := 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7,$$
$$\beta_2 := \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7.$$

我们选取代表元 $w^3 = (s_3s_4s_2)(s_{\beta_2}s_6s_7)s_0s_{\beta_1}$。于是， $w$ 保持 $\Phi_{\mathbb{M}} := \Phi \cap$ 核$(w^6 +$ 恒等元$)$，其基为

$$\{\alpha_3 + \alpha_4, \alpha_5, \alpha_2 + \alpha_4, \alpha_6 + \alpha_7\} = s_6s_5s_7s_4\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}.$$

因此， $\mathbb{M}$ 是型为 $D_4$ 的非标准Levi子群。于是， $[\mathbb{M}, \mathbb{M}]$ 是单连通的，而 $M/Z(M) \simeq [M, M]/Z([M, M])$ 要么是 $\mathbf{P\Omega}_4^+(q)$，要么是${}_{(3)}D_4(q)$，从而得到 Q 。由于按构造 $w \notin W_{\mathbb{M}}$，所以证明完毕。

**情形** $E_8(a_2)$。这是 $W$ 中唯一由阶为 20 的元素组成的尖点类。令 $\Psi_1$ 和 $\Psi_2$ 为型为 $A_4$ 的相互正交的根系，其基分别为 $\Delta_1 := \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 和 $\Delta_1 := \{\alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_0\}$，并令 $W_{(1)}$ 和 $W_{(2)}$ 为它们各自的外尔群。我们将展示正规化子 $N_W(W_{(1)} \times W_{(2)})$ 中一个阶为 20 的尖点元素，因此它位于 $\Psi_1 + \Psi_2$ 的稳定子中，而该稳定子必然与 $w$ 共轭。

令 $\mathrm{Aut}_W(\Delta_1 \cup \Delta_2)$ 为 $\mathrm{Aut}(\Delta_1 \cup \Delta_2)$ 的子群，由可由 $W$ 中元素实现的对称性组成。由 [17, 命题 28] 的证明可知， $N_W(W_{(1)} \times W_{(2)}) = (W_{(1)} \times W_{(2)})$ $\mathrm{Aut}_W(\Delta_1 \cup \Delta_2)$。令 $\vartheta_1$ 为 $\Delta_1 \cup \Delta_2$ 的对称性，它在 $\Delta_1$ 上作用为非平凡对合，在 $\Delta_2$ 上作用为平凡对称；令 $\tau$ 为一个 4 阶对称性，将 $\alpha_1$映射到 $\alpha_0$，并将 $\alpha_0$ 映射到 $\alpha_2$。那么，$\mathrm{Aut}(\Delta_1 \cup \Delta_2) = \langle \vartheta_1, \tau \rangle$ 是一个阶为

8. 我们声称 $\mathrm{Aut}_W(\Delta_1 \cup \Delta_2) = \langle \tau \rangle$。事实上，[17, 表 11] 表明 $|\mathrm{Aut}_W(\Delta_1 \cup \Delta_2)| = 4$ 以及 $\vartheta_1 \notin \mathrm{Aut}_W(\Delta_1 \cup \Delta_2)$，因为根据 [17,引理 1]，它必然由 $\Phi \cap \Psi_2^{\perp} = \Psi_1$的外尔群中的一个元素实现，也就是说，$W_{(1)}$，这不可能。因此，$\tau \in W$并且

$$\begin{aligned}(s_1s_2s_3s_4\tau)^4 &= (s_1s_2s_3s_4s_0s_6s_8s_7\tau^2)^2\\ &= s_1s_2s_3s_4s_0s_6s_8s_7s_2s_1s_4s_3s_6s_0s_7s_8\\ &= (s_1s_2s_3s_4s_2s_1s_4s_3)(s_0s_6s_8s_7s_6s_0s_7s_8).\end{aligned}$$

通过这些识别 $W_{(1)} \simeq W_{(2)} \simeq \mathbb{S}_5$ 我们验证 $s_1s_2s_3s_4s_2s_1s_4s_3$和 $s_0s_6s_8s_7s_6s_0s_7s_8$ 都是 5-循环。因此，$(s_1s_2s_3s_4\tau)^4$的特征多项式为 $\varphi_5(X)^2$。因此，$(s_1s_2s_3s_4\tau)^4$,进而 $s_1s_2s_3s_4\tau$是尖点的。由阶的原因 $s_1s_2s_3s_4\tau$ 是共轭类 $E_8(a_2$的一个代表元，并且它保持一个类型为 $2A_4$ 的根子系统，同时交换其不可约分支。于是，Q 由引理 4.6 得出，且由$w \notin W_{\mathbb{M}}$ 的构造可知结论成立。 □

**情形 $E_8(a_1)$ 和 $E_8(a_3)$。** 这些共轭类中的元素的阶分别为 24 和 12，特征多项式分别为 $\varphi_{24}(X)$ 和 $\varphi_{12}(X)^2$。经查阅 [23, 表 B.8]，共轭类 $E_8(a_3)$ 包含共轭类 $E_8(a_1)$ 中元素的平方。我们首先证明，这两个共轭类中的元素均稳定一个适当的根系，其型为 $4A_2$。设

$$\begin{aligned}&\beta_{11} \coloneqq \alpha_1, && \beta_{12} = \alpha_3,\\ &\beta_{21} = \alpha_2, && \beta_{22} \coloneqq -(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6),\\ &\beta_{31} \coloneqq \alpha_5, && \beta_{32} = \alpha_6,\\ &\beta_{41} = \alpha_8, && \beta_{42} \coloneqq -\alpha_0,\\ &\Delta_i \coloneqq \{\beta_{i1}, \beta_{i2}\}, && i = 1, 2, 3, 4.\end{aligned}$$

对于 $i \in \mathbb{I}_4$，令 $\Psi_i$ 为以 $\Delta_i$ 为基的根系，令 $W_{(i)}$ 为其外尔群，令 $\vartheta_i$ 为 $\Delta_i$ 的非平凡自同构。令 $\Psi \coloneqq \sum_{i=1}^4 \Psi_i$ 和 $W' \coloneqq \prod_{i=1}^4 W_{(i)}$。那么 $\mathbb{S}_4$ 作用于 $\coprod_{i=1}^4 \Delta_i$，置换根 $\beta_{ij}$ 的第一个指标。我们设

$$\begin{aligned}N &\coloneqq \{(\vartheta_1^{e_1}, \vartheta_2^{e_2}, \vartheta_3^{e_3}, \vartheta_4^{e_4}), e_1, e_2, e_3, e_4 \in \{0, 1\}\};\ \text{hence}\\ \Gamma &\coloneqq \mathrm{Aut}(\coprod_{i=1}^4 \Delta_i) \simeq N \rtimes \mathbb{S}_4.\end{aligned}$$

我们证明，$N_W(W')$，即 $W$ 中 $\Psi$ 的稳定子，与共轭类 $E_8(a_1)$ 相交。我们相信，部分论证已见于文献，但未能找到相关引文。

令 $H$ 为 $\Gamma$ 的子群，该子群可由 $W$ 中的元素实现。首先，[17, 命题 28] 的证明给出 $N_W(W') = W' \rtimes H$，而 [17, 表 11] 给出 $|H| = 48$。我们断言，$N \cap H = \langle(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4)\rangle$。事实上，$(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4)$ 在 $W$ 中可实现为 $w_0 \prod_{i=1}^{4} s_{\beta_{i1}} s_{\beta_{i2}} s_{\beta_{i1}}$，从而得到 $\supseteq$。为证明$\subseteq$，设 $\tau \in N \cap H \setminus \{e, (\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4)\}$，并令 $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \{0, 1\}$ 满足 $\tau = (\vartheta_1^{e_1}, \vartheta_2^{e_2}, \vartheta_3^{e_3}, \vartheta_4^{e_4})$。那么

$$J := \{i \in \{1, 2, 3, 4\} \mid e_i \neq 0\} \subsetneq \{1, 2, 3, 4\} \neq \emptyset.$$

由 [17, 引理 1] 可得

$$\tau \in \begin{cases} \prod_{j \notin J} W_{(j)} & \text{if } |J| \in \{2, 3\}, \\ W_{E_6} & \text{if } |J| = 1 \end{cases}$$

其中$W_{E_6}$ 表示包含$\bigcup_{i \in \mathbb{I}_4 \setminus J} \Delta_i$的 $E_6$ 型根系的外尔群。然而，对于 $|J| = 2$, 3，这显然是不可能的；对于 $|J| = 1$，这将意味着 $-$恒等元 $= \tau \prod_{i \notin J} s_{\beta_{i1}} s_{\beta_{i2}} s_{\beta_{i1}} \in W_{E_6}$，这与假设矛盾。

那么 $H/(N \cap H) \simeq NH/N$的阶为24，这迫使 $|\Gamma| = |NH|$。因此，$H/(N \cap H) \simeq (N \rtimes \mathbb{S}_4)/N$。所以，对每个 $\sigma \in \mathbb{S}_4$，都存在 $\sigma' \in N$使得 $N\sigma \cap H = \{\sigma'\sigma, (\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4)\sigma'\sigma\}$。特别地，对于(123)和(34), $\in \mathbb{S}_4$ 存在 $a_i, b_i \in \{0, 1\}$，使得 $i \in \mathbb{I}_3$ 以及$j \in \mathbb{I}_{2,\ 4}$

$$\rho_{(123)} = (\vartheta_1^{a_1}, \vartheta_2^{a_2}, \vartheta_3^{a_3}, \vartheta_4)(123) \in H,$$
$$\rho_{(34)} = (\vartheta_1, \vartheta_2^{b_2}, \vartheta_3^{b_3}, \vartheta_4^{b_4})(34) \in H.$$

条件 $\rho_{(123)}^3 \in N \cap H$ 和 $\rho_{(34)}^2 \in N \cap H$ 迫使

$$a_1 + a_2 + a_3 \equiv 1 \mod 2, \qquad b_3 + b_4 \equiv 0 \mod 2.$$

此外，$b_2$ 必然为 0，因为若 $b_2 = 1$，则由 [17, 引理 1]，我们将有 $(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4)^{\rho_{(34)}} = (\text{恒等元}, \text{恒等元}\ \vartheta_3^{b_3+1}, \vartheta_4^{b_4+1})(34) \in W_{(3)} \times W_{(4)}$，这不可能。于是令

$$\rho := s_{\beta_{11}} \rho_{(123)} \rho_{(34)} = s_{\beta_{11}} (\vartheta_1^{a_1+b_3}, \vartheta_2^{a_2+1}, \vartheta_3^{a_3}, \vartheta_4^{1+b_3})(1234).$$

直接计算可得

$$\rho^2 = s_{\beta_{11}} s_{\vartheta_2^{a_2+1}\beta_{21}} (\vartheta_1^{a_1+1}, \vartheta_2^{a_1+a_2+1+b_3}, \vartheta_3^{a_3+a_2+1}, \vartheta_4^{1+b_3+a_3})(13)(24),$$
$$\rho^4 = s_{\beta_{11}} s_{\vartheta_2^{a_2+1}\beta_{21}} s_{\vartheta_3^{a_3+a_2+1}\beta_{31}} s_{\vartheta_4^{(a_2+a_3+b_3)}\beta_{41}} (\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4),$$
$$\text{so} \quad \rho^8 = (s_{\beta_{11}} s_{\beta_{12}})(s_{\beta_{21}} s_{\beta_{22}})^{\epsilon_1} (s_{\beta_{31}} s_{\beta_{32}})^{\epsilon_2} (s_{\beta_{41}} s_{\beta_{42}})^{\epsilon_3}$$

对于某些 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \in \{\pm 1\}$。

因此， $\rho^8 \in W'$ 并属于标记为 $4A_2$ 的尖点类，其中的元素阶为3。因此， $\rho$ 属于元素阶为24的唯一尖点类，即 $E_8(a_1)$ 。接着，我们取 $w = \rho$ 和 $\Phi_{\mathbb{M}} := \Psi$。现在， $w$对分支 $\Psi_i$ （其中 $i \in \mathbb{I}_4$ ）进行循环置换，而 $\rho^4$ 在 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 上的作用是外的。然后，Q 由引理 4.6 及 $w \notin W_{\mathbb{M}}$ 得出，从而完成了对共轭类 $E_8(a_1)$ 的证明。

现在转到共轭类 $E_8(a_3)$。代表元 $\rho^2$ 交换分量 $\Delta_1$ 和 $\Delta_3$。取 $\Phi_{\mathbb{M}} = \Psi_1 \cup \Psi_3$，于是 $w \notin W_{\mathbb{M}}$ ，引理 4.6给出 Q。□

注 5.27。 特征多项式不是圆分多项式的根系自同构都会稳定一个 $\Phi$，见 [36, 引理3。4]。然而，我们无法避免逐一考察各个情形，因为为了验证 Q ，我们需要掌握所稳定的根系。

综上，我们得到关于 $E_8$ 型群中共轭类的以下结果。

**命题5.28**。 设 $\mathcal{O}$ 是 $E_8(q)$中的一个共轭类。如果 $\mathcal{O}$ 不是包含于环面中的正则半单元素的共轭类，该环面由 $w$ 在共轭类 $E_8$ 或 $E_8(a_5)$中标记，则 $\mathcal{O}$ 坍缩。

证明。幺幂类、混合类和分裂半单类分别由 [5,主定理], [6, 定理 1。1], 和 [7, 定理 4。1] 覆盖。其余共轭类由引理 5.25 和5.26覆盖。 □

注 5.29. 对于对应于共轭类 $E_8(a_5)$或 $E_8$ 中元素的环面内的尖点元素，我们的策略失效，因为这些共轭类中的元素不会保留 $\Phi$ 的任何真根子系统，下面将证明这一点。

设 $w_1$ 和 $w_2$ 分别是 $E_8$ 和 $E_8(a_5)$的代表元。它们的特征多项式分别为 $c_{w_1}(X) = \varphi_{30}(X)$和 $c_{w_2}(X) = \varphi_{15}(X)$，并且它们分别代表 $W$ 中由阶为30和15的元素构成的唯一尖点类。于是，$c_{w_1^2}(X) = c_{w_2}(X)$，因此 $w_1^2$ 与$w_2$ 共轭。由此，只需证明 $w_2$ 不保留 $\Phi$的任何真根子系统。

由于 $c_{w_2}(X)$ 是不可约的， $w_2$ 只能稳定一个 $\Psi$最大秩的根子系统。不可约性还迫使 $\Psi$由 $d$个秩为 $\frac{8}{d}$ 的同构分支组成，其中 $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$，并且这些分支由 $w_2$ 循环置换。由于 $|w_2|$ 是奇数， $d$ 必然为 1。因此， $\Psi$ 只能是类型 $D_8$或 $A_8$。现在， $w_2$ 作为 $\Psi$的一个自同构作用，因此存在一个态射$\rho$: $\langle w_2 \rangle \to \mathrm{Aut}(\Psi)$，其中后者或者是类型 $B_8$ 的外尔群，

或者是 $\langle \mathbb{S}_9, -(19)(28)(37)(46)\rangle \simeq \mathbb{S}_9 \times \{\pm 恒等元\}$。但在这些群中不可约地作用于 $\mathbb{R}\Psi = \mathbb{R}\Phi$ 的元素的阶并不是 15 的因数。

5.6. $F_4(q)$**中的半单类**。

在本小节中，$\mathbb{G}$ 为 $F_4$型，因此 $w_0$ 在 $\Phi$ 以及$\mathbf{Z} = e$上的作用为 $-$恒等元。我们需要这些公式

$$\alpha_0 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4,$$
$$\alpha_0^\vee(\zeta) = \alpha_1^\vee(\zeta^2)\alpha_2^\vee(\zeta^3)\alpha_3^\vee(\zeta^2)\alpha_4^\vee(\zeta), \qquad \zeta \in \Bbbk^\times.$$

单反射以及 $s_0$ 在 $t$ 上的作用为

$$\begin{aligned} s_1 \cdot t &= t\alpha_1^\vee(\zeta_1^{-2}\zeta_2), \\ s_2 \cdot t &= t\alpha_2^\vee(\zeta_1\zeta_2^{-2}\zeta_3^2), \\ s_3 \cdot t &= t\alpha_3^\vee(\zeta_2\zeta_3^{-2}\zeta_4), \\ s_4 \cdot t &= t\alpha_4^\vee(\zeta_4^{-2}\zeta_3), \end{aligned} \tag{5.14}$$

$$s_0 \cdot t = t\alpha_0^\vee(\zeta_1^{-1}) = t\alpha_1^\vee(\zeta_1^{-2})\alpha_2^\vee(\zeta_1^{-3})\alpha_3^\vee(\zeta_1^{-2})\alpha_4^\vee(\zeta_1^{-1}). \tag{5.15}$$

**引理 5.30.** 若 $w$ 不是尖点的，则 $\mathcal{O}$ 为$C$ 型、$D$ 型或$F$ 型。

~ ~ ~证明。如果 $J_w$的类型为 $A_2$、 $A_2 + A_1$、 $A_2 + A_1$或 $A_2$，我们援引引理4.16。

~如果 $J_w$ 分别为 $A_1 + A_1$型与 $A_1$型，则我们可以分别假定 $\Delta_{J_w} = \{\alpha_1, \alpha_4\}$与 $\Delta_{J_w} = \{\alpha_1\}$。我们取 $\mathbb{M} := \mathbb{L}_{\{s_1,s_2\}}$，于是 $M = [M, M] = \mathsf{SL}_3(q)$，从而得到Q。条件N由引理4.9和引理4.7推出。此外，$\mathsf{Cent}_{W_\mathbb{M}}(s_1 s_4) = \mathsf{Cent}_{W_\mathbb{M}}(s_1) = \langle s_1\rangle$。

~若 $J_w$为 $A_1 + A_1$ 型，则根据引理 4.9， $s_4 \cdot t \notin \{t, s_1 \cdot t\}$。此外，$\alpha_1(s_4 \cdot t) = \alpha_1(t) \neq 1$，因此引理 4.7 适用，从而在此情形下得到 W 。

设 $J_w$ 为 $A_1$ 型。引理 4.9 给出 $\alpha_1(s_4 \cdot t) = \alpha_1(s_3 \cdot t) = \alpha_1(w_0 \cdot t)^{-1} = \alpha_1(t) \neq 1$，因此由引理 4.7 可知 W2 成立。于是，只有当 $s_4 \cdot t, s_3 \cdot t, w_0 \cdot t \in \{t, s_1 \cdot t\}$ 时，W 才可能不成立。注记4.13、引理 4.9 和 $w \neq e$ 由此给出 $s_4 \cdot t = s_3 \cdot t = t$ 和 $t^{-1} = s_1 \cdot t = t^q$，因此 (5.14) 给出 $\zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4 = 1$。在此情形下，$t \in \langle \mathbb{U}_{\pm\alpha_1}, \mathbb{U}_{\pm\alpha_2}\rangle_{s_1}^F \simeq \mathsf{SL}_3(q)$，且它在其中不是尖点的。由注 5.1 和 [4, 定理 1.1]可得结论。

~若 $J_w$ 为 $A_1$型，则可假定 $w = s_4$。我们采用与处理 $J_w$ 为 $A_1$型时相同的论证，互换 $s_1$ 与 $s_4$的角色，并将 $s_3$ 替换为 $s_2$。

若 $J_w$ 属于 $C_2$ 型，即 $\Delta_{J_w} = \{\alpha_2, \alpha_3\}$，则我们令 $\mathbb{M} = \mathbb{L}_{J_w}$，于是 $M \simeq \mathsf{Sp}_4(q)$。因此，对于 $q > 2$，Q 显然成立；若 $q = 2$，则由引理 4.5 可知 Q 成立。条件N由引理 4.9 推出。假设 W 不成立。由于 $\alpha_0 \perp \Phi_\mathbb{M}$，对于任意 $\beta \in \Phi_\mathbb{M}$，我们有 $1 \neq \beta(t) = (s_0(\beta))(t) = \beta(s_0 \cdot t)$，因此 $s_0 \cdot t \in W_\mathbb{M} \cdot t$。将注记4.13应用于 $\alpha_4^\vee$，并结合（5.15），可得 $\zeta_1 = 1$。于是

$t \in \langle U_{\pm\alpha_2},\ \mathbb{U}_{\pm\alpha_3},\ \mathbb{U}_{\pm\alpha_4}\rangle^{F_w}$，一个 $C_3$ 型的单连通群，且它在其中不是分裂的。我们引用注 5.1 和 [7, 定理 7。1] ，并得出结论： $\mathcal{O}$ 属于 C、D 或 F 型。

若 $J_w$ 为 $B_3$型，即若 $\Delta_{J_w} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$，则取 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 为 $\Phi_{J_w}$中全体长根所构成的 $A_3$ 型根系。于是

$$M \simeq \mathbf{SL}_4(q)$$

由 [39, 推论第二卷.5.4]故Q 成立。包含关系 $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{L}_{J_w}$ 连同引理4.9 给出N。设 $w_0'$ 为 $\langle J_w\rangle$中的最长元素。于是$w_0' \in \mathsf{Cent}_W(w) \setminus \mathsf{Cent}^{W_{\mathbb{M}}}(w)$。引理4.9给出 $w_0' \cdot t \neq \sigma \cdot t$（对任意 $\sigma \in W_{\mathbb{M}}$），且$\mathsf{Cent}_{\mathbb{M}}(w_0' \cdot t) = \mathbb{T}$，故W 成立。

最后，若 $J_w$ 为 $C_3$型，即若 $\Delta_{J_w} = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$，则 $\langle J_w\rangle$中 $w$ 的共轭类的代表元有三种可能：

- 一个 Coxeter 元，
- $s_{\alpha_2}s_{\alpha_3}s_{\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4}$，或者
- $w_0s_0$ （即 $\langle J_w\rangle$ 中的最长元素）。

它们的阶分别为 6、4 和 2。如果 $\zeta_1 = 1$，那么 $t$ 属于$M \simeq \mathbf{Sp}_6(q)$，并且在其中是尖点的。我们运用注 5.1 和 [7, 定理 7。1] 得出结论： $\mathcal{O}$ 属于 C、D 或 F 型。

在证明的余下部分，我们假设 $\zeta_1 \neq 1$。我们首先考虑$\mathbb{M} = \mathbb{L}_{J_w}$，因此条件Q 由引理 4.4 保证，而 N 由引理 4.9 得出。假设 W 不成立。那么 $w_0 \cdot t = t^{-1} = \sigma \cdot t$ 对于某个$\sigma$ $\in \mathsf{Cent}^{W_{\mathbb{M}}}(w)$成立。比较系数可知，只有当 $q$ 是奇数且 $\zeta_1 = -1$时，这个相等才可能成立。 $t$ 在 $\mathbb{M}$ 中的正则性以及 $J_w$的极小性推出 $|\sigma| = 2$。若 $w$ 是 $W_{\mathbb{M}}$中的 Coxeter 元，则 $\mathsf{Cent}^{W_{\mathbb{M}}}(w) = \langle w\rangle$，因此 $\sigma = w^3 = w_0s_0$是 $\mathsf{Cent}^{W_{\mathbb{M}}}(w)$ 中唯一的非平凡对合。然后，

$$t\alpha_2^\vee(-1)\alpha_4^\vee(-1) = s_0 \cdot t = w_0\sigma \cdot t = t,$$

产生矛盾，从而完成关于 Coxeter 元的证明。

令 $w$ 为 $w_0s_0 = s_{\alpha_2}s_{\alpha_2+2\alpha_3}s_{\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4}$ 或 $s_{\alpha_2}s_{\alpha_3}s_{\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4}$。现在取 $\mathbb{M} = \langle \mathbb{T},\ \mathbb{U}_{\pm\alpha_2},\ \mathbb{U}_{\pm\alpha_3}\rangle \subset \mathbb{L}_{J_w}$，则由引理4.4 可知Q 成立，因为 $q$ 是奇数；又由引理4.9可知N 成立。根据定义，由引理4.9可得 $s_{\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4} \in \mathsf{Cent}_W(w)$且$s_{\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4} \cdot t \notin (\mathsf{Cent}^{W_{\mathbb{M}}}(w) \cdot t \cup \mathsf{Cent}_{\mathbb{T}}(M))$，从而得到W 。□

**引理 5.31**。 如果 $w$ 是尖点的，那么 $\mathcal{O}$ 属于 $C$、$D$ 或 $F$ 型。

证明。 我们验证推论 4.15的假设。尖点类在 $W$ 中的代表元列表见 [23, 表 B。3], 并列出了包含每个代表元的极小 Weyl 子群。

令 $\Phi_D$ 为 $\Phi$ 中由所有长根组成的 $D_4$ 型 $W$-稳定根子系统，其外尔群为 $W_D \leq W$。我们首先取 $\Phi_{\mathbb{M}} = \Phi_D$，因此 $[\mathbb{M}, \mathbb{M}]$ 是单连通的，从而由引理 4.4 可得 Q。若 $w \notin W_D$，则结论成立。假设 $w \in W_D$。那么在共轭意义下，$w$ 要么是 $w_0$，要么是 $w_1 = s_1 s_2 s_{\alpha_2+2\alpha_3} s_{\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4}$（$W_D$ 中的 Coxeter 元），要么是 $w_2 = s_1 s_2 s_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3} s_{\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4}$。若 $w = w_0$ 或 $w = w_1$，则 (4.5) 成立，因为 $s_3 \in \mathsf{Cent}_W(w) \setminus \mathsf{Cent}^{W_{\mathbb{M}}}(w)$。最后，若 $w = w_2$，我们将 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 替换为基为 $\{\alpha_2, \alpha_3\}$ 的 $w_2$-稳定根子系统。于是 $[\mathbb{M}, \mathbb{M}] \simeq \mathsf{Sp}_4(\Bbbk)$，因此若 $q > 2$，由引理 4.4 可得 Q；若 $q = 2$，则由引理 4.5 可得 Q。直接计算表明，$s_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} s_{\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4} \in \mathsf{Cent}_W(w) \setminus \mathsf{Cent}^{W_{\mathbb{M}}}(w)$。□

现在我们可以陈述关于类型 $F_4$的 ***G***的一般结果。

**定理 5.32.** 类型$F_4$ 的单切瓦莱群中，每个非平凡共轭类都属于 *C*、*D* 或 *F* 型。

证明。 对于幺幂、混合和分裂半单共轭类，这分别由 [5, 主定理], [6, 定理 1。1], [7, 定理 I], 给出。其余共轭类由引理 5.30 和 5.31 覆盖。□

5.7. $G_2$**中的半单类**$(q)$。

在本小节中，$\mathbb{G}$ 的类型为 $G_2$，因此 $\mathbf{Z} = e$，且最高根为 $\alpha_0 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$。回想一下，***G*** 是单的当且仅当 $q > 2$。外尔群 $W$ 同构于阶为 12 的二面体群，且单反射在 $t$ 上的作用为

$$s_1 \cdot t = \alpha_1^\vee(\zeta_1^{-1}\zeta_2)\alpha_2^\vee(\zeta_2), \qquad s_2 \cdot t = \alpha_1^\vee(\zeta_1)\alpha_2^\vee(\zeta_2^{-1}\zeta_1^3). \tag{5.16}$$

下表列出了 $W$中每个共轭类的一个代表元及其特征多项式。

| id | $s_1$ | $s_2$ | $s_1s_2$ | $(s_1s_2)^2$ | $w_0 = -$恒等元 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi_1(X)^2$ | $\varphi_1(X)\varphi_2(X)$ | $\varphi_1(X)\varphi_2(X)$ | $\varphi_6(X)$ | $\varphi_3(X)$ | $\varphi_2^2(X)$ |

**引理 5.33.** 若 $q > 2$ 且 $w$ 不是尖点的，则 $\mathcal{O}$ 属于 *C* 型、*D* 型或 *F* 型。

证明。 根据假设 $w = s_\alpha$ 对于某个 $\alpha \in \Delta$。令 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 为 $A_2$ 中的 $\Phi$ 型根子系，由所有长根组成。那么 $[\mathbb{M}, \mathbb{M}]$ 是单连通的，并且 Q 由引理 4.4 可知成立，因为 $q > 2$。

首先假设 $\alpha = \alpha_2$。由引理 4.7 和引理 4.9 可知，N 成立，因为 $\mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}} = \langle s_2 \rangle$, $\mathrm{Cent}_W(w) = \langle w_0, s_2 \rangle$。根据 $w$ 的极小性，当且仅当 $w_0 \cdot t = s_2 \cdot t$ 时，条件 W 对 $\mathbb{M}$ 失效；也就是说，当且仅当 $\zeta_1 = 1$ 时。在这种情形下，$t = \alpha_2^\vee(\zeta_2) \in M \simeq \mathrm{SL}_3(q)$，且在其中不是尖点的。于是，结论由 [4, 定理 1.1] 得出。

现在假设 $\alpha = \alpha_1$ 且 $\zeta_2 \neq 1$。那么 $\alpha_0(t) = \zeta_2 \neq 1$，因此 N 由引理4.7可得。我们有

$$\mathrm{Cent}_{W_{\mathbb{M}}}(s_1) = \langle s_0 \rangle \qquad \text{and} \qquad \mathrm{Cent}_W(s_1) = \langle s_1, s_0 \rangle.$$

那么 $w_0 \cdot t \neq t$ 因为 $e \notin W[\mathfrak{D}]$ 且 $w_0 \cdot t \neq s_0 \cdot t$ 因为 $w_0 = s_0 s_1$ 且 $s_1 \cdot t \neq t$ 由引理 4.9。因此注 4.12 (i) 适用。

现在令 $\alpha = \alpha_1$ 且 $t = \alpha_1^\vee(\zeta_1)$。那么根据 $w$ 的极小性，有 $t^2 \neq 1$，

$$(2\alpha_1 + \alpha_2)(t) = \zeta_1 \neq 1 \qquad \text{and} \qquad (\alpha_1 + \alpha_2)(t) = \zeta_1^{-1} \neq 1.$$

考虑 $F_{s_1}$-稳定群 $\mathbb{V} := \langle \mathbb{U}_{2\alpha_1+\alpha_2}, \mathbb{U}_{\alpha_1+\alpha_2} \rangle$。那么

$$\mathbb{V} = \begin{cases} \mathbb{U}_{\alpha_1+\alpha_2}\mathbb{U}_{2\alpha_1+\alpha_2}, & \text{if } p = 3, \\ \mathbb{U}_{\alpha_1+\alpha_2}\mathbb{U}_{2\alpha_1+\alpha_2}\mathbb{U}_{\alpha_0}, & \text{if } p \neq 3, \end{cases}$$

由关系式 [35, (3.10)]可知。根据 [34, 命题 23。8], 子群$V := \mathbb{V}^{F_{s_1}}$ 为:

- 当 $p = 3$ 时， $q^2$ 阶的阿贝尔群，其元素具有如下形式：$x_{\alpha_1+\alpha_2}(\eta_1)$ $x_{2\alpha_1+\alpha_2}(\eta_2)$，其中 $\eta_1$， $\eta_2 \in \mathbb{F}_q$ 取适当值；
- 当 $p \neq 3$ 时， $q^3$ 阶的非阿贝尔群，其元素具有如下形式：$x_{\alpha_1+\alpha_2}(\eta_1)$ $x_{2\alpha_1+\alpha_2}(\eta_2)x_{\alpha_0}(\eta_3)$，其中 $\eta_1$， $\eta_2$， $\eta_3 \in \mathbb{F}_q$ 取适当值。

令 $H := \langle t, V \rangle$。则

$$\mathcal{O}_{t^{\pm 1}}^H \subseteq t^{\pm 1}V, \quad \text{so} \quad \mathcal{O}_t^H \cap \mathcal{O}_{t^{-1}}^H = \emptyset; \quad \text{also}, \quad |\mathcal{O}_{t^{\pm 1}}^H| = |\mathcal{O}_{t^{\pm 1}}^V| \geq p > 2.$$

此外，对于任意 $v \in V$， $t^{-1}(v \triangleright t) \in \langle \mathcal{O}_t^V \rangle$，且这类元素生成 $V$，因此 $\langle \mathcal{O}_t^H \rangle = H$。由于 $H$ 是非交换的，存在 $r \in \mathcal{O}_t^H$ 使得 $r \triangleright t \neq t$。取 $s := t^{-1}$，由定义可知 $\mathcal{O}$ 属于 C 型。□

**引理 5.34**。假设 $q > 2$。若 $w$ 是尖点的，则 $\mathcal{O}$ 是 $C$ 型。

证明。这里 $w$ 要么是 $s_1 s_2$，要么是 $(s_1 s_2)^2$，，或 $w_0$。令 $\Phi_{\mathbb{M}}$ 为由 $A_2$ 中的所有长根组成的 $\Phi$ 型根子系。则 $[\mathbb{M}, \mathbb{M}]$ 是单连通的，且 Q 由引理 4.4得出，因为 $q > 2$。此外，$w_0 \in \mathrm{Cent}_W(w) \setminus W_{\mathbb{M}}$，因此推论 4.15 适用。□

现在我们可以陈述一个关于 $G$ 类型 $G_2$的一般结果。

**定理 5.35**。 类型$G_2$ 的单切瓦莱群中，每个非平凡共轭类都属于 *C*、*D* 或 *F* 型。

证明。 对于幺幂、混合和分裂半单共轭类，这分别由 [5, 主定理], [6, 定理 1。1], [7, 定理 I], 给出。其余共轭类由引理 5.33 和 5.34覆盖。 □

我们以讨论非单群 $G_2$(2)结束本小节，以便在处理斯坦贝格群时将其用于递归论证。

**引理 5.36**。 设 $G = \mathrm{Aut}(\mathbf{PSU}_3(3))$，且 $r$ 是 $\mathbf{PSU}_3(3) = \mathbf{SU}_3(3)$中的一个 7 阶元素。那么 $\mathcal{O}_r^G$ 属于 *C* 型。

证明。PSU$_3$(3) 中阶可被 7 整除的唯一极大环面对应于 $\theta$-共轭类 $w = (123)$，因此它在 SL$_3(\mathbb{F}_3)$ 中共轭于形如 $d = \mathrm{diag}(\eta, \eta^4, \eta^2)$ 的对角矩阵，其中 $\eta \in \overline{\mathbb{F}_{3^6}}$ 满足 $\eta^7 = 1$。Frobenius 端同态 Fr$_3$ 属于 $G$，见 [41, 定理 36]，，且 $\mathrm{Fr}_3 \triangleright r = \mathrm{Fr}_3(r) = r^3$ 在 SL$_3(\mathbb{F}_3)$ 中共轭于$d^3 = \mathrm{diag}(\eta^3, \eta^5, \eta^6)$，因而它不在 SL$_3(\mathbb{F}_3)$ 中与 $r$ 共轭。因此 Fr$_3(r)$ 在 PSU$_3$(3) 中不与 $r$ 共轭，故

$$\mathcal{O}_r^G \cap \mathbf{PSU}_3(3) \neq \mathcal{O}_r^{\mathbf{PSU}_3(3)}.$$

由于$\mathbf{PSU}_3$(3) 是单的，共轭类 $\mathcal{O}_r^G$根据引理 2.2，属于 C 型。 □

**命题 5.37**。 $G_2(2)$ 中每个非平凡半单类都属于 *C*、*D* 或 *F* 型。

证明。回顾一下， $G_2$(2) $\simeq$ Aut(PSU$_3$(3))。我们将 PSU$_3$(3) 视为内自同构的正规子群。根据 [33, 表 4]，非平凡半单元素的阶为 3 或 7。扭曲李型群的自同构是内自同构、对角自同构和域自同构（即弗罗贝尼乌斯自同构）的复合；在我们的情形中，对角态射是由 PGU$_3$(3) 中一个对角矩阵的共轭类所诱导的共轭，参见 [41, 定理 36]。弗罗贝尼乌斯自同构正规化对角自同构，并且在 $G_2$(2) 中阶为 2，因为 PSU$_3$(3) $\simeq$SU$_3$(3) $\leq$GL$_3$(9)。此外，PGU$_3$(3) 中对角元素的阶是 2 的幂，因为对角线元素属于 $\mathbb{F}_9^\times$。因此，阶为 3 和 7 的元素属于 PSU$_3$(3)。根据 [5, 命题 5.1]，PSU$_3$(3) 中阶为 3 的元素共轭类属于 C、D 或 F 型。根据引理 5.36，阶为 7 的元素共轭类属于 C 型。
□

## 6. Kthulhu classes that collapse by the criterion of type $\Omega$

本节展示李型单群中因新的判据而坍缩的共轭类 $\Omega$，这些共轭类无法用先前的方法处理。另一方面，在注 6.10 中，我们展示了一族即使采用新方法也无法处理的共轭类。我们沿用第4 节和第5节中的记号。

### 6.1. 群 $\mathbf{P\Omega}^+_{2n+1}(q)$。

我们首先讨论 $\mathbf{P\Omega}^+_{2n+1}(q)$ 中 $n \geq 2$ 未被定理 5.10覆盖的半单类。

根据同构 $\mathcal{O}$，当 $t$ 如（5.8）所示时，该共轭类对于 $n = 2$ 和 $p = 3, 5$ 是 kthulhu 的，$\mathbf{P\Omega}^+_5(q) \simeq \mathbf{PSp}_4(q)$，见 [7, 表 2]。

**引理 6.1**。设 $G = \mathbf{P\Omega}^+_{2n+1}(q)$ 满足 $n \geq 2$，并设 $t \in \mathbb{T}^{F_w}$ 如 （5.5）所示，且 $q \neq 3$、（5.6）、（5.7）或 （5.8），并满足 $q \neq 3$。那么， $\mathfrak{O}$ 和 $\mathcal{O}$ 均属于 $\Omega$型。

证明。对于 $t$ 的所有选择，我们验证推论 2.16 的假设。具体而言，我们构造一个由 $t$规范化的 $G_w$的 $F_w$-稳定初等阿贝尔 $p$-子群 $V$，使得 $\mathsf{Cent}_V(t) = e$，并证明仿射子架$\mathcal{O}^V_t = tV$ 不属于列表 (2.1)。由于 $V \cap \mathsf{Ker}(\pi) = e$，且$v \in \mathsf{Cent}_V(t)$ 当且仅当 $\pi(v) \in \mathsf{Cent}^{\pi(V)}(\pi(t))$，同样的论证适用于 $\pi(tV)$。

若 $w = e$或 $w = s_n$，则 $q > 3$。取 $V = \mathbb{U}^{F_w}_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}$。由于 $(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)(t) = -1$，$t$在 $V$上的共轭作用为取逆，且 $\mathsf{Cent}_V(t) = e$，因此 $\left|\mathbb{U}^{F_w}_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\right| = q$。于是，仿射架 $tV$ 同构于 $(\mathbb{F}_q, q-1)$，由于 2.1，它不属于列表 ( $q > 3$。

若 $w = s_n s_{\alpha_{n-1}+\alpha_n}$，则 $q = 3$。我们考虑

$$V = \langle \mathbb{U}_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-2}}, \mathbb{U}_{w(\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-2})}\rangle^{F_w} = (\mathbb{U}_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-2}}\mathbb{U}_{w(\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-2})})^{F_w},$$

它是一个阶为 9 的阿贝尔群，参见 [34,命题 23。8]。由于

$$(\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-2})(t) = -\omega^{-2} \neq 1, \text{ and } w(\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-2})(t) = -\omega^2 \neq 1$$

有 $\mathsf{Cent}_V(t) = e$。根据大小，仿射架 $tV$不属于列表（2.1）。□

**引理 6.2**。设 $G = \mathbf{P\Omega}^+_{2n+1}(3)$ 满足 $n \geq 2$，并设 $t \in \mathbb{T}^{F_w}$ 如 (5.5)或 (5.8)中所述。那么， $\mathfrak{O}$ 和 $\mathcal{O}$ 属于类型 $\Omega$。

证明。 我们证明推论2.15 的假设成立。令

$$\gamma_1 := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \qquad \text{and} \qquad \gamma_2 := \alpha_2 + \cdots + \alpha_n.$$

考虑可解子群 $\mathbf{S}:=\langle t,\ \mathbb{U}_{\gamma_1},\ \mathbb{U}_{\gamma_2}\rangle^{F_w}\subset\mathbb{TU}\cap G_w$。在（5.5）中我们有 $n\geq 3$，因此可以在 $N_{\mathbb{G}}(\mathbb{T})$ 中选择 $w=s_n$ 的一个代表元，使其在 $\mathbb{U}_{\gamma_1}$ 和 $\mathbb{U}_{\gamma_2}$上平凡作用。因此，对于 $t$ 的两种选择，我们都有 $\mathbb{U}_{\gamma_1}^{F_w}=\mathbb{U}_{\gamma_1}^{F}$和 $\mathbb{U}_{\gamma_2}^{F_w}=\mathbb{U}_{\gamma_2}^{F}$。乘法诱导出集合之间的双射

$$\mathbf{S}\simeq\langle t\rangle\times\mathbb{U}_{\gamma_1}^{F}\times\mathbb{U}_{\gamma_2}^{F}\times\mathbb{U}_{\gamma_1+\gamma_2}^{F},$$

因此 $|\mathbf{S}|=54$。由于 $\gamma_1(t)=\gamma_2(t)=-1$，我们有 $\mathsf{Cent}_{\mathbf{S}}(t)=\langle t,\ \mathbb{U}_{\gamma_1+\gamma_2}^{F}\rangle$ 因此$|\mathcal{O}_t^{\mathbf{S}}|=9$。此外，对于 $i=1,\ 2$，因此 $\mathbb{U}_{\gamma_i}^{F}\triangleright t=t\mathbb{U}_{\gamma_i}^{F}$

$$\mathbf{S}=\langle t\mathbb{U}_{\gamma_1}^{F},t\mathbb{U}_{\gamma_2}^{F}\rangle\subseteq\langle\mathcal{O}_t^{\mathbf{S}}\rangle\subseteq\mathbf{S},$$

由此得到关于 $\mathfrak{O}$ 的陈述。关于 $\mathcal{O}$ 的陈述可通过观察到 $\pi$ 到 $\mathbf{S}$ 的限制是单射而得出。□

现在我们可以给出关于 $\mathbf{P\Omega}_{2n+1}^{+}(q)$ 的一般性陈述，其中$q$ 为奇数。若 $q$ 为偶数，则 $\mathbf{P\Omega}_{2n+1}^{+}(q)\simeq\mathbf{PSp}_{2n}(q)$，将在第 7 节中讨论。

**定理 6.3**。 $\mathbf{P\Omega}_{2n+1}^{+}(q)$ 中每个非平凡共轭类在任意奇数 $q$ 及任意 $n\geq 2$ 下都会坍缩。□

证明。 幺幂类和混合类分别由 [5, 主定理], [6,定理 1 覆盖。1], 半单类由 [7, 定理 I],定理 5.10 以及引理 6.1和6.2 覆盖。□

6.2. **群 $\mathbf{P\Omega}_{2n}^{+}(q)$**。

我们讨论 $\mathbf{P\Omega}_{2n}^{+}(q)$ 中的半单类， $n\geq 4$ 它们未被定理5.17覆盖。

**引理 6.4.** 设 $G=\mathbf{P\Omega}_{4}^{+}(q)$ 为 $D_4$ 型，并设

$$t=\alpha_1^{\vee}(\omega_1)\alpha_3^{\vee}(\omega_3)\alpha_4^{\vee}(\omega_4)\in\mathbb{T}^{F_w}$$

其中 $w=s_1s_3s_4$ 与 $J_w$ 为极小。若 $q=2$ 或 $t$ 如 (5.11) 中所述，则 $\mathfrak{O}$ 与$\mathcal{O}$ 为 $\Omega$型。

证明。不失一般性， $t=\alpha_1^{\vee}(\omega)\alpha_3^{\vee}(\omega)\alpha_4^{\vee}(\omega^{-1})$，其中若 $q=2$，则 $\omega$ 为 1 的本原 3 次根；若 $q\equiv 3$ 模 4，则为 1 的本原 4 次根，见注 5.16。在所有情形中， $\alpha_2(t)=\omega^{-1}\neq 1$ 且 $(w\alpha_2)(t)=\alpha_2(t^{-1})=\omega\neq 1$，故 $(\alpha+w\alpha)(t)=\alpha_0(t)=1$。

令 $q=2$。在此情形下，$\mathbf{Z}=e$和 $\mathfrak{O}=\mathcal{O}$。我们考虑 $w$-稳定子群 $\mathbb{H}=\langle\mathbb{U}_{\pm\alpha_2},\ \mathbb{U}_{\pm w\alpha_2}\rangle$，它是 $\mathbb{G}$的子群。其根系属于 $A_2$型。直接计算表明

$$\alpha_2^{\vee}(\omega)\alpha_{w\alpha_2}^{\vee}(\omega^2)=\alpha_1^{\vee}(\omega^{-1})\alpha_3^{\vee}(\omega^{-1})\alpha_4^{\vee}(\omega^{-1})\in Z(\mathbb{H})$$

因此 $\mathbb{H} \simeq \mathbf{SL}_3(\Bbbk)$ 和 $H := \mathbb{H}^{F_w} \simeq \mathbf{SU}_3(2)$ 是可解群。 $\alpha_3^\vee$ 和 $\alpha_4^\vee$ 在 $t$的表达式中的系数各不相同，因此 $t \notin H$。然而， $\widetilde{t}$正规化了 $H$，所以 $H := \langle t,\ H\rangle \simeq \langle t\rangle \ltimes H$ 是可解群。令

$$V^+ := \langle \mathbb{U}_{\alpha_2}, \mathbb{U}_{w\alpha_2}\rangle^{F_w} \qquad \text{and} \qquad V^- := \langle \mathbb{U}_{-\alpha_2}, \mathbb{U}_{-w\alpha_2}\rangle^{F_w}.$$

这些群在 [7, 例 23.10], 中有所描述，且都同构于四元数群 $Q_8$。于是 $Z(V^\pm) = \mathbb{U}_{\pm\alpha_0}^{F_w}$ 和 $\mathsf{Cent}_{V^\pm}(t) = Z(V^\pm)$。因此， $\langle \mathcal{O}_t^{V^\pm}\rangle = \langle t,\ V^\pm\rangle$ 且

$$\widetilde{H} = \langle t, V, V^-\rangle = \langle \mathcal{O}_t^V, \mathcal{O}_t^{V^-}\rangle \le \langle \mathcal{O}_t^{\widetilde{H}}\rangle \le \widetilde{H}.$$

此外， $\left|\mathcal{O}_t^{\widetilde{H}}\right| \ge |\mathcal{O}_t^{V^+} \cup \mathcal{O}_t^{V^-}| = 4 + 4 - |\mathcal{O}_t^{V^+} \cap \mathcal{O}_t^{V^-}| = 7$。由于 $\left|\mathcal{O}_t^{\widetilde{H}}\right|$整除 $|\mathbf{SU}_3(2)| = 2^3 \cdot 3^3$，我们有 $\left|\mathcal{O}_t^{\widetilde{H}}\right| \ge 8$。推论2.15 适用。

现在令 $q \ne 2$，沿用情形 $q = 2$ 中的记号。我们考虑这个 $w$-稳定的可解子群

$$\mathbf{S} := \langle t,\, V^+\rangle \simeq \langle t\rangle \ltimes V^+ \le G_w.$$

根据 [7, 例 23。10] 其阶为 $q^3(q+1)$，并且

$$|\operatorname{Cent}_{\mathbf{S}}(t)| = |\langle t, \mathbb{U}_{\alpha_2+w\alpha_2}^{F_w}\rangle| = q(q+1),$$

由此可得 $|\mathcal{O}_t^{\mathbf{S}}| = q^2$。此外， $\langle \mathcal{O}_t^{\mathbf{S}}\rangle$ 包含 $t$ 个形如$x_{\alpha_2}(\xi)x_{w\alpha_2}(\eta)x_{\alpha_2+w\alpha_2}(\zeta)$ 的 $q^2$ 元素，其中 $\xi$、$\eta$、$\zeta$属于 $\mathbb{F}_q$，且各对 $(\xi,\eta)$ 均不相同。根据切瓦莱交换子公式， $\langle \mathcal{O}_t^{\mathbf{S}}\rangle$ 还包含 $\mathbb{U}_{\alpha_2+w\alpha_2}^{F_w}$，所以 S $=\langle \mathcal{O}_t^{\mathbf{S}}\rangle$。推论 2.15 给出了关于 $\mathfrak{O}$ 的结论。关于 $\mathcal{O}$ 的结论则由 $\pi$ 在 S 上的限制是单射得出。□

我们现在可以陈述关于 $\mathbf{P\Omega}_{2n}^+(q)$ 的一般性结果。

**定理 6.5.** 对于任意 $n \ge 4$ 和任意 $q$， $\mathbf{P\Omega}_{2n}^+(q)$ 中的每个非平凡共轭类都会坍缩。□

证明. 幺幂类和混合类分别由 [5, 主定理], [6, 定理 1.1], 覆盖。半单类由 [7, 定理 I], 定理 5.17和引理6.4覆盖。□

6.3. **辛群中的幺幂类。**

我们现在通过证明 [7, 定理 I、II、III] 中的某些 kthulhu 类$\mathbf{PSp}_{2n}(q)$ 属于 $\Omega$型，从而加强 [3, 第 4.2 节。1]对于未作解释的记号，请参阅 $q = p^m$。

**引理 6.6。** 设 $G = \mathbf{PSp}_{2n}(q)$。以下共轭类的类型为 $\Omega$:

(i) 由 $\pi$ 中一个分裂对合的像所代表的共轭类，其中 $n=2$ 和 $q=3$, 5、7；(ii) 标记为 $V(2)\oplus W(1)^{n-1}$ 的幺幂共轭类，其中 $n\geq 2$、$p=2$ 和 $m>1$；(iii) 标记为 $W(2)$ 的幺幂共轭类，其中 $n=2$、$p=2$ 和 $m>1$。

证明。 (i) 由引理 6.1、6.2 可得，因为 $\mathbf{P\Omega}_5^+(q)\simeq\mathbf{PSp}_4(q)$。

(ii) 由例2.17可得，因为群嵌入

$$\mathbf{SL}_2(2^m)\to\mathbf{Sp}_{2n}(2^m)=\mathbf{PSp}_4(2^m),\qquad \left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\mapsto\left(\begin{smallmatrix}a&0&b\\0&\mathrm{id}_{2n-2}&0\\c&0&d\end{smallmatrix}\right),$$

诱导了一个架包含，将非平凡幺幂类从 $\mathbf{SL}_2(2^m)$ 映到$\mathbf{PSp}_4(2^m)$ 中标记为 $V(2)\oplus W(1)^{n-1}$ 的共轭类。

(iii) $\mathbf{Sp}_4(2^m)$ 的非平凡图自同构交换短根子群和长根子群 [18, 12。1] 交换标记为 $V(2)\oplus W(1)$ 和 $W(2)$ 的共轭类。该结论由 (ii) 得出。□

6.4. **酉群中的幺幂类**。

为强调类型 $\Omega$ 判据的适用范围，我们讨论另一个由 khtulhu 幺幂共轭类构成的无限族，这次是在斯坦贝格群 $\mathbf{PSU}_{n+1}(2^m)$ 中。

**命题6.7**。 在$\mathbf{PSU}_{n+1}(2^m)$中的幺幂共轭类，其中$n\geq 3$且 $m\geq 1$，对应于分拆(2、1、.....)，其类型为 $\Omega$。

证明。首先，在 $\mathbf{PSU}_{n+1}(q)$ 中，对应于同一分拆的幺幂类作为架是同构的，参见 [5, 第5节。1], 因此，只需证明每个群中一个共轭类的情形即可。

若 $m>1$ 则我们使用例 2.17 以及由自然群同态导出的架包含

$$\mathbf{SL}_2(2^m)\simeq\mathbf{PSL}_2(2^m)\longrightarrow\mathbf{SU}_{n+1}(2^m)\longrightarrow\mathbf{PSU}_{n+1}(2^m),$$
$$\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\mapsto\left(\begin{smallmatrix}a&&b\\&\mathrm{id}_{n-1}&\\c&&d\end{smallmatrix}\right).$$

在证明的其余部分 $m=1$。群 $\mathbf{PSU}_3(2)$ 是可解的，只有一个对合共轭类，并且包含一个子群$\mathbf{S}$ ，该子群同构于非平凡半直积 $(\mathbb{F}_3,+)\rtimes\mathbb{S}_3$，其中 $\mathbb{S}_3$ 通过符号特征作用于 $(\mathbb{F}_3,+)$。元素 (0,(12)) 所在的共轭类包含任意对换 $\sigma$对应的元素 $(0,\sigma)$，并且包含元素

$$(-1,\mathrm{id})\triangleright(0,(12))=(-1,(12))(1,\mathrm{id})=(1,(12)).$$

因此，$\mathbf{S} = \langle \mathcal{O}^{\mathbf{S}}_{(0,(12))} \rangle$。直接计算可得 $\mathrm{Cent}_{\mathbf{S}}(0,(12)) = \langle (0,(12)) \rangle$，所以 $\left| \mathcal{O}^{\mathbf{S}}_{(0,(12))} \right| = 9$。因此，$\mathbf{PSU}_3(2)$ 中的对合共轭类属于类型 $\Omega$。

通过同构 $\mathbf{PSU}_4(2) \simeq \mathbf{PSp}_4(3)$ 中由分拆 $(2,1,1)$ 标记的 kthulhu 幺幂共轭类，对应于 $\mathbf{PSp}_4(3) \simeq \mathbf{P\Omega}^+_5(3)$ 中分裂对合的共轭类，因为它们的中心化子阶均为 $2^6 \cdot 3^2$。因此，根据引理 $\Omega$ 6.2，它属于 $n \geq 4$ 型。对于 $n \geq 4$，我们使用由群包含关系导出的架包含

$$\begin{aligned} \mathbf{PSU}_4(2) \simeq \mathbf{SU}_4(2) &\longrightarrow \mathbf{SU}_{n+1}(2) \longrightarrow \mathbf{PSU}_{n+1}(2) \\ \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) &\mapsto \left(\begin{smallmatrix} A & & B \\ & \mathrm{id}_{n-3} & \\ C & & D \end{smallmatrix}\right). \end{aligned}$$

□

6.5. **切瓦莱群中的分裂半单类。**

我们还可以完成对切瓦莱群中分裂半单类的分析。首先考察 $\mathbb{A}_5$ 中的一个共轭类，该类是稳健的（见 [7, 注 53]）。

**引理 6.8。** 在 $\mathbb{A}_5$ 中，循环类型为 $(1, 2^2)$ 的共轭类属于 $\Omega$ 型。

证明。若 $t = (25)(34)$，$x = (12345)$ 且 $\Gamma = \langle x \rangle$，则 $txt = x^{-1}$，并且 $\mathrm{Cent}_\Gamma(t) = \{e\}$。推论 2.16 表明 $\mathcal{O}_t^{\mathbb{A}_5}$ 属于 $\Omega$ 型。□

**定理 6.9.** 设 $\boldsymbol{G}$ 是一个单谢瓦莱群，且 $t \in \mathbb{T}^F \setminus e$。那么 $\mathcal{O}$ 坍缩。

证明. 对于 $\boldsymbol{G} = \mathbf{PSL}_2(4) \simeq \mathbb{A}_5$，分裂半单元素的循环类型为 $(1^2, 3)$，根据 [7, 例 2.7]，其共轭类属于 C 型。对于 $\boldsymbol{G} = \mathbf{PSL}_2(5) \simeq \mathbb{A}_5$，分裂半单元素的循环类型为 $(1, 2^2)$，根据 $\Omega$ 引理 6.8，其共轭类属于 $\boldsymbol{G} = \mathbf{PSL}_2(9) \simeq \mathbb{A}_6$，分裂半单元素的循环类型为 $(1^2, 2^2)$，其共轭类根据[7,例 2.6]属于 C 型。

对于 $\boldsymbol{G} = \mathrm{PSL}_2(q)$，当 $q \neq 4$、5、9 时，以及对于 $\boldsymbol{G} = \mathrm{PSL}_{n+1}(q)$，当 $n \geq 2$ 时，这包含在 [4, 定理 1.1] 中。若 $\boldsymbol{G} \neq \mathrm{PSL}_{n+1}(q)$，且 $t$ 不是 $\mathrm{P\Omega}^+_{2n+1}(q)$ 中的分裂对合，当 $n \geq 2$ 且 $q = 3$、5、7 时，该结果已在 [7, 定理 4.1] 中得到证明。由引理 6.1 和 6.2 以及包含关系 $\mathrm{P\Omega}^+_5(q) \leqslant \mathrm{P\Omega}^+_{2n+1}(q)$，即可得出结论。□

类型 $\Omega$ 的判据无法处理所有 kthulhu 共轭类，正如下述注记所示。

注记 6.10. 设 $n+1$ 为奇素数。$\mathrm{PSL}_{n+1}(q)$ 或 $\mathrm{SL}_{n+1}(q)$ 中任意不可约半单元 $x$ 的共轭类都是 kthulhu，见引理 5.13]。证明依赖于对包含 $x$ 的可能子群进行分析。同样的分析表明，若可解群 $H$ 包含 $x$，则 $H$ 包含在包含 $x$ 的唯一极大环面 $T$ 的正规化子中。于是 $\mathcal{O}_x^H \subseteq T$ 由互相交换的元素组成。但这样一来，$\langle \mathcal{O}_x^H \rangle \subseteq T = H$ 是阿贝尔的，因此 $\mathcal{O}_x^H = \{x\}$ 是平凡子架。因此，$\mathrm{PSL}_{n+1}(q)$ 或 $\mathrm{SL}_{n+1}(q)$ 中不可约半单类不属于类型 $\Omega$。不过，阿贝尔方法可确保这些共轭类会失败，见定理 1.2]。

## 7. Abelian techniques

设 $G$ 是有限群，$V \in {}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD}$ 不可约且 $\mathcal{O} = \operatorname{supp} V$。给定 $\mathcal{O}$的一个子架 $X$，子空间 $V_X := \oplus_{x\in X} V_x$ 是$V$的一个辫子子空间。若 $X$ 是平凡的，则 $V_X$ 是对角型的，而对这一共轭类的了解有助于判定何时 $\dim \mathscr{B}(V_X)$ 和进而 $\dim \mathscr{B}(V)$ 为无穷大；换言之，何时 $V$ 坍缩（但不能判定 $\mathcal{O}$ 是否坍缩）。这些论证统称为阿贝尔方法。

例如，若共轭类 $\mathcal{O} = \mathcal{O}_g^G$满足 $g$ 与 $g^{-1}$共轭但不相等，则它是实的。在这种情形下，只需考虑 $X = \{g, g^{-1}\}$。

**引理 7.1**。 [14, 引理2。2] 若 $\mathcal{O} = \mathcal{O}_g^G$是实的且 $g$ 的阶为奇数，则$\mathcal{O}$ 坍缩。□

在本节中，我们使用阿贝尔方法证明，单群 $\boldsymbol{G} = E_8(q)$ 和 $\mathbf{PSp}_4(q)$ 中尚未解决的情形都会坍缩。此外，我们还讨论群 $\mathbf{PSL}_2(q)$ 的坍缩。

### 7.1. 关于 $E_8(q)$和 $\mathbf{PSp}_{2n}(q)$上的 Nichols 代数。

**定理 7.2.** 群 $\boldsymbol{G} = E_8(q)$ 会坍缩。

证明。 幺幂类和混合类由 [5, 主定理]和 [6, 定理 1。1], 分别证明会坍缩。分裂半单类由 [7,定理 4。1]证明会坍缩。设 $s \in \mathbb{T}_w^F \setminus e$，其中 $w \in W$。若 $w$ 的共轭类未标记为 $E_8$ 或 $E_8(a_5)$，则由引理 $\mathcal{O}_s^{\boldsymbol{G}}$ 可知会坍缩 5.25 和 5.26。

若 $w$的共轭类标记为 $E_8$或 $E_8(a_5)$，则 $|T_w^F| \in \{\varphi_{15}(q)\ \varphi_{30}(q)\}$，因此 $|s|$整除 $q^8 \pm q^7 \pm q^5 - q^4 \pm q^3 \pm q + 1$，且 $s$是实的，因为 $w_0 = -$恒等元。于是由引理 $\mathcal{O}_s^{\boldsymbol{G}}$7.1 可知其坍缩 。□

回顾一下，当 $n = q = 2$ 时，$\mathbf{PSp}_{2n}(q)$ 不是单群。

**定理 7.3.** 群 $\boldsymbol{G} = \mathbf{PSp}_{2n}(q)$，$n \geq 2$ 以及 $(n, q) \neq (2, 2)$，会坍缩。

证明. 对于 $n \geq 3$ 这是 [7, 定理 III]。设 $n = 2$。混合类由 [6, 定理 11]坍缩。半单类由 [7, 定理 I (ii)] 和引理 6.6 (1) 可知。由 [7, 定理 II (ii)], , kthulhu 幺幂类为:

∘由 $W(2)$ 和 $V(2) \oplus W(1)$ 标记的那些，其中 $q$为偶数，以及

∘ 与类型为 $(2, 1_2)$ 的分拆相关的那些，其中 $q$ 为奇数且不是平方数。

由 $W(2)$ 和 $V(2) \oplus W(1)$ 标记的那些根据引理 6.6 (ii) 和(ii) 坍缩，因为 $q > 2$。

设 $u = \begin{pmatrix} 1&0&0&1\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$。不失一般性， $\pi(u)$ 是 $\boldsymbol{G}$ 中由 $(2, 1^2)$ 标记的一个共轭类的代表元。

若 $p > 3$，则存在 $a \in \mathbb{F}_p^\times$ 使得 $a^2 \in \mathbb{F}_p \setminus \{1\}$。因此

$$\pi(u) \neq \pi(u)^{a^2} = \pi\left(\operatorname{diag}(a, 1, 1, a^{-1}) \triangleright u\right) \in \mathcal{O}^{\boldsymbol{G}}_{\pi(u)}$$

以及 $|\pi(u)| = p$ 为奇数，且与 3 互素。共轭类 $\mathcal{O}^{\boldsymbol{G}}_{\pi(u)}$ 根据 [8,引理 1 坍缩。9]。

假设 $p = 3$。那么该共轭类包含一个子架，它与$\mathbf{PSL}_4(3)$ 中的一个非平凡幺幂共轭类同构，因此我们应用 [6,引理 6.1]。□

7.2. **$\mathbf{PSL}_2(q)$上的 Nichols 代数。**

当 $q \equiv 1$ 模 4 或 $q > 2$ 为偶数时，群 $\mathbf{PSL}_2(q)$ 的坍缩已由 [21, 命题 3.1], [4, 定理 1.2]证明。我们汇总这些结果，列出已知会坍缩的共轭类。$\mathbf{PSL}_2(q)$ 中非平凡共轭类有 3 种：幺幂类、分裂半单类（即有对角代表元的类）和不可约（非分裂）半单类。

**引理 7.4.** 设 $q \notin \{2, 3, 4, 5\}$，并设 $\mathcal{O}$ 是$\mathbf{PSL}_2(q)$中的一个共轭类。

(i) 假设 $\mathcal{O}$ 是幺幂的，且 $q > 2$ 是偶数。则 $\mathcal{O}$ 是*kthulhu*，但它坍缩，属于 $\Omega$型。(ii) 假设 $\mathcal{O}$ 是幺幂的，且 $q$ 是奇平方数。则 $\mathcal{O}$ 坍缩。(iii) 假设 $\mathcal{O}$ 是幺幂的，且 $q$ 是奇数但不是平方数。则 $\mathcal{O}$ 是*kthulhu*。在 $q \equiv 1$ 模4的情形下， $\mathcal{O}$ 下降。(iv) 若共轭类 $\mathcal{O}$ 是分裂半单的，则它坍缩，属于$\mathcal{C}$ 型。(v) 若要么 $q$ 是偶数但不是平方数，且该共轭类中的元素阶为$3$；要么 $q$ 是任意的，且该共轭类中的元素的阶为 $> 3$；则 $\mathcal{O}$ 是*kthulhu*。否则， $\mathcal{O}$ 坍缩。在 $q > 2$ 为偶数或 $q \equiv 1$ 模4的情形下， $\mathcal{O}$ 下降。

证明。 (i)： $\mathcal{O}$ 根据 [2, 引理 3。5] 是 kthulhu，且根据 $\Omega$ 例 2.17 是

(ii)：若 $q > 9$ 是奇平方数，则 $\mathcal{O}$ 根据 [2, 引理 3。6],是 D 型；而若 $q = 9$，则 $\mathcal{O}$ 是 C 型，参见 [7, 例 2。7]。因此 $\mathcal{O}$ 坍缩。

(iii)：再次， $\mathcal{O}$ 由 [2, 引理 35]可知是 kthulhu。若 $q \equiv 1$ 模 4 同余于 $\mathcal{O}$，则 $-1$ 是模 $q$的平方，因此它是实的，且 $\mathcal{O}$ 中的元素具有奇数阶，故 $\mathcal{O}$ 由引理7.1排除。

(iv)：这由 [4, 引理 39]可得。

(v)：第一个结论由 [4, 定理 11] 得出，第二个结论则由[4, 命题 42]得出。设 $q > 2$ 为偶数，或 $q \equiv 1$ 模 4 同余于$q + 1$。那么半单不可约类都是实的，且其中元素的阶为奇数（非分裂环面的阶为 $(q + 1)/2$，当$q \equiv 1$ 模 4 同余于7.1. □

由此可直接得到：

**定理 7.5.** 群 $\mathbf{PSL}_2(q)$，其中 $q \equiv 1 \bmod 4$ 或 $q > 2$为偶数时，会发生坍缩。□

注 7.6。若 $q = 2$ 或 3，则 $\mathbf{PSL}_2(q)$ 不是单群。

若 $q = 4$ 或 5，则 $\mathbf{PSL}_2(q) \simeq \mathbb{A}_5$，根据 [8, 定理 2。6]，其发生了坍缩。

$\mathbb{A}_5$ 中共轭类的坍缩问题已在 [7]中讨论。$\mathbb{A}_5$中有两个 sober 类：

◦ 循环类型 (5)，在 $\mathbf{PSL}_2(5)$ 中是幺幂的，但在 $\mathbf{PSL}_2(4)$ 中是半单的；

◦ 循环类型 $(1, 2_2)$，在 $\mathbf{PSL}_2(5)$ 中是半单的，但在 $\mathbf{PSL}_2(4)$ 中则是幺幂的。

后者会坍缩，因为它属于 $\Omega$型，参见引理6.8。

注 7.7. 当 $q$ 为奇数但不是平方数时，尚不清楚幺幂共轭类 $\mathcal{O}$ 是否会坍缩；特别是，$q \equiv 3$ 模 4 的情形仍未解决。

设 $3 < q$ 为奇数。那么，$\mathbf{PSL}_2(q)$ 中的幺幂共轭类不属于 $\Omega$型。事实上，$\mathbf{PSL}_2(q)$ 的可解子群有以下几种：

- 阶与 $p$互素的二面体群，
- 阿贝尔群，
- 一个 Borel 子群，
- 同构于 $\mathbb{S}_4$，

• 或它们的某个子群。

Borel 子群中的幺幂共轭类生成一个阿贝尔子群。非平凡幺幂共轭类与不同于 Borel 子群的可解非阿贝尔子群相交，当且仅当 $p = 3$。但 3-循环不能生成$\mathbb{S}_4$，而 $\mathbb{A}_4$ 中的 3-循环共轭类同构于仿射架（$\mathbb{F}_4$，$\omega$），它属于列表（2.1）。

## Acknowledgements

N. A. 部分获得了 Secyt-UNC（Proyecto Consolidar 33620230100517CB）、CONICET（PIP11220200102916CO）和 FONCyT- ANPCyT（PICT-2019-03660）的资助。

N. A. 的部分工作是在他长期访问南方科技大学深圳国际数学中心期间完成的；他感谢 Efim Zelmanov 和 Slava Futorny 的热情款待。

N. A. 的部分工作是在他担任布鲁塞尔自由大学访问教授期间（2025-2026）完成的。他感谢 Leandro Vendramin 的友好款待，并感谢 Leandro 与 Istv´an Heckenberger 在布鲁塞尔进行的有趣讨论。

作者感谢Mauro Costantini、Fernando Fantino、Gast´onA.Garc´ıa、Mat´ıas Gra˜na 与 Leandro Vendramin 在相关论文中的合作[2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 16]，其中发展了相关技术并获得了支撑我们工作的结果。

本项目部分由欧盟——NextGenerationEU 根据国家复苏与韧性计划（NRRP）任务4组成部分2投资1.1——意大利大学与研究部2022年2月2日第104号PRIN 2022征集资助；项目2022S8SSW2（学科领域：PE——物理科学与工程）“李理论的代数与几何方面”。G.C. 是 INdAM 群 GNSAGA 的成员。

## References

[1] N. Andruskiewitsch. Nichols 代数导论. 载于 *Quantization, geometry and noncommutative structures in mathematics and physics*，Math. Phys. Stud.，第135–195页. 施普林格，Cham，2017年.[2] N.Andruskiewitsch、G.Carnovale 与 G. A.Garc´ıa. 李型有限单群上的有限维尖点霍普夫代数. 第一卷：$\mathbf{PSL}_n(q)$中的非半单类. *J. Algebra*，442:36–65，2015年.[3] N. Andruskiewitsch、G. Carnovale 与 G. A. Garc´ıa. 李型有限单群上的有限维尖点霍普夫代数第二卷：辛群中的幺幂类. *Commun. Contemp. Math.*，18(4):1550053, 35，2016年.

[4] N. Andruskiewitsch、G. Carnovale 与 G. A.Garc´ıa. 李型有限单群上的有限维尖点霍普夫代数. 第三卷：$\mathrm{PSL}_n(q)$中的半单类. *Rev.Mat. Iberoam.*，33(3):995–1024，2017年.[5] N. Andruskiewitsch、G. Carnovale 与 G. A. Garc´ıa. 李型有限单群上的有限维尖点霍普夫代数第四卷. 切瓦莱群与斯坦伯格群中的幺幂类. *Algebr. Represent. Theory*，23(3):621–655，2020年.[6] N. Andruskiewitsch、G. Carnovale 与 G. A. Garc´ıa. 李型有限单群上的有限维尖点霍普夫代数第五卷. 切瓦莱群与斯坦伯格群中的混合类. *Manuscripta Math.*，166(3-4):605–647，2021年.[7] N. Andruskiewitsch、G. Carnovale 与 G. A. Garc´ıa. 李型有限单群上的有限维尖点霍普夫代数第七卷. $\mathrm{PSL}_n(q)$与$\mathrm{PSp}_{2n}(q)$中的半单类. *J. Algebra*，639:354–397，2024年.[8] N. Andruskiewitsch 与 F. Fantino. 关于与交错群和二面体群相关联的尖点 Hopf 代数. *Rev. Un. Mat. Argentina*，48(3):57–71，2007年.[9] N. Andruskiewitsch、F. Fantino、M. Gra˜na 与 L. Vendramin. 交错群上的有限维尖点霍普夫代数是平凡的. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*，190(2):225–245，2011年.[10] N. Andruskiewitsch、F. Fantino、M. Gra˜na 与 L. Vendramin. 散在单群上的尖点 Hopf 代数. *J. Algebra*，325:305–320，2011年.[11] N. Andruskiewitsch 与 M. Gra˜na. 从架到尖点 Hopf 代数. *Adv. Math.*，178(2):177–243，2003年.[12] N. Andruskiewitsch、I. Heckenberger 与 L. Vendramin. 奇数维的尖点 Hopf 代数与可解群上的 Nichols 代数. 预印本 https://doi.org/10.48550/arXiv.2411.02304，2024年.[13] N. Andruskiewitsch 与 H.-J. Schneider. 尖点 Hopf 代数. 载于 *New directionsin Hopf algebras*，*Math. Sci. Res. Inst. Publ.*的第43卷，第1–68页. 剑桥大学出版社，剑桥，2002年.[14] N. Andruskiewitsch 与 S. Zhang. 关于与 $\mathbb{S}_n$中某些共轭类相关联的尖点 Hopf 代数. *Proc. Amer. Math. Soc.*，135(9):2723–2731，2007年.[15]S. Billey 与 V. Lakshmibai. *Singular loci of Schubert varieties*，*Progress in Mathematics*的第182卷. Birkh¨a user Boston, Inc.，马萨诸塞州波士顿，2000年.[16] G. Carnovale 与 M. Costantini. 李型有限单群上的有限维尖点霍普夫代数第六卷. Suzuki群与Ree群. *J. Pure Appl. Algebra*，225(4):论文号 106568, 19，2021年.[17]R. W. Carter. 外尔群中的共轭类. *Compositio Mathematica*，25(1):1–59，1972年.[18] R. W. Carter. *Simple groups of Lie type*. Wiley经典文库. John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1989年. 1972年原版的重印本，Wiley-Interscience出版物.[19] D. Ciubotaru 与 X. He. 分次仿射 Hecke代数的余中心与密度定理. *Journal of Pure and Applied Algebra*，220(1):382–410，2016年.[20] E. B. Dynkin. 半单李代数的半单子代数. 载于 *Five papers on algebra and group theory*，*American Math. Society Translations: Series 2*，1957年.[21] S. Freyre、M. Gra˜na 与 L. Vendramin. 关于$\mathrm{SL}(2,q)$与$\mathrm{GL}(2,q)$上的Nichols 代数. *J. Math. Phys.*，48(12):123513, 11，2007年.

[22] S. Freyre、M. Gra˜na 和 L. Vendramin。《关于 PGL(2, $q$) 和 PSL(2, $q$) 上的 Nichols 代数》。《 *J. Algebra Appl.*》，9(2):195–208，2010年。[23] M. Geck 和 G. Pfeiffer。 *Characters of finite Coxeter groups and Iwahori-Hecke al-gebras*，第 *London Mathematical Society Monographs. New Series*卷第21卷。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，2000年。[24] X. He。《Coxeter 群某些双陪集中的极小长度元素》。《 *Advancesin Mathematics*》，215(2):469–503，2007年。[25] I. Heckenberger。《算术根系的分类》。《 *Adv. Math.*》，220(1):59–124，2009年。[26] I. Heckenberger、E. Meir 和 L. Vendramin。《素数维单 Yetter–Drinfeld 模（群上）的有限维 Nichols 代数》。《 *Adv. Math.*》，444：论文编号109637，2024年。[27] I. Heckenberger 和 H.-J. Schneider。《有限秩二根系群上的 Nichols 代数 I》。《 *J. Algebra*》，324(11):3090–3114，2010年。[28] I. Heckenberger 和 L. Vendramin。《非阿贝尔群上半单 Yetter-Drinfeld 模的 Nichols 代数分类》。《 *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*》，19(2):299–356，2017年。[29] I. Heckenberger 和 L. Vendramin。《有限秩二根系群上的 Nichols 代数分类》。《 *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*》，19(7):1977–2017，2017年。[30] J. E. Humphreys。《 *Introduction to Lie algebras and representation theory*》，第 *Graduate Texts in Mathematics*卷第9卷。施普林格出版社，纽约—柏林，1978年。第二次印刷，修订版。[31] J. E. Humphreys。《 *Reflection groups and Coxeter groups*》，第 *CambridgeStudies in Advanced Mathematics*卷第29卷。剑桥大学出版社，剑桥，1990年。[32] J. E. Humphreys。《 *Conjugacy classes in semisimple algebraic groups*》，第*Mathematical Surveys and Monographs*卷第43卷。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1995年。[33] M. Javed、J. Parkin、P. Rowley 和 J. Walton。《有限李型例外群的极大环面》。《 *Communications in Algebra*》，52(11):4806–4833，2024年。[34] G. Malle 和 D. Testerman。《 *Linear algebraic groups and finite groups of Lie type*》，第 *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*卷第133卷。剑桥大学出版社，剑桥，2011年。[35] R. Ree。《与类型为($G_2$)的单李代数相关的一族单群》。《*Amer. J. Math.*》，83:432–462，1961年。[36] M. Reeder、P. Levy、J.-K. Yu 和 B. H. Gross。《单李代数上的正秩分次》。《 *Transform. Groups*》，17(4):1123–1190，2012年。[37] G. M. Seitz。《有限李型群中极大环面的根子群》。《 *PacificJ. Math.*》，106(1):153–244，1983年。[38] E. Sommers。《幂零轨道 Bala-Carter 定理的推广》。《 *International Mathematics Research Notices*》，1998(11):539–562，1998年1月。[39] T. A. Springer 和 R. Steinberg。《共轭类》。载于 *Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups (The Institute for Advanced Study, Princeton, N.J.,*

*1968/69)*，第 *Lecture Notes in Math.*卷第131卷，页167–266。施普林格，柏林—纽约，1970年。[40] R. Steinberg。《 *Endomorphisms of linear algebraic groups*》，第 *Memoirsof the American Mathematical Society*卷第80号。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1968年。[41] R. Steinberg。《 *Lectures on Chevalley groups*》，第 *University Lecture Series*卷第66卷。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，修订版，2016年。John Faulkner 和 Robert Wilson 编写的注释，附 Robert R. Snapp 的前言。[42] M. Suzuki。《 *Group theory. II*》，第 *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*卷第248卷。施普林格出版社，纽约，1986年。由日语译出。

(Andruskiewitsch) Profesor Emérito de la Facultad de Matemática, Física,Astronomía y Computación, Universidad Nacional de Córdoba. CIEM-CONICET. Medina Allende s/n (5000) Ciudad Universitaria, Córdoba, Argentina.Department of Mathematics and Data Science, Vrije Universiteit Brussel,Pleinlaan 2, 1050 Brussels, Belgium Shenzhen International Center for Mathematics, Southern University of Science and Technology, Shenzhen 518055, China*E*

*mail address*: n icol$_{\text{as.an}}$ druskiewitsch@$_{\text{unc.e}}$ du.ar

（Carnovale） Dipartimento di Matematica Tullio Levi-Civita, Università degliStudi di Padova, via Trieste 63, 3512,1 Padova, Italia.
*Email address*: carnoval@math.unipd.it, +39-049-8271354