arXiv:2603.12462v1 [math.CA] 12 Mar 2026

有限无向图上 Hardy–Littlewood 极大算子的尖锐变分不等式

´ ˇCRISTIAN GONZALEZ-RIQUELME、VJEKOSLAV KOVAC 和 JOSE MADRID

Abstract. 我们研究完全图上 Hardy–Littlewood 极大算子的尖锐 p-变分不等式，肯定地回答了 Feng Liu 和 Qingying Xue 提出的问题。我们还借助计算辅助，找出了所有至多含五个顶点的连通图的 1-变分不等式中的尖锐常数，并对路径图中相应的尖锐常数提出了猜想。最后，我们构造出具有任意大 p-变分常数的有限图。

1. Introduction

$f \in$函数 $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ 的中心 Hardy–Littlewood 极大函数定义为

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\lambda(\mathrm{B}(x,r))} \int_{\mathrm{B}(x,r)} |f(y)|\,\mathrm{d}y,$$

其中，λ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上的勒贝格测度，$\mathrm{B}(x,r)$ 表示以 x 为中心、半径为 r的欧几里得开球。Hardy–Littlewood 极大算子是调和分析中的基本对象之一，其映射性质已经被研究了一个多世纪。除欧几里得情形下 L^p-空间上的经典不等式外，Kinnunen [6] 的开创性结果表明，Hardy–Littlewood 极大算子在索о6列夫空间 $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ 上对 $1 < p \leqslant \infty$有界，由此开启了在导数层面开展系统研究的先河。此后，类似的端点问题（$p = 1$情形）和变差型问题一直推动着连续与离散情形中的大量研究；参见 [3]及其中的参考文献。特别地，Kurka [7] 证明了

$$\operatorname{Var} Mf \leqslant C \operatorname{Var} f, \tag{1.1}$$

对于任意有界变差函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$。Temur [10], 借鉴 Kurka 的论证，在离散情形下得到了类似结果，并证明式 (1.1) 对任意有界（离散）变差函数 $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ 也成立。尽管确定式 (1.1) 是否也以最优常数 $C = 1$成立仍是一个众所周知的开放问题，但 Aldaz 和 P´erez L´azaro[1] （连续情形）以及 Bober、Carneiro、Hughes 和 Pierce [2] （离散情形）已针对非中心 Hardy–Littlewood 极大算子得到了类似的锐利界。

可以将 $\mathbb{Z}$ 视为一个无限无向图，其中只有相邻的整数之间通过边相连。由此，上述主题自然引出了对更一般图上的不等式 (1.1) 的研究。设 $G = (V, E)$ 是一个局部有限连通无向图。以 v 为中心、半径为 r 的球定义为

$$\mathrm{B}_G(v,r) := \{w \in V : d_G(v,w) \leqslant r\}, \quad v \in V,\ r \geqslant 0,$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 26A45、42B25；次要分类 39A12、05C12。

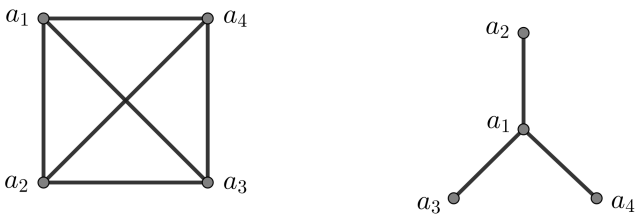

FIGURE 1. 完全图 K_4 （左）和星图 S_4 （右）。

其中， d_G 是 G上的距离函数，即 $d_G(v,w)$ 是 v 和 w之间最短路径所包含的边数。此时 Hardy–Littlewood 极大算子为

$$(M_G f)(v) := \max_{r\geqslant 0} \frac{1}{|\mathrm{B}_G(v,r)|} \sum_{w\in \mathrm{B}_G(v,r)} |f(w)|, \quad v \in V.$$

p-变差在此定义为

$$\mathrm{Var}_p f := \Big(\sum_{vw\in E} |f(v)-f(w)|^p \Big)^{1/p} = \Big(\frac{1}{2} \sum_{\substack{v,w\in V \\ d_G(v,w)=1}} |f(v)-f(w)|^p \Big)^{1/p}, \quad p \in (0,\infty).$$

最后，常数 $\mathsf{C}_{G,p}$ 定义为满足以下条件的最小数： $[0,\infty]$

$$\mathrm{Var}_p M_G f \leqslant \mathbf{C}_{G,p} \mathrm{Var}_p f$$

对每个函数 $f\colon V\to\mathbb{R}$，以下不等式均成立。在特殊情形 $p=1$ 下，我们将 Var_1 简记为 Var，将 C_G 简记为 $\mathsf{C}_{G,1}$。

确定数 $\mathsf{C}_{G,p}$ 的精确值这一问题由 Liu 和 Xue [8] 研究过。Soria 和 Tradacete [9]，给出了图上极大算子 L^p-范数的先前界，并发现完全图 K_n 和星图 S_n （见图 1）在极大算子的某些极值性质中起着特殊作用。Liu 和 Xue [8, 在定理 1.3] 中证明，对于 $G=K_n$，以下不等式成立： $1-1/n \leqslant \mathsf{C}_{K_n,p} < 1$ 对所有 $n\geqslant 3$ 均成立，且 $\mathsf{C}_{K_3,p}=2/3$ 对所有 $p>0$ 均成立。他们提出猜想 [8, 猜想 1.1 (i)]： 对于每个 $n\geqslant 3$ 以及每个 $p\in(0,\infty)$，都有

$$\mathbf{C}_{K_n,p} \;=\; 1-\frac{1}{n}.$$

第一作者与第三作者在 [4], 中为确立该猜想取得了实质性进展，他们证明该猜想对所有 $p > \log_6 4 \approx 0.77$[4, Theorem 1]成立。

In 本文中，我们给出完整解答，证明该猜想对所有 $p>0$成立 .

定理 1. 对于任意整数 $n\geqslant 3$、任意数 $p\in(0,\infty)$，以及定义在 K_n 的顶点上的任意实值函数f，我们有

$$\mathrm{Var}_p M_{K_n} f \leqslant \Big(1-\frac{1}{n}\Big) \mathrm{Var}_p f. \tag{1.2}$$

如 [4, 8], 中所述，(1.2) 中的常数 $1-1/n$ 是最佳的，因为当 $K_n=\bigl(V,\binom{V}{2}\bigr)$, $V=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$, $f\colon V\to\mathbb{R}$ 时等号成立，

$$f(a_i):=\begin{cases}0 & \text{for } 1\leqslant i\leqslant n-1,\\ 1 & \text{for } i=n,\end{cases}$$

自那以后

$$M_{K_n}f(a_i)=\begin{cases}1/n & \text{for } 1\leqslant i\leqslant n-1,\\ 1 & \text{for } i=n.\end{cases}$$

Liu 和 Xue 还猜想 [8, 猜想 1.1 (ii)]，对于星图 $G=S_n$，此前的同一常数也是最优的。换言之，他们在验证了 S_3 和 $p\leqslant 1$ 后，提出对于 $n\geqslant 3$ 以及任意的 $p\in(0,\infty)$，是否有 $\mathsf{C}_{S_n,p}=1-1/n$。第一和第三作者通过计算反驳了这一猜想，见 [4, 定理 2 (i)], :

$$\mathbf{C}_{S_3,p}=\frac{1}{3}\bigl(2^{p/(p-1)}+1\bigr)^{(p-1)/p}\quad\text{for } p>1.$$

此外，已有结果表明 [5, 定理 14]：

$$\mathbf{C}_{S_n,2}=\frac{1}{n}\bigl(n^2-n-1\bigr)^{1/2}\quad\text{for } n\geqslant 3.$$

尚待解决的是一个合理的猜想：对于 $n\geqslant 4$ 和 $0<p\leqslant 1$，最佳常数仍为 $1-1/n$；而 [4, 定理 2 (ii), (iii)] 则证实了当 $1/2\leqslant p\leqslant 1$ 或 $n=4$ 时这一结论成立，并且对于依赖于 $n\geqslant 5$ 的某个更大范围内的 $p\in(0,1)$，结论也成立。然而，本文不再探讨这一研究方向。

让我们暂时将注意力转向特殊情形 $p=1$，希望计算 Hardy–Littlewood 极大算子在其他一些图G上的尖锐 1-变分常数 C_G。注意，在图同构意义下，3 个顶点上的连通图只有此前提到的两种：完全图 K_3 和星图 S_3。我们已经从 [8] 知道：

所有具有 3 个顶点的连通图 G 都有相同的常数 $\mathsf{C}_G=2/3$。

接下来最简单的研究对象是具有 4 个顶点的无向图。这样的图总共有 6 种。除了完全图 K_4 和星图 S_4 （见图 1）之外，现在还有圈图 C_4 和路径图 P_4 （见图 2），以及爪图 Y 和菱形图 D （见图 3）。利用线性规划的基本思想，并借助 Mathematica 软件进行一些计算辅助[11] （见第 3 节），我们能够求出这些图各自的精确常数，由此得出以下结论。

定理 2. 所有具有 4 个顶点的连通图 G 都具有相同的常数 $\mathsf{C}_G=3/4$。

接下来的挑战是研究 21 个具有 5 个顶点的无向图同构类。相应的优化问题通过 Mathematica 求解（见第 4 节），得到如下结果。

观察3. 具有 5 个顶点的连通图 G的尖锐常数 C_G 属于集合$\{4/5, 49/60, 33/40, 5/6, 17/20\}$。

定理 2 与观察3之间一个微妙的区别是，后者是通过 Mathematica 命令 Maximize 验证的。尽管该命令通常很可靠，但除非目标函数是多项式，否则无法保证找到全局最大值，即使

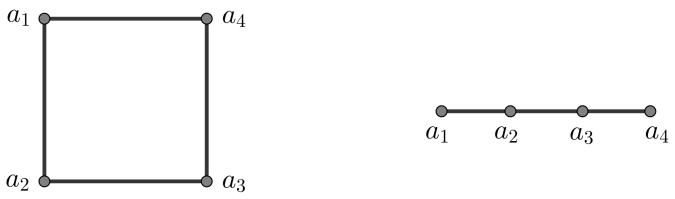

FIGURE 2. 圈图 C_4 （左）和路径图 P_4 （右）。

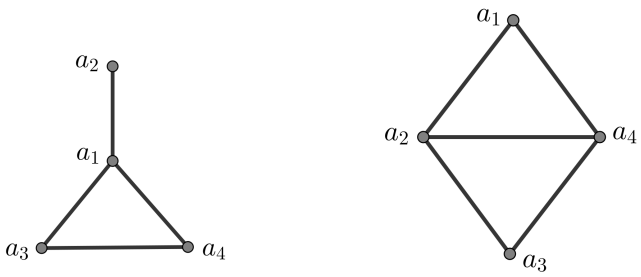

FIGURE 3. 爪图 Y （左）和菱形图 D （右）。

我们坚信这里确实如此。我们将看到，最大值 $17/20$ 是在五个非同构图上取得的；这似乎给一项可能的研究课题带来了困难：对固定顶点数、使 C_G 达到极值的图进行分类。

从以上给出的少量数据来看，人们或许会猜想 1-变分常数 C_G 不会超过 1。我们的下一个结果表明，事实远非如此：最佳常数 $\mathsf{C}_{G,\ p}$ 可以任意大，即使对每个固定的 $p \in (0,\infty)$ 也是如此。

定理 4. 对于每个 $p, C \in (0,\infty)$，都存在一个有限无向图 $G = (V, E)$，使得 $\mathsf{C}_{G,\ p} > C$。

然而，由 n 个顶点组成的路径（记作 P_n）是一类相当特殊的图，上一节给出的定理 4 证明中的例子并不适用于它。我们猜想其最优常数 C_{P_n} 的取值为.....

猜想 5. 对于每个整数 $n \geqslant 3$，路径图 P_n 对应的最优 1-变差常数等于

$$\mathbf{C}_{P_n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

我们有数值证据表明，猜想 5 对所有 $n \leqslant 10$ 都成立。它可被视为前述关于 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{R}$的开放问题在图论和有限情形下的类比，并且它蕴含这些问题。具体而言，将任意长的整数区间嵌入 P_n，当 n 足够大时，便可轻易推出

$$\mathbf{C}_{\mathbb{Z}} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \mathbf{C}_{P_n}.$$

换言之，只要证明 $\mathsf{C}_{P_n} \leqslant 1$ 对所有 n 都成立，就足以确立整数格上的结论 $\mathsf{C}_{\mathbb{Z}} \leqslant 1$，进而也可确立实数轴上的结论。因此，若猜想 5 成立，预计将很难证明。

2. Proof of Theorem 1 on complete graphs

注意，该定理的情形 $p \geqslant 1$ 已由 [4, 定理 1 (i)、(iii)]所涵盖。此处我们修改 [4, §2.1.1] 中的证明，使其适用于所有 $p \in (0,1)$以及所有 $n \geqslant 3$。显然，只需考虑非负函数 f即可。

为完整起见，我们首先简要回顾来自 [4]的归纳方法。归纳基础可以取为 $n = 3$，它不过就是 [8, 定理 1.3 (ii)], ，这一点前文已有说明。取某个 $n \geqslant 4$ ，并假设定理 1 对图 K_{n-1}成立。若将$G = \big(V$的顶点 $\binom{V}{2}\big) \cong K_n$列为 $V = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$，则其极大函数为

$$M_G f(a_i) = \max\{f(a_i), m\} \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, n,$$

其中

$$m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)$$

是 f 的平均值。不失一般性，我们将数 $f(a_i)$、 $1 \leqslant i \leqslant n$ 按升序排列，然后取满足下式的唯一 $r \in \{1, \dots, n\}$

$$0 \leqslant f(a_1) \leqslant \cdots \leqslant f(a_{r-1}) < m \leqslant f(a_r) \leqslant \cdots \leqslant f(a_n).$$

对于给定的 $f\colon\ V \to [0, \infty)$，猜想中的尖锐变分不等式 (1.2) 现在写作

$$\sum_{\substack{i,j \\ i>j\geqslant r}} \big(f(a_i) - f(a_j)\big)^p + (r-1)\sum_{i=r}^{n}\big(f(a_i) - m\big)^p \leqslant \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^p \sum_{\substack{i,j \\ i>j}} \big(f(a_i) - f(a_j)\big)^p. \tag{2.1}$$

注意，当 $r = 1$ 时，所需的不等式 (2.1) 实际上是显然的，因为此时 f 必须是常数。此外，其特例 $r = n$ 已在 [4, 引理 10] 中证明。因此，我们可以假设 $2 \leqslant r \leqslant n-1$。

将归纳假设应用于图 $G' = \big(V', \binom{V'}{2}\big) \cong K_{n-1}$（从 G 中移除顶点 a_r 后得到），并应用于将 f 限制到 $V' = V \setminus \{a_r\}$ 后得到的函数:

$$\sum_{\substack{i,j \\ i>j \\ i\neq r,\ j\neq r}} \big(M_{G'} f|_{V'}(a_i) - M_{G'} f|_{V'}(a_j)\big)^p \leqslant \Big(1 - \frac{1}{n-1}\Big)^p \sum_{\substack{i,j \\ i>j \\ i\neq r,\ j\neq r}} \big(f(a_i) - f(a_j)\big)^p. \tag{2.2}$$

注意， $f|_{V'}$的平均值满足

$$m' := \frac{1}{n-1}\sum_{\substack{i \\ i\neq r}} f(a_i) \leqslant m$$

and

$$M_{G'} f|_{V'}(a_i) = \max\{f(a_i), m'\} \quad \text{for } i \neq r.$$

我们断言

$$\underbrace{M_G f(a_i) - M_G f(a_j)}_{\geqslant 0} \leqslant \underbrace{M_{G'} f|_{V'}(a_i) - M_{G'} f|_{V'}(a_j)}_{\geqslant 0} \tag{2.3}$$

当 $i > j$、 $i \neq r$、 $j \neq r$ 时，并逐一验证。

- 若 $i > j > r$，则（2.3）的两边均等于 $f(a_i) - f(a_j)$。
- 若 $r > i > j$，则 (2.3) 的左端为零，而右端非负。

- 最后，若 $i > r > j$，则有

$$M_G f(a_i) = f(a_i) = M_{G'} f|_{V'}(a_i)$$

and

$$M_G f(a_j) = m \geqslant \max\{f(a_j), m'\} = M_{G'} f|_{V'}(a_j),$$

因此 (2.3) 再次成立。

于是，(2.2)、(2.3) 与 $1 - 1/(n-1) \leqslant 1 - 1/n$ 共同蕴含

$$\sum_{\substack{i,j\\ i>j\geqslant r+1}} \big(f(a_i) - f(a_j)\big)^p + (r-1) \sum_{i=r+1}^{n} \big(f(a_i) - m\big)^p \leqslant \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^p \sum_{\substack{i,j\\ i>j\\ i\neq r,\ j\neq r}} \big(f(a_i) - f(a_j)\big)^p.$$

为了由最后的估计推出 (2.1)，尚需加上顶点 a_r 在证明之后的贡献

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=r+1}^{n} \big(f(a_i) - f(a_r)\big)^p + (r-1)\big(f(a_r) - m\big)^p \\
&\leqslant \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^p \Big(\sum_{i=r+1}^{n} \big(f(a_i) - f(a_r)\big)^p + \sum_{j=1}^{r-1} \big(f(a_r) - f(a_j)\big)^p \Big).
\end{aligned}$$

这个最后的不等式 将由以下命题推出，只需进行如下代换 s

$$\begin{aligned}
u &= f(a_r) - m \geqslant 0, \\
x_i &= f(a_i) - f(a_r) \geqslant 0, \quad i = r+1, \dots, n, \\
y_i &= f(a_r) - f(a_i) \geqslant u, \quad i = 1, \dots, r-1
\end{aligned}$$

即可。

命题 6. 对于整数 $2 \leqslant r < n$、参数 $p \in (0, 1)$ 以及实数

$$\begin{aligned}
x_i &\geqslant 0, \quad i = r+1, \dots, n, \\
y_i &\geqslant u \geqslant 0, \quad i = 1, \dots, r-1
\end{aligned}$$

满足

$$\sum_{i=r+1}^{n} x_i + nu = \sum_{i=1}^{r-1} y_i,$$

以下不等式成立：

$$\sum_{i=r+1}^{n} x_i^p + (r-1)u^p \leqslant \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^p \Big(\sum_{i=r+1}^{n} x_i^p + \sum_{i=1}^{r-1} y_i^p \Big). \tag{2.4}$$

不等式（2.4）在 [4, 公式（2.17）], 中得以表述，其中仅对 $p \geqslant \log_6 4$ 证明了该不等式。根据前面的讨论，并如 [4, 备注 11], 所述，定理 1 可由将（2.4）推广到所有 $0 < p < 1$ 得出。

命题 6 的证明。不等式（2.4）可改写为

$$\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^p\right)\sum_{i=r+1}^{n}x_i^p+(r-1)u^p\leqslant\left(1-\frac{1}{n}\right)^p\sum_{i=1}^{r-1}y_i^p. \tag{2.5}$$

我们首先应用卡拉马塔不等式于凹函数 $x\mapsto x^p$，正如在 [4], 中那样，以得 t

$$\sum_{i=1}^{r-1}y_i^p\geqslant\Big(\sum_{i=1}^{r-1}y_i-(r-2)u\Big)^p+(r-2)u^p=\Big(\sum_{i=r+1}^{n}x_i+(n-r+2)u\Big)^p+(r-2)u^p$$

并对 $x\mapsto x^p$ 使用詹森不等式，从而得到

$$\sum_{i=r+1}^{n}x_i^p\leqslant(n-r)^{1-p}\Big(\sum_{i=r+1}^{n}x_i\Big)^p.$$

利用这两者，估计式(2.5)将由以下得出

$$\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^p\right)(n-r)^{1-p}\Big(\sum_{i=r+1}^{n}x_i\Big)^p+\left(r-1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^p(r-2)\right)u^p$$
$$\leqslant\left(1-\frac{1}{n}\right)^p\Big(\sum_{i=r+1}^{n}x_i+(n-r+2)u\Big)^p.$$

除以$(1-1/n)^p$ 并代入

$$\alpha=\sum_{i=r+1}^{n}x_i,\quad\beta=(n-r+2)u,$$
$$s=\left(\Big(\frac{n}{n-1}\Big)^p-1\right)(n-r)^{1-p},\quad t=\left(\Big(\frac{n}{n-1}\Big)^p(r-1)-r+2\right)(n-r+2)^{-p},$$

我们可以将最后一个不等式改写为

$$\alpha^p s+\beta^p t\leqslant(\alpha+\beta)^p.$$

证明这一点只需说明

$$s^{1/(1-p)}+t^{1/(1-p)}\leqslant 1, \tag{2.6}$$

因为这样便可通过共轭指数 $1/p$ 和 $1/(1-p)$ 的 H¨older 不等式完成命题的证明:

$$\alpha^p s+\beta^p t\leqslant\big((\alpha^p)^{1/p}+(\beta^p)^{1/p}\big)^p\big(s^{1/(1-p)}+t^{1/(1-p)}\big)^{1-p}\overset{(2.6)}{\leqslant}(\alpha+\beta)^p.$$

对于上述选取的 s 和 t，性质 (2.6) 表示为

$$\left(\Big(\frac{n}{n-1}\Big)^p-1\right)^{1/(1-p)}(n-r)+\left(\Big(\frac{n}{n-1}\Big)^p(r-1)-r+2\right)^{1/(1-p)}(n-r+2)^{-p/(1-p)}\leqslant 1$$

而这将是.....的推论

$$\varphi(x)\leqslant 1\quad\text{for } x\in[2,n-1], \tag{2.7}$$

其中 $n \geqslant 3$ 和 $p \in (0,1)$ 是固定的，而 φ 定义为

$$\varphi(x) := \left(\left(\frac{n}{n-1} \right)^p - 1 \right)^{1/(1-p)} (n-x) + \left(\left(\frac{n}{n-1} \right)^p (x-1) - x + 2 \right)^{1/(1-p)} (n-x+2)^{-p/(1-p)}.$$

注意到

$$\varphi''(x) = \frac{p}{(1-p)^2} \left(\left(\frac{n}{n-1} \right)^p (n+1) - n \right)^2 \times \left(\left(\frac{n}{n-1} \right)^p (x-1) - x + 2 \right)^{(2p-1)/(1-p)} (n-x+2)^{(p-2)/(1-p)} > 0.$$

因此，φ 在区间 $[2, n-1]$ 上是凸函数，因此验证 (2.7) 归结为

$$\varphi(2) = \frac{(n-2)(n^p - (n-1)^p)^{1/(1-p)} + 1}{(n-1)^{p/(1-p)}} \leqslant 1 \tag{2.8}$$

and

$$\varphi(n-1) = \frac{(n^p - (n-1)^p)^{1/(1-p)} + 3^{-p/(1-p)} ((n-2)n^p - (n-3)(n-1)^p)^{1/(1-p)}}{(n-1)^{p/(1-p)}} \leqslant 1. \tag{2.9}$$

I不等式 (2.8) 和 (2.9) 分别在下文引理 7 和引理 8 中得到证明。 □

还需证明两个辅助不等式。

引理 7. 对于整数 $n \geqslant 2$ 和实数 $p \in (0,1)$，有

$$(n-2)\big(n^p - (n-1)^p\big)^{1/(1-p)} + 1 \leqslant (n-1)^{p/(1-p)}.$$

引理 7 的证明。利用

$$n^p - (n-1)^p = \int_{n-1}^{n} \frac{p}{x^{1-p}} \, \mathrm{d}x \leqslant \frac{p}{(n-1)^{1-p}}, \tag{2.10}$$

该不等式将由以下事实得出

$$(n-2)\Big(\frac{p}{(n-1)^{1-p}} \Big)^{1/(1-p)} + 1 \leqslant (n-1)^{p/(1-p)},$$

其可化简为

$$p^{1/(1-p)}(n-2) + n - 1 \leqslant (n-1)^{1/(1-p)}.$$

然而，这不过是

$$F_p(n) \geqslant 0, \tag{2.11}$$

其中 $F_p \colon [2, \infty) \to \mathbb{R}$ 由下式定义

$$F_p(x) = (x-1)^{1/(1-p)} - p^{1/(1-p)}(x-2) - x + 1$$

对于固定的 $0 < p < 1$。对于 $x > 2$，我们有

$$F_p'(x) = \frac{1}{1-p}(x-1)^{p/(1-p)} - p^{1/(1-p)} - 1 > \frac{p}{1-p} - p^{1/(1-p)}.$$

最后一个表达式的正性等价于

$$-(1-p)\log(1-p) - p \log p > 0,$$

这一点很容易看出成立，因为其左端是伯努利分布（即抛掷一枚不公平硬币）的香农熵，而已知该熵为正。因此， F_p在 $[2,\infty)$上严格递增，且(2.11)由 $F_p(2) = 0$得出。□

引理 8。对于整数 $n \geqslant 2$ 和实数 $p \in (0,1)$，有

$$\big(n^p - (n-1)^p\big)^{1/(1-p)} + 3^{-p/(1-p)}\big((n-2)n^p - (n-3)(n-1)^p\big)^{1/(1-p)} \leqslant (n-1)^{p/(1-p)}$$

引理 8 的证明。回顾式 (2.10)，它还给出

$$\begin{aligned}(n-2)n^p - (n-3)(n-1)^p &= (n-2)\big(n^p - (n-1)^p\big) + (n-1)^p \\ &\leqslant (n-2)\frac{p}{(n-1)^{1-p}} + (n-1)^p = \frac{p(n-2)+n-1}{(n-1)^{1-p}},\end{aligned}$$

可见，所需的不等式可由下式推出

$$\Big(\frac{p}{(n-1)^{1-p}}\Big)^{1/(1-p)} + 3^{-p/(1-p)}\Big(\frac{p(n-2)+n-1}{(n-1)^{1-p}}\Big)^{1/(1-p)} \leqslant (n-1)^{p/(1-p)},$$

化简后为

$$p^{1/(1-p)} + \Big(\frac{pn+n-2p-1}{3^p}\Big)^{1/(1-p)} \leqslant (n-1)^{1/(1-p)}.$$

这可以改写为

$$G_p(n) \geqslant 0, \tag{2.12}$$

其中 $G_p\colon [2,\infty) \to \mathbb{R}$ 定义为

$$G_p(x) = (x-1)^{1/(1-p)} - \Big(\frac{px+x-2p-1}{3^p}\Big)^{1/(1-p)} - p^{1/(1-p)}$$

对于固定的 $0 < p < 1$。当 $x > 2$ 时，我们有

$$\begin{aligned}G_p'(x) &= \frac{1}{1-p}(x-1)^{p/(1-p)} - \frac{1}{1-p}\frac{1+p}{3^p}\Big(\frac{px+x-2p-1}{3^p}\Big)^{p/(1-p)} \\ &\geqslant \frac{1}{1-p}(x-1)^{p/(1-p)} - \frac{1}{1-p}\frac{1+p}{3^p}\Big(\frac{1+p}{3^p}(x-1)\Big)^{p/(1-p)} \\ &= \frac{1}{1-p}\left(1 - \Big(\frac{1+p}{3^p}\Big)^{1/(1-p)}\right)(x-1)^{p/(1-p)} > 0,\end{aligned}$$

因为

$$3^p > e^p > 1+p$$

对于 $p \in (0,1)$。因此， G_p 在 $[2,\infty)$ 上严格递增，为了验证 (2.12)，我们只需再检查

$$G_p(2) = 1 - 3^{-p/(1-p)} - p^{1/(1-p)} > 0.$$

最后这个不等式可直接由

$$3^{-p/(1-p)} < e^{-p/(1-p)} = \frac{1}{e^{p/(1-p)}} < \frac{1}{1+p/(1-p)} = 1-p$$

and

$$p^{1/(1-p)} < p,$$

因此，证明完成。 □

至此，命题 6 的证明完成，定理 1 的证明也随之完成。

3. Exhaustive study of graphs on 4 vertices

我们已经指出，当 G 为 K_4 或 S_4 时，C_G 是已知的。我们的目标是通过列出并研究所有其余的 4 个顶点的连通图（在图同构意义下），来证明定理 2。

3.1. 圈图 C_4。若将 C_4 的顶点按图 2 左半部分所示列出，并记 $x_i = |f(a_i)|$，则

$$M_{C_4} f(a_i) = \max\left\{x_i, \frac{1}{3}(x_{i-1} + x_i + x_{i+1}), \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\right\}$$

对于 $i = 1$、2、3、4，其中指标的减法/加法按模 4 理解，取值属于代表元集合 $\{1, 2, 3, 4\}$。该问题转化为最大化目标函数

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \sum_{i=1}^{4} |M_{C_4} f(a_i) - M_{C_4} f(a_{i+1})|$$

在如下约束条件下

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0, \quad |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |x_3 - x_4| + |x_4 - x_1| = 1.$$

现在可以使用 Mathematica 命令 Maximize（它会证实所需结果），但我们无法绝对确信地依赖该输出，因为目标函数并非全局（而只是分段）多项式。

因此，自然要将可行域划分为若干子区域，使得在每个子区域上，目标函数均为线性函数，且约束均为线性不等式或等式。通过观察 C_4 的对称性，我们将问题拆分为以下 9 个线性优化子问题。每个子问题均使用 Mathematica 命令 LinearOptimization 独立且严谨地求解。

Maximize $(3x_1 - x_2 - x_3 - x_4)/2$，满足 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant x_4$、$x_1 + x_3 + x_4 \leqslant 3x_2$、$2x_1 = 1 + 2x_4$，返回 $2/3$。
Maximize $(3x_1 - x_2 - x_3 - x_4)/2$，满足 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant x_4$、$x_1 + x_3 + x_4 \geqslant 3x_2$、$2x_1 = 1 + 2x_4$，返回 $3/4$。
Maximize $(3x_1 - x_2 - x_3 - x_4)/2$ 满足 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_4 \geqslant x_3$, $2x_1 = 1 + 2x_3$，返回 $3/4$。
Maximize $(3x_1 - x_2 - x_3 - x_4)/2$ 满足 $x_1 \geqslant x_3 \geqslant x_2 \geqslant x_4$, $3x_3 \leqslant x_1 + x_2 + x_4$, $2(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) = 1$，返回 $3/4$。
Maximize $2(x_1 - x_3)$ 满足 $x_1 \geqslant x_3 \geqslant x_2 \geqslant x_4$, $3x_3 \geqslant x_1 + x_2 + x_4$, $x_1 + x_4 \geqslant 2x_3$, $2(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) = 1$，返回 $1/2$。
Maximize $(5x_1 - 7x_2 + 5x_3 - 3x_4)/6$ 满足 $x_1 \geqslant x_3 \geqslant x_2 \geqslant x_4$, $3x_3 \geqslant x_1 + x_2 + x_4$,$x_1 + x_4 \leqslant 2x_3$, $x_1 + x_2 \leqslant 2x_3$, $x_1 + x_3 + x_4 \leqslant 3x_2$, $2(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) = 1$ 返回 $1/3$。Maximize $2(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)/3$ 满足 $x_1 \geqslant x_3 \geqslant x_2 \geqslant x_4$, $3x_3 \geqslant x_1 + x_2 + x_4$,$x_1 + x_4 \leqslant 2x_3$, $x_1 + x_2 \leqslant 2x_3$, $x_1 + x_3 + x_4 \geqslant 3x_2$, $2(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) = 1$ 返回 $1/3$。Maximize $(3x_1 - x_2 - x_3 - x_4)/2$ 满足 $x_1 \geqslant x_3 \geqslant x_2 \geqslant x_4$, $3x_3 \geqslant x_1 + x_2 + x_4$,$x_1 + x_4 \leqslant 2x_3$, $x_1 + x_2 \geqslant 2x_3$, $x_1 + x_3 + x_4 \leqslant 3x_2$, $2(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) = 1$ 返回 $1/2$。Maximize $2(2x_1 - x_3 - x_4)/3$ 满足 $x_1 \geqslant x_3 \geqslant x_2 \geqslant x_4$, $3x_3 \geqslant x_1 + x_2 + x_4$,$x_1 + x_4 \leqslant 2x_3$, $x_1 + x_2 \geqslant 2x_3$, $x_1 + x_3 + x_4 \geqslant 3x_2$, $2(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) = 1$ 返回 $1/2$。

因此

$$\mathbf{C}_{C_4} = \max\Big\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}\Big\} = \frac{3}{4}.$$

Th尖锐常数 $3/4$ 在例如 $x_1 = 1/2$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ 时可取到 .

请注意，将上述问题拆分为线性问题并非极小化：有些子问题（例如前两个）显然可以合并。事实上，每当 Mathematica 在化简目标函数或含绝对值的约束时需要帮助，我们就手动添加新的约束，将问题拆分为子问题。我们以牺牲极小性换取简洁性。

3.2. 路径图 P_4。如果将 P_4 的顶点记为 $V = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$，如图 2 右半部分所示，并将 $i = 1$ 的 $x_i = |f(a_i)|$ 记为 2 、 3 、 4，则

$$\begin{aligned}
M_{P_4} f(a_1) &= \max\Big\{x_1, \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\Big\},\\
M_{P_4} f(a_2) &= \max\Big\{x_2, \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\Big\},\\
M_{P_4} f(a_3) &= \max\Big\{x_3, \frac{1}{3}(x_2 + x_3 + x_4), \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\Big\},\\
M_{P_4} f(a_4) &= \max\Big\{x_4, \frac{1}{2}(x_3 + x_4), \frac{1}{3}(x_2 + x_3 + x_4), \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\Big\}.
\end{aligned}$$

此时目标函数为

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto |M_{P_4} f(a_1) - M_{P_4} f(a_2)| + |M_{P_4} f(a_2) - M_{P_4} f(a_3)| + |M_{P_4} f(a_3) - M_{P_4} f(a_4)|,$$

而约束为

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0, \quad |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |x_3 - x_4| = 1.$$

与之前相同的步骤将问题拆分为 32 个线性优化子问题，每个子问题都可以通过 Mathematica 轻松自动求解。最终，我们得到 $\mathsf{C}_{P_4} = 3/4$。也很容易看出，例如当 $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$时，这个常数可以取到。

3.3. 爪图 Y。这次，回想图3的左半部分，

$$\begin{aligned}
M_Y f(a_1) &= \max\Big\{x_1, \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\Big\},\\
M_Y f(a_2) &= \max\Big\{x_2, \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\Big\},\\
M_Y f(a_3) &= \max\Big\{x_3, \frac{1}{3}(x_1 + x_3 + x_4), \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\Big\},\\
M_Y f(a_4) &= \max\Big\{x_4, \frac{1}{3}(x_1 + x_3 + x_4), \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\Big\}.
\end{aligned}$$

与之前相同，我们针对以下内容最大化 $\mathsf{Var} M_Y f$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0, \quad |x_1 - x_2| + |x_1 - x_3| + |x_1 - x_4| + |x_3 - x_4| = 1.$$

将此任务拆分为 29 个简单的线性优化子问题并逐一求解后，我们得到 $\mathsf{C}_Y = 3/4$，正如前文所述。一个极值点是 $x_2 = 1$, $x_1 = x_3 = x_4 = 0$。

3.4. 菱形图 D。从图3的右半部分可以读出

$$\begin{aligned}
M_D f(a_1) &= \max\Big\{x_1, \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_4), \frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4)\Big\},\\
M_D f(a_2) &= \max\Big\{x_2, \frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4)\Big\},\\
M_D f(a_3) &= \max\Big\{x_3, \frac{1}{3}(x_2+x_3+x_4), \frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4)\Big\},\\
M_D f(a_4) &= \max\Big\{x_4, \frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4)\Big\}
\end{aligned}$$

以及约束

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0, \quad |x_1-x_2|+|x_1-x_4|+|x_2-x_3|+|x_2-x_4|+|x_3-x_4| = 1.$$

再按照同样的步骤进行一次，即拆分为18个线性优化子问题，我们得到 $\mathsf{C}_D = 3/4$ ，且一个极值点为 $x_2 = 1/3$, $x_1 = x_3 = x_4 = 0$。

4. Exhaustive study of graphs on 5 vertices

我们的目标是为观察3提供有力的支持证据。在一个由5个顶点组成的集合上，共有21个连通图的同构类，如图4所示。对于其中的每一个，Mathematica 命令 Maximize 都能为相应的约束优化问题给出较为可靠的答案：

在 $f \geqslant 0$ 的约束下 Maximize $\mathsf{Var} M_G f$ ， $\mathsf{Var} f = 1$。

按行从左向右观察图4，所示图的最优常数 C_G 依次为

$$\frac{4}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{5}, \frac{17}{20}, \frac{4}{5}, \frac{17}{20}, \frac{4}{5}, \frac{33}{40}, \frac{4}{5}, \frac{17}{20}, \frac{33}{40}, \frac{17}{20}, \frac{4}{5}, \frac{4}{5}, \frac{33}{40}, \frac{17}{20}, \frac{49}{60}, \frac{5}{6}, \frac{33}{40}, \frac{4}{5}.$$

我们看到， C_G 唯一可能的取值正是之前所声称的那些值。

5. Proof of Theorem 4 on large variational constants

设 $(l_i)_{i=0}^{\infty}$ 是按递归方式定义的正整数序列

$$\begin{cases} l_0 := 1, \\ l_i := i + \sum_{j=0}^{i-1} l_j \quad \text{for } i \geqslant 1. \end{cases}$$

它的前几项是 1、2、5、11、23。一般而言，由归纳法可得 $l_{n+1} = 2l_n + 1$，且对于所有 $n \geqslant 1$，均有 $l_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$。此外，固定整数 $k \geqslant 2$ 和 $m > p$。我们将构造 $G = (V, E)$，使其成为一棵有根树，根为 v，所有顶点分布在第 0、1、2、3、.....、l_{m+1} 层。根顶点 v 是第 0 层上唯一的顶点。恰好在标记为 $l_i - 1$（其中 $i = 1$、2、.....、m）的各层上，每个顶点都会分出 k 个子节点；在第 $l_{m+1} - 1$ 层上，每个顶点分出 k^2 个子节点；而在其他所有层上，除最后一层的叶节点外，每个顶点都恰有一个子节点。

换句话说，从根 v 悬挂下来的唯一顶点标记为 a_1，随后分支为 k 个顶点，其中一个记为 b_1。接着，我们向 b_1 连接一条长度为 $l_1 = 2$的路径，路径末端是某个顶点 a_2，该顶点随后分支为 k 个新顶点，其中一个记为 b_2。对于与 b_1处于同一层级的每个顶点，我们以类似方式进行。接下来，我们向 b_2 连接一条长度为 $l_2 = 5$ 的路径，路径末端为 a_3，该顶点随后分支为 k 个顶点，其中一个称为 b_3，依此类推。在最终定义顶点 a_m 和 b_m后，我们向 b_m 连接一条长度为 l_m 的路径，路径末端为 a_{m+1}，它分支为树的 k^2 个叶节点。紧邻其下方的顶点

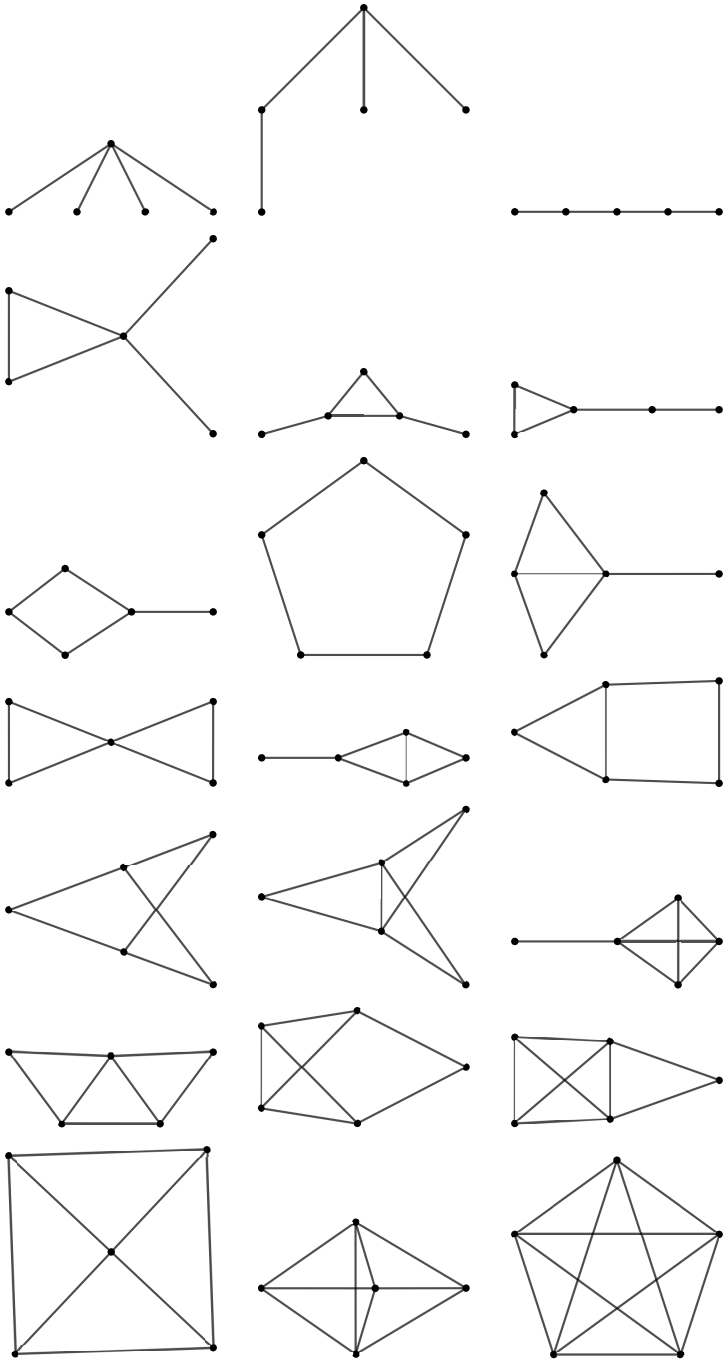

FIGURE 4. 5 个顶点上的连通图。

b_m 被命名为 w。我们对所有与 b_m处于同一层级的顶点采用类似的构造。图5展示了采用 $k = m = 3$ 进行这一构造的一个示例。

注意，以 b_m 为中心、半径为 $d_G(b_m, v)$ 的球 $= d_G(b_m, a_{m+1})$ 在每一树层级上至多包含 k 个顶点，因此其基数至多为 $C_m k$，其中常数 C_m 仅取决于

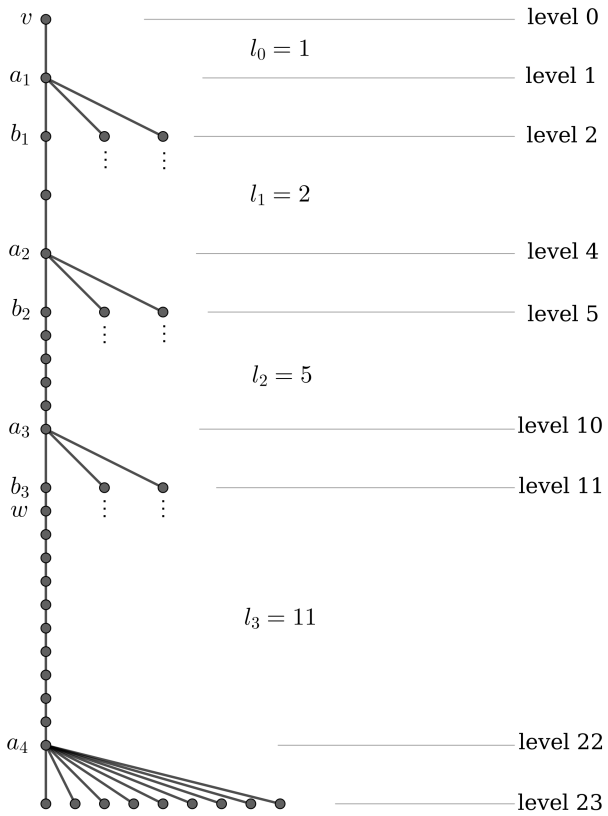

FIGURE 5. 具有较大 $C_{G,\ p}$ 的图示例。

m。另一方面，顶点 w 在距离不超过 $d(w,v)$ 的范围内有超过 k^2 个顶点；这些顶点就是树叶。因此，取函数 $f\colon V \to \mathbb{R}$，使其在根 v 处取值为 1，在其他地方取值为 0，我们得到

$$\mathrm{Var}_p f = 1$$

and

$$M_G f(b_m) \geqslant \frac{1}{C_m k}, \quad M_G f(w) \leqslant \frac{1}{k^2}.$$

由于与 b_m 处于同一层的顶点有 k^m 个，因此我们需要沿着与 $b_m w$“平行”的边，为p-变差添加 k^m 项贡献。因此，

$$\mathrm{Var}_p M_G f \geqslant \left(k^m\right)^{1/p}\Big(\frac{1}{C_m k} - \frac{1}{k^2}\Big),$$

其渐近上等于 $k^{m/p-1}$（相差一个常数因子）。当固定 $m > p$ 而 k 趋于无穷时，它可以任意增大，从而使 $C_{G,\ p}$ 任意大。这就完成了定理 4 的证明。

ACKNOWLEDGMENTS

C. G-R. 获西班牙科学、创新与大学部资助，项目编号为 PID2023-150984NB-I00。C.G-R. 还获西班牙国家研究

机构通过塞韦罗·奥乔亚和 Mar´ıa de Maeztu 研发卓越中心与单位计划（CEX2020-001084-M）提供的资助，并感谢 CERCA计划/加泰罗尼亚政府提供的机构支持。V. K. 部分获克罗地亚科学基金会项目 HRZZ-IP-2022-10-5116（FANAP）资助。V. K. 还部分获欧盟通过国家复苏与韧性计划 2021–2026 提供的 NextGenerationEU 资助；并获萨格勒布大学理学院机构资助 IK IA 1.1.3. Impact4Math。J.M. 部分获美国数学会斯特凡·伯格曼奖学金和西蒙斯基金会第 453576 号资助。

References

[1] Jes´us M. Aldaz 和 Francisco Javier P´erez L´azaro。有界变差函数、一维极大函数的导数及其在不等式中的应用。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，359(5):2443– 2461，2007。doi:10.1090/S0002-9947-06-04347-9。[2] Jonathan Bober、Emanuel Carneiro、Kevin Hughes 和 Lillian B. Pierce。关于极大函数的田中定理的离散版本。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，140(5):1669–1680，2012。doi:10.1090/S0002-9939-2011-11008-6。[3] Emanuel Carneiro。极大算子的正则性：近期进展与若干开放问题。载于 *New trends in applied harmonic analysis. Volume 2. Harmonic analysis geometric measure theory and applications. Collected papers based on courses given at the 2017 CIMPA school Buenos Aires Argentina July 31 – August 11 2017* 69 92 ¨ 2019 10 1007 978 3 030 32353 0_3 ，，，，第–页。Cham：Birkhauser，。doi:。/ - - - - 。[4] Cristian Gonz´alez-Riquelme 和 Jos´e Madrid。有限图上极大算子的尖锐不等式。*J. Geom. Anal.*，31(10):9708–9744，2021。doi:10.1007/s12220-021-00625-0。[5] Cristian Gonz´alez-Riquelme 和 Jos´e Madrid。有限图上极大算子的尖锐不等式，II。 *J. Math. Anal. Appl.*，506(2):论文编号 125647，27，2022。doi:10.1016/j.jmaa.2021.125647。[6] Juha Kinnunen。索伯列夫函数的哈代-李特尔伍德极大函数。 *Israel J. Math.*，100:117– 124，1997。doi:10.1007/BF02773636。[7] Ondˇrej Kurka。关于哈代-李特尔伍德极大函数的变差。 *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*，40 1 109 133，2015 10 5186 2015 4003 ( ): – 。doi: . /aasfm. . .[8] Feng Liu 和 Qingying Xue。关于有限图上哈代-李特尔伍德极大函数的变差。*Collect. Math.*，72(2):333–349，2021。doi:10.1007/s13348-020-00290-6。[9] Javier Soria 和 Pedro Tradacete。有限图上的哈代-李特尔伍德极大算子的最佳常数。 *J. Math. Anal. Appl.*，436(2):661–682，2016。doi:10.1016/j.jmaa.2015.11.076。[10] Faruk Temur。关于离散哈代-李特尔伍德极大函数的正则性，2017。arXiv:1303.3993。[11] Wolfram Research, Inc. Mathematica，版本14.2，2025。

(C. G-R.) Centre de Recerca Matemàtica, Edifici C, Campus Bellaterra, 08193 Bellaterra, Spain*Email address*: cgonzalez@crm.cat

（V. K.） Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Zagreb, Bijenička cesta30, 10000 Zagreb, Croatia*Email address*: vjekovac@math.hr

(J. M.) Department of Mathematics, Virginia Polytechnic Institute and State University, 225 Stanger Street, Blacksburg, VA 24061-1026, USA*Email address*: josemadrid@vt.edu