arXiv:2603.12472v1 [math.NT] 12 Mar 2026

残余艾森斯坦上调的一个消失定理

Sam Mundy

摘要

我们研究半单群在极大抛物子群背景下的残余艾森斯坦上调，其中这些极大抛物子群在 $\mathbb{R}$ 上仍为极大。我们证明，在某些一般性假设下，这些剩余表示在中间次数以下一次以及以上一次是上调的；然而，在完整的自守上调中，中间次数以上的类消失。

这一消失定理的证明找到了一个显式上链，为来自此类剩余表示上调的非平凡类的像提供了一个原始元。该上链取值于正则艾森斯坦级数。在此过程中，我们详细研究了相关诱导表示的阿基米德分量。特别地，我们证明它具有一个子表示，该子表示是两个离散系列之和；我们描述了它们的 Harish-Chandra 参数，并证明交织算子在该子表示上的零点阶数恰为 1。

引言

设 $\mathcal{G}$ 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的连通半单线性代数群。本文旨在通过相对李代数上同调中的显式上链构造，研究 $\mathcal{G}$ 的自守上同调中一部分通常仍颇为神秘的内容，即由剩余艾森斯坦级数张成的部分。我们的主定理给出了充分条件，使得 $\mathcal{G}$ 的 L^2-上同调中的某些非平凡直和项在 $\mathcal{G}$ 的完整自守上同调中消失，而另一些则继续存在。我们先回顾相关概念。

设 E 是 $\mathcal{G}(\mathbb{C})$ 的一个不可约有限维表示。令 $\mathfrak{g}$ 为 $\mathcal{G}$ 的复化李代数，$U(\mathfrak{g})$ 为其泛包络代数。那么，E 在 $U(\mathfrak{g})$ 的中心中的湮灭子是一个理想，记为 J_E。在 $\mathcal{G}(\mathbb{A})$ 上所有自守形式构成的空间中，我们可以定义 $\mathcal{A}_E(\mathcal{G})$ 为被 J_E 的某个幂湮灭的自守形式子空间。固定 K_∞ 中的一个极大紧子群 $\mathcal{G}(\mathbb{R})$，并记 K_∞° 为 K_∞ 中单位元的连通分支。我们将关于 E 的对偶 $E^\vee$ 的 $\mathcal{G}$ 的**自守上同调**定义为

$$H^*(\mathcal{G}, E^\vee) = H^*(\mathfrak{g}, K_\infty^\circ; \mathcal{A}_E(\mathcal{G}) \otimes E^\vee).$$

右侧是左侧的定义，它表示模 $\mathcal{A}_E(\mathcal{G}) \otimes E^\vee$ 的通常 $(\mathfrak{g}, K_\infty)$-上同调；我们将在第 2.4 节简要回顾这一概念。自守上同调 $H^*(\mathcal{G}, E^\vee)$ 具有自然的 $\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$-模结构（其中 $\mathbb{A}_f$ 表示有限阿代尔环），并带有 $\pi_0(K_\infty)$ 的分支群对 K_∞ 的自然交换作用。

空间 $H^*(\mathcal{G}, E^\vee)$ 之所以主要受到关注，是因为根据 Franke 的一个深刻定理 [Fra98, Theorem 18], ，它同构于由 $E^\vee$ 关联的局部系统在与 $\mathcal{G}$ 关联的局部对称空间上的上同调，其中对所有层结构取归纳极限。然而，本文不会采用这一观点。不过，用于证明 Franke 定理的技巧也使人们更深入地理解了空间 $\mathcal{A}_E(\mathcal{G})$ 的结构，尤其是有助于计算 $\mathcal{G}$ 的自守上同调；例如参见 [FS98]。空间 $\mathcal{A}_E(\mathcal{G})$ 分解为尖点部分和 Eisenstein 部分，而 Eisenstein 部分又进一步分解为各个直和项。如果某个直和项所对应的艾森斯坦级数全都正则，那么该直和项就具有特别简单的抛物诱导结构；否则，它是此类结构的迭代扩张。本文关注的是这些直和项在最简单情形下的上同调，即该直和项并非单纯的抛物诱导表示。关于我们所关注情形下这一结构的精确描述，见下文 Grbac 的定理3.1.1。

现在令 $\mathcal{P}$ 为 $\mathcal{G}$ 的极大抛物 $\mathbb{Q}$ 子群，其 Levi 因子为 $\mathcal{M}$ ，幺幂根基为 $\mathcal{N}$。那么，给定 $\mathcal{M}(\mathbb{A})$ 的酉尖点自守表示 π 和 $s \in \mathbb{C}$，我们可以构造诱导表示

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A})}^{\mathcal{G}(\mathbb{A})}(\pi, s);$$

这里的变换律经过归一化，使得对于此诱导表示中的 $\phi : \mathcal{G}(\mathbb{A}) \to \pi$ ，我们有

$$\phi(mng) = \delta_{\mathcal{P}}^{s+1/2}(m)\pi(m)\phi(g), \qquad m \in \mathcal{M}(\mathbb{A}),\, n \in \mathcal{N}(\mathbb{A}),\, g \in \mathcal{G}(\mathbb{A}),$$

其中 $\delta_{\mathcal{P}}$ 表示 $\mathcal{P}(\mathbb{A})$ 的通常模特征。将这样的 ϕ 放入截面的平坦族 ϕ_s 中，令 s 变化，我们便可对任意 $s \in \mathbb{C}$ 和 $g \in \mathcal{G}(\mathbb{A})$ 构造艾森斯坦级数 $E(\phi, s, g)$；我们将在下文第3.1节回顾这一情形下的理论。艾森斯坦级数 $E(\phi, s, g)$ 由亚纯延拓定义，因此对于给定的 ϕ 和 g，它可能在某个 s 处有极点。但若 $\mathrm{Re}(s) \geq 0$，则该极点至多为单极点，取其留数即可得到剩余艾森斯坦级数。在这种情况下，当 $\phi \in \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}\,\mathbb{A}}^{\mathcal{G}(\mathbb{A})}(\,)(\pi, s)$ 变化时，固定 s 处这些留数所张成的自守表示记为 $\mathcal{L}(\pi, s)$，且它同构于 $\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}\,\mathbb{A}}^{\mathcal{G}(\mathbb{A})}(\,)(\pi, s)$ 的唯一不可约商。

全文中我们始终假设

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}) \text{ is maximal in } \mathcal{G}(\mathbb{R}), \tag{A.1}$$

并进一步假设

$$\text{Both } \mathcal{G}(\mathbb{R}) \text{ and } \mathcal{M}(\mathbb{R}) \text{ have discrete series.} \tag{A.2}$$

在这种情况下，我们可以定义一个特定的值 $s_0 > 0$ ，在实践中，它似乎经常会产生如下所示的残余表示 $\mathcal{L}(\pi,\ s_0)$，其具有 $(\mathfrak{g},\ K_\infty^\circ)$-上同调。本文将给出这个数的几种不同解释；下面是其中一种。条件 (A.1) 成立意味着， $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ 的 $\mathbb{R}$-分裂中心（记作 A）是一维的。令 $\mathfrak{a}$为 A 的复化李代数，并令 $\mathfrak{m}$ 和 $\mathfrak{n}$ 分别为 $\mathcal{M}$和 $\mathcal{N}$ 的复化李代数，再将 $\mathfrak{a}$ 扩充为包含于 $\mathfrak{m}$中的 $\mathfrak{g}$ 的一个嘉当子代数 $\mathfrak{h}$ 。于是由

下面的引理 2.6.1 可知，在假设 (A.2) 下，存在唯一的根 α of $\mathfrak{h}$，它包含于 $\mathfrak{n}$中，并且在 Killing 形式下于 $\mathfrak{h}$ 中 $\mathfrak{a}$ 的正交补上消失。我们希望通过 $\frac{1}{2}\alpha$进行扭曲，因此令 s_0 由以下方程定义

$$\frac{1}{2}\alpha|_{\mathfrak{a}} = 2s_0\rho_{\mathcal{P}}|_{\mathfrak{a}},$$

其中 $\rho_{\mathcal{P}}$ 表示 $\mathfrak{n}$ 中 $\mathfrak{h}$ 的根（按重数计）的半和。

现在固定一个尖点自守表示 π，其属于 $\mathcal{M}(\mathbb{A})$，并满足

$$\text{The central character } \chi \text{ of } \pi \text{ is trivial on } A^{\circ}; \tag{A.3}$$

这一假设只是一种无关紧要的正规化。令 π_∞ 为 π 的阿基米德分量。我们还假设

$$\pi_\infty \text{ is discrete series}, \tag{A.4}$$

并且存在一个不可约有限维表示 E，其属于 $\mathcal{G}(\mathbb{C})$，使得

$$\text{The infinitesimal character of } \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{R})}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})}(\pi_\infty, s_0) \text{ matches that of } E. \tag{A.5}$$

这一假设保证，由截面 ϕ 定义的艾森斯坦级数或其可能的留数，属于空间 $\mathcal{A}_E(\mathcal{G})$，其中 $\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}\ \mathbb{A}}^{\mathcal{G}(\mathbb{A})}()(\pi,\ s_0)$。于是我们有以下定理。

定理 A. 记号同上，包括假设 (A.1)-(A.5)。此外，假设：

(i) 存在一个平坦截面

$$\phi \in \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A})}^{\mathcal{G}(\mathbb{A})}(\pi, s)$$

使得艾森斯坦级数 $E(\phi, s, g)$ 在 $s = s_0$ 处有一个极点。

(ii) 相应的剩余表示 $\mathcal{L}(\pi, s_0)$ 具有该

$$H^*(\mathfrak{g}, K_\infty^\circ; \mathcal{L}(\pi, s_0) \otimes E^\vee)$$

不消失。

记 $d = \frac{1}{2}\dim(\mathcal{G}(\mathbb{R})/K_\infty^\circ)$（这是中间次数）。那么：

(a) 存在一个整数 $m > 0$，使得

$$\dim_{\mathbb{C}} H^q(\mathfrak{g}, K_\infty^\circ; \mathcal{L}(\pi, s_0)_\infty \otimes E^\vee) = \begin{cases} m & \text{if } q = d-1 \text{ or } d+1; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(b) 自然映射

$$H^{d-1}(\mathfrak{g}, K_\infty^\circ; \mathcal{L}(\pi, s_0) \otimes E^\vee) \to H^{d-1}(G, E^\vee),$$

由将 $\mathcal{L}(\pi, s_0)$ 包含到 $\mathcal{A}_E(\mathcal{G})$中所诱导的映射是单射。

(c) 然而，自然映射

$$H^{d+1}(\mathfrak{g}, K_\infty^\circ; \mathcal{L}(\pi, s_0) \otimes E^\vee) \to H^{d+1}(G, E^\vee),$$

再次由将 $\mathcal{L}(\pi, s_0)$ 包含进 $\mathcal{A}_E(\mathcal{G})$所诱导，为零。

因此，这表明来自 π 的残余艾森斯坦上同调 集中在次数 $d-1$，尽管剩余表示 $\mathcal{L}(\pi, s_0)$在次数 $d+1$也具有上同调。上文的 (c) 部分即标题中所提及的消失定理，也是本定理的主要新颖之处；(a) 与 (b) 两部分已在许多情形中被观察到，而我们在此对它们的主要贡献，是为其出现建立一个一般框架。

我们对这些假设作几点说明。首先，我们始终假设 $\mathcal{G}$ 是半单的，而不仅仅是约化的。这只是为了避免涉及 $\mathcal{G}$中可能存在非分裂中心的技术性、但可以克服的问题。更确切地说，暂时假设 $\mathcal{G}$ 改为约化的，并进一步假设 $\mathcal{G}$ 的中心$Z_{\mathcal{G}}$ 具有一个环面分量 $\mathcal{T}_{ns}$ ，它在 $\mathbb{Q}$ 上非分裂，但在 $\mathbb{R}$上分裂。于是该分量 $\mathcal{T}_{ns}$ 会为 $\mathcal{G}$ 的自守上同调贡献一个额外因子，该因子跨越若干次数。从所涉空间的角度看， $\mathcal{G}$ 的局部对称空间将成为导出群$\mathcal{G}^{\mathrm{der}}$ 的局部对称空间上的非平凡纤维化，其纤维由紧环面给出。因此，上述定理中关于次数 $d \pm 1$ 的陈述在数值上会变得更为复杂。然而，利用 K¨unneth 型论证归结到我们已经处理的半单情形，在约化情形下得到精确陈述并不困难。

接下来我们指出，在具体情形中，数 s_0 很容易计算，而且通常与相关艾森斯坦级数常数项的计算有关。事实上，一般来说，这个数似乎经常出现在以下情形中。艾森斯坦级数 $E(\phi, s, g)$的常数项中，通过 Langlands–Shahidi 方法出现的 L-函数之商，其分子通常会有一个形如 $\zeta(n_0 s)$的ζ 函数作为成分，其中 n_0为某个正整数。在这是唯一出现的ζ 函数的情形下，通常有 $s_0 = n_0^{-1}$，这往往使得 $E(\phi, s, g)$在 $s = s_0$ 处取得极点（取决于所涉及的其他 L值的性质）。

最后，我们谈谈定理中的假设(ii)，即 $\mathcal{L}(\pi, s_0)$是上同调的。这个假设在实践中看起来可能很难验证，但本文的部分内容实际上致力于给出一种方法，明确写出满足(A.3)–(A.5)和(ii)的 $\mathcal{M}(\mathbb{R})$的所有表示 π_∞，至少在 $\mathcal{G}(\mathbb{R})$连通时如此（随后可通过限制到 $\mathcal{G}(\mathbb{R})$的单位元连通分支来处理非连通情形）。

我们在第 3.3 节中给出了定理适用的若干情形的例子，其中一些作了相当详细的说明。事实上，在这些例子中，我们没有直接验证 (ii)，而是利用第2节的内容，列出所有可能作为 π 的阿基米德部分出现，且满足定理条件的表示。

定理 A 的证明方法是，写出一个特定的 d-上链，其值取自正则艾森斯坦级数，属于 $(\mathfrak{g}, K_\infty^\circ)$-上同调复形，并且它在边界映射下的像是 $(d+1)$-上循环，该上循环代表映射像中的一个元素

$$H^{d+1}(\mathfrak{g}, K_\infty^\circ; \mathcal{L}(\pi, s_0) \otimes E^\vee) \to H^{d+1}(G, E^\vee).$$

为了说明如何写出这个上链，我们需要描述阿基米德诱导表示 $\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}\ \mathbb{R}\ }^{\mathcal{G}(\mathbb{R})}{}_{()}(\pi_\infty, s_0)$ 的结构。我们在此于引言中，在假设 $\mathcal{G}(\mathbb{R})$连通这一简化条件下进行说明；在论文中，第2节针对连通群撰写，而第3节的内容可归结为这一情形。

因此，在附加假设 $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ 连通的情况下，我们不再从满足 (A.3)–(A.5) 以及定理 A 的 (ii) 的 π_∞ 开始，而是在第 2.1 节和第 2.2 节从以下内容开始：首先，我们给定

- 作用于 $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ 的 Cartan 对合 θ，它给出 K_∞;
- $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ 的紧 Cartan 子群 T，包含于 K_∞ 中，其复化李代数为$\mathfrak{t}$;
- $\mathfrak{t}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中的根系 $\Delta(\mathfrak{g},\ \mathfrak{t})$ 中的正根系 Δ^+；
- 一个简单非紧根 α_0，属于 Δ^+;
- $\mathfrak{t}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中的 Harish-Chandra 参数 Λ，该参数关于 Δ^+ 支配，并且满足

$$\frac{2\langle \Lambda, \alpha_0\rangle}{\langle \alpha_0, \alpha_0\rangle} = 1.$$

第 2.1 节根据前四项数据构造出$\mathcal{G}(\mathbb{R})$的一个极大抛物子群，记作 P，其 Levi分解为 $P = MN$；第 2.2 节则为我们构造出 M的一个离散系列表示，在本引言中记作 π'_∞（在第 2.2 节中简称为 π，但我们在此处已经使用了该记号）。我们最终在命题 2.6.2 中证明，可以选择这些数据，使得 P 与我们的 $\mathcal{P}(\mathbb{R})$共轭，并且 π'_∞ 与 π_∞ 在 $\mathcal{G}(\mathbb{R})$中的同一个元素作用下共轭。因此，我们陈述本引言中关于 $\mathcal{P}(\mathbb{R})$和 π_∞ 在阿基米德侧所证明的主定理。

接下来我们证明以下结果；见下文的定理 2.3.2。

定理 B. 继续假设 $\mathcal{G}(\mathbb{R})$是连通的。设 D_+ 为 $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ 的离散系列表示，其 *Harish-Chandra* 参数为 Λ；设 D_- 为 *Harish-Chandra* 参数为 $\Lambda - \alpha_0$的离散系列表示。设 J 为诱导表示$\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}\ \mathbb{R}\ }^{\mathcal{G}(\mathbb{R})}{}_{()}(\pi_\infty, s_0)$的唯一不可约商。那么

(a) 表示 J，当然还有 D_+ 和 D_-，都是酉的 .

(b) 我们有正合序列

$$0 \to D_+ \oplus D_- \to \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{R})}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})}(\pi_\infty, s_0) \to J \to 0, \tag{SES.1}$$

and

$$0 \to J \to \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{R})}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})}(\pi_\infty, -s_0) \to D_+ \oplus D_- \to 0. \tag{SES.2}$$

该定理的证明，或多或少是对上同调诱导理论中的若干事实的汇集；参见 [KV95] 和 [Vog81]。事实上，由我们已固定的数据，在 $\mathfrak{g}$ 中自然确定了一个 θ-稳定的抛物子代数 $\mathfrak{q}$，即其 Levi 子群只包含两个根 $\pm\alpha_0$的那个。由于 α_0 是非紧的，相应的 θ-稳定 Levi

子群 L of $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ 的导出群 L^{der} 由 $SL_2(\mathbb{R})$ 或 $PSL_2(\mathbb{R})$ 给出，其中心是环面 T的一个余维为 1 的子群。利用 Λ ，我们定义一个特征，记作 λ，它属于 L，并在导出群 L^{der} 上平凡。令 I 表示从 L的一个博雷尔子群到 L的平凡特征的非幺正诱导。于是存在一个 L 的表示的正合列:

$$0 \to \lambda \to I \otimes \lambda \to (D_2 \otimes \lambda) \oplus (D_{-2} \otimes \lambda) \to 0;$$

这里， D_2 表示 L 的权 2（全纯）离散系列，具有平凡中心特征； D_{-2} 表示 L的权 -2（反全纯）离散系列，同样具有平凡中心特征。于是可得

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{R})}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})}(\pi_\infty, -s_0) \cong \mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(I \otimes \lambda),$$

其中， $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}$ 表示一个上同调诱导函子。由这个单位元，我们推出定理 B 的所有部分。因此，$\mathcal{G}$ 的阿基米德情形实际上是由 $(P)SL_2(\mathbb{R})$ 的情形上同调诱导而来。

接着，我们在第 2.4 节写出 (SES.1) 和 (SES.2) 的长正合 $(\mathfrak{g}, K_\infty)$-上同调序列。证明定理 A 的一个关键事实是，(SES.2) 中次数 d与 $d+1$之间的边界映射非零。事实上，根据将表示 $D_\pm$ 和 J 表示为上同调诱导模的方式，不难推出以下结论。

定理 C. 继续假设 $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ 是连通的。简言之，记

$$h^q(\cdot) = \dim_{\mathbb{C}} H^q(\mathfrak{g}, K_\infty; (\cdot) \otimes E^\vee), \qquad I_\pm = \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{R})}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})}(\pi_\infty, \pm s_0), \qquad D = D_+ \oplus D_-.$$

下表列出了定理 B 中与(SES.1)和(SES.2) 相关的上同调长正合序列各项在非零次数上的维数:

q	$h^q(D)$	$h^q(I_+)$	$h^q(J)$
$d-1$	0	0	1
d	2	1	0
$d+1$	0	1	1

q	$h^q(J)$	$h^q(I_-)$	$h^q(D)$
$d-1$	1	1	0
d	0	1	2
$d+1$	1	0	0

我们也有 $h^d(D_+) = h^d(D_-) = 1$。

该定理由下文的命题2.4.1和2.4.3得出。

对于定理 A的证明中的上链计算，交织算子的性质及其消失阶也将具有重要意义。存在一个元素 w_0 ，它保持Levi子群 $\mathcal{M}$，并将 $\mathcal{P}(\mathbb{R})$映到其相反元。于是 w_0 定义一个交织算子

$$M(s, \cdot) : \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{R})}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})}(\pi_\infty, s) \to \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{R})}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})}(\pi_\infty, -s)$$

对任意 $s \in \mathbb{C}$。我们将专门讨论 $s = s_0$ ，并证明如下结论；见下文的定理 2.5.2 .

定理 D. 继续假设 $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ 是连通的。设 $\phi_s \in$ 诱导表示$\mathcal{P}_{\mathbb{R}}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})}()(\pi_\infty, s)$ 是任意一个平坦截面，其在 $s = s_0$ 处的特化 ϕ_{s_0} 属于 $D_+ \oplus D_-$ （见定理 *B*）。那么极限

$$\lim_{s \to s_0} \frac{1}{s - s_0} M(s, \phi_s) \pmod{J}$$

定义一个同构

$$(D_+ \oplus D_-) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{R})}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})}(\pi_\infty, -s)/J.$$

我们指出，此处 s_0 还可以用根 α_0来作另一种解释。事实上，我们有

$$s_0 = (2\rho_{\mathcal{P}}(X_{\alpha_0} + X_{-\alpha_0}))^{-1},$$

其中， $\rho_{\mathcal{P}}$ 仍是 $\mathcal{P}$ 的幺幂根基 $\mathcal{N}$ 中各根的半和，而 $X_{\pm\alpha_0}$ 是经过适当正规化的根向量；那么 $X_{\alpha_0} + X_{-\alpha_0}$ 张成 $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ 的 $\mathbb{R}$-分裂中心的实李代数。

定理 D 的证明或许有些出人意料，它关键地用到了随 s 变化的表示 $\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}_{\mathbb{R}}}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})}()(\pi_\infty, s)$ 的 $(\mathfrak{g}, K_\infty)$- 上同调复形。思路如下。一般理论告诉我们， $M(s_0, \cdot)$ 在 $\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}_{\mathbb{R}}}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})}()(\pi_\infty, s_0)$ 中的 $D_+ \oplus D_-$ 上为零，但在映到 J 非零的元素上则不为零。由于与 (SES.1) 相关的长正合列中的边界映射非零，因此存在 $\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}_{\mathbb{R}}}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})}()(\pi_\infty, s_0) \otimes E^\vee$ 中次数为 $d-1$ 的一个上链 c ，其像在 $J \otimes E^\vee$ 中非零，并且它在边界映射下的像 dc 是一个取值于 $D_+ \oplus D_-$ 的非零上循环。因此，我们要证明 $M(s_0, dc)$ 在 $s = s_0$ 处的一阶消失。

现在，上链 c可以平坦地延拓为取值于 $\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}_{\mathbb{R}}}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})}()(\pi_\infty, s) \otimes E^\vee$的上链 c_s，对所有 $s \in \mathbb{C}$均如此。此外，根据定义，在 $\bigwedge^d \mathfrak{g}$ 的任意元素处对 dc_s 求值，所得结果都是将 $U(\mathfrak{g})$ 的次数为 1 的元素作用于与 $E^\vee$中的元素张量积的平坦截面所得的线性组合；进而可以证明，它是如下形式的一个元素

$$s\phi_s^{(1)} \otimes e_1 + \phi_s^{(0)} \otimes e_0,$$

对于某个平坦的 $\phi_s^{(0)}$ 和 $\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}_{\mathbb{R}}}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})}()(\pi_\infty, s)$ 中的 $\phi_s^{(1)}$，以及某个 $e_0, e_1 \in E^\vee$。这里对 s 的线性性至关重要，这是因为边界定义中涉及的 $U(\mathfrak{g})$ 的元素次数为 1。由此可知，若 dc_s 消失，则它在 s 某处至少以一阶消失。但实际上，它必须在 $s = -s_0$ 处消失，因为由 (SES.2) 得到的次数 $d-1$ 与d 之间的边界映射为零。然而，

$$M(s, dc) = dM(s, c) = a(s)dc_{-s},$$

其中， $a(s)$ 是在 $s = s_0$ 附近有定义且不为零的某个全纯函数。因此令 s趋于 s_0 ，右侧恰有一阶零点，从而左侧也如此，正如所需。

如果 dc 的取值确实同时落在和式 $(D_+ \otimes E^\vee) \oplus (D_- \otimes E^\vee)$ 中的两个连通分支上，那么定理 D 即得证明。若 dc 的取值仅落在这两个直和项中的一个里，我们就只能得到对应直和项中离散系列表示的定理。不过，在这种情况下，采用一种类似但经过修改的论证，在次数 d 和 $d+1$ 之间转换，即可证明另一直和项的定理。

最后，我们概述 $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ 连通时定理 A (c) 的证明。令

$$\phi_s = \phi_{f,s} \otimes \phi_{\infty,s} \in \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A}_f)}^{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(\pi_f, s) \otimes \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{R})}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})}(\pi_\infty, s) \cong \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A})}^{\mathcal{G}(\mathbb{A})}(\pi, s)$$

是一个平坦截面，使得 $E(\phi, s, g)$ 在 $s = s_0$ 处有一个极点。该艾森斯坦级数沿 $\mathcal{P}$ 的常数项为

$$E_{\mathcal{N}}(\phi, s, g) = \phi_s(g)(1_{\mathcal{M}}) + (M(s, \phi_f) \otimes M(s, \phi_\infty))(1_{\mathcal{M}});$$

这里，上述两个截面都取值于 π，这是 $\mathcal{M}(\mathbb{A})$ 上的尖点形式空间，因此可以在 $\mathcal{M}(\mathbb{A})$ 的单位元 $1_{\mathcal{M}}$ 处对它们求值，从而得到一个复数。于是可知，有限阿代尔交织截面 $M(s, \phi_f)$ 必须在 $s = s_0$ 处有一个极点，而该极点必然是简单极点，因为极大抛物Eisenstein级数至多具有简单极点。同样可知，ϕ_{∞,s_0} 在 J 中具有非平凡像。

于是，一个关键点是：如果将上面的 $\phi_{\infty,s}$ 替换为任意满足 $\phi_{s_0,\infty} \in D_+ \oplus D_-$ 的平坦截面 $\phi'_{\infty,s}$，那么根据定理 D，$M(s, \phi_\infty)$ 的简单零点 恰好 抵消了 $M(s, \phi_f)$ 在 $s = s_0$ 处的极点。因此，艾森斯坦级数 $E(\phi_f \otimes \phi'_\infty, s, g)$ 在 $s = s_0$ 处将是正则的，并且其常数项仍包含第二个求和项。

因此，我们可以定义两个取值于 $\mathcal{A}_E(\mathcal{G}) \otimes E^\vee$ 的上循环如下。首先，令

$$c_\infty^{d,\pm} : \bigwedge^d (\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \to D_\pm \otimes E^\vee$$

为唯一的（相差一个标量）非平凡上循环，并将其视为取值于 $\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}\ \mathbb{R}\ ()}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})}(\pi_\infty, s_0) \otimes E^\vee$。接着，可以显而易见地利用 $c^d{}_{,\infty}^{\pm}$，通过与 ϕ_{f,s_0} 作张量积并构造艾森斯坦级数，来定义两个取值于 $\mathcal{A}_E(\mathcal{G}) \otimes E^\vee$ 的上链 $c^{d,\pm}$。需要指出一个重要事实：这些取值于上链的艾森斯坦级数不一定是上循环！事实上，这些艾森斯坦级数的常数项等于该上循环与

$$\phi_{f,s_0} \otimes c_{\infty,s_0} : \bigwedge^d (\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \to \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{R})}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})}(\pi, s_0) \otimes E^\vee$$

上链的某个非零倍数之和

$$M(s_0, \phi_f) \otimes M(s_0, c_\infty^{d,\pm}) : \bigwedge^d (\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \to \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{R})}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})}(\pi, -s_0) \otimes E^\vee,$$

其中，上述表达式实际上应理解为当 $s \to s_0$ 时的极限。由定理 C 可知，边界映射 d 将第一个上链映为零；而对于至少一种符号 $\pm$ 的取法，第二个上链的像是一个非平凡的 $(d+1)$-上循环，取值于 $\mathcal{L}(\pi, s_0)_f \otimes J \otimes E^\vee = \mathcal{L}(\pi, s_0) \otimes E^\vee$。注意，先验地，这个上循环是一个取值于

$$\mathcal{L}(\pi, s_0)_f \otimes \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{R})}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})}(\pi, s_0) \otimes E^\vee,$$

但当其取值于子表示 $\mathcal{L}(\pi, s_0) \otimes E^\vee$ 时，它便成为一个非平凡的上循环。

通过比较 $dc^{d,\pm}$ 与某些剩余艾森斯坦级数的常数项，便足以推出定理 A (c)。实际上，在本文主体部分，我们采取这样的观点：上述计算给出了与一个简单短正合列相关的上同调长正合序列中，d 次与

$d+1$ 次之间的边界映射。该短正合列来自 $\mathcal{A}_E(\mathcal{G})$ 的一个直和项上的 *Franke*滤子；参见下文回顾的 Grbac [Grb12] 的定理3.1.1。无论如何，要证明定理 A 的 (b) 部分，这种观点似乎是必要的。至于 (c) 部分，Grbac 定理意味着，上循环 $dc^{d,\pm}$ 自动取值于剩余表示 $\mathcal{L}(\pi,\ s_0)\otimes E^\vee$，因此只要其中一个非平凡，便足以得出结论。

前人的结果

定理 A 的 (b) 部分的证明并非新颖，它采用了涉及 Franke滤子的技术，这种技术在艾森斯坦上同调相关文献中很常见。例如，Rohlfs–Speh 的论文 [RS11]，中就能找到这种技术；其结果实际上蕴含了定理 A (b)，但仅限于 $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ 连通的情形，尽管他们并未明确使用这一滤子。Grobner 的论文 [Gro13] 则明确使用了这一滤子，而且其研究背景比我们的情形一般得多。然而，正因为其一般性太强，它的结果几乎但并未完全蕴含定理 A (b)。不过，我们证明定理这一部分所用的技术，是对他的方法的一种特例化。我们还提及 Grbac 和 Schwermer 关于辛群的残余艾森斯坦上同调的论文 [GS11]，以及 Gotsbacher 和 Grobner 关于分裂奇特殊正交群的相关论文 [GG13]。Grobner 的另一篇论文[Gro10]还对 Sp_4的内形式得出了结果，同时将残余艾森斯坦上同调的次数上界限定为中间次数，这与定理 A 的 (c) 部分类似。

定理 A 的 (c) 部分所回答的这类问题，迄今似乎尚未得到广泛探讨。除了 Grobner [Gro10] 上文提到的论文外，我不了解文献中还有其他关于这一方向的结果；这或许是因为我孤陋寡闻。

致谢

我谨向 A. Raghuram 致谢，感谢他关注本项目并鼓励我开展这项工作。我还要感谢 Harald Grobner 邀请我前往维也纳大学就这一主题作报告，并为我指引了文献中的若干出处。

记号与约定

本文中，符号 $\mathbb{A}$ 表示 $\mathbb{Q}$ 的阿代尔，$\mathbb{A}_f$ 表示 $\mathbb{Q}$ 的有限阿代尔环。

给定一个实李群 G，我们用 G° 表示 G 中单位元的连通分支。

群的中心记作 Z；例如，若 G 是一个实李群，则 Z_G 是它的中心。

中心化子记作 C，正规化子记作 N；例如，若 G 仍是一个实李群，且 X 是 G 或其（可能复化的）李代数的子集，则 $C_G(X)$ 和 $N_G(X)$ 分别表示 X 在 G 中的中心化子和正规化子。

某些字体将专用于某些类型的对象。

$\mathbb{Q}$ 上的线性代数群将用花体字母表示，例如 $\mathcal{G}$。唯一的例外是具有标准名称的群，例如 SL_2、 Sp_{2n}等。

实李群将用罗马字母表示，例如 G；但如果它们是线性代数群的 $\mathbb{R}$ 点，例如 $\mathcal{G}$，则只写作 $\mathcal{G}(\mathbb{R})$。由于第2节讨论的是实李群，且其中不会出现定义在 $\mathbb{Q}$上的代数群，因此这些约定将在第3节中派上用场，以区分来自第2节的群和第3节中出现的代数群。

单独使用的小写哥特字母，例如 $\mathfrak{g}$，将专用于表示复李代数。如果考虑某个（实李群或线性代数）群的复化李代数，那么记号中的相应字母几乎总是相同的。因此， $\mathfrak{g}$ 可以表示实李群 G 或线性代数群 $\mathcal{G}$的复化李代数。这条规则有一个例外，出现在第2节的某些地方；在那里，我们会固定实李群 G的一个实抛物子群 P ，但 $\mathfrak{p}$ 表示 G的复化李代数 $\mathfrak{g}$ 中相对于一个固定 Cartan 对合的（-1）特征子空间，而不是表示 P的复化李代数。不过，我们提醒读者，在第3节中，我们将考虑线性代数群 $\mathcal{G}$的抛物子群$\mathcal{P}$ 的复化李代数 $\mathfrak{p}$，而无须考虑其中 Cartan 对合的（-1）特征子空间。因此，我们认为这不会造成混淆。

当我们需要考虑实李代数时，总会为它们加上下标 $\mathbb{R}$。例如， $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 可以表示实李群 G 的实李代数。

设 G 是实李群，并分别用 $\mathfrak{g}$ 和 K 表示其复化李代数和一个固定的极大紧子群。那么， G 的“表示”总是指“可容许的（$\mathfrak{g}$， K）-模”。

若 $\mathcal{G}$ 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的约化代数群，则 $\mathcal{G}$（$\mathbb{A}$）的“自守表示”除需满足许多其他条件外，还指范畴 $\mathcal{G}$（$\mathbb{A}_f$）中的 $\times$（$\mathfrak{g}$， K_∞）-模的不可约对象。其中， $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的复化李代数，而 K_∞ 是 $\mathcal{G}$（$\mathbb{R}$）的一个固定极大紧子群。若 π 是这样的对象，则用 π_f 表示其有限阿代尔部分，用 π_∞ 表示其阿基米德部分。那么，π_f 是光滑且可容许的，而 π_∞ 是可容许的。

我们经常考虑由极大抛物子群的 Levi 因子诱导的表示，并且会在实、阿代尔和有限阿代尔情形下进行讨论。设 $\mathcal{G}$ 是定义在 $\mathbb{Q}$上的线性半单代数群， $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{G}$ 的极大抛物子群，其 Levi 因子为 $\mathcal{M}$ ，幺幂根基为 $\mathcal{N}$。设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathcal{G}$ 的复化李代数，K 是 $\mathcal{G}(\mathbb{A})$的一个固定极大紧子群。设 π 是$\mathcal{M}(\mathbb{A})$的一个自守表示， s是一个复数。那么，记号

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A})}^{\mathcal{G}(\mathbb{A})}(\pi, s)$$

表示满足以下条件的函数空间 $\mathcal{G}(\mathbb{A}) \to \pi$：

对于所有 $m \in \mathcal{M}(\mathbb{A})$、 $n \in \mathcal{N}(\mathbb{A})$和 $g \in \mathcal{G}(\mathbb{A})$，都有• $\phi(mng) = \delta_{\mathcal{P}}^{s+1/2}(m)\pi(m)\phi(g)$，其中 $\delta_{\mathcal{P}}$是 $\mathcal{P}(\mathbb{A})$的模特征；

- ϕ在 $\mathcal{G}(\mathbb{A})$的右平移作用下光滑；
- ϕ在右平移下是 K-有限的。

因此，这一记号中隐含了用 $\delta_{\mathcal{P}}^{1/2}$ 进行的正规化。于是，诱导表示$\mathcal{P}_{\mathbb{A}}^{\mathcal{G}(\mathbb{A})}()(\pi, s)$经由右平移成为一个可容许的$\mathcal{G}(\mathbb{A}_f) \times (\mathfrak{g}, K_\infty)$-模。

类似的说明同样适用于有限阿代尔和实情形下的诱导表示，其中也包括按模特征的平方根进行这种正规化。我们还将在第 2.5 节讨论对实情形下这些诱导表示的另一种诠释。

线性代数群，或实李群，是指存在忠实有限维代数表示或复表示的群。在实情形下，这一点很重要，因为 Vogan 的著作 [Vog81]，假定了这一条件；我们在第 2.3 节中大量借鉴了该书的内容。

最后，我们指出，我们所选用的记号与实李群文献中常见的一种记号有所不同。我们经常会考虑实半单李群 G 的一个 Levi 子群，并将其记作 M。于是，我们会有 M 的子群，下面分别记作 M_0 和 A；有时还会考虑 M_0 中单位元的连通分支 M_0°。然而，在许多文献中，其他作者会在我们写作 M_0° 的地方写作 M_0，在我们写作 M_0 的地方写作 M，并在我们写作 M 的地方写作 MA。我们选择这种记号，是为了使其与我们在整体阿代尔框架中使用的记号更加一致；而这种记号在那里似乎也更为标准。

目录

1 SL_2 情形 **11**

2 阿基米德位上的结果 19

2.1 设置：群与李代数.19 2.2 设置：离散系列.20 2.3 标准模.22 2.4 $(\mathfrak{g}, K)$-上同调.29 2.5 交织算子.33 2.6 另一种设置.41

3 极大　　抛物子群艾森斯坦级数 **45**

3.1 艾森斯坦级数预备知识.45 3.2 主定理.49 3.3 示例.62

1 SL_2 情形

为了说明本文主定理（下文的定理 3.2.1）的证明方法，我们将在本节中以 SL_2 的简单情形完整地给出证明。先来设定记号。

在本节中，我们用 SL_2 表示通常以该名称所指的群，并将其视为 $\mathbb{Q}$上的单代数群。其复李代数记为 $\mathfrak{sl}_2$。该群

$SL_2(\mathbb{R})$ SL_2 的实点群以标准方式包含紧子群 SO_2 :

$$SO_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 = 1 \right\}.$$

那么， SO_2 是 $SL_2(\mathbb{R})$的一个极大紧子群，其复化李代数记作 $\mathfrak{so}_2$。注意， SO_2 也是 $SL_2(\mathbb{R})$ 的一个 Cartan 子群。

本节主要考察空间 $\mathcal{A}(SL_2)$的$(\mathfrak{sl}_2, SO_2)$-上同调；该空间由 SL_2的自守形式构成。$(\mathfrak{g}, K)$-上同调的一般理论将在第 2.4 节回顾，但在此情形下，我们可以给出相当明确的描述。

因此，考虑这些矩阵

$$H = i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}, \qquad X_- = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.1.1}$$

那么， H 张成 $\mathfrak{so}_2$，而(H, X_+, X_-)构成一个 $\mathfrak{sl}_2$-三元组。

$(\mathfrak{sl}_2, SO_2)$-上同调复形作为一个$(\mathfrak{sl}_2, SO_2)$-模 V，可以显式写成如下复形

$$\cdots \to 0 \to C^0(\mathfrak{sl}_2, SO_2; V) \to C^1(\mathfrak{sl}_2, SO_2; V) \to C^2(\mathfrak{sl}_2, SO_2; V) \to 0 \to \cdots,$$

其各项定义如下。首先注意到子空间

$$\mathbb{C}X_+ \oplus \mathbb{C}X_- \subset \mathfrak{sl}_2$$

被 SO_2 的伴随作用保持不变，而该空间的行列式，即 y

$$\mathbb{C} \cdot (X_+ \wedge X_-),$$

继承了 SO_2的平凡作用。因此我们可以定义

$$C^i(\mathfrak{sl}_2, SO_2; V) = \mathrm{Hom}_{SO_2}(\bigwedge^i (\mathbb{C}X_+ \oplus \mathbb{C}X_-), V),$$

其中，上标表示 SO_2-等变线性映射。因此存在显然的同构

$$C^0(\mathfrak{sl}_2, SO_2; V) \cong V^{SO_2} \cong C^2(\mathfrak{sl}_2, SO_2; V),$$

其中，上标表示 SO_2-不变元；左侧同构通过取 $1 \in \mathbb{C} = \bigwedge^0(\mathbb{C}X_+ \oplus \mathbb{C}X_-)$的像给出，右侧同构则通过取 $X_+ \wedge X_-$的像给出。

边界映射

$$d_q : C^q(\mathfrak{sl}_2, SO_2; V) \to C^{q+1}(\mathfrak{sl}_2, SO_2; V), \qquad q = 0, 1$$

由.....给出

$$(d_0 v)(X) = Xv, \qquad X = X_+, X_- \text{ and } v \in V^{SO_2}, \tag{1.1.2}$$

and

$$d_1 c = X_+ c(X_-) - X_- c(X_+) \in V^{SO_2}, \qquad c \in \mathrm{Hom}_{SO_2}(\mathbb{C}X_+ \oplus \mathbb{C}X_-, V). \tag{1.1.3}$$

将此复形的上同调群记为 $H^*(\mathfrak{sl}_2,\ SO_2; V)$。尽管上述复形在次数 1 两侧存在对称性，但一般而言，上同调群当然并不具有这种对称性。相反，更有趣的事情发生了！

首先，若 V 例如是 $SL_2(\mathbb{R})$ 的平凡表示 $\mathbb{C}$，那么显然

$$C^1(\mathfrak{sl}_2, SO_2; \mathbb{C}) = 0,$$

因此

$$H^0(\mathfrak{sl}_2, SO_2; \mathbb{C}) = C^0(\mathfrak{sl}_2, SO_2; \mathbb{C}) = \mathbb{C}$$

and

$$H^2(\mathfrak{sl}_2, SO_2; \mathbb{C}) = C^2(\mathfrak{sl}_2, SO_2; \mathbb{C}) = \mathbb{C} \cdot (X_+ \wedge X_-)^\vee,$$

因此它们同构；这里我们用 $(X_+ \wedge X_-)^\vee$ 表示线性映射 $\mathbb{C} \cdot (X_+ \wedge X_-) \to \mathbb{C}$，该映射将 $X_+ \wedge X_-$ 送到 1。因此，在这种情况下，这种对称性在上同调层面仍然存在。不过，我们也可以将平凡表示视为一个自守表示，它由常值函数 1 张成。当然，将其从 $SL_2(\mathbb{A})$ 限制到 $SL_2(\mathbb{R})$ 时，得到的正是上文 $SL_2(\mathbb{R})$ 的平凡表示 $\mathbb{C}$。于是我们有以下定理。

定理 1.1.1. 将常值函数张成的空间包含到 SL_2 的自守形式空间中的映射 $\mathbb{C} \cdot 1 \hookrightarrow \mathcal{A}(SL_2)$ 诱导出单射

$$H^q(\mathfrak{sl}_2, SO_2; \mathbb{C}) \hookrightarrow H^q(\mathfrak{sl}_2, SO_2; \mathcal{A}(SL_2))$$

对于所有次数 q，除了 $q = 2$ 之外，在该情形下此映射为零映射。

当然，众所周知，$H^*(\mathfrak{sl}_2,\ SO_2; \mathbb{C})$计算了所有层结构下具有这些层结构的模曲线上同调的归纳极限。这些模曲线是开黎曼曲面，因此没有 H^2。所以，单看这个定理或许并不那么有趣。不过，本节的目的是写出该定理的纯自守证明，不以任何方式借助几何。

当然，常值函数 1 的导数由 X_+ 和 X_-消失，因此根据 (1.1.2)，$d_0 1 = 0$。于是 $1 \in \mathcal{A}(SL_2)^{SO_2}$ 给出一个 0-上循环（而不仅仅是一个上链），从而在 $H^0(\mathfrak{sl}_2,\ SO_2; \mathcal{A}(SL_2))$中给出一个非零类，这就证明映射

$$H^q(\mathfrak{sl}_2, SO_2; \mathbb{C}) \to H^q(\mathfrak{sl}_2, SO_2; \mathcal{A}(SL_2))$$

是次数为 $q = 0$时的单射。由于源群为零，它在所有其他次数 $q \neq 2$ 上也都是单射。

因此，为了证明该定理，我们必须证明这个映射

$$H^2(\mathfrak{sl}_2, SO_2; \mathbb{C}) \to H^2(\mathfrak{sl}_2, SO_2; \mathcal{A}(SL_2))$$

为零点，也就是说，我们需要证明这个上链

$$1 \cdot (X_+ \wedge X_-)^\vee \in C^2(\mathfrak{sl}_2, SO_2; \mathcal{A}(SL_2))$$

实际上是一个上边界。我们将通过显式构造一个自守形式中的 1-上链来实现，其在边界映射 d_1 下的像是常值函数。

有助于我们完成这一任务的自守形式将是艾森斯坦级数。我们将在介绍定义它们所需的诱导表示的一些预备知识后，回顾此处的构造。

记 $\mathcal{B}$、$\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{N}$ 为 SL_2 的通常子群，

$$\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}*&*\\0&*\end{pmatrix}\right\},\qquad \mathcal{T}=\left\{\begin{pmatrix}*&0\\0&*\end{pmatrix}\right\},\qquad \mathcal{N}=\left\{\begin{pmatrix}1&*\\0&1\end{pmatrix}\right\},$$

使得 $\mathcal{B}$ 是一个具有 Levi分解 $\mathcal{B}=\mathcal{T}\mathcal{N}$ 的博雷尔子群。为简便起见，我们将 $\mathcal{B}$（$\mathbb{R}$）、$\mathcal{B}$（$\mathbb{A}_f$）或 $\mathcal{B}$（$\mathbb{A}$）的通常模特征记作 δ；在所有情况下，它都由下式给出：

$$\delta\left(\begin{pmatrix}t&*\\0&t^{-1}\end{pmatrix}\right)=|t^2|.$$

令 $K=SL_2(\widehat{\mathbb{Z}})\times SO_2\subset SL_2(\mathbb{A})$，它是 $SL_2(\mathbb{A})$ 的一个极大紧子群。对于 $s\in\mathbb{C}$，我们考虑由 $T(\mathbb{A})$ 的平凡特征 1 诱导得到的（酉归一化）诱导表示，

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{B}(\mathbb{A})}^{SL_2(\mathbb{A})}(1,s)=\left\{\phi:SL_2(\mathbb{A})\to\mathbb{C}\;\middle|\;\begin{array}{l}\phi\text{ is smooth and }K\text{-finite,}\\ \text{and }\phi(bg)=\delta(b)^{s+1/2}\phi(g)\\ \text{for all }b\in\mathcal{B}(\mathbb{A}),\ g\in SL_2(\mathbb{A})\end{array}\right\}.$$

这可分解为一个张量积

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{B}(\mathbb{A})}^{SL_2(\mathbb{A})}(1,s)\cong\mathrm{Ind}_{\mathcal{B}(\mathbb{A}_f)}^{SL_2(\mathbb{A}_f)}(1,s)\otimes\mathrm{Ind}_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}^{SL_2(\mathbb{R})}(1,s),\tag{1.1.4}$$

其中右侧两个因子的定义与上文类似。

现在，对每个 $s\in\mathbb{C}$，存在唯一的截面 $\phi_f^{\mathrm{sph}},_s\in$诱导表示$^{SL_2}{}_{(\mathbb{A}_f)\,B(\mathbb{A}_f)}(1,s)$，使得对任意 $k_f\in SL_2(\widehat{\mathbb{Z}})$ 有 $\phi^{\mathrm{sph}}_{f\,s}(k_f)=1$。类似地，存在唯一的截面 $\phi_\infty^{(0)},_s\in$ 诱导表示$^{SL_2}{}_{(\mathbb{R})\ \mathcal{B}(\mathbb{R})}(1,s)$，使得对所有 $k_\infty\in SO_2$ 有$\phi_\infty^{(0)},_s(k_\infty)=1$。我们利用后一截面在阿基米德位处如下定义另外两个截面。

首先，回顾在 $s=1/2$ 处存在一个正合列

$$0\to D_2\oplus D_{-2}\to\mathrm{Ind}_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}^{SL_2(\mathbb{R})}(1,1/2)\to\mathbb{C}\to 0;$$

这里，D_2 是 $SL_2(\mathbb{R})$的权 2 全纯离散系列表示，同样，D_{-2} 是 $SL_2(\mathbb{R})$的权 -2 反全纯离散系列表示，二者都视为可容许的（$\mathfrak{sl}_2,SO_2$）-模。为明确起见，这个正合列末尾的 $\mathbb{C}$ 是平凡表示。这个正合列并不分裂，尽管它作为 SO_2-模的正合列是分裂的。事实上，截面 $\phi_\infty^{(0)}{}_{,1/2}$ 张成了 $\mathrm{Ind}^{SL_2}{}_{(\mathbb{R})\ \mathcal{B}(\mathbb{R})}(1,1/2)$ 中唯一的平凡 SO_2-型，因此映射到末尾的 $\mathbb{C}$ 中时非零；然而，如果我们定义

$$\phi_{\infty,1/2}^{(2)}=X_+\phi_{\infty,1/2}^{(0)}\text{ and }\phi_{\infty,1/2}^{(-2)}=X_-\phi_{\infty,1/2}^{(0)},$$

th在 $\phi_\infty^{(\pm 2)}{}_{,1/2} \in D_{\pm 2}$中， $\phi_\infty^{(\pm 2)}{}_{,1/2}$ 在两种情况下都张成了 $D_{\pm 2}$ 中的最低 SO_2-型。

我们还可以将截面 $\phi_\infty^{(\pm 2)}{}_{,1/2}$ 唯一地延拓为平坦截面 $\phi_\infty^{(\pm 2),s} \in \mathrm{Ind}_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}^{SL_2(\mathbb{R})}(1, s)$，使其随 $s \in \mathbb{C}$变化；这里的平坦性是指，限制 $\phi_\infty^{(\pm 2),s}|_{SO_2}$ 作为 SO_2上的函数时不依赖于 s。因此，这些截面张成了 $\mathrm{Ind}_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}^{SL_2(\mathbb{R})}(1, s)$ 中权为 ± 2 的唯一 SO_2-型。

考虑到分解 (1.1.4)，我们定义三个截面 $\phi_s^{(-2)}, \phi_s^{(0)}, \phi_s^{(2)} \in \mathrm{Ind}_{\mathcal{B}(\mathbb{A})}^{SL_2(\mathbb{A})}(1, s)$；现在，它们的平坦性是指其在 K 上的限制不依赖于 s。定义如下：

$$\phi_s^{(?)} = \phi_{f,s}^{\mathrm{sph}} \otimes \phi_{\infty,s}^{(?)}, \qquad ? \in \{-2, 0, 2\}.$$

我们利用这些截面构造艾森斯坦级数。

事实上，对于 $\phi \in \{\phi_s^{(-2)}, \phi_s^{(0)}, \phi_s^{(2)}\}$，我们将艾森斯坦级数定义为

$$E(\phi, s, g) = \sum_{\gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{Q}) \backslash SL_2(\mathbb{Q})} \phi(\gamma g), \qquad s \in \mathbb{C},\ g \in SL_2(\mathbb{A}).$$

这是一个经典事实：当 $\mathrm{Re}(s)$ 位于某个右半平面时，该级数收敛，并且可以亚纯延拓到整个 $\mathbb{C}$；也就是说，对每个 $g \in SL_2(\mathbb{A})$，函数 $E(\phi, s, g)$ 在 s 上都是亚纯的。事实上，当 $\mathrm{Re}(s) > 0$ 时，表达式$E(\phi, s, g)$ 是全纯的，并在 $SL_2(\mathbb{A})$ 上定义自守形式，除非 $s = 1/2$且 $\phi = \phi_s^{(0)}$；在这种情况下，艾森斯坦级数 $E(\phi^{(0)}, s, g)$（此处省略下标 s，因为它已隐含在数据中）在 $s = 1/2$ 处有一阶极点，其留数

$$\operatorname*{Res}_{s=1/2} E(\phi^{(0)}, s, g) = \lim_{s \to 1/2} (s - \tfrac{1}{2}) E(\phi^{(0)}, s, g)$$

是 g的常值函数的一个非零倍数。

现在让我们回到上同调。设 $a_+ \in \mathbb{C}$ 和 $a_- \in \mathbb{C}$ 为常数，我们稍后再指定它们。经过一番预先考量，我们通过规定上链 $c \in C^1(\mathfrak{sl}_2, SO_2; \mathcal{A}(SL_2))$ 在 X_+和 X_-上的取值如下，来定义它：

$$c(X_\pm) = a_\pm E(\phi^{(\pm 2)}, 1/2, \cdot). \tag{1.1.5}$$

艾森斯坦级数 $E(\phi^{(\pm 2)}, 1/2, \cdot)$ 在群 SO_2 的作用下按权为 ± 2 的特征变换，与元素 $X_\pm$ 的情形相同，因此这给出了一个定义良好的 1-上链。

稍后我们将计算出，$(d_1 c)(X_+ \wedge X_-)$ 如所期望的那样，是常值函数的一个非零倍数。为此，我们需要某种方法来识别自守形式 $(dc)(X_+ \wedge X_-)$；正如我们现在将要说明的，这种识别将通过常数项来完成。

因此，对于 $\phi \in \{\phi_s^{(-2)}, \phi_s^{(0)}, \phi_s^{(2)}\}$，将沿 $\mathcal{B}$ 的常数项记作 $E_{\mathcal{N}}(\phi, s, g)$，

$$E_{\mathcal{N}}(\phi, s, g) = \int_{\mathcal{N}(\mathbb{Q}) \backslash \mathcal{N}(\mathbb{A})} E(\phi, s, ng)\, dn, \tag{1.1.6}$$

积分被规范化，比如说，使得 $\mathcal{N}(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{N}(\mathbb{A})$ 的测度为 1。于是事实上

$$E_N(\phi, s, g) = \phi(g) + M(s, \phi)(g),$$

其中 $M(s,\cdot)$: 诱导表示$^{SL_2(\mathbb{A})}\mathcal{B}(\mathbb{A})(1,s)$ $\to$ 诱导表示$^{SL_2(\mathbb{A})}\mathcal{B}(\mathbb{A})(1,-s)$ 是由下式定义的交织算子

$$M(s,\phi)(g)=\int_{\mathcal{N}(\mathbb{A})}\phi_s(w_0ng)\,dn,\qquad w_0=\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\in SL_2(\mathbb{Q});$$

当 $\mathrm{Re}(s)$ 位于某个右半平面内时，这一定义是正确的，并且随后通过亚纯延拓将其扩展到所有 s。事实上，这个交织算子 $M(s,\phi)$ 的极点恰好与艾森斯坦级数 $E(\phi,s,\cdot)$ 的极点相同。

可以显式计算交织算子 $M(s,\phi)(g)$。假设 $\phi_s\in$诱导表示$^{SL_2(\mathbb{A})}\mathcal{B}(\mathbb{A})(1,s)$ 是一个平坦截面，并且可因子分解为 $\phi_s=\phi_f^{\mathrm{sph}}{}_{,s}\otimes\phi_{\infty,s}$，其中某个 $\phi_{\infty,s}\in$诱导表示$^{SL_2(\mathbb{R})}\mathcal{B}(\mathbb{R})(1,s)$。那么事实证明，

$$M(s,\phi)=\frac{\zeta(2s)}{\zeta(2s+1)}\phi_{f,-s}^{\mathrm{sph}}\otimes M(s,\phi_\infty),\tag{1.1.7}$$

其中在等式右端，交织后的阿基米德截面 $M(s,\phi_\infty)$ 是诱导表示$^{SL_2(\mathbb{R})}\mathcal{B}(\mathbb{R})(1,-s)$ 的一个元素，其含义与整体情形中的含义类似；也就是说，

$$M(s,\phi_\infty)(g)=\int_{\mathcal{N}(\mathbb{R})}\phi_{\infty,s}(w_0ng)\,dn$$

当 $\mathrm{Re}(s)$ 足够大时成立；否则，我们通过解析延拓来解释这个表达式。我们将需要以下结果。

命题 1.1.2。阿基米德交织算子 $M(s,\cdot)$: 诱导表示$^{SL_2(\mathbb{R})}\mathcal{B}(\mathbb{R})(1,s)$ $\to$诱导表示$^{SL_2(\mathbb{R})}\mathcal{B}(\mathbb{R})(1,-s)$ 在 $s=1/2$ 处于截面 $\phi_{\infty\,s}^{(\pm2)},$ 上的一阶零点。

这个命题可由涉及伽马函数的众所周知的计算得出，但稍后我们将利用这样一个事实给出另一种证明： $M(1/2,\phi_\infty^{(0)})\neq0$；后一个事实是关于交织算子与朗 a兹分类之间关系的一般事实的特例。我们给出的证明启发了本文中关于类似事实的研究，即定理 2.5.2。不过现在先让我们完成定理 1.1.1 的证明。

艾森斯坦级数（及其留数）完全由其常数项决定。因此，要证明 $(d_1c)(X_+\wedge X_-)$ 是常值函数，进而证明定理 1.1.1，只需证明 $(d_1c)(X_+\wedge X_-)$ 的常数项作为 $g\in SL_2(\mathbb{A})$ 的函数是常数。现在根据定义，利用 (1.1.3) 和 (1.1.5)，我们计算得

$$(d_1c)(X_+\wedge X_-)=X_+c(X_-)-X_-c(X_+)=a_-X_+E(\phi^{(-2)},1/2,\cdot)-a_+X_-E(\phi^{(2)},1/2,\cdot),$$

其中我们回顾， a_+ 与 a_- 是目前尚未指定的常数。由 (1.1.6) 和 (1.1.7)，该自守形式的常数项由下式给出

$$\begin{aligned}(d_1c)(X_+\wedge X_-)_{\mathcal{N}}&=a_-X_+\phi_{1/2}^{(-2)}-a_+X_-\phi_{1/2}^{(2)}\\&\quad+\lim_{s\to1/2}\frac{\zeta(2s)}{\zeta(2s+1)}\phi_{f,-s}^{\mathrm{sph}}\otimes(a_-X_+M(s,\phi_\infty^{(-2)})-a_+X_-M(s,\phi_\infty^{(2)})).\end{aligned}\tag{1.1.8}$$

截面 $X_-\phi^{(2)}_{1/2}$ 消失，因为 $\phi^{(2)}_{\infty}$,$_{1/2}$ 已处于 D_2中的最低 SO_2-型， $X_+\phi^{(-2)}_{1/2}=0$ 亦然。此外，由命题 1.1.2， $\zeta(2s)$在$s=1/2$ 处的简单极点抵消了 (1.1.8) 中交织算子的简单零点。因此存在非零常数 b_+ 与 b_- ，使得

$$(d_1c)(X_+\wedge X_-)_{\mathcal{N}}=\phi^{\mathrm{sph}}_{f,-1/2}\otimes(a_-b_-X_+\phi^{(-2)}_{\infty,-1/2}-a_+b_+X_-\phi^{(2)}_{\infty,-1/2}).$$

我们在右侧得到截面 $\phi^{(-2)}_{\infty-1/2}$ 和 $\phi^{(2)}_{\infty}$ 、$-1/2$ 的非零倍数，这一事实直接源于权为 2 的 SO_2-型以及 $\mathrm{Ind}^{SL_2(\mathbb{R})}_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}(1,-1/2)$ 中的 -2 都是唯一的。

现在有一个正合列

$$0\to\mathbb{C}\to\mathrm{Ind}^{SL_2(\mathbb{R})}_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}(1,-1/2)\to D_2\oplus D_{-2}\to 0,$$

它与上面的正合列对偶，但不是分裂的。因此， $X_+\phi^{(-2)}_{\infty}$ 、$-1/2$ 或$X_-\phi^{(2)}_{\infty}$ 、$-1/2$ 中至少有一个是 $\phi^{(0)}_{\infty}$ 、$-1/2$的非零倍数。因此存在常数 b'_+ 和 b'_-，其中至少一个非零（事实上，两者都不为零，但我们想强调的是，实际上无需知道这一点），使得

$$(d_1c)(X_+\wedge X_-)_{\mathcal{N}}=(a_-b_-b'_--a_+b_+b'_+)\phi^{\mathrm{sph}}_{f,-1/2}\otimes\phi^{(0)}_{\infty,-1/2}.$$

通过适当选择 a_- 和 a_+ ，我们可以使

$$a_-b_-b'_--a_+b_+b'_+\neq 0,$$

因此，采用这一选择后，常数项 $(d_1c)(X_+\wedge X_-)_{\mathcal{N}}$ 是ϕ^{sph}_{f} ,$_{-1/2}\otimes\phi^{(0)}_{\infty}$,$_{-1/2}$的一个非零倍数。但根据定义，这个截面是 K-固定的，而在 $\mathrm{Ind}^{SL_2(\mathbb{A})}_{\mathcal{B}(\mathbb{A})}(1,-1/2)$中，这样的截面唯一，即 $SL_2(\mathbb{A})$上的常值函数。这足以证明 $(d_1c)(X_+\wedge X_-)_{\mathcal{N}}$以及由此得到的 $(d_1c)(X_+\wedge X_-)$都是非零常值函数，从而在假设命题 1.1.2 成立的前提下证明了定理 1.1.1。

现在我们转向命题 1.1.2 的证明。为简单起见，我们来证明 $M(s,\phi^{(2)}_{\infty})$ 在 $s=1/2$ 处的一阶零点；用 $\phi^{(-2)}_{\infty}$ 替换 $\phi^{(2)}_{\infty}$ 的证明完全类似。

为此，我们首先计算 $\phi^{(2)}_{\infty,\,s}$ 与 $X_+\phi^{(0)}_{\infty,\,s}$ 之间的差异。当然，根据 $\phi^{(2)}_{\infty,\,s}$ 的定义，这两个截面在 $s=1/2$ 处相等，但它们在 s 的其他取值处可能（而且确实会）不同。不过我们至少知道，对于任意固定的 s，它们互为倍数，因为它们的权都是 2，并且对于任意 s，权为 2 的 $\mathrm{Ind}^{SL_2(\mathbb{R})}_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}(1,\ s)$ 中的 SO_2-型是唯一的。

现在根据 $\phi^{(0)}_{\infty,\,s}$ 的定义，对于所有 s，我们有 $\phi^{(0)}_{\infty,\,s}(1)=1$ 。记

$$X_+=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}H+i\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},$$

其中 H 与 (1.1.1) 中相同， X_+ 的显式定义也在那里给出。接着，根据李代数 $\mathfrak{sl}_2$ 在诱导表示上的作用定义本身，我们计算得

通过取幂和微分，得到

$$\begin{aligned}(X_+\phi^{(0)}_{\infty,s})(1) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\phi^{(0)}_{\infty,s}\left(\begin{smallmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t}\end{smallmatrix}\right)|_{t=0} + \frac{1}{2}(H\phi^{(0)}_{\infty,s})(1) + i\frac{d}{dt}\phi^{(0)}_{\infty,s}\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)|_{t=0} \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}e^{2(s+1/2)t}\phi^{(0)}_{\infty,s}(1)|_{t=0} + 0 + i\frac{d}{dt}\phi^{(0)}_{\infty,s}(1)|_{t=0} \\ &= (s+\tfrac{1}{2})\phi^{(0)}_{\infty,s}(1) \\ &= s+\tfrac{1}{2};\end{aligned}$$

在上面过渡到第二行时，我们利用了 $H\phi^{(0)}_{\infty,\,s}=0$，因为 $H\in\mathfrak{so}_2$ 且 $\phi^{(0)}_{\infty,\,s}$ 的权为 0，同时也用到了 $\phi^{(0)}_{\infty,\,s}$ 在 $\mathcal{T}(\mathbb{R})$ 和 $\mathcal{N}(\mathbb{R})$ 下左平移时的变换律。由此计算可推出 $\phi^{(2)}_{\infty\,,\,1/2}(1)=1$，只需取上面的 $s=1/2$，因此

$$\phi^{(2)}_{\infty,s}(1)=1 \text{ for all } s,$$

因此也有

$$X_+\phi^{(0)}_{\infty,s}=(s+\tfrac{1}{2})\phi^{(2)}_{\infty,s}.$$

现在，由于对任意 s，$\mathrm{Ind}^{SL_2(\mathbb{R})}_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}(1,\ s)$ 中权为 0 的 SO_2-型是唯一的，我们知道存在一个全纯函数 $a(s)$，满足 $a(1/2)\neq 0$，使得

$$M(s,\phi^{(0)}_\infty)=a(s)\phi^{(0)}_{\infty,-s}.$$

因此我们计算

$$\begin{aligned}M(s,\phi^{(2)}_\infty) &= \frac{1}{s+\frac{1}{2}}M(s,X_+\phi^{(0)}_\infty) \\ &= \frac{1}{s+\frac{1}{2}}X_+M(s,\phi^{(0)}_\infty) \\ &= \frac{1}{s+\frac{1}{2}}a(s)X_+\phi^{(0)}_{\infty,-s} \\ &= \frac{-s+\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{2}}a(s)\phi^{(2)}_{\infty,-s},\end{aligned}$$

显然，它在 $s=1/2$ 处有一阶零点。由此完成命题 1.1.2 的证明，进而完成定理 1.1.1 的证明。□

我们指出，仔细阅读命题 1.1.2 的证明，包括对涉及 $\phi^{(-2)}_{\infty\,s,}$ 的情形的处理，会发现实际上 $b_+=b_-$ 和上面的 $b'_+=b'_-$。因此，只需取 $a_+=-a_-=1$ 即可证明定理 1.1.1。不过，这个证明有一个非常方便之处：我们无需知道这一点；事实上，对于下文定理 3.2.1 的证明中出现的对象，我们也不会有如此明确的了解。

2 阿基米德处的结果

本节致力于讨论我们在阿基米德位所需的结果。主要结果包括定理 2.3.2、第 2.4 节的上同调计算，以及定理 2.5.2。

在第 2.1 节和第 2.2 节搭建好框架后，我们在第 2.3 节详细研究某些诱导表示的结构，并在第 2.4 节描述其上同调。第 2.5 节利用这些结果研究这些诱导表示上的交织算子的消失阶。最后，我们在第 2.6 节提出一组假设，并证明它们等价于第 2.1 节和第 2.2 节中的设定。

2.1 设定：群与李代数

我们固定一些将在本节中沿用的记号。设 G 是一个实的、连通的、线性的半单李群。令 K 为 G 的极大紧子群，并假设 K 包含 G 的一个紧 Cartan 子群；固定这样一个子群，记为 T。于是 K 是连通的，因为 G 连通，T 也如此（例如参见 [KV95，引理 4.43 (d)]）。分别用 $\mathfrak{g}$、$\mathfrak{k}$ 和 $\mathfrak{t}$ 表示 G、K 和 T 的复化李代数。

用 $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ 表示 $\mathfrak{t}$ 在 $\mathfrak{g}$中的根集。我们在 Δ 上固定一个序，并令 Δ^+ 为 Δ中的正根子集。我们假设 Δ^+ 包含一个非紧单根 α_0，也就是说，该根不出现在 $\mathfrak{k}$中。我们将围绕这个固定的单根 α_0进行各种构造。

现在，如 [Bla85, §2], 所述，我们按以下标准方式对来自 Δ 中各根的根向量进行正规化。令 B 为 $\mathfrak{g}$ 上的 Killing 形式，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为 $\mathfrak{t}$ 的对偶空间 $\mathfrak{t}^\vee$ 上由 B诱导的双线性形式。取 G 上的 Cartan 对合 θ，使其给出 K。于是 T在 θ下不变。对每个 $\alpha \in \Delta$，我们固定 $\mathfrak{g}$ 中的正规化根向量 X_α，使得

$$B(X_\alpha, X_{-\alpha}) = \frac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \qquad \text{and} \qquad \theta \overline{X}_\alpha = -X_{-\alpha}, \tag{2.1.1}$$

其中，$\overline{X}_\alpha$ 表示相对于 G的实李代数的复共轭。令 $H_\alpha \in \mathfrak{t}$ 为向量 $[X_\alpha, X_{-\alpha}]$。则 $\alpha(H_\alpha) = 2$，因此 $(H_\alpha, X_\alpha, X_{-\alpha})$ 构成一个正规化的 $\mathfrak{sl}_2$-三元组。

牢记这些正规化后，我们现在来构造一些涉及固定非紧单根 α_0 的对象。首先，写作

$$\mathfrak{a} = \mathbb{C}(X_{\alpha_0} + X_{-\alpha_0}) \subset \mathfrak{g}.$$

那么，$\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的阿贝尔李子代数。我们还用 $\mathfrak{t}'$ 表示 H_{α_0} 在 $\mathfrak{t}$ 中的正交补。由 $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{t}'$ 定义的李代数 $\mathfrak{h}$ 是一个 θ-稳定的嘉当子代数 $\mathfrak{g}$。事实上，令

$$C_{\alpha_0} = \mathrm{Ad}(\exp(\tfrac{\pi}{4}(X_{\alpha_0} - X_{-\alpha_0})))$$

为与 α_0 相关联的凯莱变换。那么，C_{α_0} 固定 $\mathfrak{t}'$，并将 $X_{\alpha_0} + X_{-\alpha_0}$ 变为 H_{α_0} 的一个非零实数倍。因此，凯莱变换的转置 ${}^tC_{\alpha_0}$ 给出了一个双射

$$\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}),$$

$\mathfrak{t}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中的根与 $\mathfrak{h}$在 $\mathfrak{g}$中的根之间。

设 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 为 G的实李代数。我们将 M_0° 定义为G 中与中心化子 $C_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}}(\mathfrak{a})$相对应的连通李子群。设 $\mathfrak{m}_0$为 M_0°的复化李代数，因此 $\mathfrak{m}_0 = Z_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}}(\mathfrak{a}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$。注意， $\mathfrak{t}'$ 是 $\mathfrak{m}_0$ 的嘉当子代数，因此 $M_0^\circ \cap T$ 是 M_0°的一个紧Cartan 子群。定义 $M_0 = C_K(\mathfrak{a})M_0^\circ$，于是$M_0^\circ$ 确实是 M_0中的单位元连通分支。我们还记

$$A = \exp(\mathbb{R}(X_{\alpha_0} + X_{-\alpha_0})) \tag{2.1.2}$$

并令 $M = M_0 A$。那么， M 是 A 在 G中的中心化子。它也是 G的一个极大抛物子群的Levi分量。事实上，按照 $\mathfrak{a}$中的根在 $\mathfrak{g}$上的 $X_{\alpha_0} + X_{-\alpha_0}$取值为正与否，对这些根进行排序。于是，由 $\mathfrak{a}$ 的正根空间生成的 $\mathfrak{n}$ $\mathfrak{g}$ 的子空间，是 $\mathfrak{g}$的一个幂零李子代数；并且存在 G 的一个幺正子群 N，其复化李代数为 $\mathfrak{n}$，且 $P = MN$ 是 G 的一个极大抛物子群，其Levi子群为 M。

注意， M 和 P 的构造只取决于 α_0 是 Δ上的序中的一个单根，而不取决于该序的任何其他性质。

2.2 设置：离散级数

我们继续采用第 2.1 节中的设置和记号。

令 ρ 为 Δ中的正根半和。对于 G的一个 ***Harish-Chandra*** 参数，我们指 $\mathfrak{t}$ 的一个正则权 Λ，使得 $\Lambda + \rho$ 是整的。下文始终固定 G的一个Δ^+-支配Harish-Chandra参数 Λ，使其满足

$$\frac{2\langle \Lambda, \alpha_0\rangle}{\langle \alpha_0, \alpha_0\rangle} = \frac{2\langle \rho, \alpha_0\rangle}{\langle \alpha_0, \alpha_0\rangle} = 1. \tag{2.2.1}$$

根据 [Bla85，命题 4.1]， $\Lambda|_{\mathfrak{t}'}$ 是 M_0° 的 Harish-Chandra 参数。因此，它确定了 M_0°的一个离散系列表示 π_0。同样地，参数 Λ确定了 G 的一个离散系列表示，我们将其记为 D_+。

令 ρ_c和 ρ_n 分别表示 Δ中正紧根或正非紧根的半和。则 $\Lambda - \rho_c + \rho_n$ 是 D_+的 Blattner 参数；也就是说，它是 D_+中最低 K-型的最高权。令 ξ 为 T 的特征，其微分为 $\Lambda - \rho_c + \rho_n$（回顾一下， T 是连通的）。那么 $\xi|_{Z_{M_0^\circ}}$ 就是 π_0的中心特征。因此，我们令 $\widetilde{\pi}_0$ 为由下式给出的 $M_0^\circ Z_{M_0}$的表示

$$\widetilde{\pi}_0 = \pi_0 \otimes (\xi|_{Z_{M_0}}).$$

也就是说，对于任意 $m \in M_0^\circ$和 $z \in Z_{M_0}$，我们定义乘积 mz 通过 $\widetilde{\pi}$ 在 π 的空间上按 $\xi(z)\pi(m)$作用。然后令下式成立，通过诱导得到 M_0 的一个离散系列表示 π：

$$\pi = \mathrm{Ind}_{M_0^\circ Z_{M_0}}^{M_0}(\widetilde{\pi}_0).$$

结果表明 π 是不可约的，而且我们甚至将从第 2.3 节中对 π的另一种解释看出这一点；见下文推论2.3.7。

我们现在如下定义 G的另一个离散系列表示。考虑参数 $\Lambda - \alpha_0$；我们声称该参数相对于正根系是正则支配的

$w_{\alpha_0}(\Delta^+)$属于 Δ，其中 w_{α_0} 是 Δ 中对应于 α_0的简单反射。事实上，利用（2.2.1）可计算得出，若 $\beta \in \Delta$，则

$$\begin{aligned}\langle \Lambda - \alpha_0, w_{\alpha_0}(\beta)\rangle =& \left\langle \Lambda - \alpha_0, \beta - \frac{2\langle \alpha_0, \beta\rangle}{\langle \alpha_0, \alpha_0\rangle}\alpha_0 \right\rangle \\ =& \langle \Lambda, \beta\rangle - \langle \alpha_0, \beta\rangle - \frac{2\langle \alpha_0, \beta\rangle}{\langle \alpha_0, \alpha_0\rangle}\langle \Lambda, \alpha_0\rangle + \frac{2\langle \alpha_0, \beta\rangle}{\langle \alpha_0, \alpha_0\rangle}\langle \alpha_0, \alpha_0\rangle \\ =& \langle \Lambda, \beta\rangle,\end{aligned}$$

因此，实际上这表明 $\Lambda - \alpha_0 = w_{\alpha_0}(\Lambda)$。

因此，我们可以将与 $\Lambda - \alpha_0$ 对应的 G 的离散系列表示 D_- 定义为 $\Lambda - \alpha_0$；其 Blattner 参数于是为

$$(\Lambda - \alpha_0) - \rho_c + (\rho_n - \alpha_0) = (\Lambda - \rho_c + \rho_n) - 2\alpha_0,$$

它与 D_+ 的参数相差 $2\alpha_0$。令 ξ' 为 T 的特征，其微分是 D_- 的 Blattner 参数。接下来我们断言 $\xi'|_{Z_{M_0}} = \xi|_{Z_{M_0}}$。事实上，我们将在命题 2.3.1 中证明（该命题不依赖本小节的内容）$Z_{M_0} \subset T$，因此这是有意义的，并且 $Z_{M_0}/(M_0^\circ \cap Z_{M_0})$ 至多有 2 个元素。但根 α_0 在 $T \cap M_0^\circ$ 上消失；为此，首先注意到容易看出，$T \cap M_0^\circ = C_{M_0^\circ}(\mathfrak{t}')$ 是附属于 $\mathfrak{t}'$ 的 M_0° 的 Cartan 子群，因而是连通的。因此，它等于 $\exp(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \cap \mathfrak{t}')$。但是 α_0 在 $\mathfrak{t}'$ 上消失，因为 $\mathfrak{t}'$ 是 $\mathfrak{t}$ 中 H_{α_0} 的正交补。因此 α_0 在 $Z_{M_0} \cap M_0^\circ$ 上消失，于是 $(2\alpha_0)|_{Z_{M_0}}$ 是平凡的，因为 $Z_{M_0}/(M_0^\circ \cap Z_{M_0})$ 至多有 2 个元素，这就证明了该断言。

由此可知，若 π_0' 是 M_0° 的离散系列表示，其 Harish-Chandra 参数为 $(\Lambda - \alpha_0)|_{\mathfrak{t}'}$，则 $\pi_0' = \pi_0$，因为 $\alpha_0|_{\mathfrak{t}'} = 0$。因此

$$\mathrm{Ind}_{M_0^\circ Z_{M_0}}^{M_0}(\pi_0' \otimes (\xi'|_{Z_{M_0}})) = \pi = \mathrm{Ind}_{M_0^\circ Z_{M_0}}^{M_0}(\pi_0 \otimes (\xi|_{Z_{M_0}})).$$

我们记

$$s_0 = (2\rho_P(X_{\alpha_0} + X_{-\alpha_0}))^{-1}, \tag{2.2.2}$$

其中 ρ_P 表示 $\mathfrak{a}$ 在 $\mathfrak{n}$中按重数计算的正根半和。根据 [Bla85]，下述定理出自 Schmid 未发表的工作；同上 重新证明了该定理，并给出了该定理所涉及的交织映射的积分公式。

T定理 2.2.1 (Schmid, Blank)**.** 存在非平凡的 $(\mathfrak{g}, K)$-等变映射

$$\mathrm{Ind}_P^G(\pi, -s_0) \to D_+ \qquad and \qquad \mathrm{Ind}_P^G(\pi, -s_0) \to D_-$$

其中我们回顾，上述诱导表示是酉正规化的，并且我们隐含地取其中的光滑、 K-有限向量。

实际上，在下一小节中，我们将使用上同调诱导对这个定理给出一个单独的证明。我们给出的证明使我们能够进一步推断上文所述诱导表示的结构。

2.3 标准模

我们沿用第 2.1 节和第 2.2 节中的记号。特别地，我们有子群 A及其中心化子 $M = M_0A$。在本小节中，我们将说明如何利用第 2.2 节中构造离散系列表示 π、 D_+ 和 D_- 的方法，重新证明定理 2.2.1，同时还会提供有关该定理中诱导表示 $\mathrm{Ind}_P^G(\pi, -s_0)$ 的所有组成因子的重要信息。该构造用到了上同调诱导函子；有关这一理论的参考资料，参见 [KV95] ，不过我们会回顾所需的全部理论事实。

回想一下，我们已用 θ 表示 G的Cartan 对合，它给出 K；我们用同样的记号 θ 表示 $\mathfrak{g}$ 上相应的Cartan 对合，它给出 $\mathfrak{k}$。输入这些上同调诱导函子的部分数据涉及 $\mathfrak{g}$的一个 θ-稳定抛物子代数；我们固定两个这样的子代数。设 $\mathfrak{b}$ 表示 $\mathfrak{g}$的Borel子代数，其Levi 因子为 $\mathfrak{t}$，它相对于我们在 Δ上固定的正根系 Δ^+ 是标准的（$\mathfrak{g}, \mathfrak{t}$）。设$\mathfrak{q} = \mathbb{C}X_{-\alpha_0} \oplus \mathfrak{b}$，其 Levi 因子为秩1，且包含 $\pm\alpha_0$。于是紧 Cartan 子群 T 是 $\mathfrak{b}$在 G中的正规化子。

设 $H = C_G(\mathfrak{h})$，其中 $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{t}'$ 如第 2.1 节所述。则 H 是 [KV95第 $239, 250$] 页意义下的 θ-稳定 Cartan 子群，由 [KV95，命题4.38 (d)]。由 [KV95，引理4.37],，我们有 $H = T'A$，其中 $T' = H \cap K$。

令 L 表示 G中 $\mathfrak{q}$ 的正规化子，其李代数为 $\mathfrak{l}$，它是 $\mathfrak{q}$的 Levi 因子。于是 L 包含子群 A，而 L 的导出群 L^d 是分裂的秩1单群。根据 [KV95，引理 5.10], ，它是连通的，因此我们有 L^{der} 同构于 $SL_2(\mathbb{R})$ 或 $PSL_2(\mathbb{R})$（回想一下，根据假设， G 有一个忠实有限维表示，因此 L^{der} 不可能是这两者中任何一个的非平凡覆盖）。由与上文相同的推理，H 也是 L的一个 θ-稳定 Cartan 子群。

命题 2.3.1。 记号同上。

(a) 我们有 $H \subset M$ 和 $H \subset L$。*(b)* 我们有 $Z_{M_0} \subset H$ 和 $Z_{M_0} \subset T$。*(c)* 群 $\pi_0(H)$ 和 $Z_{M_0}/(M_0^\circ \cap Z_{M_0})$ 至多有两个元素。

证明。 对于 (a)，首先注意到我们有

$$H = C_G(\mathfrak{h}) \subset C_G(\mathfrak{a}) = C_G(A) = M,$$

从而证明了第一个包含关系。

对于第二个，我们指出，根据 [KV95，命题 4.38 (d)],，我们有

$$H = C_G(\mathfrak{h}) = N_G(\mathfrak{b}') \cap N_G(\theta\mathfrak{b}'), \tag{2.3.1}$$

其中 $\mathfrak{b}'$ 是 $\mathfrak{g}$ 的任意 Borel子代数，且具有 Levi子群 $\mathfrak{h}$。此外，若 C_{α_0} 表示第 2.1 节中的 Cayley 变换，则 C_{α_0} 通过某个 $L_{\mathbb{C}}$中的元素（即 L的复化）施行伴随作用。因此 $C_{\alpha_0}(\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{q}$。类似地，令 w_{α_0} 表示 $\mathfrak{t}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中的魏尔群里与 α_0相关联的单反射，则我们也有 $C_{\alpha_0}(w_{\alpha_0}(\mathfrak{b})) \subset \mathfrak{q}$。由于$w_{\alpha_0}(\mathfrak{b}) + \mathfrak{b} = \mathfrak{q}$，因此我们有

$$\mathfrak{q} = C_{\alpha_0}(\mathfrak{b}) + C_{\alpha_0}(w_{\alpha_0}(\mathfrak{b})). \tag{2.3.2}$$

因此，结合 (2.3.1) 和 (2.3.2)，我们得到

$$H \subset N_G(C_{\alpha_0}(\mathfrak{b})) \cap N_G(C_{\alpha_0}(w_{\alpha_0}(\mathfrak{b}))) \subset N_G\Big(C_{\alpha_0}(\mathfrak{b}) + C_{\alpha_0}(w_{\alpha_0}(\mathfrak{b}))\Big) = N_G(\mathfrak{q}) = L,$$

正如所需。

对于 (b)，我们有 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{m}_0$，因为 $\mathfrak{h}$ 是阿贝尔的且包含 $\mathfrak{a}$，并且 $\mathfrak{m}_0 = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$。因此，

$$Z_{M_0} \subset C_G(\mathfrak{m}_0) \subset C_G(\mathfrak{h}) = H,$$

由 (2.3.1) 可得。这证明了第一个包含关系；我们将在下文证明之后证明第二个包含关系。 (c)

对于 (c)，令 $\varphi: SL_2(\mathbb{R}) \to L^{\mathrm{der}}$ 为一个同态，其微分将 $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$ 映为$X_{\alpha_0} + X_{-\alpha_0} \in \mathfrak{a}$，并将 $\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ 映为 $C_{\alpha_0}^{-1}(X_{\alpha_0})$。那么 φ 要么是同构，要么是一个消去中心的二对一映射。

群 T 是连通的，因此等于 $\exp(\mathfrak{t})$。由此可得，$\varphi^{-1}(T \cap L^{\mathrm{der}})$ 是通常的 SO_2，通过其标准嵌入嵌入到 $SL_2(\mathbb{R})$ 中，因为它的李代数是 $C_{\alpha_0}(\mathfrak{a}) = \mathbb{C}H_{\alpha_0}$。因此也可得 $\exp(\mathfrak{t}') \times \varphi(SO_2) = T$。由于 $T = \exp(\mathfrak{t})$ 且 $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{l}$，我们有 $T \subset L$，因此 $T = C_L(\mathfrak{t})$。由此可得 $Z_L \subset T$。但显然，T 中在 L 内为中心的最大子群是 $\exp(\mathfrak{t}') \times \varphi(\{\pm 1\})$，因此 $Z_L = \exp(\mathfrak{t}') \times \varphi(\{\pm 1\})$。

根据使用 (a) 的类似论证，我们有 $H = C_L(\mathfrak{h})$，因此 H 包含 $Z_L A$。但由于 $\varphi^{-1}(A) \cdot \{\pm 1\}$ 是 $SL_2(\mathbb{R})$ 中的标准对角环面，它在L^{der}中就是自己的中心化子。因此 $C_{L^{\mathrm{der}}}(A) = A \cdot \varphi(\{\pm 1\})$，由此可得 $H = Z_L A = \exp(\mathfrak{t}') \times \varphi(\{\pm 1\}) \times A$，其连通分支至多有 2 个。因此 $\#\pi_0(H) \leq 2$。

现在 $\exp(\mathfrak{h}) \subset M_0^\circ$，因为 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{m}_0$，因此可得 $H/(H \cap M_0^\circ)$ 至多有 2 个元素。由 (b) 中的第一个包含关系，我们可以进一步与 Z_{M_0} 取交：

$$Z_{M_0}/(M_0^\circ \cap Z_{M_0}) \cong (M_0^\circ Z_{M_0})/M_0^\circ \subset (M_0^\circ H)/M_0^\circ \cong H/(H \cap M_0^\circ),$$

这表明 $Z_{M_0}/(M_0^\circ \cap Z_{M_0})$ 同样至多有 2 个元素。

现在我们完成 (b) 的证明。由于 $Z_{M_0} \subset H$，且根据上文 (c) 的证明，$H = \exp(\mathfrak{t}') \times \varphi(\{\pm 1\}) \times A$，我们有 $Z_{M_0} \subset \exp(\mathfrak{t}') \times \varphi(\{\pm 1\})$；事实上，否则 Z_{M_0} 将通过上述乘积对 A 有非平凡投影，因而会是无限的。但显然 Z_{M_0} 具有有限中心。因此 $Z_{M_0} \subset \exp(\mathfrak{t}') \times \varphi(\{\pm 1\}) \subset T$，证毕。 □

现在我们引入 T 的一个特征和 L的一个特征，两者都记作λ。令 ρ为 Δ中的正根半和，令 Λ 为第 2.2 节中固定的 Δ^+-支配Harish-Chandra参数。我们用 λ 表示 T 的特征，其微分为$\Lambda - \rho$。由于 Λ 是一个Harish-Chandra参数，这确实定义了 T的一个良定义特征。根据(2.2.1)中的假设，权 $\Lambda - \rho$ 与 α_0正交，因此在 $\mathfrak{t} \cap \mathrm{Lie}(L^{\mathrm{der}})_{\mathbb{C}}$上平凡。因此，它定义了 L的一个特征；为简便起见，我们也将其记作 λ。

我们将按如下三种不同方式上同调诱导 λ 至 G。我们可以把 L 的特征 λ 视为一个一维的$(\mathfrak{l}, T)$-模；注意 L 是连通的，并且包含 T，因此 T是含于 K中的 L 的一个极大紧子群，从而$L \cap K = T$。然后我们可以考虑上同调诱导模

$$A_{\mathfrak{q}}(\lambda) = \mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^S(\lambda);$$

这里，数 S 是 $\mathfrak{q}$的根基中紧根的个数，右端是左端的定义，而右端本身在 [KV95第V.1]节中定义。一般地，记号 $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{i}$ 表示第 i个上同调诱导函子，它沿 θ-稳定抛物子代数 $\mathfrak{q}$把$(\mathfrak{l}, T)$-模映到$(\mathfrak{g}, K)$-模，因此特别地，$\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\lambda)$按定义是一个$(\mathfrak{g}, K)$-模。我们将尽量详细回顾我们所需的关于这些函子的全部事实。

类似地，将 λ 视为一个 $(\mathfrak{t},\ T)$-模，我们可以定义 $(\mathfrak{g},\ K)$-模

$$A_{\mathfrak{b}}(\lambda) = \mathcal{R}_{\mathfrak{b}}^{S}(\lambda), \qquad A_{w_{\alpha_0}\mathfrak{b}}(\lambda) = \mathcal{R}_{w_{\alpha_0}\mathfrak{b}}^{S}(\lambda),$$

其中 w_{α_0} 表示 $\Delta(\mathfrak{g},\ \mathfrak{t})$ 的魏尔群中与 α_0 对应的简单反射。注意， S 也是 $\mathfrak{b}$ 或 $w_{\alpha_0}\mathfrak{b}$ 的根基中紧根的个数。

一般而言，给定的一个 θ-稳定抛物子代数的根基中紧根的个数，先验上就是上同调诱导函子的中间次数。事实证明，这些函子在高于此次数时也消失；参见 [KV95，定理 5.35]。对于无穷小特征处于好范围内的模（参见 [KV95，定义 0.49]），上同调诱导函子也仅集中在这个中间次数 [KV95，定理 5.99 (b)]。上文记作 λ 的模，其无穷小特征处于此好范围内，下面我们将对它们应用这个消失定理。

上同调诱导函子对无穷小特征的作用也已得到理解。由于 $(\mathfrak{g},\ K)$ 属于 *Harish-Chandra*类 （我们的 G 是连通半单的，因此满足这一条件；参见 [KV95，定义 4.29] 及其后的例子），根据 [KV95，推论 5.25 (b)]，我们的上同调诱导模的无穷小特征由诱导模加上 θ-稳定抛物子代数的根基中所有根的半和给出。因此，由于 L^{der} 的平凡表示的无穷小特征为 $\frac{1}{2}\alpha_0$，可知所有模 $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$、 $A_{\mathfrak{b}}(\lambda)$ 和 $A_{w_{\alpha_0}\mathfrak{b}}(\lambda)$ 的无穷小特征均由 Λ 的Weyl轨道给出。

现在我们的目标是证明以下定理。

定理 2.3.2。 记号同上。

(a) $(\mathfrak{g}, K)$-模 $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$、 $A_{\mathfrak{b}}(\lambda)$ 和 $A_{w_{\alpha_0}\mathfrak{b}}(\lambda)$ 都是酉且不可约的。

(b) 设 π 为 M 的离散系列表示， D_+ 和 D_- 为 G 的离散系列表示，它们已在第 *2.2* 节中引入。设 J 为 诱导表示$\mathcal{I}_P^G(\pi, s_0)$ 的唯一不可约商，其中 s_0 如 (2.2.2) 中所述。则有如下同构

$$A_{\mathfrak{b}}(\lambda) \cong D_+, \qquad A_{w_{\alpha_0}\mathfrak{b}}(\lambda) \cong D_-, \qquad A_{\mathfrak{q}}(\lambda) \cong J.$$

(c) 我们有正合列

$$0 \to D_+ \oplus D_- \to \mathrm{Ind}_P^G(\pi, s_0) \to J \to 0, \tag{2.3.3}$$

and

$$0 \to J \to \mathrm{Ind}_P^G(\pi, -s_0) \to D_+ \oplus D_- \to 0. \tag{2.3.4}$$

证明将在本小节余下部分给出。关键在于以两种不同的方式将诱导表示 $\mathrm{Ind}_P^G(\pi,\ -s_0)$ 写成标准模，然后援引 Vogan 的著作 [Vog81] 中的一个定理，该定理指出，这两种标准模的表示方式是等价的。（值得一提的是，在他们证明定理 11.216 的 [KV95] 中也或多或少包含了这个定理，不过该定理的表述仅针对朗兰兹商，而非标准模本身。就我们的目的而言，我们更倾向于采用 [Vog81] 中的表述。）

这两种不同类型的标准模分别对应两种不同类型的数据。其中一种称为 θ-稳定数据，定义见 [Vog81，第 6.5 定义。1]与 θ-稳定数据对应的标准模具有如下形式：

$$(\text{cohomological induction}) \circ (\text{parabolic induction}),$$

其中，被诱导的表示由该数据确定。

另一种数据是尖点数据，定义见 [Vog81，第 6.6 定义。11]与尖点数据对应的标准模形式相反：

$$(\text{parabolic induction}) \circ (\text{cohomological induction}).$$

连接这两种不同类型数据的是第三种数据概念，称为特征数据，定义见 [Vog81，第 6.6 定义。1]事实上， G 的 θ-稳定数据集合与 G的特征数据集合之间存在一个双射，具体见 [Vog81，命题 6.6。2]此外， G 的特征数据集合到 G的尖点数据集合之间存在一个满射，具体见 [Vog81，引理 6.6。12]因此，复合这两个映射，便可从 G的一个 θ-稳定数据出发，得到 G 的一个尖点数据；关键在于， [Vog81，定理 6.6。15]断言，与这两者分别对应的标准模同构。

现在，我们在当前设定下追溯这一推理思路。考虑四元组 $(\mathfrak{q},\ H,\ \lambda|_{T'},\ \nu)$，其中 $\mathfrak{q}$、H、λ 和 T' 已在本小节前文定义，且 ν 为特征 $A \to \mathbb{R}_{>0}$，其微分为 $-\frac{1}{2}\,{}^tC_{\alpha_0}(\alpha_0)$，即它是 L 中标准 Borel 子群相对于 Levi子群 H 的模特征平方根的逆。于是，$(\mathfrak{q},\ H,\ \lambda|_{T'},\ \nu)$ 是如 [Vog81 定义 6.5.1] 中所述的一个 θ-稳定数据。事实上，唯一需要验证的是该定义中的条件 (c)，即 $\lambda|_{T'}$ 关于 L 是 精细的。该条件意味着 $\lambda|_{L^{\mathrm{der}}\cap T'}$ 是平凡的。但这由 $\langle \Lambda-\rho,\ \alpha_0\rangle = 0$ （见 (2.2.1)）即可推出。

我们按照 [Vog81, Definition 6.5.2] 中的方法，构造与 $(\mathfrak{q}, H, \lambda|_{T'}, \nu)$ 相关的标准模。令 B_L 为 L 中的标准 Borel 子群，其 Levi 子群为 H，这样 ν 相对于 B_L 为负，符合 *loc. cit.* 中的要求。于是 $(\lambda|_{T'}) \otimes \nu$ 是 H 的一个特征，我们可以将其酉抛物诱导到 L，再对其进行上同调诱导到 G；也就是说，我们的标准模为

$$X(\mathfrak{q}, H, \lambda|_{T'}, \nu) = \mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^S(\mathrm{Ind}_{B_L}^L((\lambda|_{T'}) \otimes \nu)).$$

我们指出，上文出现的抛物诱导仍采用酉归一化。现在我们使用 [Vog81, 命题 6.6.2] 中的过程，从 $(\mathfrak{q}, H, \lambda|_{T'}, \nu)$ 构造特征数据。令 $\mathfrak{u}$ 为 $\mathfrak{q}$ 的根基，并令 $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}^{\theta=-1}$。定义 H 的特征 Γ 为

$$\Gamma|_A = \nu \quad \text{and} \quad \Gamma|_{T'} = \lambda|_{T'} \otimes \bigwedge\nolimits^{\mathrm{top}}(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}),$$

并定义 $\mathfrak{h}$ 的权 γ 为

$$\gamma|_{\mathfrak{t}'} = (\Lambda - \alpha_0)|_{\mathfrak{t}'} \quad \text{and} \quad \gamma|_{\mathfrak{a}} = -\frac{1}{2}\,{}^t C_{\alpha_0}(\alpha_0) = d\nu.$$

于是根据 [Vog81，命题 6.6，2]，(Γ, γ) 是 [Vog81 定义 6.6 中的特征数据。

我们从这个特征数据转向尖点数据。考虑三元组 (M, δ, ν)，其中 ν 和 $M = M_0 A$ 如上，δ 是 M_0 的离散系列表示，由下述内容给出。考虑将 (Γ, γ) 限制到 T' 后得到的有序对 (Γ', γ'):

$$\Gamma' = \Gamma|_{T'} \quad \text{and} \quad \gamma' = \gamma|_{\mathfrak{t}'}.$$

于是 (Γ', γ') 是 M_0 的特征数据，因此它来自尖点数据 $(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{m}_0, T', \lambda', 1)$，其中条目 1 是平凡群的平凡特征，而 λ' 是 T' 的特征，必由下式给出

$$\lambda' = \Gamma|_{T'} \otimes \Big(\bigwedge\nolimits^{\mathrm{top}} (\mathfrak{u}' \cap \mathfrak{m}_0 \cap \mathfrak{p}) \Big)^{-1}, \tag{2.3.5}$$

其中 $\mathfrak{u}'$ 是 $\mathfrak{b}$ 的根基。令 S' 为 $\mathfrak{t}'$ 在 $\mathfrak{m}_0$ 中的正紧根数目，我们定义

$$\delta = \mathcal{R}^{S'}_{\mathfrak{b}\cap\mathfrak{m}_0}(\lambda'),$$

因此，δ 是标准模 $X(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{m}_0, T', \lambda', 1)$。表示 δ 确实是（可能不连通的）群 M_0 的离散系列表示，这可由连通情形结合 [KV95, 定理 11.178] 得出。

根据 [Vog81, 引理 6.6.12]，，三元组 (M, δ, ν) 是一个尖点数据，如 [Vog81, 定义 6.6.11] 中所述。有了这一数据，我们便可如下构造另一个标准模。G 中以 $M = M_0 A$ 为 Levi 子群、定义于第 2.1 节的抛物子群 P，是由 $-\nu$ 所定义的抛物子群；这一概念在 [Vog81, 定义 6.6.13] 中有说明。因此，我们可以定义标准模

$$X(M, \delta, \nu) = \mathrm{Ind}_P^G(\delta \otimes \nu),$$

抛物诱导仍按酉方式归一化。于是得到以下结论，它直接由 [Vog81, 定理 6.6.15] 得出。

命题 2.3.3。采用上述记号，有一个同构

$$X(\mathfrak{q}, H, \lambda|_{T'}, \nu) \cong X(M, \delta, \nu).$$

也就是说，

$$\mathcal{R}^S_{\mathfrak{q}}(\mathrm{Ind}^L_{B_L}((\lambda|_{T'}) \otimes \nu)) \cong \mathrm{Ind}_P^G(\mathcal{R}^{S'}_{\mathfrak{b}\cap\mathfrak{m}_0}(\lambda') \otimes \nu).$$

现在回到定理 2.3.2 的证明。我们首先要做的是，将上面的标准模 $X(M,\ \delta,\ \nu)$ 与诱导表示 诱导表示$_P^G(\pi,\ -s_0)$ 识别起来。随后，我们将确定另一个标准模 $\mathcal{R}^S_{\mathfrak{q}}$(诱导表示$^L_{B_L}$ $((\lambda|_{T'})\otimes\nu)$) 的组成因子；这样，除了该定理 (c) 部分中的正合列 (2.3.3) 外，就足以证明定理 2.3.2。然后，我们将使用涉及厄米对偶以及另一个正合列 (2.3.4) 的论证，从而完成整个证明。

因此，我们从以下内容开始。

命题2.3.4. 存在一个同构 $\delta \cong \pi$。

证明。 我们回顾一下， π 按以下三个步骤得到。首先，我们取 π_0 为 M_0° 的离散系列表示，其 Harish-Chandra 参数为 $\Lambda|_{\mathfrak{t}'}$。然后，我们取$\widetilde{\pi}_0 = \pi_0 \otimes (\xi|_{Z_{M_0}})$作为 $M_0^\circ Z_{M_0}$的一个表示，其中 ξ是 T的特征，其微分为 Blattner 参数 $\Lambda - \rho_c + \rho_n$。最后，我们取 $\pi =$诱导表示$_{M_0^\circ Z_{M_0}}^{M_0}(\widetilde{\pi}_0)$。

我们也可以把表示 $\widetilde{\pi}_0$另一种描述为 $M_0^\circ Z_{M_0}$的表示，其对 M_0° 的限制为 π_0，其中心特征为 $\xi|_{Z_{M_0}}$。注意，出现在我们的 θ-稳定数据中的特征 Γ 按定义恰好是 $\xi|_{T'}$。因此，(2.3.5) 的特征 λ' 具有 $\lambda'|_{Z_{M_0}} = \xi|_{Z_{M_0}}$，因为特征 $\bigwedge^{\mathrm{top}}(\mathfrak{u}' \cap \mathfrak{m}_0 \cap \mathfrak{p})$ 到 Z_{M_0} 的限制是平凡的，这是由于 Z_{M_0} 中心化 $\mathfrak{m}_0$。（我们还注意到，限制 $\lambda'|_{Z_{M_0}}$ 之所以首先有意义，是因为命题 2.3.1 (b) 蕴含 $Z_{M_0} \subset T'$。）为避免混淆，我们将 $(\mathcal{R}^{\mathfrak{m}_0}$,$(\quad_{K\cap M_0^\circ\ Z_{M_0}})$, $)^{S'}$ 记为从 $(\mathfrak{t}', T')$-模到 $(\mathfrak{m}_0, (K \cap M_0^\circ)Z_{M_0})$-模的上同调诱导函子，并将 $(\mathcal{R}^{\mathfrak{m}_0}$,$_{\mathfrak{t}'\ T'}^{K\cap M_0}$, $)^{S'}$ 记为从 $(\mathfrak{t}', T')$-模到 $(\mathfrak{m}_0, K \cap M_0)$-模的上同调诱导函子。于是 [KV95，命题 11.192] 告诉我们，$(\mathcal{R}^{\mathfrak{m}_0}$,$(\quad_{K\cap M_0^\circ\ Z_{M_0}})$, $)^{S'}(\lambda')$ 是 $M_0^\circ Z_{M_0}$ 的离散系列表示，其最低 K-型带有一个最高权，记为μ, 使得

$$\mu|_{(T')^\circ} = (\lambda'|_{(T')^\circ}) \cdot \bigwedge^{\mathrm{top}}(\mathfrak{u}' \cap \mathfrak{m}_0 \cap \mathfrak{p}),$$

且使得 $\mu|_{Z_{M_0}} = \xi|_{Z_{M_0}}$。但根据 [Vog81, 引理 5.3.29], , 我们有

$$\bigwedge^{\mathrm{top}}(\mathfrak{u}' \cap \mathfrak{m}_0 \cap \mathfrak{p})|_{(T')^\circ} = \bigwedge^{\mathrm{top}}(\mathfrak{u}' \cap \mathfrak{p})|_{(T')^\circ}.$$

因此， μ的微分是 $\widetilde{\pi}_0$的 Blattner 参数，而 $\mu|_{Z_{M_0}}$ 是 $\widetilde{\pi}_0$的中心特征，因此 $(\mathcal{R}^{\mathfrak{m}_0}$,$_{\mathfrak{t}'}^{\quad,T'}$ $(\quad_{K\cap M_0^\circ\ Z_{M_0}})^{S'}(\lambda')$ 正是 $\widetilde{\pi}_0$。

最后， [KV95，公式(5.8)]告诉我们

$$(\mathcal{R}^{\mathfrak{m}_0, K\cap M_0}_{\mathfrak{t}', T'})^{S'}(\lambda') = \mathrm{Ind}_{M_0^\circ Z_{M_0}}^{M_0}((\mathcal{R}^{\mathfrak{m}_0, (K\cap M_0^\circ)Z_{M_0}}_{\mathfrak{t}', T'})^{S'}(\lambda')).$$

根据上文，左侧的诱导表示同构于 $\mathrm{Ind}_{M_0^\circ Z_{M_0}}^{M_0}(\widetilde{\pi}_0)$，这正是 π的定义，由此命题得证。

□

推论 2.3.5。 我们有一个同构

$$X(M, \delta, \nu) \cong \mathrm{Ind}_P^G(\pi, -s_0).$$

证明。 根据命题，只需证明 $\delta_P^{-s_0}|_A = \nu$。但根据 (2.2.2) 中 s_0 的定义，特征 $\delta_P^{-s_0}$ 微分后得到将 $(X_{\alpha_0} + X_{-\alpha_0})$ 映为 -1 的特征；特征 ν 也如此。

□

现在我们开始描述另一个标准模 $X(\mathfrak{q}, H, \lambda|_{T'}, \nu)$。回想一下， L 的导出群 L^{der} 是 $SL_2(\mathbb{R})$ 或 $PSL_2(\mathbb{R})$。若 B_2 表示 $SL_2(\mathbb{R})$ 的标准上三角博雷尔子群，则主系列诱导表示 $\mathrm{Ind}^{SL_2(\mathbb{R})\ B_2}(\delta_{B_2}^{-1/2}\ )$ 的商表示分解为权 2 和权 -2 的离散系列之直和，而其唯一的不可约子表示是平凡表示。我们还回想起

λ 在 $L^{\mathrm{der}} \cap T$ 上的限制是平凡的，这是由 (2.2.1) 得出的。因此，设 $\delta_{\pm 2}(\lambda)$ 表示 L 的 Harish-Chandra 参数为 $\lambda \pm \frac{1}{2}\alpha_0$ 的离散系列表示。那么， $\delta_{\pm 2}(\lambda)|_{L^{\mathrm{der}}}$ 是 L^{der} 的权 ± 2 离散系列表示。暂且将特征 λ 视为 L 的特征时记作 λ_L，以便与 T 的特征 λ 区分。于是，诱导表示 $\mathrm{Ind}_{B_L}^{L}((\lambda|_{T'}) \otimes \nu)$ 属于一个正合列

$$0 \to \lambda_L \to \mathrm{Ind}_{B_L}^{L}((\lambda|_{T'}) \otimes \nu) \to \delta_2(\lambda) \oplus \delta_{-2}(\lambda) \to 0.$$

根据消失定理 [KV95，定理 5.99 (b)] 以及上同调诱导函子作为导出函子的性质，上同调诱导在良好范围内是正合的。由此可得我们有一个正合列

$$0 \to A_{\mathfrak{q}}(\lambda) \to X(\mathfrak{q}, H, \lambda|_{T'}, \nu) \to \mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\delta_2(\lambda)) \oplus \mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\delta_{-2}(\lambda)) \to 0 \tag{2.3.6}$$

每个组成因子 $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$、 $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\delta_2(\lambda))$和 $\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\delta_{-2}(\lambda))$根据不可约性定理 [KV95，定理 8.2],都是不可约的，因此这些同构

$$X(\mathfrak{q}, H, \lambda|_{T'}, \nu) \cong X(M, \delta, \nu) \cong \mathrm{Ind}_{P}^{G}(\pi, -s_0)$$

已经建立的结果表明， $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$是$\mathrm{Ind}_{P}^{G}(\pi, -s_0)$的一个不可约子表示。严格说来，我们尚未证明 π 本身是不可约的。我们将在下文中由下述内容推出这一点。

命题 2.3.6。我们有同构

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\delta_2(\lambda)) \cong A_{\mathfrak{b}}(\lambda) \cong D_+, \quad \textit{and} \quad \mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\delta_{-2}(\lambda)) \cong A_{w_{\alpha_0}\mathfrak{b}}(\lambda) \cong D_-.$$

证明。 根据 [KV95，定理 11.178和命题 11.192], ，表示 $A_{\mathfrak{b}}(\lambda)$是具有Blattner 参数 $\lambda + 2\rho_n$的离散系列表示，而这恰好是 D_+，类似地 $A_{w_{\alpha_0}\mathfrak{b}}(\lambda) \cong D_-$。因此我们必须证明

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\delta_2(\lambda)) \cong A_{\mathfrak{b}}(\lambda) \quad \text{and} \quad \mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\delta_{-2}(\lambda)) \cong A_{w_{\alpha_0}\mathfrak{b}}(\lambda).$$

根据同上引文，我们还有

$$\delta_2(\lambda) \cong \mathcal{R}_{\mathfrak{b}\cap\mathfrak{l}}^{0}(\lambda) \quad \text{and} \quad \delta_{-2}(\lambda) \cong \mathcal{R}_{(w_{\alpha_0}\mathfrak{b})\cap\mathfrak{l}}^{0}(\lambda),$$

其中，上述上同调诱导函子是从 $(\mathfrak{t}, T)$-模到 $(\mathfrak{l}, T)$-模的。现在有一个谱序列 [KV95，定理 11.77] ，它计算两个上同调诱导函子的复合。在好范围内，消失定理 [KV95，定理 5.99 (b)]表明该谱序列立即退化。将此应用于我们的情形，得到

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathcal{R}_{\mathfrak{b}\cap\mathfrak{l}}^{0}(\lambda)) \cong A_{\mathfrak{b}}(\lambda) \quad \text{and} \quad \mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^{S}(\mathcal{R}_{(w_{\alpha_0}\mathfrak{b})\cap\mathfrak{l}}^{0}(\lambda)) \cong A_{w_{\alpha_0}\mathfrak{b}}(\lambda).$$

这就证明了该命题。 □

推论2.3.7。 表示 π （等价地， δ）是不可约的。

证明。 注意，命题结合（2.3.6）表明，诱导表示 $\mathrm{Ind}_P^G(\pi, -s_0)$ 中只有一个非温成分（它必定是 $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$）。根据朗兰兹分类以及 $s_0 > 0$ 这一事实，我们必有 π 是不可约的。 □

因此，我们现在已经证明了定理 2.3.2 的 (b) 和 (c) 的后半部分，其中用 $\mathrm{Ind}_P^G(\pi, -s_0)$ 的唯一不可约子表示代替了 J（我们尚未证明它确实就是 J 本身），而 (a) 则由不可约性定理 [KV95, 定理 8.2]以及可酉化性 [KV95, 定理 9.1]得到。因此，为完成定理 2.3.2 的证明，只需确立一个正合列的存在性

$$0 \to A_{\mathfrak{b}}(\lambda) \oplus A_{w_{\alpha_0}\mathfrak{b}}(\lambda) \to \mathrm{Ind}_P^G(\pi, s_0) \to A_{\mathfrak{q}}(\lambda) \to 0.$$

为此，我们将厄米对偶函子（见 [KV95, §VI.2]）记作 $(\cdot)^h$，应用于该正合列

$$0 \to A_{\mathfrak{q}}(\lambda) \to \mathrm{Ind}_P^G(\pi, -s_0) \to A_{\mathfrak{b}}(\lambda) \oplus A_{w_{\alpha_0}\mathfrak{b}}(\lambda) \to 0.$$

该函子是逆变且正合的，并且保持酉模不变。将其应用于上述正合列，并利用两端表示的可酉化性，可得

$$0 \to A_{\mathfrak{b}}(\lambda) \oplus A_{w_{\alpha_0}\mathfrak{b}}(\lambda) \to \mathrm{Ind}_P^G(\pi, -s_0)^h \to A_{\mathfrak{q}}(\lambda) \to 0.$$

但是根据 [KV95, 推论 11.59] 以及 s_0 为实数这一事实，我们有

$$\mathrm{Ind}_P^G(\pi, -s_0)^h \cong \mathrm{Ind}_P^G(\pi^h, \overline{s}_0) \cong \mathrm{Ind}_P^G(\pi, s_0),$$

同样，这是因为 π 是酉的，因为它是一个离散系列表示。这就是我们要证明的正合列，至此定理 2.3.2 的证明完成。 □

我们注意到同构 $J \cong A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ 有如下推论，这一点稍后将很重要。

推论 2.3.8。 表示 J 有唯一的最低 K-型，其最高权为 $\Lambda - \rho_c + \rho_n - \alpha_0$。

证明。 根据 [KV95，定理 5.80 和推论 5.72], ，最高权为 $\lambda \otimes \bigwedge^{\mathrm{top}}(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$ 的 K-型是 $A_{\mathfrak{q}}(\lambda) \cong J$ 中的最低 K-型；此权恰为

$$\lambda + 2\rho_n - \alpha_0 = \Lambda - \rho + 2\rho_n - \alpha_0 = \Lambda - \rho_c + \rho_n - \alpha_0,$$

正如所需。 □

2.4 $(\mathfrak{g}, K)$-上同调

我们沿用第 2.1 节和第 2.2 节中的记号。在本小节中，我们讨论第 2.3 节中诱导表示的（$\mathfrak{g}, K$）-上同调。

令 s_0 为式 (2.2.2) 中的特定数。由定理 2.3.2 (c)，我们得到以下两个正合列

$$0 \to D_+ \oplus D_- \to \mathrm{Ind}_P^G(\pi, s_0) \to J \to 0,$$

and

$$0 \to J \to \mathrm{Ind}_P^G(\pi, -s_0) \to D_+ \oplus D_- \to 0,$$

分别对应式 (2.3.3) 和 (2.3.4)，其中 D_+、D_- 和 π 是第 2.2 节中的离散系列表示，而 J 是 $\mathrm{Ind}_P^G(\pi, s_0)$ 的唯一不可约商。我们考察与这些短正合列相关的（带系数的）$(\mathfrak{g}, K)$-上同调正合列。

回顾（例如参见 [BW00] ），对任意$(\mathfrak{g}, K)$-模 Π，Π的第 i个$(\mathfrak{g}, K)$-上同调群记为 $H^i(\mathfrak{g}, K; \Pi)$，它计算为复形 $C^\bullet(\mathfrak{g}, K; \Pi)$的上同调，其中

$$C^q(\mathfrak{g}, K; \Pi) = \mathrm{Hom}_K(\bigwedge^q(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), \Pi),$$

其中 K 通过伴随作用作用于 $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$，且边界映射 d： $C^q(\mathfrak{g}, K; \Pi) \to C^{q+1}(\mathfrak{g}, K; \Pi)$由下述给出。设 $X_0, \ldots, X_q \in \mathfrak{g}$ 以及 $c \in C^q(\mathfrak{g}, K; \Pi)$。则 dc由如下公式给出

$$\begin{aligned}(dc)(X_0 \wedge \cdots \wedge X_q) = &\sum_{i=0}^{q} (-1)^i X_i c(X_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{X}_i \wedge \cdots \wedge X_q) \\ &+ \sum_{0 \le i < j \le q} (-1)^{i+j} c([X_i, X_j] \wedge X_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{X}_i \wedge \cdots \wedge \widehat{X}_j \wedge \cdots \wedge X_q), \quad (2.4.1)\end{aligned}$$

其中外积中的项 X_i 被视为它们在 $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$中的像，而帽子表示我们从外积中略去相应的那一项。于是可知该边界映射 d 是良定义的，即在相差加上 $\mathfrak{k}$中元素的意义下，与诸 X_i的选取无关。

我们现在证明如下结论。

命题 2.4.1。令 Λ 为第 *2.2* 节中的权，令 $E_{\Lambda-\rho}$ 为 $G(\mathbb{C})$ 的最高权为 $\Lambda - \rho$的不可约表示，其中 ρ 按通常定义为 $\mathfrak{g}$中第 *2.1* 节的嘉当子代数 $\mathfrak{t}$ 的正根半和。令 $d = \frac{1}{2}$ 维数$_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$。

(a) 复形 $C^\bullet(\mathfrak{g}, K;\ D_\pm \otimes E^\vee_{\Lambda-\rho})$ 等于其上同调，集中在d次，并且维数为 1 。*(b)* 复形 $C^\bullet(\mathfrak{g}, K;\ J \otimes E^\vee_{\Lambda-\rho})$ 等于其上同调，集中在 $d-1$次和 $d+1$次，并且在这两个次数上的维数均为 1 。*(c)* 对任意 $s \in \mathbb{C}$，复形 $C^\bullet(\mathfrak{g}, K;$ 诱导表示$\mathrm{Ind}_P^G(\pi, s) \otimes E^\vee_{\Lambda-\rho})$ 集中在$d-1$次、d次和 $d+1$次，其维数分别为 1、2和 1 。

证明。根据 [BW00，命题 II.3.1 (b)], ，(a) 和 (b) 部分中的复形等于其上同调群，因为 $D_\pm$ 和 J 根据定理 2.3.2 (a) 和 (b) 是酉的。因此，由于我们已假设 G，从而 K，是连通的，(a) 和 (b) 部分便可立即由 [VZ84，定理 5.5], 以及定理 2.3.2 (b) 得出，其中我们将表示写成 $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ 的形式。于是，利用这一点和正合列 (2.3.3)，即可得到 (c) 部分对点 $s = s_0$ 的陈述。因此，该结论对所有 s 都成立，因为诱导表示 $\mathrm{Ind}_P^G(\pi, s)$ 中的 K-型集合与 s 无关。 □

We 作如下评述，这将在后面的若干情形中对我们有所帮助 .

R注记 2.4.2. 由命题 2.4.1，我们有四个线性无关的上链 s

$$c^{d\pm1}:\bigwedge^{d\pm1}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})\to \mathrm{Ind}_P^G(\pi,s_0)\otimes E^\vee_{\Lambda-\rho},\quad \text{and}\quad c^{d,\pm}:\bigwedge^{d}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})\to \mathrm{Ind}_P^G(\pi,s_0)\otimes E^\vee_{\Lambda-\rho}$$

我们将在下文中把它们显式描述到相差一个非零标量倍数的意义下，并且这些上链张成诱导表示$_P^G(\pi,s_0)\otimes E^\vee_{\Lambda-\rho}$ 的 $(\mathfrak{g},K)$-上同调复形。（精确的标量倍数对我们的任何应用都无关紧要。）由于诱导表示$_P^G(\pi,s)$ 的 K-型与 s 无关，因此可以对张成诱导表示$_P^G(\pi,s)\otimes E^\vee_{\Lambda-\rho}$ 的 $(\mathfrak{g},K)$- 上同调复形的上循环给出类似描述

为描述这些上链，首先注意 $\bigwedge^{d-1}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$ 包含一维子空间 $\bigwedge^{d-1}(\mathfrak{u}/(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{k}))$，其中 $\mathfrak{u}$ 是第 2.3 节中、命题 2.3.1 之前所定义的 θ- 稳定抛物子代数 $\mathfrak{q}$ 的根基。这是一个权为 $2\rho_n-\alpha_0$ 的 $\mathfrak{t}$- 稳定子空间，并且由于 α_0 是单的，它是 $\bigwedge^{d-1}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$ 的一个最高权。因此 $\bigwedge^{d-1}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$ 包含具有该最高权 $2\rho_n-\alpha_0$ 的表示。此外，表示 $J\otimes E^\vee_{\Lambda-\rho}$，从而诱导表示 $_P^G(\pi,s_0)$ $\otimes E^\vee_{\Lambda-\rho}$，也包含一个最高权为

$$(\Lambda-\rho_c+\rho_n-\alpha_0)-(\Lambda-\rho)=2\rho_n-\alpha_0$$

出现在我们由推论 2.3.8 得到的最高权为$\Lambda-\rho_c+\rho_n-\alpha_0$ 的 J（或 $\mathrm{Ind}_P^G(\pi,\ s_0)$）中的 K 型与最低权为–的 $E^\vee_{\Lambda-\rho}$ 中的 K型的张量积中（$\Lambda-\rho$）。因此，上链 c^{d-1} 必须将 $\bigwedge^{d-1}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$ 中最高权为$2\rho_n-\alpha_0$ 的 K型同构地映到 $\mathrm{Ind}_P^G(\pi,\ s_0)\otimes E^\vee_{\Lambda-\rho}$中的这一 K型，并在 $\bigwedge^{d-1}($ $\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$中的所有其他$K$型上取零。

同样，子空间

$$(\mathbb{C}X_{\alpha_0})\wedge(\mathbb{C}X_{-\alpha_0})\wedge\bigwedge^{d\pm1}(\mathfrak{u}/(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{k}))\subset\bigwedge^{d+1}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$$

给出 $\bigwedge^{d+1}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$中一个最高权为 $2\rho_n-\alpha_0$的唯一 K型，而上链 c^{d+1}必须将这一 K型同构地映到上文所述的、最高权为 $2\rho_n-\alpha_0$ 的 $\mathrm{Ind}_P^G(\pi,\ s_0)\otimes E^\vee_{\Lambda-\rho}$中的 K型，并在 $\bigwedge^{d+1}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$中的所有其他 K型上取零。

最后，这些子空间

$$(\mathbb{C}X_{\alpha_0})\wedge\bigwedge^{d-1}(\mathfrak{u}/(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{k}))\subset\bigwedge^{d}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$$

and

$$(\mathbb{C}X_{-\alpha_0})\wedge\bigwedge^{d-1}(\mathfrak{u}/(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{k}))\subset\bigwedge^{d}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$$

在 $\bigwedge^{d}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$ 中，分别给出最高权为 $2\rho_n$ 和 $2\rho_n-2\alpha_0$ 的唯一 K-类型。与上文类似的考虑表明，$D_+\otimes E^\vee_{\Lambda-\rho}$ 和 $D_-\otimes E^\vee_{\Lambda-\rho}$ 分别包含这些 K-类型，而它们出现在 D_+ 或 D_- 的最低 K-类型与 $E^\vee_{\Lambda-\rho}$ 中最低权为 $-(\Lambda-\rho)$ 的 K-类型的张量积中。因此，这两个上链 $c^{d,\ +}$ 和 $c^{d,\ -}$的构造如下：先投影到 $\bigwedge^{d}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$ 中最高权分别为 $2\rho_n$ 和 $2\rho_n-2\alpha_0$ 的唯一 K-类型，再将它们同构地映射到上述 $D_+\otimes E^\vee_{\Lambda-\rho}$ 或 $D_-\otimes E^\vee_{\Lambda-\rho}$ 中的 K-类型，最后与包含映射 $D_\pm\to\mathrm{Ind}_P^G(\pi,\ s_0)$ 复合。

命题 2.4.3。 沿用命题 *2.4.1* 中的记号，我们有

$$\dim_{\mathbb{C}} H^q(\mathfrak{g}, K; \mathrm{Ind}_P^G(\pi, s_0) \otimes E^\vee_{\Lambda-\rho}) = \begin{cases} 1 & \text{if } q = d, d+1; \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and

$$\dim_{\mathbb{C}} H^q(\mathfrak{g}, K; \mathrm{Ind}_P^G(\pi, -s_0) \otimes E^\vee_{\Lambda-\rho}) = \begin{cases} 1 & \text{if } q = d-1, d; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明。 由于 π 是群 M_0 的离散系列表示，其 $(\mathfrak{m}_0,\ K\cap P)$-上同调集中在一个次数上，且维数为一。根据 [BW00 定理 III.3.3]，（该定理计算诱导表示的上同调），上同调群

$$H^q(\mathfrak{g}, K; \mathrm{Ind}_P^G(\pi, \pm s_0) \otimes E^\vee_{\Lambda-\rho})$$

要么为零，要么为一维并集中在两个相邻的次数上。命题 2.4.1 (c) 蕴含 $H^q(\mathfrak{g},\ K$；诱导表示$\mathrm{Ind}_P^G(\pi,\ \pm s_0)\ \otimes E^\vee_{\Lambda-\rho})$ 集中在次数 $d-1,\ d,\ d+1$ 上，而由 (2.3.3) 和 (2.3.4) 的短正合列所关联的长正合列，结合命题 2.4.1 (a) 和 (b)，给出了同构

$$H^{d\pm1}(\mathfrak{g}, K; \mathrm{Ind}_P^G(\pi, \pm s_0) \otimes E^\vee_{\Lambda-\rho}) \cong H^{d\pm1}(\mathfrak{g}, K; J \otimes E^\vee_{\Lambda-\rho}) \cong \mathbb{C}.$$

因此我们还必须有

$$H^{d}(\mathfrak{g}, K; \mathrm{Ind}_P^G(\pi, \pm s_0) \otimes E^\vee_{\Lambda-\rho}) \cong \mathbb{C},$$

并且在其他次数上均为零。 □

下表由上述两个命题推出，展示了与短正合列 (2.3.3) 和 (2.3.4) 相关联的上同调长正合序列。为此，我们采用以下简写记号

$$h^q(\cdot) = \dim_{\mathbb{C}} H^q(\mathfrak{g}, K; (\cdot) \otimes E^\vee_{\Lambda-\rho}), \qquad I_\pm = \mathrm{Ind}_P^G(\pi, \pm s_0), \qquad D = D_+ \oplus D_-.$$

于是我们得到：

q	$h^q(D)$	$h^q(I_+)$	$h^q(J)$
$d-1$	0	0	1
d	2	1	0
$d+1$	0	1	1

q	$h^q(J)$	$h^q(I_-)$	$h^q(D)$
$d-1$	1	1	0
d	0	1	2
$d+1$	1	0	0

特别地，我们注意到，当 $s = -s_0$ 且我们处于右侧表格的情形时，可以得到如下推论。

推论 2.4.4. 边界映射

$$H^d(\mathfrak{g}, K; (D_+ \oplus D_-) \otimes E^\vee_{\Lambda-\rho}) \to H^{d+1}(\mathfrak{g}, K; J \otimes E^\vee_{\Lambda-\rho}),$$

与正合列(2.3.4)相关联的映射非平凡。

这一事实对于下文我们主定理（定理 3.2.1）的证明至关重要。

2.5 交织算子

我们沿用第 2.1 节和第 2.2 节的记号，以及第 2.3 节开头所设定的记号。首先注意， G 的 Cartan 子群 H 的魏尔群有一个元素 w_0，它在李代数层面上定义为对应于 α_0 的简单反射的转置凯莱变换。容易验证 $w_0 M w_0^{-1} = M$，以及 $w_0 P w_0^{-1} = P$，其中 P是与 P 相反的抛物子群。

令 π^{w_0} 为 M_0 的表示，由 $\pi \circ (\mathrm{Ad}(w_0))$ 定义。回顾一下， π 是 M_0 的离散系列表示，定义见第 2.2 节。我们先证明以下结论。

引理2.5.1。 存在一个同构 $\pi^{w_0} \cong \pi$。

证明。 令 L 为第 2.3 节中的 θ-稳定 Levi子群。由于凯莱变换 C_{α_0} 由 $(L^{\mathrm{der}})_{\mathbb{C}}$ 中某个元素的伴随作用给出，而与α_0对应的简单反射也是如此，因此 w_0 也如此。因此， w_0 逐点固定 $\mathfrak{t}'$，从而也逐点固定定义第 2.2 节中 π 所用的 M_0° 的离散系列表示 π_0 的 Harish-Chandra 参数 $\Lambda|_{\mathfrak{t}'}$。根据命题 2.3.1 (c)，$Z_{M_0}/(M_0^\circ \cap Z_{M_0})$ 至多有两个元素；由于元素 w_0 将其作为集合固定，因此也逐点固定它。于是， w_0 固定了定义 π 所用的 $M_0^\circ Z_{M_0}$ 的表示 $\widetilde{\pi}_0$。最后，由于 $\pi =$ 诱导表示 $\mathrm{ind}_{M_0^\circ Z_{M_0}}^{M_0}(\widetilde{\pi}_0)$，因此 w_0 也固定 π。 □

U利用上述引理，回想一下，我们可以据此定义交织算子 *or*

$$M(s,\cdot) : \mathrm{Ind}_P^G(\pi, s) \to \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G(\pi, s);$$

当 $\mathrm{Re}(s)$ 足够大时，由收敛积分定义

$$M(s,\phi)(g) = \int_N \phi(w_0 n g)\, dn,$$

而在其他情况下，通过亚纯延拓（实际上，当 $\mathrm{Re}(s) > 0$ 时是解析延拓）定义。注意，目标诱导表示实际上应为 $\mathrm{Ind}_P^G(\pi^{w_0}, s)$，但我们正在应用刚刚证明的引理。此外，这个表示满足

$$\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G(\pi, s) \cong \mathrm{Ind}_P^G(\pi, -s),$$

因此，我们可以将 $M(s,\cdot)$ 视为一个映射

$$M(s,\cdot) : \mathrm{Ind}_P^G(\pi, s) \to \mathrm{Ind}_P^G(\pi, -s).$$

这里我们更精确地说明亚纯性和亚纯延拓的含义。任取 $s_1 \in \mathbb{C}$。对于任意 $\phi \in \mathrm{Ind}_P^G(\pi, s_1)$，岩泽分解使我们可以将 ϕ 放入唯一的平坦截面中；也就是说，存在唯一的族 $\phi_s \in \mathrm{Ind}_P^G(\pi, s)$，对$s \in \mathbb{C}$，使得 $\phi_{s_1} = \phi$，并且对于任意 $k \in K$， $\phi_s(k)$ 与 s 无关。于是，随着 s 变化，该截面

$$M(s, \phi_s) \in \mathrm{Ind}_P^G(\pi, -s)$$

是一个有限和

$$M(s, \phi_s) = \sum_i c_i(s) \phi_{i,-s}$$

其中某些亚纯函数 $c_i(s)$ 在 $\mathrm{Re}(s) > 0$ 时全纯，且某些平坦截面 $\phi_i,\ s \in$ 诱导表示$\mathrm{Ind}_P^G(\pi,\ s)$。

设 s_0 是 (2.2.2) 中的特定点。由定理 2.3.2 (c)，诱导表示 $\mathrm{Ind}_P^G(\pi,\ -s_0)$ 有唯一的不可约子表示 J，其商为

$$\mathrm{Ind}_P^G(\pi, -s_0)/J \cong D_+ \oplus D_-.$$

这里，D_+ 和 D_- 是第 2.2 节中 G 的离散系列表示，其 Harish-Chandra 参数分别为 Λ 和 $\Lambda - \alpha_0$。同一定理还告诉我们，$\mathrm{Ind}_P^G(\pi,\ s_0)$ 也有相同的组成因子 D_+、D_- 和 J，但顺序相反；存在一个正合列

$$0 \to D_+ \oplus D_- \to \mathrm{Ind}_P^G(\pi, s_0) \to J \to 0.$$

朗兰兹分类还告诉我们，交织算子 $M(s_0,\ \phi)$ 在 $D_+ \oplus D_-$ 上为零，并给出一个 $(\mathfrak{g},\ K)$-模之间的非平凡映射

$$M(s_0, \cdot) : \mathrm{Ind}_P^G(\pi, s_0)/(D_+ \oplus D_-) \to J \subset \mathrm{Ind}_P^G(\pi, -s_0).$$

本小节的目标是证明，这个消失是一阶的。也就是说：

定理 2.5.2. 设 $\phi_s \in \mathrm{Ind}_P^G(\pi, s)$ 是任意满足 $\phi_{s_0} \in D_+ \oplus D_-$ 的平坦截面。那么极限

$$\lim_{s \to s_0} \frac{1}{s - s_0} M(s, \phi_s) \pmod J$$

给出了一个定义良好的 （$\mathfrak{g}$、K）-等变同构

$$(D_+ \oplus D_-) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_P^G(\pi, -s_0)/J.$$

为证明定理 2.5.2，我们将按以下方式从群的情形转到李代数的情形。诱导表示 $\mathrm{Ind}_P^G(\pi,\ s)$ 可视为一类线性映射 ϕ 的空间：$U(\mathfrak{g}) \to \pi$ 满足某些性质。这些性质包括

$$\phi(X_{\mathfrak{a}} u) = (2s+1)\rho_P(X_{\mathfrak{a}})\phi(u), \qquad \text{for all } u \in U(\mathfrak{g}) \text{ and } X_{\mathfrak{a}} \in \mathfrak{a},$$

其中，ρ_P 是 P的李代数中 $\mathfrak{a}$ 的根的半和。我们还有

$$\phi(X_{\mathfrak{m}_0} u) = X_{\mathfrak{m}_0} \cdot \phi(u), \qquad \text{for all } u \in U(\mathfrak{g}) \text{ and } X_{\mathfrak{m}_0} \in \mathfrak{m}_0,$$

以及

$$\phi(X_{\mathfrak{n}} u) = 0, \qquad \text{for all } u \in U(\mathfrak{g}) \text{ and } X_{\mathfrak{n}} \in \mathfrak{n}.$$

例如参见 [BW00，第 III.2] 页。泛包络代数 $U(\mathfrak{g})$ 随后将通过对变量作右平移作用于 $\mathrm{Ind}_P^G(\pi,\ s)$ 上，

$$(u\phi)(u') = \phi(u'u), \qquad \text{for all } u, u' \in U(\mathfrak{g}).$$

如果 $\phi_s \in \mathrm{Ind}_P^G(\pi,\ s)$ 是一个平坦截面，那么在李代数的图景中，这意味着对于 $u \in U(\mathfrak{k})$，$\phi_s(u)$ 与 s 无关。

下文中，我们将 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ 记作 Cartan 对合对应的 (-1)-特征子空间，该对合给出 $\mathfrak{k}$ （不要将其与 P 的复李代数混淆；对于后者，我们不赋予特殊记号）。我们从下面这个随后会派上用场的简单引理开始。

引理 2.5.3。令 $X \in \mathfrak{p}$，并令 $u \in U(\mathfrak{k})$ 为某个次数为 d 的单项式，即，$u = Y_1 Y_2 \cdots Y_d$ 其中 Y_1、……、$Y_d \in \mathfrak{k}$。则存在元素 X_1、$\ldots X_l \in \mathfrak{p}$（对于某个非负整数 l），以及次数严格小于 d 的单项式 u_1、……、$u_l \in U(\mathfrak{k})$，使得

$$uX = Xu + \sum_{i=1}^{l} X_i u_i.$$

*P*证明。我们对 d 进行归纳；当 $d = 0$ 时，引理显然成立。若 $d > 0$，我们写成

$$uX = Y_1 \cdots Y_{d-1} Y_d X = (Y_1 \cdots Y_{d-1} X Y_d) + (Y_1 \cdots Y_{d-1}[Y_d, X]).$$

由于 $[Y_d, X] \in \mathfrak{p}$，我们可以对上式右端的两项应用归纳假设。

□

现在我们回到诱导表示。

引理 2.5.4。设 $\phi_s \in$ 诱导表示$_P^G(\pi, s)$ 是一个平坦截面，并设 $X \in \mathfrak{g}$。则存在平坦截面 $\phi_s^{(0)}, \phi_s^{(1)} \in$ 诱导表示$_P^G(\pi, s)$，使得

$$X\phi_s = s\phi_s^{(1)} + \phi_s^{(0)}.$$

证明。首先注意到，当 s 固定时，根据可容许性，截面 ϕ_s 属于 $\mathrm{Ind}_P^G(\pi, s)$ 中有限多个 K-型的直和。$\mathrm{Ind}_P^G(\pi, s)$ 的 K-型与 s 无关，因此，如果对于固定的 $s_1 \in \mathbb{C}$，ϕ_1'、……、ϕ_l' 是 $\mathrm{Ind}_P^G(\pi, s_1)$ 中有限个 K- 型直和的一个基，那么在任意 $s \in \mathbb{C}$ 下特化时，它们所生成的平坦截面 ϕ_1'、s、……、ϕ_l'、s 就构成同样 K-型直和的一个基。容易证明，若 π 是一个（$\mathfrak{g}, K$）模，且 $v \in \pi$ 属于某个最高权为 μ 的 K-型，则包含 Xv 的 K-型之和的最高权至多为 $\mu + 2\beta_h$，其中 β_h 是最高根。因此可知，存在一个固定的有限个 K-型的集合，其直和对于任意 $s \in \mathbb{C}$ 都包含 $X\phi_s$。

因此，$X\phi_s$ 可写为

$$X\phi_s = \sum_{i=1}^{n} a_i(s)\phi_{i,s}, \tag{2.5.1}$$

其中，$\mathbb{C}$值函数 $a_i(s)$ 和线性无关的平坦截面 $\phi_{i,\ s}$（这种线性无关性与 s 无关）。满足 $\mathrm{Ind}_P^G(\pi,\ s)$ 中截面的变换律，结合岩泽分解，可知这类截面由它们在 $U(\mathfrak{k})$ 上的取值决定。因此，截面 $\phi_{i,\ s}$ 的线性无关性意味着存在元素 u_1，……，$u_n \in U(\mathfrak{k})$，使得向量 $v_i = (\phi_{i,\ s}(u_1)$ ……，$\phi_{i,\ s}(u_n)) \in \pi^{\oplus n}$，对于$i = 1$，……，$n$，在 $\pi^{\oplus n}$ 中线性无关。因此，存在一个线性泛函 $L\colon \pi \to \mathbb{C}$，使得由下式定义的向量 $L(v_i)$

$$L(v_i) = (L(\phi_{i,s}(u_1)), \ldots, L(\phi_{i,s}(u_n)))$$

在 $\mathbb{C}^n$ 中线性无关。记 B 为取值于 π、第 i 列为 ${}^t v_i$ 的 $n \times n$ 矩阵，于是我们有 $L(B) \in GL_n(\mathbb{C})$，其中 $L(B)$ 当然是指将 L 作用于 B 的每一项所得的矩阵。

现在对于 $s \in \mathbb{C}$，令 $\mathbf{a}(s)$ 为该向量

$$\mathbf{a}(s) = (a_1(s), \ldots, a_n(s)) \in \mathbb{C}^n,$$

并令 $\mathbf{w}(s)$ 为该向量

$$\mathbf{w}(s) = ((X\phi_s)(u_1), \ldots, (X\phi_s)(u_n)) \in \pi^{\oplus n}.$$

那么，我们所说的可以改述为

$$\mathbf{w}(s) = \mathbf{a}(s)B. \tag{2.5.2}$$

记 $X = X_{\mathfrak{p}} + X_{\mathfrak{k}}$ 的各部分分别属于 $\mathfrak{p}$ 和 $\mathfrak{k}$。那么对于任意 $i = 1, \ldots, n$，我们有

$$(X\phi_s)(u_i) = \phi_s(u_i X_{\mathfrak{p}}) + \phi_s(u_i X_{\mathfrak{k}}).$$

因此，由引理 2.5.3，存在元素 $Y_1, \ldots, Y_l \in \mathfrak{p}$ 和 $u_{i,1}, \ldots, u_{i,l} \in U(\mathfrak{k})$，其中某个非负整数 l 满足

$$(X\phi_s)(u_i) = \phi_s(u_i X_{\mathfrak{k}}) + \sum_{j=1}^{l} \phi_s(Y_j u_{i,j}).$$

对于每个 $j = 1, \ldots, l$，记 Y_j 为

$$Y_j = Y_{j,\mathfrak{m}_0} + Y_{j,\mathfrak{a}} + Y_{j,\mathfrak{n}} + Y_{j,\mathfrak{k}},$$

以任意方式，其各部分分别属于 $\mathfrak{m}_0$、$\mathfrak{a}$、$\mathfrak{n}$和 $\mathfrak{k}$。那么我们有

$$(X\phi_s)(u_i) = \phi_s(u_i X_{\mathfrak{k}}) + \sum_{j=1}^{l} [(2s+1)\rho_P(Y_{j,\mathfrak{a}})\phi_s(u_{i,j}) + Y_{j,\mathfrak{m}_0}\phi_s(u_{i,j}) + \phi_s(Y_{j,\mathfrak{k}} u_{i,j})].$$

Thus

$$\begin{aligned} L((X\phi_s)(u_i)) = &\left(\sum_{j=1}^{l} 2\rho_P(Y_{j,\mathfrak{a}}) L(\phi_s(u_{i,j})) \right) s \\ &+ L(\phi_s(u_i X_{\mathfrak{k}})) + \sum_{j=1}^{l} \rho_P(Y_{j,\mathfrak{a}}) L(\phi_s(u_{i,j})) + L(Y_{j,\mathfrak{m}_0}\phi_s(u_{i,j})) + L(\phi_s(Y_{j,\mathfrak{k}} u_{i,j})), \end{aligned}$$

其中，唯一依赖于 s 的项是第一行末尾的 s。换言之，我们可以将取值 $L(\mathbf{w}(s))$ 写成

$$L(\mathbf{w}(s)) = s\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_0$$

对于某些向量 $\mathbf{c}_0$,$\mathbf{c}_1 \in \mathbb{C}^n$。将其代入 (2.5.2) 得

$$s\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_0 = \mathbf{a}(s)L(B),$$

即,

$$\mathbf{a}(s) = s\mathbf{c}_1 L(B)^{-1} + \mathbf{c}_0 L(B)^{-1}.$$

因此，鉴于（2.5.1），引理得证。 □

我们指出，在证明中我们对 π 唯一用到的性质是可容许性。

（定理 *2.5.2* 的证明）。我们分几个步骤进行。

步骤 *1*。我们首先定义诱导表示 $\mathrm{Ind}_P^G(\pi, s)$ 的一些上链的平坦族，其中 s 取遍变化。回忆一下， D_+ 的 Harish-Chandra 参数为 Λ，其描述见第 2.2 节。令

$$\lambda_0 = \Lambda - \rho_c + \rho_n - \alpha_0 = \Lambda - \rho + 2\rho_n - \alpha_0$$

从而 $\lambda_0 \pm \alpha_0$ 是 $D_\pm$ 的 Blattner 参数，并且根据推论 2.3.8， λ_0 是 J 的最低 K-型的最高权。

对于 K 的一个支配权 μ，记 V_μ 为最高权为 μ 的 K 的表示。令 $E_{\Lambda-\rho}$ 为 $G(\mathbb{C})$ 的最高权为 $\Lambda - \rho$ 的表示。于是根据命题 2.4.1，我们有四个线性无关的上链

$$c^{d\pm1} : \bigwedge^{d\pm1}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \to \mathrm{Ind}_P^G(\pi, s_0) \otimes E^\vee_{\Lambda-\rho}, \quad \text{and} \quad c^{d,\pm} : \bigwedge^{d}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \to \mathrm{Ind}_P^G(\pi, s_0) \otimes E^\vee_{\Lambda-\rho}$$

这些上链在注 2.4.2 中有明确描述，并且张成 $\mathrm{Ind}_P^G(\pi, s_0) \otimes E^\vee_{\Lambda-\rho}$ 的（$\mathfrak{g}, K$）-上同调复形。

于是我们可以定义上链

$$c_s^{d\pm1} : \bigwedge^{d\pm1}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \to \mathrm{Ind}_P^G(\pi, s) \otimes E^\vee_{\Lambda-\rho}, \quad \text{and} \quad c_s^{d,\pm} : \bigwedge^{d}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \to \mathrm{Ind}_P^G(\pi, s) \otimes E^\vee_{\Lambda-\rho}$$

对任意 s 如下。对于任意 $Y \in \bigwedge^{d-1}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$，记

$$c^{d-1}(Y) = \sum_i v_i \otimes e_i,$$

其中 $v_i \in$ 诱导表示$_P^G(\pi, s_0)$ 按照注 2.4.2 属于 $\mathrm{Ind}_P^G(\pi, s)$ 中唯一的最高权为 λ_0 的 K-型，且 $e_i \in E^\vee_{\Lambda-\rho}$。于是我们定义

$$c_s^{d-1}(Y) = \sum_i v_{i,s} \otimes e_i,$$

其中 $v_{i,s}$ 是在 $s = s_0$ 处取值为 v_i 的平坦截面。容易验证，对于任意 s，此上循环定义良好。我们对上链 $c^{d}{}_{,s}{}^{\pm}$ 和 c_s^{d+1} 作类似定义。由命题 2.4.1 (c) 可知，这些上链张成 $\mathrm{Ind}_P^G(\pi, s) \otimes E^\vee_{\Lambda-\rho}$ 的 $(\mathfrak{g}, K)$-上同调复形。

步骤 *2*。 现在我们用上循环 $c_s^{\pm d}$ 来表示上边界 dc_s^{d-1}。

对于 $s \neq \pm s_0$，表示 $\mathrm{Ind}_P^G(\pi, s)$ 的无穷小特征与 $E_{\Lambda-\rho}$ 的不匹配，因此根据 [BW00, 命题 II.3.1 (a)]，，如果 $s \neq \pm s_0$ 且表示 $\mathrm{Ind}_P^G(\pi, s)$ 是酉表示，则其上同调消失。特别是，

$$H^i(\mathfrak{g}, K; \mathrm{Ind}_P^G(\pi, s) \otimes E^\vee_{\Lambda-\rho}) = 0, \quad \text{for } s \text{ imaginary}.$$

因此，当 s 为虚数时，$\mathrm{Ind}_P^G(\pi, s)$ 的 $(\mathfrak{g}, K)$-上同调复形是正合的，因此 $dc_s^{d-1} \neq 0$，设

$$dc_s^{d-1} = a^+(s)c_s^{d,+} + a^-(s)c_s^{d,-},$$

对于某些关于 s 的函数 $a^+(s)$ 和 $a^-(s)$，其中一个不恒为零。注意，对于X_0，.....，$X_{d-1}\in\mathfrak{p}$，截面 $dc_s^{d-1}(X_0\wedge\cdots\wedge X_{d-1})$ 具有如下形式

$$dc_s^{d-1}(X_0\wedge\cdots\wedge X_{d-1})=\sum_{i=0}^{d-1}(-1)^iX_i\cdot c_s^{d-1}(X_0\wedge\cdots\wedge\widehat{X}_i\wedge\cdots\wedge X_{d-1});\tag{2.5.3}$$

我们注意到，边界中涉及交换子的项均为零，因为 $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]\subset\mathfrak{k}$。由引理 2.5.4 可知，函数 $a^+(s)$ 和 $a^-(s)$ 关于 s 是线性的。此外，根据命题 2.4.3，我们有

$$H^{d-1}(\mathfrak{g},K;\mathrm{Ind}_P^G(\pi,-s_0)\otimes E^\vee_{\Lambda-\rho})\neq 0,$$

因此 $c_{-s_0}^{d-1}$ 是一个上循环，并且 $dc_{-s_0}^{d-1}=0$。于是存在常数 $a_0^+,a_0^-\in\mathbb{C}$，其中至少有一个不为零，使得

$$dc_s^{d-1}=(s+s_0)(a_0^+c_s^{d,+}+a_0^-c_s^{d,-}).\tag{2.5.4}$$

步骤 *3*。 现在假设 $a_0^+\neq 0$。我们将证明

$$\lim_{s\to s_0}\frac{1}{s-s_0}M(s,\phi_s^+)\notin J,$$

对于某个平坦截面 $\phi_s^+\in$ 诱导表示$I_P^G(\pi,s)$，使得 $\phi_{s_0}^+\in D_+$。为此，固定 $X_0,\dots,X_{d-1}\in\mathfrak{p}$，使其满足 $c^{d}{}_{,s}{}^{+}(X_0\wedge\cdots\wedge X_{d-1})\neq 0$。记

$$c_s^{d,+}(X_0\wedge\cdots\wedge X_{d-1})=\sum_j w_{j,s}^+\otimes e_j,\tag{2.5.5}$$

其中，根据注 2.4.2，$w_{j,s}^+$是 $\mathrm{Ind}_P^G(\pi,s)$ 中唯一的最高权为 $\lambda_0+\alpha_0$ 的 K-型中的平坦截面，并且 $e_j\in E^\vee_{\Lambda-\rho}$，且至少有一个 $w_{j,s}^+$ 不为零。由于根据同一注记，上循环 $c^{d}{}_{,s}{}^{+}$仅在 $\bigwedge^d\mathfrak{p}$ 中最高权为 $2\rho_n$ 的 K-型上非平凡，而 $c^{d,s}{}^{-}$ 仅在 $\bigwedge^d\mathfrak{p}$ 中最高权为 $2\rho_n-2\alpha_0$ 的 K-型上非平凡，因此我们可以并且将假设 $X_0,\dots,X_{d-1}$ 的选取满足

$$c_s^{d,-}(X_0\wedge\cdots\wedge X_{d-1})=0.$$

对于每个 $i=0,\dots,d-1$，记

$$c_s^{d-1}(X_0\wedge\cdots\wedge\widehat{X}_i\wedge\cdots\wedge X_{d-1})=\sum_l v_{i,l,s}\otimes e_{i,l}$$

其中$v_{i,l,s}$是诱导表示$I_P^G(\pi,s)$中唯一 K型、最高权为 λ_0的平坦截面，且$e_{i,l}\in E^\vee_{\Lambda-\rho}$。然后我们将此与(2.5.3)、(2.5.4)和(2.5.5)结合起来，从而得到

$$\sum_{i=0}^{d-1}\sum_l(-1)^i[(X_iv_{i,l,s})\otimes e_{i,l}+v_{i,l,s}\otimes(X_ie_{i,l})]=a_0^+(s+s_0)\sum_j w_{j,s}^+\otimes e_j.$$

设 $f \in E_{\Lambda-\rho}$是一个向量，使得当 s变化时， $\sum_j e_j(f)M(s, w_{j,s}^+)$不恒为零；这样的向量存在，因为 $\sum_j M(s, w_{j,s}^+) \otimes e_j$不恒为零。于是我们得到

$$\sum_{i=0}^{d-1}\sum_{l}(-1)^i[e_{i,l}(f)(X_i v_{i,l,s}) + (X_i e_{i,l})(f)v_{i,l,s}] = a_0^+(s+s_0)\sum_j e_j(f)w_{j,s}^+,$$

等式两边在 s中均不恒为零

接着，我们应用交织算子 $M(s,\cdot)$，得到

$$\sum_{i=0}^{d-1}\sum_{l}(-1)^i[e_{i,l}(f)(X_i M(s, v_{i,l,s})) + (X_i e_{i,l})(f)M(s, v_{i,l,s})] = a_0^+(s+s_0)\sum_j e_j(f)M(s, w_{j,s}^+),$$

等式两边在 s 中均不恒为零。由于最高权为 λ_0 的 K-型在 $\mathrm{Ind}_P^G(\pi, -s)$ 或 $\mathrm{Ind}_P^G(\pi, s)$ 中是唯一的，而在 $\mathrm{Ind}_P^G(\pi, s_0)$ 中不包含于 $D_+ \oplus D_-$，因此存在一个函数$c_0(s)$，它关于 $\mathrm{Re}(s) > 0$ 全纯，满足 $c_0(s_0) = 1$，且使得

$$M(s, v_{i,l,s}) = c_0(s)v'_{i,l,-s}$$

其中 $v'_{i,l,s}$ 是 $\mathrm{Ind}_P^G(\pi, s)$ 中的平坦截面，在 $s = -s_0$ 处取值为 $M(s_0, v_{i,l,s})$。因此我们得到

$$c_0(s)\sum_{i=0}^{d-1}\sum_{l}(-1)^i[e_{i,l}(f)X_i v'_{i,l,-s} + (X_i e_{i,l})(f)v'_{i,l,-s}] = a_0^+(s+s_0)\sum_j e_j(f)M(s, w_{j,s}^+).$$

右端在 $s = s_0$ 处为零，因为当 $\mathrm{Re}(s) > 0$ 时，交织算子会消去离散系列。根据引理 2.5.4, 左端的和关于 s 是线性的，因此可以写成

$$\sum_{i=0}^{d-1}\sum_{l}(-1)^i[e_{i,l}(f)(X_i v'_{i,l,-s}) + (X_i e_{i,l})(f)v'_{i,l,-s}] = (s-s_0)\phi_{-s}^{(1)}$$

对于某个非零平坦截面 $\phi_s^{(1)} \in$ 诱导表示$P^G(\pi, s)$。由此，

$$c_0(s)(s-s_0)\phi_{-s}^{(1)} = a_0^+(s+s_0)\sum_j e_j(f)M(s, w_{j,s}^+).$$

因此，由于 $c_0(s_0) = 1$、 $s_0 \neq 0$ 和 $a_0^+ \neq 0$，我们有

$$0 \neq \frac{1}{2s_0 a_0^+}\phi_{-s_0}^{(1)} = \lim_{s\to s_0}\frac{1}{s-s_0}\sum_j e_j(f)M(s, w_{j,s}^+).$$

因此，取 $\phi_s^+ = \sum_j e_j(f)w_{j,s}^+$，我们有 $\phi_{s_0}^+ \in D^+$ 并且

$$\lim_{s\to s_0}\frac{1}{s-s_0}M(s, \phi_s^+) \neq 0.$$

但是， ϕ_s^+属于最高权为 $\lambda_0+\alpha_0$ 的 K-型，因此上述极限也属于该型，所以它不在 J 中。一个简单的论证便可得出，这定义了一个非零的 $(\mathfrak{g},\ K)$-等变映射 $D_+ \to$ 诱导表示$I_P^G(\pi,\ -s_0)/J$。

若改为 $a_0^- \neq 0$，则完全类似的证明可得

$$\lim_{s\to s_0} \frac{1}{s-s_0} M(s,\phi_s^-) \notin J,$$

对于某个平坦截面 $\phi_s^- \in$ 诱导表示$I_P^G(\pi,s)$，使得 $\phi_{s_0}^- \in D_-$。因此，若 a_0^+和 a_0^-均非零，结论便得证。否则，其中一个为零，另一个非零；下一步我们将假设这种情形，以完成证明。

步骤 *4.* 现在假设 $a_0^- = 0$，但 $a_0^+ \neq 0$。我们将证明，在此假设下，存在一个平坦截面 $\phi_s^- \in$ 诱导表示 $I_P^G(\pi,s)$，满足 $\phi_{s_0}^- \in D_-$，使得

$$\lim_{s\to s_0} \frac{1}{s-s_0} M(s,\phi_s^-) \notin J.$$

当 $a_0^- = 0$ 时，这就完成了定理的证明；而 $a_0^- \neq 0$ 但$a_0^+ = 0$ 的情形完全类似。

因此，假设 $a_0^- = 0$ 但 $a_0^+ \neq 0$，由 (2.5.4) 以及诱导表示$I_P^G(\pi,s)$ 的 $(\mathfrak{g},K)$-上同调复形的正合性可知，当 s 为纯虚时， $dc^d{}_{,s}{}^-$ 在 s中不恒为零。由于

$$H^{d+1}(\mathfrak{g},K;\mathrm{Ind}_P^G(\pi,s_0)\otimes E^\vee_{\Lambda-\rho}) \neq 0$$

根据命题 2.4.1 (a)， $C^d(\mathfrak{g},\ K;$ 诱导表示$I_P^G(\pi,\ s_0)\otimes E^\vee_{\Lambda-\rho})$ 中的每个上链都是上循环，因此 $dc^d{}_{,\ s}{}^-$在 $s=s_0$ 处为零点。类似于证明 (2.5.4) 时所采用的论证可得

$$dc_s^{d,-} = b_0(s-s_0)c_s^{d+1},$$

对于某个非零的 $b_0 \in \mathbb{C}$。因此，我们可以找到元素 $X_0,\ldots,\ X_d \in \mathfrak{p}$ 使得

$$dc_s^{d,-}(X_0\wedge\cdots\wedge X_d) \neq 0.$$

与步骤 3 类似，与 $E_{\Lambda-\rho}$ 中的适当元素进行配对，可得等式

$$\sum_{i=0}^{d}(-1)^i X_i w_{i,s}^- = (s-s_0)v_s',$$

其中等式两边在 s 中均不恒为零，且 $v_s' \in \mathrm{Ind}_P^G(\pi,s)$ 是最高权为 λ_0 的 K-型中的一个平坦截面，而 $w_{i\ ,s}^- \in \mathrm{Ind}_P^G(\pi,s)$ 是满足 $w_{i\ ,s_0}^- \in D^-$ 的平坦截面。应用交织算子并除以 $(s-s_0)$，便得到

$$\frac{1}{s-s_0}\sum_{i=0}^{d}(-1)^i X_i M(s,w_{i,s}^-) = M(s,v_s').$$

由于 v'_s 属于最高权为 λ_0的 K-型，且这种 K-型出现在 J 中，而不出现在D_+或 D_-中，因此有 $M(s_0, v'_s) \neq 0$，从而

$$\lim_{s\to s_0} \frac{1}{s-s_0} \sum_{i=0}^{d} (-1)^i X_i M(s, w_{i,s}^-) \neq 0.$$

由此可得

$$\lim_{s\to s_0} \frac{1}{s-s_0} M(s, w_{i,s}^-) \neq 0$$

对于某个 i，考察 K-型可知，该元素不属于 J，证明完毕。

□

2.6 另一种设置

下面的主定理——定理 3.2.1——将在阿基米德位处以与我们在第 2.1 节和第 2.2 节中所介绍的设置相当不同的假设来表述；第2节的其余部分均建立在 ωιη设置之上。因此，在本小节中，我们证明对于连通群而言，这两种设置是等价的。

设 G 是一个实的、连通的、线性的半单李群，并设 K 是 G 的极大紧子群；它由 G 上的一个固定 Cartan 对合给出，我们将其记为 θ。设 T 是 G 的一个 θ-稳定的紧 Cartan 子群，因此它包含于 K 中。分别将 $\mathfrak{g}$、 $\mathfrak{k}$ 和 $\mathfrak{t}$ 记为相应的李代数，并将 $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ 记为。对于 $\alpha \in \Delta$，相对于 $\mathfrak{g}$ 上的 Killing 形式 B，按（2.1.1）对根向量 X_α 进行归一化。

到目前为止，除我们不固定 Δ上的序，也不固定一个非紧单根外，设定与第 2.1 节开头的设定相同。相反，假设给定了 G的一个极大抛物子群 P'，其朗兹分解为 $P' = M'_0 A' N'$。令 $M' = M'_0 A'$，并令 $\mathfrak{m}'$、 $\mathfrak{m}'_0$、 $\mathfrak{a}'$和 $\mathfrak{n}'$分别为与M'、 M'_0、 A'和 N'相关联的复化李代数。我们先证明以下结论。

引理 2.6.1。 在上述设定下，令 $\mathfrak{h}'$ 为 $\mathfrak{g}$的任意一个包含$\mathfrak{a}'$的嘉当子代数。那么， $\mathfrak{h}$ 存在一个根 α ，它在 $\mathfrak{h}'$中 $\mathfrak{a}'$ 的正交补上为零，且除符号外唯一。

证明。 令 $\mathfrak{t}$为 T的复化李代数，并令$\mathfrak{t}' = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{m}'_0$，其中 $\mathfrak{m}'_0$是 M'_0的复化李代数。那么， $\mathfrak{h}'$与 $\mathfrak{a}' \oplus \mathfrak{t}'$在 G的复化$G_{\mathbb{C}}$ 中的某个元素作用下共轭。因此，只需证明以 $\mathfrak{a}' \oplus \mathfrak{t}'$ 代替 $\mathfrak{h}$时引理成立。

现在由 [Kna02, 命题 6.59], 可知， 子代数 $\mathfrak{a}' \oplus \mathfrak{t}'$ 可由 G 中的一个元素g_1 共轭为 $\mathfrak{g}$中的一个 θ-稳定嘉当子代数，我们将其记为 $\mathfrak{h}''$；事实上，我们将在 $\mathfrak{h}''$中证明关于 $\mathrm{Ad}(g_1)(\mathfrak{a}')$ 的引理。现在， $\mathfrak{h}''$ 的一个根是实根，当且仅当它在 $\mathrm{Ad}(g_1)(\mathfrak{t}')$ 上消失。由于 $\mathfrak{a}' \oplus \mathfrak{t}'$以及 $\mathfrak{h}''$ 都不是极大紧的，由 [Kna02, 命题 6.70] 可知， $\mathfrak{h}''$ 存在一个实根。由于 $\mathfrak{g}$ 的根系是约化的，这个根在相差一个符号的意义下唯一。引理得证。 □

现在让我们 固定 M'_0的一个离散系列表示 π'。于是有如下结论。

命题 2.6.2. 沿用上述记号，设 $\widetilde{\alpha}$ 是任意包含 $\mathfrak{a}'$、且在 $\mathfrak{h}'$ 中 $\mathfrak{a}'$ 的正交补上为零的嘉当子代数 $\mathfrak{h}'$ 的根 α 到 $\mathfrak{a}'$ 的限制；

此外假定选取 α 的符号，使得 $\widetilde{\alpha}$ 属于 $\mathfrak{n}'$。由引理 *2.6.1*，这样的根 α 存在。

记 s_0' 为满足 $\frac{1}{2}\widetilde{\alpha} = 2s_0'\rho_{P'}$ 的正实数，其中 $\rho_{P'}$ 是 N' 中 A' 的根的半和。假设诱导表示 诱导表示$\mathrm{Ind}_{P'}^{G}(\pi', s_0')$ 的无穷小特征与 G 的复化 $G_{\mathbb{C}}$ 的有限维表示 E 的无穷小特征相同。最后，假设 诱导表示$\mathrm{Ind}_{P'}^{G}(\pi', s_0')$ 的唯一不可约商（记作 J'）是酉的。

首先，若 $J' \otimes E^{\vee}$ 有非零的 $(\mathfrak{g}, K)$-上同调，则存在：

- Δ 中的一个正根系 Δ^+；
- Δ^+ 中的一个简单非紧根 α_0；
- 一个 *Harish-Chandra* 参数 Λ，它对应于 $\mathfrak{g}$ 中的 $\mathfrak{t}$，相对于 Δ^+ 是支配的，并且满足

$$\frac{2\langle \Lambda, \alpha_0 \rangle}{\langle \alpha_0, \alpha_0 \rangle} = 1;$$

满足以下条件：令 $P = M_0 AN$ 按照第 *2.1* 节的定义，使用这些 Δ^+ 和 α_0；再令 π 和 s_0 按照第 *2.2* 节的定义，此外还使用 Λ，则以下结论成立：存在一个 $g_0 \in K$，使得：

- 我们有 $M = g_0 M' g_0^{-1}$和 $P = g_0 P' g_0^{-1}$，并且
- 我们有$\pi \cong \pi' \circ \mathrm{Ad}(g_0^{-1})$ 作为 M的表示，并且
- 我们有 $s_0 = s_0'$。

其次，另一方面，如果 $H^*(\mathfrak{g}, K;\, J' \otimes E^{\vee}) = 0$，则实际上

$$H^*(\mathfrak{g}, K; \mathrm{Ind}_{P'}^{G}(\pi', s_0') \otimes E^{\vee}) = 0,$$

同样如此。

证明。 设 T_0' 是 M_0 的一个包含于 K 中的紧 Cartan 子群（由假设它存在，因为M_0 具有离散系列）， $\mathfrak{t}_0'$ 为其李代数。则 $\mathfrak{a}' \oplus \mathfrak{t}_0'$ 是 $\mathfrak{g}$的嘉当子代数。

我们将通过证明一系列主张来确立这一命题。

主张 *1*。设 s_1' 为满足 $0 < \mathrm{Re}(s_1') < s_0'$ 的任意复数，并设 σ 为 M_0' 的任意不可约容许表示。则（任意成分的）诱导表示$\mathrm{Ind}_{P'}^{G}(\sigma, s_1')$ 的无穷小特征不同于诱导表示$\mathrm{Ind}_{P'}^{G}(\pi', s_0')$ 的无穷小特征。

断言的证明。我们将所讨论的无穷小特征视为 $\mathfrak{a}' \oplus \mathfrak{t}_0'$ 的复权的 Weyl轨道。设 χ_0 和 χ_1 分别为 $\mathrm{Ind}_{P'}^{G}(\pi',\ s_0')$ 和 $\mathrm{Ind}_{P'}^{G}(\sigma,\ s_1')$ 的无穷小特征。令 λ_0 为 χ_0 的任意一个代表元。那么 λ_0 是一个整权，因为 χ_0 是 $G_{\mathbb{C}}$ 的有限维代数表示的无穷小特征。特别地，我们有

$$2\frac{\langle \lambda_0|_{\mathfrak{a}'}, \widetilde{\alpha} \rangle}{\langle \widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha} \rangle} = 2\frac{\langle \lambda_0, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{Z},$$

其中等式成立是因为 $\widetilde{\alpha}$ 在 $\mathfrak{t}'_0$ 上为零，且 $\mathfrak{t}'_0$ 与 $\mathfrak{a}'$ 正交。

另一方面，令 λ_1 为 χ_1 的一个代表元，使得 $\lambda_1|_{\mathfrak{t}'_0}$ 是 σ 的无穷小特征的一个代表元，并且 $\lambda_1|_{\mathfrak{a}'} = \pm\frac{1}{2}(s_1/s'_0)\widetilde{\alpha}$。那么

$$2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\langle\lambda_1|_{\mathfrak{a}'},\widetilde{\alpha}\rangle}{\langle\widetilde{\alpha},\widetilde{\alpha}\rangle}\right) = \pm\frac{\mathrm{Re}(s_1)}{s'_0} \notin \mathbb{Z}.$$

因此，λ_1 不属于 Weyl轨道 χ_0，从而证明了该断言。

断言 *2*。设 U 是 $\mathrm{Ind}_{P'}^{G}(\pi',\ s'_0)$ 的任意一个不同于 J' 的不可约成分。那么 U 是温和的。

断言的证明。若 U 非温和，则由朗兰兹分类的一个性质，即 [BW00，命题 IV.4.13], ，它是某个形如 $\mathrm{Ind}_{P'}^{G}(\sigma,\ s'_1)$ 的抛物诱导的成分，其中 $\mathrm{Re}(s'_1) < s'_0$，这与前一个断言矛盾。

断言 *3*。若 $H^*(\mathfrak{g},\ K;\ J'\otimes E^\vee) \neq 0$，则对于某个 $q \neq d$，$H^q(\mathfrak{g},\ K;\ J'\otimes E^\vee)$ 非零；若 $H^*(\mathfrak{g},\ K;\ J'\otimes E^\vee) = 0$，则

$$H^*(\mathfrak{g},K;\mathrm{Ind}_{P'}^{G}(\pi',s'_0)\otimes E^\vee) = 0,$$

因此，该命题的第二个断言成立。

断言的证明。根据 [BW00，命题 III.5.3]以及上面的断言 2，$\mathrm{Ind}_{P'}^{G}(\pi',\ s'_0)$ 的任一不可约成分 U若不同于 J'，则当 $q \neq d$ 时有 $H^q(\mathfrak{g},\ K;\ U\otimes E^\vee) = 0$。如果将这样的 U 换成 J' 后同样成立，那么

$$H^q(\mathfrak{g},K;\mathrm{Ind}_{P'}^{G}(\pi',s'_0)\otimes E^\vee) \tag{2.6.1}$$

它将集中在次数 $q = d$ 上。但是根据 [BW00，定理 III.3.3], 上面的上同调群若非零，则集中在两个连续的次数上且在这两个次数上均非零。因此，在假设 $H^*(\mathfrak{g},\ K;\ J'\otimes E^\vee) = 0$ 的情况下，它必为零（上述任意这样的 U 的上同调也同样如此，尽管得出结论并不需要这一点），从而证明了该命题的第二个断言。反之，如果 $H^*(\mathfrak{g},\ K;\ J'\otimes E^\vee) \neq 0$，那么 (2.6.1) 确实非零且集中在次数 $q = d$ 上，从而产生矛盾。这就证明了该断言。

因此，从现在起我们假设 $H^*(\mathfrak{g},K;\ J'\otimes E^\vee) \neq 0$，并旨在证明该命题的第一个陈述。

断言 *4*。在此假设下，我们有

$$\dim_{\mathbb{C}} H^q(\mathfrak{g},K;J'\otimes E^\vee) = \begin{cases} 1 & \text{if } q = d-1, d+1; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

断言的证明。设

$$\mathcal{K}' = \ker(\mathrm{Ind}_{P'}^{G}(\pi',s'_0) \to J').$$

于是，正如上文断言 3 的证明中那样，我们有

$$H^q(\mathfrak{g},K;\mathcal{K}'\otimes E^\vee)$$

集中在次数 d，并且

$$H^q(\mathfrak{g},K;\mathrm{Ind}_{P'}^{G}(\pi',s'_0)\otimes E^\vee)$$

集中在两个连续的次数上，且每个次数上的维数均为 1。分析与短正合列相关联的长正合（$\mathfrak{g}$, K）上同调序列

$$0 \to \mathcal{K}' \otimes E^\vee \to \mathrm{Ind}_{P'}^G(\pi', s_0') \otimes E^\vee \to J' \otimes E^\vee \to 0$$

于是得到所需的结论。

对于接下来的断言，我们必须使用第 2.3 节中所用的上同调诱导理论。

断言 *5*。存在 Δ 中的一个正根系 Δ^+、一个简单非紧根α_0，以及 Δ^+ 中一组与 α_0 正交的简单紧根 S_c，使得以下结论成立：设 $\tilde{\mathfrak{q}}$ 为一个 θ-稳定的抛物子代数，它相对于 Δ^+ 是标准的，且其标准 Levi 子代数 $\tilde{\mathfrak{l}}$ 恰好包含简单根 α_0 以及 S_c 中的根。

设 $L = N_G(\tilde{\mathfrak{q}})$ 为 G 中相应的 Levi 子群。记作 $\tilde{\mathfrak{q}} = \mathfrak{l} \oplus \tilde{\mathfrak{u}}$，其中 $\tilde{\mathfrak{u}}$ 是 $\tilde{\mathfrak{q}}$的根基。那么存在 L 的一个酉特征 λ，其微分 $d\lambda$ 满足

$$\langle \beta, d\tilde{\lambda}|_{\mathfrak{t}} \rangle \geq 0, \qquad \text{for every root } \beta \text{ of } \mathfrak{t} \text{ in } \tilde{\mathfrak{u}},$$

使得 $J' \cong A_{\tilde{\mathfrak{q}}}(\lambda)$，采用第 2.3 节中的记号。

断言的证明。由于假定 J' 是酉的，并且关于 $E^\vee$是上同调的，援引 [VZ84，定理 5.6] 便给出满足该断言结论的对象 Δ^+、 $\tilde{\mathfrak{q}} = \tilde{\mathfrak{l}} \oplus \tilde{\mathfrak{u}}$和 $\tilde{\lambda}$，只是没有关于那些包含在 $\mathfrak{l}$中的根的任何信息。因此我们必须证明，在 $\mathfrak{l}$中存在一个简单非紧根 α_0，并且包含在 $\mathfrak{l}$ 中的其他单根是紧的，且与 α_0正交。

设 R 为 $\tilde{\mathfrak{u}}$中非紧根的个数。于是由 [VZ84，定理 5.5], 我们有

$$H^q(\mathfrak{g}, K, A_{\tilde{\mathfrak{q}}}(\tilde{\lambda}) \otimes E^\vee) \cong \mathrm{Hom}_{\tilde{\mathfrak{l}} \cap \mathfrak{k}}(\bigwedge^{q-R}(\tilde{\mathfrak{l}}/(\tilde{\mathfrak{l}} \cap \mathfrak{k})), \mathbb{C}),$$

其中我们用 $\mathfrak{k}$ 表示 K的复化李代数，而函子 $\mathrm{Hom}_{\tilde{\mathfrak{l}} \cap \mathfrak{k}}$表示关于 $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{k}$的伴随作用等变的 $\mathbb{C}$-线性映射。因此由上述断言 4，我们有

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\tilde{\mathfrak{l}} \cap \mathfrak{k}}(\bigwedge^{q-R}(\tilde{\mathfrak{l}}/(\tilde{\mathfrak{l}} \cap \mathfrak{k})), \mathbb{C}) = \begin{cases} 1 & \text{if } q = d-1, d+1; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

总是存在显然的同构

$$\bigwedge^0(\tilde{\mathfrak{l}}/(\tilde{\mathfrak{l}} \cap \mathfrak{k})) \cong \mathbb{C}$$

and

$$\bigwedge^{\mathrm{top}}(\tilde{\mathfrak{l}}/(\tilde{\mathfrak{l}} \cap \mathfrak{k})) \cong \mathbb{C};$$

因此，前者必须贡献于次数 $q = d-1$，后者贡献于次数 $d+1$，由此可得 $R = d-1$ 和

$$\dim_{\mathbb{C}}(\tilde{\mathfrak{l}}/(\tilde{\mathfrak{l}} \cap \mathfrak{k})) = 2.$$

这证明在 $\mathfrak{l}$ 中存在唯一的正非紧根 α_0，因此它必定是单根。它与 $\mathfrak{l}$ 中任何其他单根都正交；事实上，若 β 是这样的根，则

β 是紧的；若它与 α_0 不正交，则 $\alpha_0+\beta$ 将是一个根，且必定˜属于 ŧ。但这样一来，$\alpha_0+\beta$ 也必定是非紧的，这与 α_0的唯一性矛盾。至此，命题得证。

断言 6。设 Δ^+ 和 α_0 如断言 5 中所述，令 q为 Levi子群是 ŧ $=\mathfrak{t}\oplus\mathbb{C}X_{\alpha_0}\oplus\mathbb{C}X_{-\alpha_0}$ 的 Δ^+-标准 θ-稳定抛物子群，并令 $L=N_G$(q) 为其相应的 Levi子群˜ ˜子群。此外，设 $\lambda=\lambda|_L$。那么 $A_{\tilde{\mathfrak{q}}}$ (λ) $\cong A_{\mathfrak{q}}$(λ)。

断言的证明。与命题 2.3.6 的证明相同，这直接由 [KV95 定理 11.77], 的˜谱序列得出，因为根据断言 5， ŧ 中省略的 ŧ 根都是紧的。

断言 7。设 Δ^+ 和 α_0 如上文断言 5 中所述。记 ρ为 Δ^+ 中正根半和，并令 $\Lambda=($ $d\lambda|_{\mathfrak{t}})+\rho$，其中 λ 如断言 6 中所述。根据定义，这是 g中 ŧ 的 Harish-Chandra 参数。那么，对于这一选择 Δ^+、 α_0和Λ，命题成立。

断言的证明。根据定理 2.3.2， $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$的 Langlands数据（因而根据上文的断言 5 和 6， J' 的 Langlands数据）由第 2.1 节中的抛物子群 $P=M_0AN$ 、第 2.2 节中的离散系列表示 π ，以及 A 的特征 $\delta_P^{s_0}$给出，其中 s_0 如 (2.2.2) 所示。根据朗兰兹分类，并利用 P 和 P' 是极大的这一点（因此，对用于诱导温和表示的抛物子群不存在歧义），我们必定有：在 G的某个元素作用下共轭后， P 与 P' 重合， π 与 π'重合，并且 $s_0=s_0'$。证明至此完成。 □

3 极大抛物艾森斯坦级数

3.1 艾森斯坦级数的预备知识

现在我们稍微改变一下第 2 节中的记号。设 $\mathcal{G}$ 是定义在 $\mathbb{Q}$上的连通半单代数群。我们固定一个可分解极大紧子群 $K\subset\mathcal{G}(\mathbb{A})$，并分别用 K_f 和 K_∞ 表示 K的有限阿代尔因子和阿基米德因子。

固定 $\mathcal{G}$ 的一个极大抛物 $\mathbb{Q}$子群 $\mathcal{P}$ ，其 Levi 分解为 $\mathcal{P}=\mathcal{M}\mathcal{N}$。设$\pi$ 是 $\mathcal{M}$(𝔸)的一个尖点自守表示， χ_π 是其中心特征。我们假设$\chi_\pi|_{A_{\mathcal{M}}(\mathbb{R})^\circ}$是平凡的，其中 $A_{\mathcal{M}}$ 是 $\mathcal{M}$中心中的极大 $\mathbb{Q}$分裂环面。通过扭转总可以满足这一条件。

当 s在 $\mathbb{C}$中变化时，我们可以考虑诱导表示

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A})}^{\mathcal{G}(\mathbb{A})}(\pi,s)$$

回忆一下（参见引言中的记号说明），诱导采用酉归一化，并且我们默认取光滑的 K-有限向量。

设 $\phi_s\in$ Ind$_{\mathcal{P}\ \mathbb{A}}^{\mathcal{G}(\mathbb{A})}$（）($\pi$， s)是一个平坦截面，也就是说，它是 Ind$_{\mathcal{P}\ \mathbb{A}}^{\mathcal{G}(\mathbb{A})}$（）($\pi$， s)中元素构成的族，每个 $s\in\mathbb{C}$对应一个元素，并且作为 K上的函数， $\phi_s|_K$ 与 s无关。对于固定的 $s_1\in\mathbb{C}$, 任意给定的截面 $\phi_{s_1}\in$ Ind$_{\mathcal{P}\ \mathbb{A}}^{\mathcal{G}(\mathbb{A})}$（）($\pi$， s_1)都可以唯一地延拓为一个平坦截面。

有了这一设定，我们现在可以按通常的方式构造艾森斯坦级数。事实上，我们可以将 π 视为.....的一个子空间

$$L^2(\mathcal{M}(\mathbb{Q})A_{\mathcal{M}}(\mathbb{R})^\circ\backslash\mathcal{M}(\mathbb{A})),$$

因此，在单位元 $1_{\mathcal{M}}$ 处对 $\mathcal{M}(\mathbb{A})$ 的 π 中的光滑向量取值是有意义的。由此我们可以定义

$$E(\phi, s, g) = \sum_{\gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \backslash \mathcal{G}(\mathbb{Q})} \phi_s(\gamma g)(1_{\mathcal{M}}).$$

上述表达式在 $\mathrm{Re}(s)$ 充分大时收敛且全纯，并通过亚纯延拓定义于一般的 s；这得益于朗兰兹[Lan76]。这里亚纯性的确切含义如下：给定 $\mathbb{C}$ 中的一个有界区域 U，存在一些点 s_1、.....、 $s_n \in \mathbb{C}$（不一定互异），使得对每个$g \in \mathcal{G}$（$\mathbb{A}$），我们都有

$$(s - s_1) \cdots (s - s_n) E(\phi, s, g)$$

是 $s \in \mathbb{C}$ 的全纯函数。

由于 $\mathcal{P}$ 是极大的，已知:

- 艾森斯坦级数 $E(\phi、\ s、\ g)$ 在 $\mathrm{Re}(s) \geq 0$ 时至多有有限个极点;
- 当 $\mathrm{Re}(s) \geq 0$ 时， $E(\phi、\ s、\ g)$ 的所有极点都位于线段 $(0、\ 1/2]$ 上;
- 当 $\mathrm{Re}(s) \geq 0$ 时， $E(\phi、\ s、\ g)$ 的所有极点都是单极点。

有关这些陈述，参见 [MW95, §IV.1 中的命题11] 和 [MW95, §IV.3 中的注记12]；其证明见 [MW95, §IV.312] 。

现在，给定任意 $s_0 \in \mathbb{C}$ 和非负整数 N，以及如上所述的 U 和 $s_1, \ldots, s_n$，由 $g \in \mathcal{G}(\mathbb{A})$ 定义的函数

$$\frac{d^N}{ds^N}(s - s_1) \cdots (s - s_n) E(\phi, s, g)|_{s=s_0},$$

是 $\mathcal{G}(\mathbb{A})$ 上的自守形式。对于 $\mathrm{Re}(s_0) > 0$，我们将以此方式得到的所有这类自守形式组成的空间记为 $\mathcal{A}_{\pi, s_0}$，其中 $\phi_s \in \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}\ \mathbb{A}}^{\mathcal{G}(\mathbb{A})}{}_{()}(\pi, s)$ 和 $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 均可变化；也就是说，空间 $\mathcal{A}_{\pi, s_0}$ 由在 $s = s_0$ 处从 π 得到的所有艾森斯坦级数、它们的导数和留数构成。根据 Franke 和 Schwermer 的结果 [FS98, 定理 1.4], ，空间 $\mathcal{A}_{\pi, s_0}$ 是 $\mathcal{G}$ 的所有自守形式空间的一个直和项。

现在暂且假设 $s_0 > 0$ 满足：对于某个 $\phi_s \in \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}\ \mathbb{A}}^{\mathcal{G}(\mathbb{A})}{}_{()}(\pi, s)$， $E(\phi, s, g)$ 在 $s = s_0$ 处有极点。那么根据上文，此极点是单极点，我们可以考虑子空间

$$\mathcal{L}(\pi, s_0) \subset \mathcal{A}_{\pi, s_0}$$

该子空间定义为：由所有这类艾森斯坦级数 $E(\phi, s, \cdot)$ 在 $s = s_0$ 处的所有可能留数所生成的空间，其中 $\phi_s \in \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}\ \mathbb{A}}^{\mathcal{G}(\mathbb{A})}{}_{()}(\pi, s)$。那么， $\mathcal{L}(\pi, s_0)$ 实际上同构于 $\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}\ \mathbb{A}}^{\mathcal{G}(\mathbb{A})}{}_{()}(\pi, s_0)$ 的唯一不可约商（即朗兰兹商，因此得名）。

我们希望描述此情形下的商 $\mathcal{A}_{\pi,\ s_0}/\mathcal{L}(\pi,\ s_0)$。考虑到导数的存在，我们可以将其写成一个诱导表示。为此，我们在完整的对称代数 $\mathrm{Sym}(\mathbb{C})$ 上引入一种依赖于 s_0 的 $\mathcal{P}(\mathbb{A}_f) \times (\mathfrak{p},\ K_\infty \cap \mathcal{P}(\mathbb{R}))$-模结构；这里，我们用 $\mathfrak{p}$表示 $\mathcal{P}$ 的复化李代数，并

$$\mathrm{Sym}(\mathbb{C}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}),$$

赋予其诱导代数结构。读者可参阅 [FS98]，其中对这种 $\mathcal{P}(\mathbb{A}_f) \times(\mathfrak{p}, K_\infty\cap\mathcal{P}(\mathbb{R}))$-模结构作了一般性定义；另可参阅 [Mun, §2.1]，了解相关阐述。在前一篇文献中，相关对象记作 $S(\check{\mathfrak{a}}_{\mathcal{P}})$；在后一篇文献中，则记作 $\mathrm{Sym}(\mathfrak{a}^{\vee}_{\mathcal{P},\,0})$。下文讨论极大抛物子群的情形时，我们将默认把这个空间 $\mathfrak{a}^{\vee}_{\mathcal{P},\,0}=\mathrm{Lie}(A_{\mathcal{M}})^{\vee}_{\mathbb{C}}$ 与 $\mathbb{C}$ 通过由 $(2s+1)\rho_{\mathcal{P}}\mapsto s$ 给出的仿射映射视为同一空间。

为了在 $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C})$ 上定义一个 $\mathcal{P}(\mathbb{A}_f)\times(\mathfrak{p}, K_\infty\cap\mathcal{P}(\mathbb{R}))$-模结构，暂时令 $s_0\in\mathbb{C}$ 为任意但固定的。我们将 $\mathrm{Sym}(\mathbb{C})$ 视为 $\mathbb{C}$ 上支撑于 s_0的全纯微分算子空间。因此 $\mathrm{Sym}(\mathbb{C})$ 按如下方式作用于在 $s=s_0$附近全纯的函数 $f(s)$：若 $s_1,\dots,s_n\in\mathbb{C}$，从而 $S=s_1\otimes\cdots\otimes s_n\in\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C})$，则

$$S(f(s))=s_1\cdots s_n\frac{d^n}{ds^n}f(s)|_{s=s_0}.$$

接下来我们在下方定义 $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C})$ 上的一个 $\mathcal{P}(\mathbb{A}_f)\times(\mathfrak{p}, K_\infty\cap\mathcal{P}(\mathbb{R}))$-模结构，并将所得的 $\mathcal{P}(\mathbb{A}_f)\times(\mathfrak{p}, K_\infty\cap\mathcal{P}(\mathbb{R}))$-模记为 $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C})_{s_0}$，以强调其对 s_0的依赖性。首先，对于 $p\in\mathcal{P}(\mathbb{A}_f)$ 与 $D\in\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C})_{s_0}$，令

$$(pD)(f(s))=D(\delta_{\mathcal{P}}^{s+1/2}(p)f(s)),$$

对于在 $s=s_0$ 附近全纯的 $f(s)$。接下来，令 $\mathcal{M}_0$ 为 $\mathcal{M}$ 所有特征的公共核，因此 $\mathcal{P}=\mathcal{M}_0A_{\mathcal{M}}\mathcal{N}$；令 $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}_0\oplus\mathfrak{a}_{\mathcal{M}}\oplus\mathfrak{n}$ 为李代数的相应分解。那么，对于 $X\in\mathfrak{a}_{\mathcal{M}}$ 和 $D\in\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C})_{s_0}$，以及在 $s=s_0$ 附近全纯的 $f(s)$，令

$$(XD)(f(s))=D((2s+1)\rho_{\mathcal{P}}(X)f(s)).$$

最后，我们令 $\mathfrak{m}_0\oplus\mathfrak{n}$ 和 $K_\infty\cap\mathcal{P}(\mathbb{R})$ 在 $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C})_{s_0}$ 上平凡作用。这就定义了所承诺的 $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C})_{s_0}$ 上的 $\mathcal{P}(\mathbb{A}_f)\times(\mathfrak{p}, K_\infty\cap\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ 模结构。

接下来我们有如下 Grbac 的定理 [Grb12，定理3.1]。

定理3.1.1 (Grbac)。当 $s_0>0$ 且某个来自 π 的艾森斯坦级数在 $s=s_0$ 处有极点时，我们有如下 $\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)\times(\mathfrak{g}, K_\infty)$-模同构

$$\mathcal{A}_{\pi,s_0}/\mathcal{L}(\pi,s_0)\cong\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A})}^{\mathcal{G}(\mathbb{A})}(\pi\otimes\mathrm{Sym}(\mathbb{C})_{s_0}),$$

其中抛物诱导中没有隐含的正规化，并且 $\mathcal{L}(\pi, s_0)$ 是上文所述的剩余表示。

事实上，上述 Grbac 定理中的同构由 Franke 的均值映射[Fra98，第 235]，页给出，或者更准确地说，由其到 $\mathcal{A}_{\pi,s_0}$ 的限制给出。更精确地说，令

$$\mathbf{MW}:\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A})}^{\mathcal{G}(\mathbb{A})}(\pi\otimes\mathrm{Sym}(\mathbb{C})_{s_0})\to\mathcal{A}_{\pi,s_0}$$

定义如下。首先，我们对向量空间作如下等同

$$\Psi:\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A})}^{\mathcal{G}(\mathbb{A})}(\pi)\otimes\mathrm{Sym}(\mathbb{C})\cong\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A})}^{\mathcal{G}(\mathbb{A})}(\pi\otimes\mathrm{Sym}(\mathbb{C})_{s_0})$$

由 $\Psi(\phi\otimes D)=\phi_D$ 给出，其中 $\phi_D(g)=\phi(g)\otimes D$。（如 [LS04，第 155] 页所示，通过在右侧赋予 $\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)\times(\mathfrak{g}, K_\infty)$-模的显式结构，可以将其提升为 $\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)\times(\mathfrak{g}, K_\infty)$-模之间的同构。不过我们不需要这样做。）

那么，在这一对应关系下，我们将关于 $s = s_0$ 的洛朗级数写作，

$$DE(\phi, s, g) = \sum_{n=-N}^{\infty} F_n(g)(s - s_0)^n$$

其中 F_n 是 $\mathcal{G}(\mathbb{A})$ 上的自守形式，并将 $\mathbf{MW}$ 定义为

$$\mathbf{MW}(\Psi(\phi \otimes D)) = F_0.$$

当由 π 定义的艾森斯坦级数在 $s = s_0$ 处有极点时，映射 $\mathbf{MW}$ 不是 $\mathcal{G}(\mathbb{A}_f) \times (\mathfrak{g}, K_\infty)$-模的同态。不过，模去剩余表示 $\mathcal{L}(\pi, s_0)$ 后，该映射定义良好，而 Grbac 定理恰好说明此时它成为同构。

我们记下由定义得到的以下推论，以备后用。

命题 3.1.2. 任取 $s_0 \in \mathbb{C}$。次数 0 子空间 $\mathbb{C} = \mathrm{Sym}^0(\mathbb{C}) \subset \mathrm{Sym}(\mathbb{C})_{s_0}$ 在 $\mathcal{P}(\mathbb{A}_f) \times (\mathfrak{p}, K_\infty \cap \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ 的作用下稳定，并由特征 $\delta_{\mathcal{P}}^{s_0+1/2}$ 给出。因此，这导出一个自然嵌入

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A})}^{\mathcal{G}(\mathbb{A})}(\pi, s_0) \hookrightarrow \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A})}^{\mathcal{G}(\mathbb{A})}(\pi \otimes \mathrm{Sym}(\mathbb{C})_{s_0}).$$

证明。 由定义立即可得。 □

现在我们转而讨论艾森斯坦级数的常数项。设 $\mathcal{P}'$ 是 $\mathcal{G}$ 的另一个抛物子群$\mathbb{Q}$，其Levi分解为 $\mathcal{P}' = \mathcal{M}'\mathcal{N}'$。回忆一下，自守形式 F 沿 $\mathcal{P}'$ 的常数项$F_{\mathcal{N}'}(g)$定义为积分

$$F_{N'}(g) = \int_{\mathcal{N}'(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{N}'(\mathbb{A})} F(n'g)\, dn',$$

其中，例如，哈尔测度使 $\mathcal{N}'(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{N}'(\mathbb{A})$ 的体积为 1。由于 $\mathcal{N}'(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{N}'(\mathbb{A})$ 是紧的，因此该积分总是有定义且收敛，并给出一个函数 $\mathcal{G}(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$。我们将艾森斯坦级数 $E(\phi,\ s,\ g)$ 沿 $\mathcal{P}'$ 的常数项记为 $E_{\mathcal{N}'}(\phi,\ s,\ g)$。

众所周知，艾森斯坦级数及其留数和导数与尖点形式正交。由此可知，给定任意两个自守形式 F 和 F'，若它们都是艾森斯坦级数及其留数和导数的线性组合，且 F 和 F' 沿 $\mathcal{G}$ 的所有抛物子群 $\mathbb{Q}$ 的常数项都相同，那么事实上 $F = F'$。

现在，艾森斯坦级数 $E(\phi,\ s,\ g)$ 的常数项 $E_{\mathcal{N}'}(\phi,\ s,\ g)$ 关于 s 也都是亚纯的，而且事实上， $E(\phi,\ s,\ g)$ 在 $s = s_0$ 处有极点，当且仅当它的某个常数项有极点。因此，要确定艾森斯坦级数的极点，显式理解其常数项就变得很重要。朗兹–沙希迪方法 允许我们借助交织算子和 L-函数做到这一点。本文主体部分只需描述其与交织算子的联系，我们将在下文说明；至于与 L-函数的联系，除了讨论第 3.3 节中的几个例子外，我们并不需要，因此这里省略这部分讨论。

与上文第 2.5 节所述的阿基米德情形类似，我们可以定义一个全局交织算子。为此，方便起见，先在 $\mathcal{G}$ 中固定一个极大分裂环面，

称之为 $\mathcal{T}_0$，并为 $\mathcal{G}$ 中的 $\mathcal{T}_0$ 选取一个正根系，使得 $\mathcal{P}$ 关于它是标准的。给定 $\mathcal{G}$ 中 $\mathcal{T}_0$ 的魏尔群的一个有理元 w，并假设 $\mathcal{G}$ 的另一个标准抛物子群 $\mathbb{Q}$-子群 $\mathcal{P}' = \mathcal{M}'\mathcal{N}'$ 满足 $\mathcal{M}' = w^{-1}\mathcal{M}w$，且 $w^{-1}\mathcal{P}w$ 与 $\mathcal{P}'$ 相对，那么我们可以定义一个交织算子

$$M_w(s,\cdot) : \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A})}^{\mathcal{G}(\mathbb{A})}(\pi, s) \to \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}'(\mathbb{A})}^{\mathcal{G}(\mathbb{A})}(\pi^w, -s),$$

其中 $\pi^w = \pi \circ \mathrm{Ad}(w)$; 该算子由下式给出

$$M(s,\phi) = \int_{\mathcal{N}(\mathbb{A})} \phi_s(wng)\, dn$$

在其收敛的区域内，这定义了一个全纯函数；否则通过亚纯延拓定义。于是我们得到艾森斯坦级数的常数项与交织算子之间的如下关系。

定理 3.1.3 (Langlands–Shahidi)。 给定上述对 $\mathcal{T}_0$ 中根的序，设 $\mathcal{P}'$ 是 $\mathcal{G}$ 的标准抛物子群，且其 *Levi*分解为 $\mathcal{P}' = \mathcal{M}'\mathcal{N}'$。那么，若魏尔群中不存在 $\mathcal{T}_0$ 的元素 w 属于 $\mathcal{G}$，使得 $w^{-1}\mathcal{M}w = \mathcal{M}'$，则

$$E_{\mathcal{N}'}(\phi, s, g) = 0.$$

否则，若存在这样的 w 满足 $w^{-1}\mathcal{M}w = \mathcal{M}'$，则有

$$E_{\mathcal{N}'}(\phi,s,g) = \begin{cases} \phi_s(g)(1_{\mathcal{M}}) + M_w(s,\phi)(g)(1_{\mathcal{M}}) & \text{if } \mathcal{M}' = \mathcal{M} \text{ and } \mathcal{P}' \text{ is opposite to } w^{-1}\mathcal{P}w; \\ M_w(s,\phi)(g)(1_{\mathcal{M}}) & \text{if } \mathcal{M}' \neq \mathcal{M} \text{ but } \mathcal{P}' \text{ is opposite to } w^{-1}\mathcal{P}w; \\ \phi_s(g)(1_{\mathcal{M}}) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

此外，上述最后一种情形成立，当且仅当 $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ 和 $w = 1$ 是满足 $w^{-1}\mathcal{M}w = \mathcal{M}'$ 的唯一外尔元素。

证明。 参见 [Sha10，定理 6.2.1]。 □

3.2 主定理

回顾一下，给定 E of $\mathcal{G}(\mathbb{C})$ 的一个不可约有限维表示，我们在引言中将 $\mathcal{G}$ 的自守上同调定义为

$$H^*(\mathcal{G}, E^\vee) = H^*(\mathfrak{g}, K_\infty^\circ; \mathcal{A}_E(\mathcal{G}) \otimes E^\vee),$$

其中 $\mathcal{A}_E(\mathcal{G})$ 是 $\mathcal{G}(\mathbb{A})$ 上的自守形式空间，这些形式被 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 的中心在 E 上作用的核 J_E 的某个幂所消去。下面的主定理描述了这一自守上同调中来自剩余艾森斯坦级数的一个特定部分。我们将完整陈述该定理。

定理 3.2.1. 设 $\mathcal{G}$ 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的连通半单代数群，使得 $\mathcal{G}(\mathbb{R})$具有离散系列；设 $\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{N}$ 是一个极大抛物 $\mathbb{Q}$子群，且给定其 *Levi*子群分解；设 $A_{\mathcal{M}}$ 是 $\mathcal{M}$ 中心内的极大 $\mathbb{Q}$分裂环面。假设 $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

仍是 $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ 的极大抛物子群。设 π 是 $\mathcal{M}$ 的酉尖点自守表示，其中心特征为 χ。假设 χ 的阿基米德分量χ_∞ 在 $A_{\mathcal{M}}(\mathbb{R})^\circ$ 上平凡，并且 π 的阿基米德分量 π_∞ 是离散系列。

令 $\widetilde{\alpha}$ 为 $A_{\mathcal{M}}(\mathbb{R})^\circ$ 的特征，其微分是某个嘉当子代数中的根 α 在 $A_{\mathcal{M}}(\mathbb{R})^\circ$ 的复化李代数上的限制，其中该嘉当子代数包含此复化李代数，并且 α 在该嘉当子代数中的正交补上为零；此外，假设选择 α 时取符号，使得 $\widetilde{\alpha}$ 是 $A_{\mathcal{M}}(\mathbb{R})^\circ$ 在 $\mathcal{N}(\mathbb{R})$中的一个根。由引理 *2.6.1*，存在这样的根 α 。令 s_0 为满足$\frac{1}{2}\widetilde{\alpha} = 2s_0\rho_{\mathcal{P}}|_{A_{\mathcal{M}}(\mathbb{R})^\circ}$的正实数，其中 $\rho_{\mathcal{P}}$是 $A_{\mathcal{M}}$ 在 $\mathcal{N}$中的根的半和。假设

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{R})}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})}(\pi_\infty, s_0)$$

其无穷小特征与 $\mathcal{G}(\mathbb{C})$的一个不可约有限维表示E 的无穷小特征相同。

现在作如下假设：

(*i*) 存在一个平坦截面

$$\phi_s \in \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A})}^{\mathcal{G}(\mathbb{A})}(\pi, s)$$

使得艾森斯坦级数 $E(\phi, s, g)$ 在 $s = s_0$处有一个极点。

(ii) 相应的剩余表示 $\mathcal{L}(\pi, s_0)$ 是上同调的。

记 $d = \frac{1}{2}\dim(\mathcal{G}(\mathbb{R})/K_\infty^\circ)$，其中 K_∞ 是 $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ 的极大紧子群，而 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathcal{G}$ 的复化李代数。于是：

(a) 存在一个整数 $m > 0$，使得

$$\dim_{\mathbb{C}} H^q(\mathfrak{g}, K_\infty^\circ; \mathcal{L}(\pi, s_0)_\infty \otimes E^\vee) = \begin{cases} m & \text{if } q = d-1 \text{ or } d+1; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(b) 自然映射

$$H^{d-1}(\mathfrak{g}, K_\infty^\circ; \mathcal{L}(\pi, s_0) \otimes E^\vee) \to H^{d-1}(G, E^\vee),$$

由将 $\mathcal{L}(\pi, s_0)$ 包含进空间 $\mathcal{A}_E(\mathcal{G})$而诱导，且为单射。

(c) 另一方面，自然映射

$$H^{d+1}(\mathfrak{g}, K_\infty^\circ; \mathcal{L}(\pi, s_0) \otimes E^\vee) \to H^{d+1}(G, E^\vee),$$

再次由将 $\mathcal{L}(\pi, s_0)$ 纳入空间 $\mathcal{A}_E(\mathcal{G})$所诱导，为零。

因此*t he*来自 π 的残余艾森斯坦上同调集中在次数 $d -$ 1.

本小节余下部分将用于证明。我们希望应用第2节的结果，但立刻面临一个颇为棘手的问题： $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ 作为实李群可能并不连通。为解决这个问题，我们证明几个引理，以便将问题归结为连通情形。

引理 3.2.2. 设 w 是 $\mathcal{G}$ 的魏尔群中保持 $\mathcal{M}$ 不变的一个元素。记 π_∞^w 为定义在与 π_∞ 相同空间上的表示，其作用由 $\pi_\infty \circ \mathrm{Ad}(w)$ 给出。那么对于任意 $s \in \mathbb{C}$，映射

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{R})}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})}(\pi_\infty^w, s) \to \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{R})\cap\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}(\pi_\infty^w, s)$$

由.....给出

$$\phi \mapsto \phi|_{\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}$$

是 $(\mathfrak{g}, K_\infty^\circ)$-模的一个同构。

证明。 为简便起见，我们只证明 $w = 1$ 的情形；其他情形的证明完全相同。

容易验证，所讨论的映射定义良好，且是 $(\mathfrak{g}, K_\infty^\circ)$-模的映射。我们需要验证它是双射。

现在，由于 $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{G}$ 中的一个极大抛物子群，而 $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ 仍是 $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ 中的一个极大抛物子群，因此存在一个极大 $\mathbb{Q}$-分裂环面 $\mathcal{T}_s$，它包含于 $\mathcal{G}$ 并且包含在 $\mathcal{M}$ 中，使得 $\mathcal{T}_s(\mathbb{R})$ 是 $\mathcal{G}$ 的一个极大分裂 Cartan 子群，且包含在 $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ 中。根据 [Vog81，引理 0.4.2 (a)], ，群 $\mathcal{T}_s(\mathbb{R})$，因而 $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ 也与 $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ 的每个连通分支相交。因此，双陪集空间

$$\mathcal{P}(\mathbb{R})\backslash\mathcal{G}(\mathbb{R})/\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ \cong (\mathcal{P}(\mathbb{R}) \cap K_\infty)\backslash K_\infty/K_\infty^\circ$$

是平凡的。由此可知，任意一个 $\phi \in \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}\ \mathbb{R}\ }^{\mathcal{G}(\mathbb{R})}{}_{()}(\pi_\infty, s)$ 都完全由其在 $\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ$ 上的限制所确定。因此，所讨论的映射是单射。

它也是满射；给定 $\phi' \in$ 诱导表示$_{\mathcal{P}\ \mathbb{R}\ }^{\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}{}_{()\cap\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}(\pi_\infty, s)$，我们可以如下定义 $\phi \in$ 诱导表示$_{\mathcal{P}\ \mathbb{R}\ }^{\mathcal{G}(\mathbb{R})}{}_{()}(\pi_\infty, s)$。由上可知，对于任意 $g \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$，我们可以写成 $g = pg_0$，其中 $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 且 $g_0 \in \mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ$。然后令

$$\phi(g) = p\phi'(g_0).$$

容易验证这定义良好，且 $\phi|_{\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ} = \phi'$，由此可得满射性。

□

从现在起，令 $\mathcal{M}_0$ 为 $\mathcal{M}$的所有特征的公共核，从而 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 A_\mathcal{M}$。令 $\mathfrak{m}_0$ 和 $\mathfrak{a}_\mathcal{M}$ 为相应的复化李代数。根据 [BW00，引理 II.5.6]，每个模 π_∞ 都是有限个不可约 $(\mathfrak{m}_0, K_\infty^\circ \cap \mathcal{P}(\mathbb{R}))$-模的直和，记作 $\pi_{\infty,1}, \ldots, \pi_{\infty,n}$，其中 n为某个正整数，并且这些模全都属于离散系列。相应地，对于魏尔群中每个保持 $\mathcal{M}$不变的 $\mathcal{G}$ 的元素 w，我们有一个自然分解

$$\pi_\infty^w \cong \bigoplus_{i=1}^n \pi_{\infty,i}^w.$$

因此我们有分解

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{R})}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})}(\pi_\infty^w, s) \to \bigoplus_{i=1}^n \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{R})\cap\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}(\pi_{\infty,i}^w, s).$$

当 s 变化时，这些分解保持平坦截面不变。事实上，对于每个满足 $1 \le i \le n$ 的 i，令

$$\mathrm{pr}_i^w : \pi_\infty^w \to \pi_{\infty,i}^w$$

为相应的投影。那么，$\mathrm{pr}_i \otimes 1$ 是自然投影

$$\pi_\infty^w \otimes \delta_{\mathcal{P}(\mathbb{R})}^{s+1/2} \to \pi_{\infty,i}^w \otimes \delta_{\mathcal{P}(\mathbb{R})}^{s+1/2}.$$

因此，如果 $\phi_s \in \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}\,\mathbb{R}}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})}{}()(\pi_\infty^w, s)$ 是一个平坦截面，那么上述同构右侧对应的截面为

$$((\mathrm{pr}_1 \otimes 1) \circ (\phi_s|_{\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}), \ldots, (\mathrm{pr}_n \otimes 1) \circ (\phi_s|_{\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ})),$$

并且容易看出，该元组各分量在 K_∞° 上的取值独立于 s，只要它们在 ϕ_s 上的取值在 K_∞ 上独立即可。

此外，如果 $\phi_s \in \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}\,\mathbb{R}}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})}{}()(\pi_\infty, s)$ 是平坦的，$\mathrm{Re}(s)$ 充分大，且 $w\mathcal{P}w^{-1}$ 与 $\mathcal{P}$ 相对，那么我们有

$$\int_{\mathcal{N}(\mathbb{R})} \phi_s(wn(\cdot))\, dn$$

在上述映射下，它被映到元组

$$\left((\mathrm{pr}_1 \otimes 1) \circ \left(\int_{\mathcal{N}(\mathbb{R})} \phi_s(wn(\cdot))\, dn\right), \ldots, (\mathrm{pr}_n \otimes 1) \circ \left(\int_{\mathcal{N}(\mathbb{R})} \phi_s(wn(\cdot))\, dn\right)\right).$$

因此，通过解析延拓，这一讨论证明了下面的引理。

引理3.2.3。对于魏尔群中任意一个保持 $\mathcal{M}$ 并将 $\mathcal{P}$ 映到其相反对象的 w，分解

$$\pi_\infty \cong \bigoplus_{i=1}^n \pi_{\infty,i}$$

以上诱导出如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{R})}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})}(\pi_\infty, s) & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_{i=1}^n \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{R})\cap\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}(\pi_{\infty,i}, s) \\ \downarrow{\scriptstyle M(s,\cdot)} & & \downarrow{\scriptstyle \oplus_i M(s,\cdot)} \\ \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{R})}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})}(\pi_\infty^w, -s) & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_{i=1}^n \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{R})\cap\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}(\pi_{\infty,i}^w, -s), \end{array}$$

其中交织算子 $M(s,\cdot)$ 是相对于 w定义的。

现在，表示 $\mathcal{L}(\pi, s_0)_\infty$ 是酉的，因为它是剩余表示 $\mathcal{L}(\pi, s_0)$ 的阿基米德分量，而剩余艾森斯坦级数出现在离散谱 $L^2_{\mathrm{disc}}(\mathcal{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{G}(\mathbb{A}))$ 中。根据定理 3.2.1 的条件 (ii)，假设该表示是上同调的，因此可知存在如上所述的指标 i，使得 $\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}\,\mathbb{R}}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})}(\,)(\pi_{\infty,i}, s)$ 有一个酉商 Q_i，其具有非平凡的 $(\mathfrak{g}, K_\infty^\circ)$-上同调。令 $\mathcal{I}_{\mathrm{coh}}$ 为非空指标集，其中的指标 i 满足 $1 \le i \le n$，且 $\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}\,\mathbb{R}}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})}(\,)(\pi_{\infty,i}, s)$ 存在一个酉商 Q_i，其具有非平凡的 $(\mathfrak{g}, K_\infty^\circ)$-上同调。那么对于任意 $i \in \mathcal{I}_{\mathrm{coh}}$，由于 Q_i 是酉的，它可分解为直和，因此可知唯一不可约商

$\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}\ \mathbb{R}}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})}{}_{()}(\pi_{\infty,i}, s)$ 的唯一不可约商是 Q_i，因此它是酉的且具有上同调。根据命题 2.6.2，我们处于第 2.1 节和第 2.2 节所述的情形，因此得到如下结论。

我们固定一个（必为连通的）紧 Cartan 子群 T $\mathcal{G}$的$\mathbb{R}(^\circ)$ K_∞°，其复化李代数为 $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$。记 $\Delta = \Delta(\mathfrak{g},\ \mathfrak{t})$ 为 $\mathfrak{t}$在 $\mathfrak{g}$中的根集。令 θ 为 $\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ$ 上的 Cartan 对合， K_∞° 给出 K_∞°。对每个$\alpha \in \Delta$固定根向量 X_α，相对于 $\mathfrak{g}$ 上的 Killing 形式 B 进行归一化，使得（2.1.1）成立。于是根据命题 2.6.2，存在：

- 一个正根系 $\Delta^{+,\ i}$ 在 Δ中；
- 一个简单非紧根$\alpha_{0,\ i}$ 在 $\Delta^{+,\ i}$中；
- $_{\mathrm{H}}^{\text{一个}}$ arish-Chandra 参数 Λ_i，对于 $\mathfrak{t}$ 在 $\mathfrak{g}$中，该参数对 $\Delta^{+,\ i}$ 支配，并且使得 th at

$$\frac{2\langle \Lambda_i, \alpha_{0,i} \rangle}{\langle \alpha_{0,i}, \alpha_{0,i} \rangle} = 1;$$

使得，如果我们采用以下记号：

- 令 $\mathfrak{a} = \mathbb{C}(X_{\alpha_{0,\ i}} + X_{-\alpha_{0,\ i}})$;
- 令 $A = \exp(\mathbb{R}(X_{\alpha_{0,\ i}} + X_{-\alpha_{0,\ i}}))$;
- 令 $\mathfrak{t}'$ 为 $\mathfrak{t}$中 $[X_{\alpha_{0,i}}, X_{-\alpha_{0,i}}]$ 的正交补；
- 令 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 中由 $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{t}'$给出的嘉当子代数；
- 令 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ =Lie($\mathcal{G}(\mathbb{R})$) 为 $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ 的实李代数；
- 令 M_0° 为 $\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ$ 的连通子群，其实李代数由 $\mathcal{G}$ 的实李代数中 $(\mathfrak{a})$ 的中心化子给出；
- 令 $M_0 = C_{K_\infty^\circ}(\mathfrak{a})M_0^\circ$;
- 令$C_{\alpha_{0,\ i}}$ =Ad(exp($\frac{\pi}{4}$($X_{\alpha_{0,\ i}} - X_{-\alpha_{0,\ i}}$))) 为与 $\alpha_{0,\ i}$ 相关联的凯莱变换；
- 令 ${}^tC_{\alpha_{0,\ i}}$: $\Delta \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathfrak{g},\ \mathfrak{h})$ 为凯莱变换的转置；
- 令 $\rho_{c,\ i}$ 和 $\rho_{n,\ i}$ 分别为 $_{\Delta^{+,\ i}}$ 中紧根与非紧根的半和；
- 令 ξ_i 为 T 的特征，其微分为 $\Lambda_i - \rho_{c,\ i} + \rho_{n,\ i}$;
- 令 $\pi_{0,\ i}$ 为 M_0° 的离散系列表示，其 Harish-Chandra 参数为 $\Lambda_i|_{\mathfrak{t}'}$;

那么存在一个 $g_{0,i} \in \mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ$，使得以下结论成立：

- 抛物子群 $g_{0,\ i}(\mathcal{P}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ)g_0^{-1}{}_{,\ i}$ 属于 $\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ$，其 Levi子群为 $M_0A = g_{0,\ i}(\mathcal{M}(\mathbb{R})$ $\cap\, \mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ)g_0^{-1}{}_{,\ i}$ 幺幂根基为 $g_{0,\ i}\mathcal{N}(\mathbb{R})g_0^{-1}{}_{,\ i}$ 其 A-根是在 $X_{\alpha_{0,\ i}} + X_{-\alpha_{0,\ i}}$上取正值的那些；

- We have $(\pi_{\infty,i}\circ \mathrm{Ad}(g_{0,i}^{-1}))|_{M_0}\cong \mathrm{Ind}_{M_0^\circ Z_{M_0}}^{M_0}(\pi_{0,i}\otimes(\xi_i|_{Z_{M_0}}))$;
- We have that $s_0=(2\rho_{g_{0,i}(\mathcal{P}(\mathbb{R})\cap\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ)g_{0,i}^{-1}}(X_{\alpha_{0,i}}+X_{-\alpha_{0,i}}))^{-1}$.

注意，上述性质 $M_0A=g_{0,i}(\mathcal{M}(\mathbb{R})\cap\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ)g_{0,i}^{-1}$ 将 A 确定为 $A=g_{0,i}A_{\mathcal{M}(\mathbb{R})^\circ}g_{0,i}^{-1}$，因此将根 $\alpha_{0,i}$ 确定到相差一个符号。容易验证，上述不涉及指标 i 的记号确实不依赖于 i。

还要注意，$\mathrm{Ind}_{M_0^\circ Z_{M_0}}^{M_0}(\pi_{0,i}\otimes(\xi_i|_{Z_{M_0}}))$ 是此处起到离散系列表示作用的表示，该表示在第2节中记作 π。因此，第2节中关于 $\mathrm{Ind}_P^G(\pi,\pm s_0)$ 的结果也适用于此处的诱导表示

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{R})\cap\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}(\pi_{\infty,i},s_0),\qquad \text{for } i\in\mathcal{I}_{\mathrm{coh}},$$

因为它与以下表示同构

$$\mathrm{Ind}_{g_{0,i}(\mathcal{P}(\mathbb{R})\cap\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ)g_{0,i}^{-1}}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}(\pi_{\infty,i}\circ\mathrm{Ad}(g_{0,i}^{-1}),s_0)$$
$$\cong \mathrm{Ind}_{g_{0,i}(\mathcal{P}(\mathbb{R})\cap\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ)g_{0,i}^{-1}}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}(\mathrm{Ind}_{M_0^\circ Z_{M_0}}^{M_0}(\pi_{0,i}\otimes(\xi_i|_{Z_{M_0}})),s_0).$$

关键在于，现在我们可以将第2.3、2.4和2.5节的结果应用于当前情形。此外，由于 $\alpha_{0,i}$ 在相差一个符号的意义下确定，我们可以在 $\mathfrak{g}$ 中定义 $\mathfrak{h}$ 的魏尔群的一个元素 $\widetilde{w}_0$，它是关于 ${}^tC_{\alpha_{0,i}}(\alpha_{0,i})$ 的简单反射，且与 $i\in\mathcal{I}_{\mathrm{coh}}$ 无关。于是，元素 $w_0=g_{0,i}\widetilde{w}_0g_0^{-1},_i$ 保持 $\mathcal{M}$ 不变，并将$\mathcal{P}$映到其相反元素。因此，相对于 w_0 定义的 $\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}\ \mathbb{R}}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}(\ )\cap\mathcal{G}(\mathbb{R})\circ(\pi_{\infty,i},s_0)$ 上的交织算子 $M(s_0,\cdot)$，其像与 $\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}\ \mathbb{R}}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}(\ )\cap\mathcal{G}(\mathbb{R})\circ(\pi_{\infty,i},s_0)$ 的唯一不可约商同构；对任意满足 $1\le i\le n$ 的 i，我们将该商记作 $\mathcal{L}(\pi_{i,\infty},s_0)$。因此，由引理3.2.3可得分解

$$\mathcal{L}(\pi,s_0)_\infty\cong\bigoplus_{i=1}^n\mathcal{L}(\pi_{\infty,i},s_0),$$

因此，上述右侧的每个加项都已是酉的。因此，$\mathcal{I}_{\mathrm{coh}}$ 是满足 $\mathcal{L}(\pi_{\infty,i},s_0)$ 为上同调的（酉性条件事后自动成立）的指标 i 集合。

现在我们希望计算诱导表示的 $(\mathfrak{g},K_\infty^\circ)$-上同调

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A})}^{\mathcal{G}(\mathbb{A})}(\pi\otimes\mathrm{Sym}(\mathbb{C})_{s_0}),$$

其中，对于 $s\in\mathbb{C}$，代数 $\mathrm{Sym}(\mathbb{C})_s$ 是第3.1节的对称代数，并带有上述定理3.1.1中所述的 $\mathcal{P}(\mathbb{A}_f)\times(\mathfrak{p},K_\infty\cap\mathcal{P}(\mathbb{R}))$-模结构。这里我们再次用 $\mathfrak{p}$ 表示 $\mathcal{P}$ 的复化李代数。上述上同调由以下结果计算。

引理 3.2.4。设 $m=\#\mathcal{I}_{\mathrm{coh}}$。我们有一个 $\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$-模的同构，

$$H^q(\mathfrak{g},K_\infty^\circ;\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A})}^{\mathcal{G}(\mathbb{A})}(\pi\otimes\mathrm{Sym}(\mathbb{C})_{s_0})\otimes E^\vee)\cong\begin{cases}\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A}_f)}^{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(\pi_f,s_0)^{\oplus m} & \text{if } q=d;\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}$$

其中 π_f 是 π的有限阿代尔分量。

证明. 令 $i \in \mathcal{I}_{\mathrm{coh}}$。注意，$\mathrm{Ad}(g_{0,i}^{-1})(\mathfrak{h})$ 是 $\mathfrak{g}$ 中复化李代数 $\mathfrak{m}$ 的一个 θ-稳定嘉当子代数；我们回顾一下，$\mathfrak{h}$ 是上文符号说明的项目列表中定义的嘉当子代数。记 $\mathfrak{h}_{0,i} = \mathrm{Ad}(g_{0,i}^{-1})(\mathfrak{h})$，并令 $\Delta_{0,i}^{+}$ 为 $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_{0,i})$中的正根集，它们由 ${}^tC_{\alpha_{0,i}}(\Delta^+)$经 $\mathrm{Ad}(g_{0,i}^{-1})$作用得到。记 $\Lambda_{0,i} = ({}^tC_{\alpha_{0,i}}(\Lambda_i)) \circ \mathrm{Ad}(g_{0,i})$，这是 $\mathfrak{h}_{0,i}$的一个权。事实上，若记 $\rho_{0,i}$ 为 $\Delta_{0,i}^{+}$中根的半和，则 $\Lambda_{0,i} - \rho_{0,i}$ 是 E中 $\mathfrak{h}_{0,i}$ 的最高权。令 $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_{0,i})$ 和 $W(\mathfrak{m},\mathfrak{h}_{0,i})$ 分别为 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{m}$中 $\mathfrak{h}$ 的魏尔群。记 W^P 为商 $W(\mathfrak{m}_0,\mathfrak{h})\backslash W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_{0,i})$ 的最短长度代表元集。于是，由于

$$H^*(\mathfrak{g}, K_\infty^\circ; \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{R})\cap\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}(\pi_{i,\infty}, s_0) \otimes E^\vee)$$

根据命题 2.4.3，is nonzero，我们有 [BW00，定理 III.3.3] 告诉我们存在一个元素 $w_i \in W^P$，使得以下结论成立：我们有

$$(-w_i\Lambda_{0,i})|_{\mathfrak{a}_\mathcal{M}} = \frac{1}{2}\widetilde{\alpha} = 2s_0\rho_\mathcal{P},$$

并且 $\pi_{\infty,i}$ 的无穷小特征是 $(-w_i\Lambda_{0,i})|_{\mathfrak{h}\cap\mathfrak{m}_0}$的轨道，此外还存在一个同构

$$\begin{aligned} &H^q(\mathfrak{g}, K_\infty^\circ; \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{R})\cap\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}(\pi_{i,\infty}, s_0) \otimes E^\vee) \\ &\qquad \cong \bigoplus_{j=0}^{1} \left(\bigwedge^j \mathfrak{a}_\mathcal{M}\right) \otimes H^{q-\ell(w_i)-j}(\mathrm{Ad}(g_{0,i}^{-1})\mathfrak{m}_0, K_\infty^\circ \cap \mathcal{P}(\mathbb{R}); \pi_{\infty,i} \otimes F_{w_i\Lambda_{0,i}-\rho_{0,i}}^\vee), \end{aligned}$$

其中 $F_{w_i\Lambda_{0,i}-\rho_{0,i}}$ 是最高权为 $(w_i\Lambda_{0,i} - \rho_{0,i})|_{\mathfrak{h}_0\text{的表示，}_i\cap\mathfrak{m}_0}$.

另一方面，根据命题 2.4.3，我们有

$$\dim_{\mathbb{C}} H^q(\mathfrak{g}, K_\infty^\circ; \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{R})\cap\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}(\pi_{i,\infty}, s_0) \otimes E^\vee) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = d, d+1; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此，记 $d' = \frac{1}{2}\dim(g_{0,i}^{-1} M_0 g_{0,i})/(\mathcal{P}(\mathbb{R}) \cap K_\infty^\circ)$ 为 M_0 的中间次数，我们有 $\ell(w_i) = d - d'$ 对任意 $i \in \mathcal{I}_{\mathrm{coh}}$ 都成立，因为离散系列表示 $\pi_{\infty,i}$只能在中间次数 d'上具有上同调。如果 i 与 $1 \le i \le n$ 不在 $\mathcal{I}_{\mathrm{coh}}$ 中，那么根据命题 2.6.2（第二个陈述），

$$H^*(\mathfrak{g}, K_\infty^\circ; \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{R})\cap\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}(\pi_{i,\infty}, s_0) \otimes E^\vee) = 0.$$

因此同理，由 [Mun，定理 2.2.3] 可得

$$\begin{aligned} &H^q(\mathfrak{g}, K_\infty^\circ; \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A})}^{\mathcal{G}(\mathbb{A})}(\pi \otimes \mathrm{Sym}(\mathbb{C})_{s_0}) \otimes E^\vee) \\ &\qquad \cong \bigoplus_{i\in\mathcal{I}_{\mathrm{coh}}} \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A}_f)}^{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(\pi_f, s_0) \otimes H^{q-d+d'}(\mathrm{Ad}(g_{0,i}^{-1})\mathfrak{m}_0, K_\infty^\circ \cap \mathcal{P}(\mathbb{R}); \pi \otimes F_{w\Lambda_{0,i}-\rho_{0,i}}). \end{aligned}$$

由上文可知，这恰好归结为该引理的陈述。 □

我们将需要以下引理，它与引理 3.2.2 类似。

引理 3.2.5. 对于任意 $s \in \mathbb{C}$，映射

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A})}^{\mathcal{G}(\mathbb{A})}(\pi \otimes \mathrm{Sym}(\mathbb{C})_s) \to \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A}_f)\times(\mathcal{P}(\mathbb{R})\cap\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ)}^{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)\times\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}(\pi \otimes \mathrm{Sym}(\mathbb{C})_s)$$

由.....给出

$$\phi \mapsto \phi|_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)\times\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}$$

是 $\mathcal{G}(\mathbb{A}_f) \times (\mathfrak{g}, K_\infty^\circ)$-模的同构；当然，上述诱导表示中并无隐含的正规化。

*P*证明。 该证明与引理 3.2.2 的证明完全类似，故略去。 □

于是我们可以分解

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A}_f)\times(\mathcal{P}(\mathbb{R})\cap\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ)}^{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)\times\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}(\pi \otimes \mathrm{Sym}(\mathbb{C})_s) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A}_f)\times(\mathcal{P}(\mathbb{R})\cap\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ)}^{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)\times\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}((\pi_f \otimes \pi_{\infty,i}) \otimes \mathrm{Sym}(\mathbb{C})_s),$$

并且类似地

$$\mathcal{L}(\pi, s_0) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{L}(\pi, s_0)_f \otimes \mathcal{L}(\pi_{\infty,i}, s_0).$$

对这两个公式中后者所含的模与$E^\vee$的张量积取$(\mathfrak{g}, K_\infty^\circ)$-上同调，并援引命题 2.4.1 (b)，便得到定理 3.2.1 的 (a)，其中 $m = \#\mathcal{I}_{\mathrm{coh}}$。

现在考虑如下 $\mathcal{G}(\mathbb{A}_f) \times (\mathfrak{g}, K_\infty)$-模的短正合列，

$$0 \to \mathcal{L}(\pi, s_0) \to \mathcal{A}_{\pi,s_0} \to \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A})}^{\mathcal{G}(\mathbb{A})}(\pi \otimes \mathrm{Sym}(\mathbb{C})_{s_0}) \to 0, \tag{3.2.1}$$

该短正合列来自上文的 Grbac 定理 3.1.1。注意，根据无穷小特征，$\mathcal{A}_{\pi,s_0}$ 是 $\mathcal{A}_E(\mathcal{G})$的一个直和项。由引理 3.2.4，与 $E^\vee$ 张量后的商模的 $(\mathfrak{g}, K_\infty^\circ)$-上同调集中在次数 d；由定理 3.2.1 的 (a) 部分，与 $E^\vee$ 张量后的子模的 $(\mathfrak{g}, K_\infty^\circ)$-上同调集中在次数$d-1$和 $d+1$。因此，$\mathcal{A}_{\pi,s_0} \otimes E^\vee$ 的 $(\mathfrak{g}, K_\infty^\circ)$-上同调集中在次数 $d-1$、 d和 $d+1$。事实上，将 (3.2.1) 所对应的长正合列与 $E^\vee$ 张量后，得到一个同构

$$H^{d-1}(\mathfrak{g}, K_\infty^\circ; \mathcal{L}(\pi, s_0) \otimes E^\vee) \cong H^{d-1}(\mathfrak{g}, K_\infty^\circ; \mathcal{A}_{\pi,s_0} \otimes E^\vee), \tag{3.2.2}$$

以及一个正合列

$$\begin{aligned} 0 \to H^d(\mathfrak{g}, K_\infty^\circ; \mathcal{A}_{\pi,s_0} \otimes E^\vee) &\to H^d(\mathfrak{g}, K_\infty^\circ; \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A})}^{\mathcal{G}(\mathbb{A})}(\pi \otimes \mathrm{Sym}(\mathbb{C})_{s_0}) \otimes E^\vee) \\ &\xrightarrow{\partial} H^{d+1}(\mathfrak{g}, K_\infty^\circ; \mathcal{L}(\pi, s_0) \otimes E^\vee) \to H^{d+1}(\mathfrak{g}, K_\infty^\circ; \mathcal{A}_{\pi,s_0} \otimes E^\vee) \to 0, \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

其中 ∂ 是一个边界映射。

现在，同构 (3.2.2) 蕴含定理 3.2.1 的 (b)。因此我们现在必须证明 (c)，而这可立即由下述命题得出。

命题 3.2.6. (3.2.3) 的边界映射 ∂ 是满射。

证明. 该证明将通过涉及上链的相当显式的计算，分若干步进行。

步骤 1。我们先搭建背景并定义阿基米德上闭链 $c^{d,\pm}_{\infty,i}$。首先，固定$\phi_{f,s} \in \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A}_f)}^{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(\pi_f, s)$，使其在 $s = s_0$ 处于 $\mathcal{L}(\pi, s_0)_f$ 中的像非平凡的任意平坦截面。由朗兰兹–沙希迪方法（上文的定理 3.1.3）可知，有限阿代尔交织算子（我们姑且记为 $M(s,\cdot)$）作用于 $\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A}_f)}^{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(\pi_f, s)$，对应于上文定义的外尔元素 w_0，满足 $M(s, \phi_{s,f})$ 在 $s = s_0$ 处有一个简单极点。事实上，对于任意平坦截面 $\phi_{\infty,s} \in \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{R})}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})}(\pi_\infty, s)$，记

$$\phi_s = \phi_{f,s} \otimes \phi_{\infty,s} \in \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A})}^{\mathcal{G}(\mathbb{A})}(\pi, s).$$

那么，相应的艾森斯坦级数 $E(\phi, s, g)$ 沿 $\mathcal{P}$ 的常数项由下式给出

$$E_{\mathcal{N}}(\phi, s, g) = \phi_s(g)(1_{\mathcal{M}}) + (M(s, \phi_{f,s}) \otimes M(s, \phi_{\infty,s}))(g)(1_{\mathcal{M}}).$$

因此，如果 $\phi_{\infty,s}$ 在 $\mathcal{L}(\pi, s_0)_\infty$ 于 $s = s_0$处的像非平凡，那么 $E(\phi, s, g)$，进而$E_{\mathcal{N}}(\phi, s, g)$，就有一个（必然是单的）极点，而这个极点必定来自上面的项 $M(s, \phi_{f,s})$。

令 $i \in \mathcal{I}_{\mathrm{coh}}$，并令 Λ_i 如上方符号列表所述。令 $D_{+,i}$ 为 $\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ$ 的离散系列表示，其 Harish-Chandra 参数为 Λ_i；令 $D_{-,i}$ 为参数是 $\Lambda_i - \alpha_{0,i}$的离散系列表示。定理 2.3.2 (c) 给出如下正合列:

$$0 \to D_{+,i} \oplus D_{-,i} \to \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}(\pi_{\infty,i}, s_0) \to \mathcal{L}(\pi_{\infty,i}, s_0) \to 0, \tag{3.2.4}$$

and

$$0 \to \mathcal{L}(\pi_{\infty,i}, s_0) \to \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}(\pi_{\infty,i}, -s_0) \to D_{+,i} \oplus D_{-,i} \to 0. \tag{3.2.5}$$

根据注 2.4.2，我们有两个线性无关的上链

$$c^{d,\pm}_{\infty,i} : \bigwedge^d (\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \to \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}(\pi_{\infty,i}, s_0) \otimes E^\vee$$

它们分别经过 $D_{\pm,i} \otimes E^\vee$进行分解。当然，$\mathfrak{k}$ 是 K_∞°的复化李代数。这些上链实际上是上循环，因为它们来自于表示 $H^d(\mathfrak{g}, K_\infty^\circ; D_{\pm,i} \otimes E^\vee)$中非零上同调类的上链。

步骤 2。现在我们定义整体上闭链 $c^{d,\pm}_{\cdot,i}$ 到 Grbac 序列中的商所对应的诱导表示中。令 ι_i 为这些映射的复合

$$\begin{aligned}
\iota_i : \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A}_f)}^{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(\pi_f, s_0) \otimes (D_{+,i} \oplus D_{-,i}) &\hookrightarrow \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A}_f) \times (\mathcal{P}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ)}^{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f) \times \mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}(\pi_f \otimes \pi_{\infty,i}, s_0) \\
&\hookrightarrow \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A}_f) \times (\mathcal{P}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ)}^{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f) \times \mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}(\pi, s_0) \\
&\cong \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A})}^{\mathcal{G}(\mathbb{A})}(\pi, s_0) \\
&\hookrightarrow \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A})}^{\mathcal{G}(\mathbb{A})}(\pi \otimes \mathrm{Sym}(\mathbb{C})_{s_0}),
\end{aligned}$$

其中，同构来自引理 3.2.5，而末尾的包含由命题 3.1.2 给出。于是，ι_i 是 $\mathcal{G}(\mathbb{A}_f) \times (\mathfrak{g}, K_\infty^\circ)$-模的单射。我们定义上循环

$$c_i^{d,\pm} : \bigwedge^d (\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \to \mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A})}^{\mathcal{G}(\mathbb{A})}(\pi \otimes \mathrm{Sym}(\mathbb{C})_{s_0}) \otimes E^\vee$$

by

$$c_i^{d,\pm}(Y) = (\iota_i \otimes \mathrm{id}_{E^\vee})(\phi_{f,s} \otimes c_{\infty,i}^{d,\pm}(Y)), \qquad Y \in \bigwedge^d(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}).$$

我们将计算这些上循环在 ∂ 下的像。

步骤 3。为开始这一计算，我们定义一个提升 $\tilde{c}^{d,\pm}_{,i}$，将 $c^{d,\pm}_{,i}$ 提升为取值于$\mathcal{A}_{\pi,s_0} \otimes E^\vee$的上链。完成这一步后，$\tilde{c}^{d,\pm}_{,i}$ 在边界映射下的像 $d\tilde{c}^{d,\pm}_{,i}$ 将取值于 $\mathcal{L}(\pi, s_0) \otimes E^\vee$，而它在上同调中的类将是 $c^{d,\pm}_{,i}$ 的类在 ∂ 下的像，这是由定义得到的。

因此，我们定义

$$\tilde{c}_i^{d,\pm} : \bigwedge^d(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) \to \mathcal{A}_{\pi,s_0} \otimes E^\vee$$

如下。对于任意向量 $e \in E$ 以及任意 $F \in \mathcal{A}_{\pi,s_0}$ 和 $v \in E^\vee$，我们可以考虑 $F \otimes v$ 在向量 e 上的取值，其明确形式为 $v(e)F \in \mathcal{A}_{\pi,s_0}$，并且根据线性性，这一取值可以扩展到 $\mathcal{A}_{\pi,s_0} \otimes E^\vee$。因此，我们可以通过定义其在任意 $Y \in \bigwedge^d(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$ 和任意 $e \in E$ 上的取值 $\tilde{c}^{d,\pm}_{,i}(Y)(e)$ 来定义 $\tilde{c}^{d,\pm}_{,i}$，具体如下。令

$$\tilde{c}_i^{d,\pm}(Y)(e) = E(c_i^{d,\pm}(Y)(e), s_0, \cdot), \qquad Y \in \bigwedge^d(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), \quad e \in E.$$

我们断言，这给出了一个良定义上链，即 $\tilde{c}^{d,\pm}_{,i}$ 是 K_∞°-等变且取正则值的。

为此，我们考察 $E(c^{d,\pm}_{,i}(Y)(e)\ s_0, \cdot)$ 在 $Y \in \bigwedge^d(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$ 和$e \in E$处的常数项。艾森斯坦级数 $E(c^{d,\pm}_{,i}(Y)(e)\ s_0, \cdot)$ 沿 $\mathcal{P}$ 的常数项为

$$E_{\mathcal{N}}(c_i^{d,\pm}(Y)(e), s_0, g) = (\phi_{f,s_0} \otimes c_{\infty,i}^{d,\pm}(Y)(e))(g)(1_{\mathcal{M}}) + \lim_{s \to s_0} (M(s, \phi_{f,s}) \otimes M(s, c_{\infty,i}^{d,\pm}(Y)(e)_s))(g)(1_{\mathcal{M}}), \quad (3.2.6)$$

这里我们将 $c^{d,\pm}_{\infty,i}(Y)(e)_s$ 记作 $\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{R})^\circ}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}(\ ) \cap \mathcal{G}(\mathbb{R}) \circ (\pi_{\infty,i}, s)$ 中的平坦截面，该截面在 $s = s_0$ 处取值为 $c^{d,\pm}_{\infty,i}(Y)(e)$。如上所述，交织截面 $M(s, \phi_{f,s})$ 在 $s = s_0$处有一个简单极点；而由于 $c^{d,\pm}_{\infty,i}(Y)(e) \in D_{\pm,i}$，另一个交织截面 $M(s, c^{d,\pm}_{\infty,i}(Y)(e)_s)$ 在 $s = s_0$处有一个零点，从而抵消了这个极点。此外，除共轭之外，不存在其他抛物子群 $\mathcal{P}'$ 使得 $E(c^{d,\pm}_{,i}(Y)(e)\ s_0, g)$ 的常数项非零。事实上，如果任何这样的 $\mathcal{P}'$ 使我们处于定理 3.1.3 的第二种情形，那么 $\mathcal{P}'$ 共轭于 $\mathcal{P}$的反向，而后者本身已通过 w_0与 $\mathcal{P}$ 共轭；此外，这样的 $\mathcal{P}'$ 不可能使我们处于定理 3.1.3 的第三种情形，因为我们已知 $w = 1$ 并非固定 $\mathcal{M}$的唯一外尔元素，$w = w_0$ 也会固定它。因此，$E(c^{d,\pm}_{,i}(Y)(e)\ s_0, \cdot)$ 的非零常数项都取正则值，因此 $E(c^{d,\pm}_{,i}(Y)(e)\ s_0, \cdot)$ 本身就是一个正则艾森斯坦级数。此外，由于这些非零常数项显然具有正确的 K_∞°-类型，映射 $\tilde{c}^{d,\pm}_{,i}$ 是 K_∞°-等变的，从而证明了我们的断言。

因此，如此定义的映射 $\tilde{c}^{d,\pm}_{,i}$ 是一个上链。此外，由于它是取值于正则艾森斯坦级数的上链，我们有

$$\tilde{c}_i^{d,\pm} = (\mathbf{MW} \otimes \mathrm{id}_{E^\vee}) \circ c_i^{d,\pm},$$

其中**MW** 是第3.1节中定义的 Franke均值映射。由于上述 Grbac 定理 3.1.1 中的同构是由**MW**诱导的，因此短正合列 (3.2.1) 中的满射映射是其逆映射，所以 $\tilde{c}^{d}_{\cdot,i}{}^{\pm}$ 确实是 $c^{d}_{\cdot,i}{}^{\pm}$ 的一个提升。

步骤 *4*。现在我们必须计算上边缘 $d\tilde{c}^{d}_{\cdot,i}{}^{\pm}$。我们将通过计算作为这些上边缘取值的艾森斯坦级数的常数项来完成。我们直接应用 (2.4.1) 中的定义。设 $X_0,\dots,X_d\in\mathfrak{g}$ 和 $e\in E$。那么

$$\begin{aligned}(d\tilde{c}_i^{d,\pm})(X_0\wedge\cdots\wedge X_d)(e)&=\sum_{j=0}^{d}(-1)^j(X_j\tilde{c}_i^{d,\pm}(X_0\wedge\cdots\wedge\widehat{X}_j\wedge\cdots\wedge X_d))(e)\\&+\sum_{0\le j<k\le d}(-1)^{j+k}\tilde{c}_i^{d,\pm}([X_j,X_k]\wedge X_0\wedge\cdots\wedge\widehat{X}_j\wedge\cdots\wedge\widehat{X}_k\wedge\cdots\wedge X_d)(e).\end{aligned}$$

为简洁起见，记作

$$X=X_0\wedge\cdots\wedge X_d,$$

and

$$X^{(j)}=X_0\wedge\cdots\wedge\widehat{X}_j\wedge\cdots\wedge X_d,$$

and

$$X^{(jk)}=[X_j,X_k]\wedge X_0\wedge\cdots\wedge\widehat{X}_j\wedge\cdots\wedge\widehat{X}_k\wedge\cdots\wedge X_d.$$

于是由 (3.2.6)，自守形式 $(d\tilde{c}^{d}_{\cdot,i}{}^{\pm})(X)(e)$ 沿 $\mathcal{P}$ 的常数项为 b y

$$\begin{aligned}((d\tilde{c}_i^{d,\pm})(X)(e))_{\mathcal{N}}(g)&=\left(\phi_{f,s_0}\otimes\sum_{j=0}^{d}(-1)^j(X_jc_{\infty,i}^{d,\pm}(X^{(j)}))(e)\right)(g)(1_{\mathcal{M}})\\&+\left(\phi_{f,s_0}\otimes\sum_{0\le j<k\le d}(-1)^{j+k}c_{\infty,i}^{d,\pm}(X^{(jk)})(e)\right)(g)(1_{\mathcal{M}})\\&+\lim_{s\to s_0}\left(M(s,\phi_{f,s})\otimes\sum_{j=0}^{d}(-1)^jM(s,(X_jc_{\infty,i}^{d,\pm}(X^{(j)}))(e)_s)\right)(g)(1_{\mathcal{M}})\qquad(3.2.7)\\&+\lim_{s\to s_0}\left(M(s,\phi_{f,s})\otimes\sum_{0\le j<k\le d}(-1)^{j+k}M(s,c_{\infty,i}^{d,\pm}(X^{(jk)})(e)_s)\right)(g)(1_{\mathcal{M}}),\end{aligned}$$

其中，与上文类似，截面 $(X_jc^{d}_{,\infty i}{}^{\pm},(X^{(j)}))(e)_s$ 是 $\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}\,\mathbb{R}}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}{}_{()\cap\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}(\pi_{\infty,i},s)$ 中的平坦截面，在 $s=s_0$ 处取值为 $(X_jc^{d}_{,\infty i}{}^{\pm},(X^{(j)}))(e)$。

现在注意到，根据引理2.5.1，$\pi_{\infty,i}^{w_0}\cong\pi_{\infty,i}$，记 $Mc^{d}_{\cdot,i}{}^{\pm}$ 为 ma p

$$Mc_i^{d,\pm}:\bigwedge{}^d(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})\to\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A}_f)\times(\mathcal{P}(\mathbb{R})\cap\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ)}^{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)\times\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}(\pi_f^{w_0}\otimes\pi_{\infty,i},-s_0)\otimes E^\vee,$$

由.....给出

$$Mc_i^{d,\pm}(Y)(e)=\lim_{s\to s_0}M(s,\phi_{f,s})\otimes M(s,c_{\infty,i}^{d,\pm}(Y)(e)_s),\qquad Y\in\bigwedge{}^d(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}),\quad e\in E.$$

由于 $M(s,\ \phi_{f,\ s})$ 在 $s=s_0$ 处有一个简单极点，并且（至关重要的是！）根据定理 2.5.2，截面$M(s,\ c^{d,\ \pm}_{\infty\ i,\ }(Y)(e)_s)$ 在 $s=s_0$ 处有一个单 零点，因此映射 $Mc^{d,\ }_{\ i}{}^{\pm}$ 不处处为零，进而定义了一个非零的 d-上链，其值落在

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A}_f)\times(\mathcal{P}(\mathbb{R})\cap\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ)}^{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)\times\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}(\pi_f^{w_0}\otimes\pi_{\infty,i},-s_0)\otimes E^\vee.$$

于是，根据注 2.4.2，阿基米德位处交织算子的 K_∞°-等变性意味着，$Mc^{d,\ }_{\ i}{}^{+}$和 $Mc^{d,\ }_{\ i}{}^{-}$分别构成该最高权为 $2\rho_{n,\ i}$ 和 $2\rho_{n,\ i}-2\alpha_{0,\ i}$ 的表示中的 K_∞°-型。将其与张量乘以 $E^\vee$ 后的短正合列 (3.2.5) 的满射映射复合，便得到非平凡的 d-上链，我们将其记为 $Mc^{d,\ }_{\ i}{}^{\pm}$，进入—

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{A}_f)}^{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(\pi_f^{w_0},-s_0)\otimes D_{\pm,i}\otimes E^\vee.$$

由命题 2.4.1 (a)，这些必为上循环，并定义非零上同调类，因此可表示为

$$\begin{aligned}&\overline{M}c_i^{d,\pm}(Y)(e)\\&\quad=\lim_{s\to s_0}(s-s_0)M(s,\phi_{f,s})\otimes\left(\frac{1}{s-s_0}M(s,c_{\infty,i}^{d,\pm}(Y)(e)_s)\ (\mathrm{mod}\ \mathcal{L}(\pi_{\infty,i},s_0))\right)\\&\quad=a_\pm\left(\operatorname*{Res}_{s=s_0}M(s,\phi_{f,s})\right)\otimes c_{\infty,i}^{d,\pm}(Y)(e),\end{aligned}\tag{3.2.8}$$

其中 $a_\pm\in\mathbb{C}$ 是一些非零数。

现在注意到

$$\lim_{s\to s_0}\left(M(s,\phi_{f,s})\otimes\sum_{j=0}^{d}(-1)^jM(s,(X_jc_{\infty,i}^{d,\pm}(X^{(j)}))(e)_s)\right)=\sum_{j=0}^{d}(-1)^jX_jMc_i^{d,\pm}(X^{(j)})(e)$$

因此，(3.2.7) 显然变为

$$((d\tilde{c}_i^{d,\pm})(X)(e))_{\mathcal{N}}(g)=(\phi_{f,s_0}\otimes(dc_{\infty,i}^{d,\pm})(X)(e))(g)(1_{\mathcal{M}})+((dMc_i^{d,\pm})(X)(e))(g)(1_{\mathcal{M}}).$$

但是 $dc^{d,\ }_{\infty\ ,\ i}{}^{\pm}=0$，因为 $c^{d,\ }_{\infty\ i,\ }{}^{\pm}$ 是一个上循环。所以这变为

$$((d\tilde{c}_i^{d,\pm})(X)(e))_{\mathcal{N}}(g)=((dMc_i^{d,\pm})(X)(e))(g)(1_{\mathcal{M}}).$$

记 $\partial_{\infty,\ i}$ 为由短正合列 (3.2.5) 与 $E^\vee$ 张量后得到的上同调中从次数 d 到次数 $d+1$ 的边界映射，使得$\partial_{\infty,\ i}$ 是一个映射

$$\partial_{\infty,i}:H^d(\mathfrak{g},K_\infty^\circ;(D_{+,i}\oplus D_{-,i})\otimes E^\vee)\to H^{d+1}(\mathfrak{g},K_\infty^\circ;\mathcal{L}(\pi_{\infty,i},s_0)\otimes E^\vee).$$

由推论 2.4.4 可知，$\partial_{\infty,i}$ 非平凡。现在，由于 $Mc^{d,\ }_{,i}{}^{\pm}$ 是 $Mc^{d,\ }_{,i}{}^{\pm}$ 的上链提升，根据 (3.2.8) 以及连接同态的定义，$dMc^{d,\ }_{,i}{}^{\pm}$ 等于

$$a_\pm\left(\operatorname*{Res}_{s=s_0}M(s,\phi_{f,s})\right)\otimes\partial_{\infty,i}(c_{\infty,i}^{d,\pm}),$$

这里我们将类 $\partial_{\infty,i}(c^{d,\pm}_{\infty,i},)$ 与其对应的上循环视为同一对象；根据命题 2.4.1 (b)，这样做是可行的。因此我们得到

$$((\partial\tilde{c}_i^{d,\pm})(X)(e))_{\mathcal{N}}(g) = a_{\pm}\left(\left(\operatorname*{Res}_{s=s_0} M(s,\phi_{f,s})\right)\otimes(\partial_{\infty,i}c_{\infty,i}^{d,\pm})(X)(e)\right)(g)(1_{\mathcal{M}}),$$

并且由于 $\partial_{\infty,\,i}$ 非平凡，故存在一个符号 $\epsilon_i \in \{+,-\}$，使得 $(\partial\tilde{c}^{d}_{,\,i}{}^{\epsilon_i})$ 非平凡。由于 $(\partial\tilde{c}^{d}_{,\,i}{}^{\epsilon_i})$ 的像显然包含于

$$\mathcal{L}(\pi,s_0)_f\otimes\mathcal{L}(\pi_{\infty,i},s_0)\otimes E^{\vee},$$

且 $\mathcal{L}(\pi,\ s_0)f$ 不可约，遍历所有 i 可知 ∂ 是满射。由此完成了该命题的证明，也完成了定理 3.2.1 的证明。 □

注记 3.2.7. 请注意，在上述证明中，我们无需证明 $\partial\tilde{c}^{d}_{,\,i}{}^{\epsilon_i}$ 的取值属于剩余艾森斯坦级数，因为这可由上同调形式体系推出。不过，构造极点艾森斯坦级数并不太困难，其留数为 $(\partial\tilde{c}^{d}_{,\,i}{}^{\epsilon_i})(Y)(e)$，对应于 $Y\in\bigwedge^d(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$ 和 $e\in E$。事实上，我们有 $(\partial_{\infty,\,i}c^{d}_{,\,\infty}{}^{\epsilon_i}{}_{,\,i})(Y)(e)\in\mathcal{L}(\pi_{\infty,\,i,\ \ s_0})$，并且 $\mathcal{L}(\pi_{\infty,\,i,\ \ s_0})$ 是交织算子的像

$$M(s_0,\cdot):\operatorname{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{R})\cap\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}(\pi_{\infty,i},s_0)\to\operatorname{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{R})\cap\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}(\pi_{\infty,i},-s_0).$$

因此，存在一个平坦截面 $\phi'_{\infty,\,s}\in$ 诱导表示$^{\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}_{\mathcal{P}\ \mathbb{R}}{}_{()\cap\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}(\pi_{\infty,\,i,\ \ s})$，使得

$$(\partial_{\infty,i}c_{\infty,i}^{d,\epsilon_i})(Y)(e)=M(s_0,\phi'_{\infty,s}).$$

甚至可以将$\phi'_{\infty,\,s}$ 提升为一个上循环

$$\bigwedge^{d+1}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})\to\operatorname{Ind}_{\mathcal{P}(\mathbb{R})\cap\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}^{\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}(\pi_{\infty,i},s_0)\otimes E^{\vee}$$

因为在诱导表示$^{\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}_{\mathcal{P}\ \mathbb{R}}{}_{()\cap\mathcal{G}(\mathbb{R})^\circ}(\pi_{\infty,\,i,\ \ s_0})\otimes E^{\vee}$ 中，最高权为 $2\rho_n-\alpha_0$ 的 K_∞°-型是唯一的（见注 2.4.2）。无论如何，在$s=s_0$ 处留数为$(\partial\tilde{c}^{d}_{,\,i}{}^{\epsilon_i})(Y)(e)$的极点艾森斯坦级数为

$$a_{\epsilon_i}E(\phi_f\otimes\phi'_\infty,s,\cdot),$$

这可以通过使用上述证明并分析常数项来验证。

值得注意以下推论，它完整地描述了在 s_0处来自 π 的艾森斯坦上同调。

推论 3.2.8. 在定理 *3.2.1* 的背景下，有如下结论。设 $\mathcal{K}(\pi_f,s_0)$是从诱导表示$^{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}{}_{\mathcal{P}(\mathbb{A}_f)}(\ \pi_f,\ s_0)$到其唯一不可约商 $\mathcal{L}(\pi,s_0)f$的映射的核。那么 ***Franke–Schwermer***直和项 $\mathcal{A}_{\pi,s_0}$ 具有上同调

$$H^q(\mathfrak{g},K_\infty^\circ;\mathcal{A}_{\pi,s_0}\otimes E^{\vee})\cong\begin{cases}\mathcal{L}(\pi,s_0)_f^{\oplus m} & \text{if } q=d-1;\\ \mathcal{K}(\pi_f,s_0)^{\oplus m} & \text{if } q=d;\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

证明. 这由命题 3.2.6 以及与 (3.2.1) 相关联的长正合列推出，该长正合列由 (3.2.2) 和 (3.2.3) 给出。 □

因此，从某种意义上说，我们的方法揭示了 (3.2.3) 的边界映射 ∂ 是有限阿代尔交织算子的上同调体现。

3.3 示例

现在我们给出一些辛情形下的例子，用以检验定理 3.2.1 的假设。这些例子应能很好地说明如何在具体情形中检验第 2.1 节和第 2.2 节中的设定，也应能展现定理 3.2.1 成立的一般范围。我们首先为辛群设定记号。

设定 3.3.1。令 $G = Sp_{2n}$ 表示 $\mathbb{Q}$ 上的 C_n 型分裂单群。通过其忠实标准表示的像，它可表示为

$$\{g \in GL_{2n} \mid {}^t gJg = J\}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix},$$

其中 1_n 表示 $n \times n$ 单位矩阵。则极大分裂环面 $\mathcal{T}_s$ 由对角矩阵 t组成，这些矩阵必然具有如下形式

$$t = \mathrm{diag}(t_1, t_2, \ldots, t_n, t_1^{-1}, t_2^{-1}, \ldots, t_n^{-1})$$

其中 t_1、.....、t_n为任意可逆矩阵。对于这种形式的 t，以及满足 $1 \le i \le n$的整数 i，令 e_i：$\mathcal{T}_s \to \mathbb{G}_m$ 为将 t 映至 t_i的特征。则根系由以下集合给出

$$\Delta = \Delta(G, \mathcal{T}_s) = \{\pm(e_i + e_j),\ \pm(e_i - e_j),\ \pm 2e_i \mid 1 \le i < j \le n\}.$$

若将正根系取为上文中前面不带负号的那些根,

$$\Delta^{+,\mathrm{std}} = \Delta(G, \mathcal{T}_s)^{+,\mathrm{std}} = \{(e_i + e_j),\ (e_i - e_j),\ 2e_i \mid 1 \le i < j \le n\},$$

则单根由下式给出

$$e_1 - e_2,\ e_2 - e_3,\ \ldots, e_{n-1} - e_n,\ 2e_n. \tag{3.3.1}$$

为简单起见，我们假设 $n \ge 2$；当 $n = 1$时，我们有 $S\mathcal{P}_2 \cong SL_2$。群 Sp_{2n} 于是有两个极大抛物子群的共轭类 $\mathcal{P} = \mathcal{MN}$，使得 $\mathcal{M}(\mathbb{R})$具有离散系列。事实上，对所有满足 $1 \le r \le n$的整数 r，存在唯一的极大抛物子群共轭类，其Levi 因子同构于 $GL_r \times Sp_{2n-2r}$（若 $r = n$，我们将 Sp_0 视为平凡群）；该共轭类的标准代表元记为 $\mathcal{P}_r$，即其Levi子群从上文列表(3.3.1)中略去第 r个单根的那个。这些抛物子群 $\mathcal{P}_r$ 中，其Levi 因子的实点具有离散系列的两个是 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_2$。

群 $Sp_{2n}(\mathbb{R})$ 是连通的。其极大紧子群 K_∞ 同构于由含复数项的 Hermitian $n \times n$ 可逆矩阵构成的群 $U(n)$。因此， K_∞ 的复化与 $GL_n(\mathbb{C})$ 同构。

设 $T \subset K_\infty$ 是一个极大环面，因此也是 $Sp_{2n}(\mathbb{R})$ 的一个紧 Cartan 子群。假设在 $Sp_{2n}(\mathbb{R})$ 上固定了一个 Cartan 对合 θ，从而得到 K_∞。令 $\mathfrak{g}$、$\mathfrak{k}$ 和 $\mathfrak{t}$ 分别为 $Sp_{2n}(\mathbb{R})$、K_∞ 和 T 的复化李代数。于是，我们可以并且将把 $\mathfrak{t}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中的根集 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ 与上面的集合 Δ 认同，使得紧根集 Δ_c，即 $\Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$，与集合

$$\Delta_c = \{\pm(e_i - e_j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}.$$

W_c 的魏尔群 Δ_c 通常可识别为对称群 S_n，并以自然方式通过置换 e_i的指标作用。于是，Sp_{2n} 的完整魏尔群W 可识别为半直积

$$W = S_n \ltimes \{\pm\}^{\oplus n},$$

其中第 i个符号通过 $e_i \mapsto -e_i$作用，并且当 $j \neq i$时保持e_j。

现在，T 的一个整权 λ 可识别为一个由整数构成的 n元组，

$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \qquad \lambda_i \in \mathbb{Z},$$

其中我们将此元组与权 $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$对应。这样的权关于正根系 $\Delta^{+,\,\mathrm{std}}$ 是支配的，当且仅当 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$；而关于 Δ_c中诱导的正根系是支配的，当且仅当 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$（对 λ_n 没有符号条件）。此外，我们还有

$$\rho = (n, n-1, \ldots, 1), \qquad \rho_c = (\tfrac{n-1}{2}, \tfrac{n-3}{2}, \ldots, \tfrac{1-n}{2}), \qquad \rho_n = (\tfrac{n+1}{2}, \ldots, \tfrac{n+1}{2}). \tag{3.3.2}$$

因此，Sp_{2n} 在正室 $\Delta^{+,\,\mathrm{std}}$ 中的 Harish-Chandra 参数，就是如上所述满足 $\lambda_1 > \cdots > \lambda_n > 0$的那些整权 λ。由此可知，Sp_{2n} 的一般 Harish-Chandra 参数可以看作满足 $|\lambda_1| > \cdots > |\lambda_n| > 0$的整权 λ，因为包含这些权的室与符号 $\{\pm\}^{\oplus n} = W_c \backslash W$ 之间存在自然双射。

有了这些准备，现在我们可以给出涉及上述抛物子群 $\mathcal{P}_1$ 和$\mathcal{P}_2$ 的例子。我们先讨论后者。

例 3.3.2. 固定一个元素 $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \{\pm\}^{\oplus n} \subset W$。我们在$\Delta^\epsilon = \epsilon\Delta^{+,\,\mathrm{std}}$这个室中工作。假设存在一个整数 i_0，满足 $1 \leq i_0 \leq n-1$，使得 $\epsilon_{i_0} \neq \epsilon_{i_0+1}$。那么集合 Δ^ϵ 包含 $\mathfrak{g}$中 $\mathfrak{t}$的非紧单根 $\epsilon(e_{i_0} - e_{i_0+1}) = \epsilon_{i_0}(e_{i_0} + e_{i_0+1})$；按照第 2.1 节的记号，我们取

$$\alpha_0 = \epsilon(e_{i_0} - e_{i_0+1}).$$

于是，按照*loc. cit.* 中的方式由 α_0 构造的李代数 $\mathfrak{a}$，根据定义，通过 $Sp_{2n}(\mathbb{C})$中的某个元素共轭于由根 α_0确定的$Sp_{2n}(\mathbb{C})$的 SL_2-子群中的对角环面的李代数。$Sp_{2n}(\mathbb{R})$的 Levi 子群 M 按定义是 $\mathfrak{a}$的中心化子，因此其复化李代数 $\mathfrak{m}$ 共轭于包含与 α_0正交的根的极大 Levi 子代数。这个 Levi 子代数包含 $\epsilon(e_{i_0} + e_{i_0+1}) = \epsilon_{i_0}(e_{i_0} - e_{i_0+1})$以及由 e_i的组合构成的根，

$1 \le i \le n$和 $i \ne i_0$， i_0+1。通过 W中的元素 $w_1 =$(1， i_0)(2， i_0+1)进行共轭，我们看到 M 共轭于 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$的 Levi 子群 $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$；为清楚起见，这里我们将(1， i_0)和(2， i_0+1)分别记作 S_n中相应的对换。因此，按照第 2.1 节中由正根系 Δ^ϵ 里的 α_0 所确定的抛物子群P，共轭于 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$。

现在我们考虑一个 Harish-Chandra 参数 $\Lambda =(\lambda_1、\ .....、\ \lambda_n)$，它对于$\Delta^\epsilon$ 是支配的，并且满足以下条件：

$$1 = \frac{2\langle \alpha_0, \Lambda\rangle}{\langle \alpha_0, \alpha_0\rangle} = \epsilon_{i_0}\lambda_{i_0} - \epsilon_{i_0+1}\lambda_{i_0+1},$$

如条件 (2.2.1) 所述。注意，根据支配条件，对于所有 i， $\epsilon_i\lambda_i > 0$，因此这可以改写为

$$|\lambda_{i_0}| - |\lambda_{i_0+1}| = 1.$$

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \cong GL_2(\mathbb{R}) \times Sp_{2n-4}(\mathbb{R})$ 的 Harish-Chandra 参数可以看作由整数构成的元组 $(\mu_0;\ \mu_1、\ \mu_2、\ .....、\ \mu_{n-2})$，其中 $|\mu_0| \ne 0$ 且 $|\mu_1| > \cdots > |\mu_{n-2}| > 0$。为了将$\Lambda$ 限制为 $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ 的 Harish-Chandra 参数，记 $\mathfrak{m}$ 为 M的复化李代数，则有： $\mathfrak{t}' = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{m}$ 是 $\mathfrak{m}$ 的紧嘉当子代数，并且它是$H_{\alpha_0} \in \mathfrak{t}$的正交补。由此可知， M 的$GL_2(\mathbb{R})$-因子的李代数具有由正规化根向量$H_{\alpha_0^\perp}$张成的紧嘉当子代数，其中 $\alpha_0^\perp = \epsilon(e_{i_0} + e_{i_0+1})$。因此我们有

$$\Lambda(H_{\alpha_0^\perp}) = \epsilon_{i_0}\lambda_{i_0} + \epsilon_{i_0+1}\lambda_{i_0+1} = 2|\lambda_{i_0+1}| + 1.$$

显然，在 M 的 $Sp_{2n-4}(\mathbb{R})$ 因子上，参数 Λ 限制为 $(n-2)$-元组

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \widehat{\lambda}_{i_0}, \widehat{\lambda}_{i_0+1}, \ldots, \lambda_n).$$

这确定了 $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ 的限制Harish-Chandra参数；它是

$$\mu = (2|\lambda_{i_0+1}| + 1; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \widehat{\lambda}_{i_0}, \widehat{\lambda}_{i_0+1}, \ldots, \lambda_n).$$

通常，帽号表示我们移除该项。

写出离散系列表示并不困难，我们将此处对应于该参数 μ 的表示称为 π'_∞，如第 2.2 节所述（在那里我们改称其为 π）。为了描述它，我们需要理解 $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ 的连通分支。注意， $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \cong GL_2(\mathbb{R}) \times Sp_{2n-4}(\mathbb{R})$ 有两个连通分支，单位分支分裂为

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})^\circ \cong (\mathbb{R}_{>0} \cdot SL_2(\mathbb{R})) \times Sp_{2n-4}(\mathbb{R}),$$

其中， $\mathbb{R}_{>0}$ 分量位于 GL_2因子的中心，是分裂中心的单位分支 $A_{\mathcal{M}_2}(\mathbb{R})^\circ$。 $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$的中心包含于 $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})^\circ$。我们将朗兰兹分解中的 $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})^\circ$ 和 $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$的半单分量分别记为 $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})_0^\circ$ 和 $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})_0$ 。于是

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})_0^\circ \cong SL_2(\mathbb{R}) \times Sp_{2n-4}(\mathbb{R}),$$

and

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})_0 \cong SL_2(\mathbb{R})^\pm \times Sp_{2n-4}(\mathbb{R}),$$

其中， $SL_2(\mathbb{R})^{\pm} \subset GL_2(\mathbb{R})$是行列式为 ± 1的矩阵群。

那么，我们从上文所述参数μ 的 $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})_0^\circ$ 离散系列表示$\pi'_{0,\ \infty}$ 开始。由于中心 $Z_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})_0}$ 已经包含在 $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})_0^\circ$中，因此无需像第 2.2 节那样指定中心特征 ξ 。然后我们进行诱导表示：

$$\pi'_\infty = \mathrm{Ind}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})_0^\circ}^{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})_0}(\pi'_{0,\infty}).$$

这种诱导表示产生如下作用。设μ_{Sp} 为$Sp_{2n-4}(\mathbb{R})$的 Harish-Chandra 参数，其定义为

$$\mu_{Sp} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \widehat{\lambda}_{i_0}, \widehat{\lambda}_{i_0+1}, \ldots, \lambda_n),$$

设 μ_{SL} 为 $SL_2(\mathbb{R})$的 Harish-Chandra 参数，由整数 $2|\lambda_{i_0+1}| + 1$给出。若$\pi'_{0,\ \infty,\ Sp}$ 和 $\pi'_{0,\ \infty,\ SL}$ 是相应的表示，则$\pi'_{0,\ \infty,\ SL}$ 是权为$(2|\lambda_{i_0+1}| + 2)$的全纯离散系列，并且有

$$\pi'_{0,\infty} = \pi'_{0,\infty,SL} \boxtimes \pi'_{0,\infty,Sp}$$

作为 $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})_0^\circ \cong SL_2(\mathbb{R}) \times Sp_{2n-4}(\mathbb{R})$的表示。设$\pi'_{\infty,\ SL^{\pm}}$ 为 $SL_2(\mathbb{R})^{\pm}$ 的通常离散系列表示，其权为$(2|\lambda_{i_0+1}|+2)$；作为 $SL_2(\mathbb{R})$的表示，它是全纯离散系列与反全纯离散系列的直和，但 $SL_2(\mathbb{R})^{\pm}$ 的非单位连通分支会使二者相互切换。于是有

$$\pi'_\infty = \pi'_{\infty,SL^{\pm}} \boxtimes \pi'_{0,\infty,Sp}.$$

于是，我们将 π_∞ 记作由 π'_∞ 在$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$上的表示$_0$ 给出的 $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$的表示，并且沿 $A_{\mathcal{M}_2}(\mathbb{R})$ 具有平凡特征$^\circ$，因此

$$\pi_\infty = \pi'_\infty \otimes 1 \qquad \text{on} \qquad \mathcal{M}_2(\mathbb{R})_0 \cdot A_{\mathcal{M}_2}(\mathbb{R})^\circ.$$

$\mathcal{M}_2(\mathbb{A})$的尖点自守表示 π 中，阿基米德分量为这些表示之一 π_∞ 的，正是可据以构造艾森斯坦级数、并可能用于主定理的那些表示（根据命题 2.6.2， $\mathcal{M}_2(\mathbb{A})$不可能存在其他具有离散系列阿基米德分量且可能对残余艾森斯坦上同调有贡献的此类尖点表示，至少在相关取值 s_0处如此）。因此，此类 π 具有这样的阿基米德分量这一条件，相当于对 $Sp_{2n-4}(\mathbb{R})$分量的权施加一个较弱的正则性条件，同时要求 $GL_2(\mathbb{R})$分量的权至少为 4 且为偶数，并对两个分量的权施加一个较弱的分离条件（在我们的设定中，这一点体现为指标 i_0的位置）。

现在固定这样一个尖点自守表示 π，它属于 $\mathcal{M}_2(\mathbb{A})$，且其阿基米德分量为这个 π_∞。接下来我们将说明如何利用 L-函数来判定由诱导 π 构造的艾森斯坦级数连同定理 3.2.1 中的参数 s_0 是否有极点，进而判定它们是否能对残余艾森斯坦上同调作出贡献。

首先我们计算 s_0。注意，包含在 $\mathcal{N}_2$ 中的标准分裂环面 $\mathcal{T}_s$的正根具有如下形式

$$2e_1,\ 2e_2,\ e_1 + e_2,\ e_1 \pm e_i,\ e_2 \pm e_i,\ \text{for } 3 \le i \le n.$$

这些根的和为 $2\rho_{\mathcal{P}_2}|_{\mathcal{T}_s} = (2n-1)(e_1+e_2)$。我们断言，根 e_1+e_2在 $\mathcal{N}_2$中，并且在环面 $\mathcal{T}_s$ 的复化李代数中，消失于 $A_{\mathcal{M}_2}$ 的复化李代数的正交补上。事实上，环面 $A_{\mathcal{M}_2}$ 是 $\mathcal{M}_2$的 GL_2-因子的中心。因此，它是余特征 $e_1^\vee + e_2^\vee$的像，其中我们记$e_i^\vee\colon \mathbb{G}_m \to \mathcal{T}_s$ 为由下式给出的余特征

$$e_i^\vee(t) = \mathrm{diag}(1,\dots,t,\dots,1,1,\dots,t^{-1},\dots,1);$$

这里， t 位于第 i个位置，而 t^{-1} 位于第（$n+i$）个位置。余特征$e_i^\vee$在复合意义下构成特征 e_i 的对偶基，因此根据对偶性， e_1+e_2 在 $\mathcal{T}_s$的复化李代数中 $A_{\mathcal{M}_2}$ 的正交补上消失。于是，根据 s_0的定义，我们有$_{1\,2}(\underline{e_1}+e_2)|_{A_{\mathcal{M}_2}} = 2s_0\rho_{\mathcal{P}_2}|_{A_{\mathcal{M}_2}}$，从而

$$s_0 = \frac{1}{4n-2}.$$

朗兰兹–沙希迪方法将把由 π 构造的艾森斯坦级数的常数项表示为 L-函数的形式。在我们的情形中，过程如下；一般情形见 [Sha10，第6.3]节。

令 SO_{2n+1} 表示通常的分裂特殊正交群，它是 B_n型的单群；它与 Sp_{2n}朗兰兹对偶。其根系 $\Delta^\vee$ 由关于 Sp_{2n}的以下余根给出：

$$\Delta^\vee = \{\pm(e_i^\vee + e_j^\vee),\ \pm(e_i^\vee - e_j^\vee),\ \pm e_i^\vee \mid 1 \le i < j \le n\}.$$

现在， Sp_{2n} 中的抛物子群 $\mathcal{P}_2$ 与 SO_{2n+1} 中的抛物子群 $\mathcal{P}_2^\vee$ 互为对偶，其 Levi 分解为 $\mathcal{M}_2^\vee\mathcal{N}_2^\vee$，其中$\mathcal{M}_2^\vee \cong GL_2 \times SO_{2n-3}$。 $\Delta^\vee$ 中包含于 $\mathcal{N}_2^\vee$的根为

$$e_1^\vee,\ e_2^\vee,\ e_1^\vee + e_2^\vee,\ e_1^\vee \pm e_i^\vee,\ e_2^\vee \pm e_i^\vee,\ \text{for } 3 \le i \le n.$$

SO_{2n-3}因子的标准$2n-3$维表示（记作 $\mathrm{Std}_{SO_{2n-3}}$）的权为 $\pm e_i^\vee$ （对应 $3 \le i \le n$ ），并包含权 0。 GL_2因子的标准表示 Std_{GL_2} 的权为 $e_1^\vee + e_2^\vee$。因此，$\mathrm{Lie}(\mathcal{N}_2^\vee)$包含 $\mathrm{Std}_{GL_2} \boxtimes \mathrm{Std}_{SO_{2n-3}}$的所有权，以及权 $e_1^\vee + e_2^\vee$；后者是 $\mathcal{M}_2^\vee$的GL_2因子上的行列式。于是，它作为 $GL_2 \times SO_{2n-3}$ 的表示可分解为

$$\mathrm{Lie}(\mathcal{N}_2^\vee) \cong (\mathrm{Std}_{GL_2} \boxtimes \mathrm{Std}_{SO_{2n-3}}) \oplus (\det \boxtimes 1).$$

上面第一个因子的权与 e_1+e_2 Sp_{2n} 的根配对，结果为 1；而第二个因子与 e_1+e_2 配对，结果为 2。

对于固定的尖点自守表示 π $\mathcal{M}_2(\mathbb{A})$，记作

$$\pi = \pi_{GL} \boxtimes \pi_{Sp}$$

分别对于 π_{GL} 和 π_{Sp} 的尖点自守表示 $GL_2(\mathbb{A})$ 和 $Sp_{2n-4}(\mathbb{A})$。令 S 为 $\mathbb{Q}$ 的有限个地点的集合，其中包含阿基米德位以及 π 所分歧的任意有限位。令 $\phi_s \in \mathrm{Ind}^{Sp_{2n}(\mathbb{A})}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{A})}(\pi, s)$ 为一个平坦截面，它在所有位 v 上分解为 $\otimes_v \phi_{v,s}$，其中

$$\phi_{v,s} \in \mathrm{Ind}^{Sp_{2n}(\mathbb{Q}_v)}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{Q}_v)}(\pi_v, s),$$

其中， π_v 是 π 在 v 处的局部分量。假设对于所有 $v \notin S$, $\phi_{v,s}$ 都是球面的。令 $w_0 = (-)_1(-)_2$ 为 Sp_{2n} 的外尔元素，它翻转 e_1 和 e_2 的符号。于是 $w_0\mathcal{P}_2w_0^{-1}$ 与 $\mathcal{P}_2$ 相反，并且 $w_0^{-1}\mathcal{M}_2w_0 = \mathcal{M}_2$。为简便起见，记作

$$R_1 = \mathrm{Std}_{GL_2} \boxtimes \mathrm{Std}_{SO_{2n-3}}.$$

于是朗兰兹–沙希迪方法便给出

$$M(s,\phi) = \frac{L^S((2n-1)s,\pi,R_1)L^S((4n-2)s,\pi_{GL_2},\det)}{L^S((2n-1)s+1,\pi,R_1)L^S((4n-2)s+1,\pi_{GL_2},\det)} \bigotimes_{v\notin S} \phi_{v,-s} \otimes \bigotimes_{v\in S} M(s,\phi_v).$$

此处，我们将相对于 w_0 定义的交织算子记为 $M(s,\cdot)$；并且对于 $\mathcal{M}_2^\vee$ 的代数表示 R，函数 $L^S(s,\pi,R)$ 表示通常的朗兰兹 L-函数，其欧拉因子仅取不在 S 中的那些位。精确地说，若 $v \notin S$对应于有理素数 ℓ_v，且 $t_v \in \mathcal{M}_2^\vee(\mathbb{C})$ 表示 π_v 的萨塔克参数，则相应的Euler因子为

$$L_v(s,\pi_v,R) = \det(1 - R(t_v)\ell_v^{-s})^{-1}.$$

于是由定义我们有

$$L^S(s,\pi,R) = \prod_{v\notin S} L_v(s,\pi_v,R),$$

当 $\mathrm{Re}(s)$ 充分大时。在 $R = R_1$ 的情形下，上述表达式蕴含 $L^S(s,\pi,R_1)$ 的亚纯延拓，因为由定理 3.1.3，我们知道其常数项将上述交织截面作为一个求和项包含在内的艾森斯坦级数的亚纯延拓，并且我们按经典方式知道 Hecke$L$-函数 $L^S(s,\pi_{GL_2},$行列式$)$ 的亚纯延拓。

现在假设 π_{GL_2} 的中心特征是平凡的。那么 L-函数 on

$$L^S((4n-2)s,\pi_{GL_2},\det)$$

上述出现的函数是不完全 ζ 函数 $\zeta^S((4n-2)s)$，因此在 $s = s_0$处有一个简单极点。 L-值

$$L^S((4n-2)s_0+1,\pi_{GL_2},\det)$$

并不发散，因为它等于 $\zeta^S(2)$。至少当 π 既没有 CAP 也没有端oscopic 因子时，我们应当预期，上述分母中出现的另一个 L-函数，即

$$L^S((2n-1)s+1,\pi,R_1),$$

出于温和性方面的原因，应在 $s = s_0$ 处收敛为欧拉乘积。同样，出于相同的温和性方面的原因，可以选取局部交织截面 $M(s,\ \phi_v)$，使其处处非零。最后，分子中的因子，

$$L^S((2n-1)s,\pi,R_1),$$

应以 $s = s_0$ 作为中心临界值，并且可以预期它在 $s = s_0$处可能为零，也可能不为零。因此总而言之，若 π是温和的，且 $L^S(1/2, \pi, R_1) \neq 0$，那么交织算子 $M(s, \phi)$ 对某个截面 ϕ_s在 $s = s_0$处有一个（单）极点，艾森斯坦级数 $E(s, \phi, \cdot)$也因此如此。于是，我们的定理 3.2.1 将适用于剩余表示 $\mathcal{L}(\pi, s_0)$，表明它在次数 ${}^n(n+1)_2 - 1$ 的自守上同调中的像贡献一份 $\mathcal{L}(\pi, s_0)f$（而非更多份，因为 $Sp_{2n}(\mathbb{R})$是连通的）；然而，尽管它本身在次数 ${}^n(n+1)_2 + 1$ 是上同调的，它在该次数上的像却为零。

例 3.3.3。沿用上文例 3.3.2 开头的记号 $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ 和 Δ^ϵ（但不再假设某个固定指标 i_0 满足当时的条件），现在我们简要说明剩下的情形，即固定的非紧根 α_0 为 $2\epsilon_n e_n$ 时的情况。我们将略作简述，其余细节留给有兴趣的读者。当 $\alpha_0 = 2\epsilon_n e_n$ 时，相应的实 Levi 子群 M 与 $\mathcal{M}_1 \cong GL_1 \times Sp_{2n-2}$ 的 $\mathbb{R}$ 个点共轭。允许的 Harish-Chandra 参数 $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 满足

$$\epsilon_1\lambda_1 > \cdots > \epsilon_{n-1}\lambda_{n-1} > \epsilon_n\lambda_n = 1.$$

它们在 M 的 $Sp_{2n-2}(\mathbb{R})$ 因子上的限制为 $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$。因此，对这些参数而言，$Sp_{2n-2}(\mathbb{R})$ 所施加的额外正则性条件是 $\lambda_{n-1} \geq 2$；否则，这些 Harish-Chandra 参数可以任意取值。

现在，在这种情况下，它的朗兰兹分解中的半单分量 $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})_0$ of $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$为

$$\mathcal{M}_1(\mathbb{R})_0 \cong \{\pm 1\} \times Sp_{2n-2}(\mathbb{R}).$$

它有两个连通分支，而中心与二者都相交。在这种情况下，第 2.2 节的特征 ξ 由其在第一因子中的 -1 上的限制确定，并由此处的 $\Lambda - \rho_c + \rho_n$ 的第 n 个分量给出。根据 (3.3.2)，这是由 $n + \epsilon_n$ 给出的项，因此我们必须要求 $\xi|_{\{\pm 1\}}(-1) = (-1)^{n+\epsilon_n} = (-1)^{n-1}$。这意味着，$\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$的离散系列表示 π_∞ 将具有如下形式

$$\pi_\infty = \mathrm{sign}^{n-1} \boxtimes \pi_{\infty, Sp},$$

其中 sign : $GL_1(\mathbb{R}) \to \{\pm 1\}$ 是 $GL_1(\mathbb{R})$的符号表示，而 $\pi_{\infty,Sp}$ 是 $Sp_{2n-2}(\mathbb{R})$的离散系列表示，其 Harish-Chandra 参数为 $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$，且满足$|\lambda_{n-1}| \geq 2$。

现在令 π 为 $\mathcal{M}_1(\mathbb{A})$ 的一个尖点自守表示，其阿基米德分量如上所述为 π_∞。它由 $GL_1(\mathbb{A})$ 因子上的一个狄利克雷特征 χ（其奇偶性与 $n-1$ 相同），以及 Sp_{2n-2} 的某个尖点表示 π_{Sp} 给出，该表示的阿基米德分量为 $\pi_{\infty,\, Sp_\infty}$。令 S 为一个有限个地点的集合，其中包含阿基米德位以及 π 分歧的那些位。容易验证，在定理 3.2.1 的记号下，给出 $\widetilde{\alpha}$ 的根 α 为 $2e_1$，且 $s_0 = 1/2n$。记 $\mathrm{Std}^{SO_{2n-1}}$ 为 $SO_{2n-1}(\mathbb{C})$ 的标准表示。那么，沿 $\mathcal{P}_1(\mathbb{A})$ 从 π 诱导得到的艾森斯坦级数常数项中出现的 Langlands–Shahidi L 函数，是若干扭曲的 L 函数的商，

$$\frac{L^S(2ns, \pi_{Sp} \otimes \chi, \mathrm{Std}_{SO_{2n-1}})}{L^S(2ns+1, \pi_{Sp} \otimes \chi, \mathrm{Std}_{SO_{2n-1}})}.$$

这里， $L^S(s,\ \pi_{Sp}\otimes\chi,\ \mathrm{Std}_{SO_{2n-1}})$ 在 $v\notin S$ 处的局部欧拉因子为

$$L_v(2ns,\pi_{Sp}\otimes\chi,\mathrm{Std}_{SO_{2n-1}})=\det(1-\chi(\ell_v)\,\mathrm{Std}_{SO_{2n-1}}(t_v)\ell_v^{-s})^{-1},$$

其中 t_v 是 π 在 v 处的萨塔克参数，而 ℓ_v 是与v对应的有理素数。

现在，取值点 s_0 因此给出 $s=1$处的非中心临界值，即 L函数 $L^S(s,\ \pi_{Sp}\otimes\chi,\ \mathrm{Std}_{SO_{2n-1}})$。我们预期，这个 L函数通常是整函数，并且在 $s>1$时不消失。在这种情况下，上述 L函数的朗兹–沙希迪商在 $s=s_0$处不能有极点。然而，当 π_{Sp} 是 CAP 或端oscopic 时，情况会更有意思。

作为端oscopic情形的一个例子，考虑 $n=2$的情况。记 $\pi_{SL}=\pi_{Sp}$，它将是 $SL_2(\mathbb{A})=Sp_2(\mathbb{A})$的一个自守表示。假设 π_{SL} 对应于一个权为 $k\geq 4$ 、Nebentypus 特征平凡的全纯或反全纯 CM 模形式，该模形式与定义在虚二次域 F上的海克特征 ψ 相关。其 Harish-Chandra 参数为 $\pm(k-1)$，符号取决于其全纯性或反全纯性。令 η_F 为与 F相关的虚二次特征，并令 $\chi=\eta_F$。那么 χ为奇数，因此满足奇偶性条件。标准表示 Std_{SO_3} 是 $SL_2^\vee=PGL_2(\mathbb{C})$的对称平方，因此该 L函数

$$L^S(s,\pi_{SL}\otimes\chi,\mathrm{Std}_{SO_3})$$

分解为两个因子，即

$$L^S(s,\pi_{SL}\otimes\chi,\mathrm{Std}_{SO_3})=L^S(s+k-1,\psi^2\chi|_F)L^S(s,\eta_F\chi),$$

其中右侧第一个 L-函数是关于 F 的 Hecke L-函数，第二个则是关于 $\mathbb{Q}$ 的 Hecke 函数；例如参见 [Lei12，推论 3.4]，（不过此处我们的正规化不同，因此与 同上引文 相比有 $k-1$ 的平移）。当然，我们有 $\chi|_F=\eta_F|_F$ 是平凡的， $\eta_F\chi=\eta_F^2$ 也是如此，因此有

$$L^S(4s,\pi_{SL}\otimes\chi,\mathrm{Std}_{SO_3})=L^S(4s+k-1,\psi^2)\zeta^S(4s).$$

它在 $s_0=1/4$ 处有一个极点。因此，我们的定理 3.2.1 适用于剩余表示$\mathcal{L}(\pi,\ 1/4)$。

作为 CAP 情形的一个例子，考虑当 $n=3$。现在设 π_{Sp} 与一个全纯或反全纯的斋藤–黑川形式相关联，而该形式本身来自一个偶数权为 $k\geq 6$、具有平凡 Nebentypus 特征的模形式 f，其 L-函数 $L(s,\ f)$ 在中心值 $k/2$处以奇数阶消失。这里的奇数阶消失条件保证存在这样的 π_{Sp} ，其阿基米德分量具有 Harish-Chandra 参数 $\pm(\frac{k}{2},\ \frac{k-2}{2})$；因此，条件 $k\geq 6$保证该权的第二个分量的绝对值至少为 2。设 χ为平凡特征；它现在是偶特征，因而满足所需的奇偶性条件。于是可以计算出，相关的 Langlands–Shahidi L-函数分裂为

$$L^S(6s,\pi_{Sp},\mathrm{Std}_{SO_5})=L^S(f,6s-1+\tfrac{k-1}{2})L^S(f,6s-1+\tfrac{k+1}{2})\zeta^S(6s).$$

因此，常数项中出现的商为

$$\frac{L^S(f,6s-1+\frac{k-1}{2})\zeta^S(6s)}{L^S(f,6s+\frac{k+1}{2})\zeta^S(6s+1)}.$$

分子中的第一个 L-函数根据 Shahidi素数定理 $s=s_0=1/6$ Sha81, §5]以及函数方程，在我们尚未从中移除一个在 $s=s_0$ 处具有极点的 Euler因子 [的情况下，不会在 $s=s_0=1/6$ 处消失。容易验证，在有限位 v 处存在这样的 Euler因子，当且仅当 f 在 v 处未分歧，且 1 是 f 在 v 处的一个萨塔克参数（采用酉归一化）。在这种情况下， v 处的另一个萨塔克参数也是 1。猜想上，这种情况永远不会发生；但无论如何，我们总可以将 v 从集合 S 中删去，因为 f 在 v处未分歧。因此，在这种情况下，这个 L-函数的商在 $s=1/6$处获得一个极点，所以我们的定理 3.2.1适用于剩余表示 $\mathcal{L}$（π， $1/6$）。

最后再作一条评论。设 π 是与一个权至少为 4 且具有平凡 Nebentypus 特征的全纯尖点本征形式相关联的 $GL_2(\mathbb{A})$ 的自守表示。在 [Mun], 中，我们考察了分裂例外群 G_2 的艾森斯坦级数，该级数与这样的 π相关联，并沿长根抛物子群诱导。对称立方 L-函数$L(s,\ \pi,\ \mathrm{Sym}^3)$ 出现在这些艾森斯坦级数的常数项中；事实上，其中出现的 L-函数商的分子为

$$L^S(5s,\pi,\mathrm{Sym}^3)\zeta^S(10s).$$

该论文主要研究了 $L(s,\ \pi,\ \mathrm{Sym}^3)$ 在 $s=1/2$ 处以奇数阶消失的情形。但对于 $L(1/2,\ \pi,\ \mathrm{Sym}^3)\neq 0$ 的情形，我们曾指出，剩余艾森斯坦级数会在 $s=1/10$ 处出现；并在 [Mun，注 3.5.5] 中提出疑问：由 Grbac正合序列导出的、从中间次数 4 的上同调到次数 5 的上同调的边界映射是否非平凡。在本文的背景下，我们有 $s_0=1/10$ ，且定理 3.2.1 的假设对这些剩余艾森斯坦级数均成立。因此，我们在此对这一问题给出了完全肯定的回答。

参考文献

[Bla85] Brian E. Blank. “Knapp-Wallach Szeg¨o积分与广义主系列表示：抛物秩一情形”。载于：泛函分析杂志60 (1985)，第127–145页。[BW00] A. Borel和N. Wallach。约化群的连续上同调、离散子群与表示。第二版。第67卷。数学调查与专著。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2000年。[Fra98] Jens Franke。“加权 L_2-空间中的调和分析”。载于：*Ann. Sci. ´EcoleNorm. Sup. (4)* 31.2 (1998)，第181–279页。[FS98] Jens Franke和Joachim Schwermer。“自守形式空间的分解及算术群的艾森斯坦上同调”。载于：数学年刊 311.4 (1998)，第765–790页。

[GG13] Gerald Gotsbacher和Harald Grobner。“奇正交群的艾森斯坦上同调”。载于：Forum Math. 25.2 (2013)，第283–311页。[Grb12] Neven Grbac。“支撑于极大真抛物子群的自守形式空间的Franke滤子”。载于：Glas. Mat. Ser. III 47(67).2 (2012)，第351–372页。[Gro10] Harald Grobner。“秩一Hermitian群的自守上同调与剩余谱”。载于：Internat. J. Math. 21.2 (2010)，第255–278页。[Gro13] Harald Grobner。“艾森斯坦级数的留数与约化群的自守上同调”。载于：Compos. Math. 149.7 (2013)，第1061–1090页。[GS11] Neven Grbac和Joachim Schwermer。“关于与辛群的相对秩一艾森斯坦级数相关的剩余上同调类”。载于：Int. Math. Res. Not. IMRN 7 (2011)，第1654–1705页。[Kna 02] Anthony W. Knapp。《引论之外的李群》。第二版。第140卷。数学进展。Birkh¨auser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，2002年，第xviii+812页。[KV95] Anthony W. Knapp和David A. Vogan Jr.。《上同调诱导与酉表示》。第45卷。普林斯顿数学丛书。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1995年。[Lan76] Robert P. Langlands。《艾森斯坦级数满足的函数方程》。数学讲义，第544卷。Springer-Verlag，柏林—纽约，1976年。[Lei12] Antonio Lei。“惰性素数处CM模形式对称平方的岩泽理论”。载于：Glasg. Math. J. 54.2 (2012)，第241–259页。[LS04] Jian-Shu Li和Joachim Schwermer。“关于算术群的艾森斯坦上同调”。载于：Duke Math. J. 123.1 (2004)，第141–169页。[Mun] Sam Mundy。《自守上同调、Arthur猜想及其应用》。即将发表于Amer. J. Math.。[G_2MW95] C. Mœglin和J.-L. Waldspurger。《谱分解与艾森斯坦级数》。第113卷。剑桥数学专著。Une paraphrase de l’´Ecriture [圣经释义]。剑桥大学出版社，剑桥，1995年。[RS11] J¨urgen Rohlfs和Birgit Speh。“伪艾森斯坦形式与算术群的上同调III：剩余上同调类”。载于：On certain L-函数。第13卷。Clay Math. Proc. 美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2011年，第501–523页。[Sha10] Freydoon Shahidi。《艾森斯坦级数与自守 L-函数》。第58卷。美国数学会讲座丛书。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2010年。[Sha81] Freydoon Shahidi。“关于某些 L-函数”。载于：Amer. J. Math. 103.2 (1981)，第297–355页。[Vog81] David A. Vogan Jr.。《实约化李群的表示》。第15卷。数学进展。Birkh¨auser，波士顿，马萨诸塞州，1981年。[VZ84] David A. Vogan Jr.和Gregg J. Zuckerman。“具有非零上同调的酉表示”。载于：Compositio Math. 53.1 (1984)，第51–90页。