arXiv:2603.12484v1 [math.AG] 12 Mar 2026

映射类群在特殊线性群$_n$ 特征簇上同调上的作用

ANNE LARSEN

Abstract. 我们描述映射类群在扭化特殊线性群$_n$特征簇上同调上的作用，其中曲面为 Σ_g，亏格为 g。我们的主要工具是 Maulik-Shen 的端oscopic 分解的相对版本 [MS21]；由此可将该问题归结为映射类群在 Σ_g的典范有限覆盖的上同调上的作用，后者已由 Looijenga 研究 [Loo97]。

1. Introduction

固定互素整数 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 和 $d \in \mathbb{Z}$，以及亏格 $g \geq 2$。本文考察特殊线性群$_n$局部系统在一次穿孔的亏格 g 曲面 $\Sigma_g \setminus p$ 上的“扭化”特征簇，其在环绕穿孔的环路 γ_p 上的单值化为 $e^{2\pi id/n}\,\mathrm{Id}_n$，即商

$$M^{\mathrm{SL}} := \{\phi \in \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g \setminus p), \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})) : \phi(\gamma_p) = e^{2\pi id/n}\,\mathrm{Id}_n\}/\,\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$$

$$\cong \{A_1, B_1, \cdots, A_g, B_g \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) : [A_1, B_1]\cdots[A_g, B_g] = e^{2\pi id/n}\,\mathrm{Id}_n\}/\,\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C}),$$

其中伴随群射影一般线性群$_n$(ℂ)通过共轭作用于目标特殊线性群$_n$(ℂ)。映射类群 Mod($\Sigma_g \setminus p$) 通过局部系统的拉回，即通过其对 π_1($\Sigma_g \setminus p$)的外作用，自然地作用于此空间，而我们的目标是描述在 H^*(M^{SL})上诱导的作用。

为了陈述定理，我们先回顾：群 G 的子群 H_1, H_2 若满足 $H_1 \cap H_2$ 在二者中均为有限指数，则称它们可公度 。此外，令 $\Sigma_g^n \to \Sigma_g$ 为与典范满射 $\pi_1(\Sigma_g) \twoheadrightarrow H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/n)$ 相对应的有限覆盖。

定理 1.1. $\mathrm{Mod}(\Sigma_g \setminus p)$ 在 $H^*(M^{\mathrm{SL}}, \mathbb{Z})$ 上的作用的核，与$\mathrm{Mod}(\Sigma_g \setminus p)$ 在 $H^1(\Sigma_g^n, \mathbb{Z})$上的作用的核可公度~。

根据 Looijenga 关于映射类群在 Loo97], 的有限阿贝尔覆盖的上同调上的作用的研究，进而可得到代数单值化群的如下具体描述（即，Mod($\Sigma_g \setminus p$) 在 GL(H^*($M^{\mathrm{SL}}, \mathbb{C}$)) 中的像的 Zariski 闭包的单位连通分支）：

推论 1.2。 如果 $g > 2$，或者如果 $g = 2$ 和 $(n,6) = 1$，那么 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g \setminus p)$ 在 $H^*(M^{\mathrm{SL}}, \mathbb{C})$ 上的代数单值化群是 $\mathrm{SpGal}(H^1(\widetilde{\Sigma}_g^n, \mathbb{C}))$的交换子子群，

日期：2026年3月16日。

即保持交叉形式~并与 $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}/n)$ 在 Σ_g^n上的伽罗瓦作用相容的可逆线性变换子群。

虽然到目前为止的讨论纯粹是拓扑性的，但我们的证明将借助非阿贝尔霍奇对应。该对应在 M^{SL}与任意亏格为 g的复代数曲线 C 上次数为 d 的稳定特殊线性群$_n$-Higgs 丛的模空间之间给出了一个微分同胚。一般而言，Higgs 丛的模空间更适合采用代数几何方法研究；关于特征簇上同调的一些结果，其已知证明都以关键方式依赖于Higgs丛描述。

例如，若考虑以类似方式定义的扭曲特征簇 M^{GL}，Markman 关于曲面上稳定层模空间的工作，在应用于 Higgs 丛模空间时 [Mar07，定理 3], 蕴含如下结论：

事实 1.3。$\mathrm{Mod}(\Sigma_g \setminus p)$ 在 $H^*(M^{\mathrm{GL}}, \mathbb{Z})$ 上的作用的核，等于满射$\mathrm{Mod}(\Sigma_g \setminus p) \twoheadrightarrow \mathrm{Mod}(\Sigma_g) \twoheadrightarrow \mathrm{Sp}(H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z}))$的核。特别地，单值群为$\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$。

证明思路如下：在 $H^*(M^{\mathrm{GL}})$ 中有一组“典范”类，它们是通过取定义在 $(\Sigma_g \setminus p) \times M^{\mathrm{GL}}$ 上的泛局部系统的陈类的 K¨unneth 分量得到的；Markman 的结果表明，这些典范类生成 $H^*(M$一般线性群$)$。由于映射类群的作用保持泛局部系统，因而也保持其陈类，因此可以立即推论出，$\mathrm{Mod}(\Sigma_g \setminus p)$ 在 $H^*(M^{\mathrm{GL}})$ 上的作用可用其在 $H^*(\Sigma_g)$ 上的作用来描述。但映射类群在 $H^*(\Sigma_g)$ 上的作用通过一个到 $\mathrm{Sp}(H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z}))$ 的满射，这是一项经典事实。（更严谨的论述可参见，例如 [Ban+26，§4.1]。）

回到特殊线性群的情形，定理 1.1 表明，映射类群的作用~如今不再由 $H^1(\Sigma_g$控制，而是由 $H^1(\Sigma_g^n$控制，这反映出上同调 $H^*(M^{\mathrm{SL}}$并非由典范类生成。问题如下：

观察 1.4. 有限群 $\mathrm{Hom}(\pi_1(C \setminus p)\ \mu_n) \cong H^1(C, \mathbb{Z}/n) =: \Gamma$ 通过 μ_n 对 特殊线性群$_n$ 的标量乘法作用，作用于 M^{SL} 。

在 M^{GL} 上，这扩展为连通群 $\mathrm{Hom}(\pi_1(C \setminus p)\ \mathbb{C}^*) \cong (\mathbb{C}^*)^{2g}$ 的作用，因此相应的作用在 $H^*(M^{\mathrm{GL}})$ 上是平凡的。特别地，由于 $H^*(M_{\text{特殊线性群}})$ 上的典范类是沿包含映射 $M_{\text{特殊线性群}} \subset M^{\mathrm{GL}}$ 拉回的，它们属于 $H^*(M^{\mathrm{SL}})^\Gamma$。

.....的存在性 Γ-变体类，在 $H^*(M^{\mathrm{SL}})$ 中最早由 Hausel 和 Thaddeus 指出 [HT03], 。他们在 SYZ 镜像对称的背景下，将这些类解释为相应 PGL 空间的弦上上同调。一般而言，我们对这些变体类还不甚了解；与典范类不同，它们没有显而易见的几何构造。因此，例如，我们并未完全理解 $H^*(M^{\mathrm{SL}})$ 的变类部分上的霍奇结构，尽管可以获得一些关于维数的信息

可通过点计数技术恢复 [Mer15]。然而，最近 Maulik 和 Shen [MS21]得以将曲线上 SL Higgs 丛模空间的变体类 C 与 GL$^{n/m}$-Higgs 丛在m的 C重覆盖上的模空间的上同调联系起来。本文的主要技术工具是他们所构造对象的相对版本（即与单值化或映射类群作用相容），相关内容见§2；沿着上文事实1.3 证明的思路，映射类群在§3中阐述了其对 $H^*(M^{\mathrm{SL}})$ 上映射类群作用的推论。

致谢：感谢我的导师 Davesh Maulik 提出这个问题，并给予我许多有益的讨论。也感谢 Mirko Mauri 就相对非阿贝尔霍奇对应进行了有益的探讨。本研究部分由美国国家科学基金会研究生研究奖学金资助，资助编号为 2141064。

2. Relativizing the Maulik-Shen construction

本节证明， [MS21 的定理 0.4],中针对单条曲线的 Higgs 模空间上同调群给出的端oscopic对应满射，可以提升为覆盖 $\mathcal{M}_{g,1}$ 上局部系统的满射。

2.1. 设定与记号。 本节将在基空间 $\mathcal{M} := \mathcal{M}_{g,1} \times_{\mathcal{M}_g} \mathcal{M}_g[n]$上进行，其中 $\mathcal{M}_g[n]$ 表示 [DM69（5.14）]中引入的带有 level n结构的曲线模空间。（注意，若 $n \geq 3$, 则 $\mathcal{M}$ 是概形；读者可以通过限制到稠密开概形轨迹，或在 $n = 2$时使用 $\mathcal{M}_g[4]$, 假定这一条件始终成立。）令 $\mathcal{C} := \mathcal{M} \times_{\mathcal{M}_g} \mathcal{M}_{g,1}$ 为万有曲线，令 $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ 为投影映射。此外，令 $s : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ 为从 $\mathcal{M}_{g,1} \times_{\mathcal{M}_g} \mathcal{M}_{g,1} \to \mathcal{M}_{g,1}$的典范截面拉回的截面。

命题 2.1. 在 $\mathcal{C}$ 上 n-扭挠线丛构成的群中存在一个子群 S，使得对任意纤维的限制 $\mathrm{Pic}(\mathcal{C})[n] \to \mathrm{Pic}([C] \times_{\mathcal{M}} \mathcal{C})[n]$ 定义了一个同构$S \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(C)[n]$。

证明。根据定义，投影 $\mathcal{M} \to \mathcal{M}_g[n]$ 给出一个带交错形式的 ´étale 层之间的典范同构$R^1\pi_*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ 。考虑态-射

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} = H^0(\mathcal{M}, R^1\pi_*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})) \to H^0(\mathcal{M}, R^1\pi_*\mathbb{G}_m) = \mathrm{Pic}_{\mathcal{M}/\mathcal{C}}(\mathcal{M}) \tag{1}$$

由包含映射 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{G}_m$诱导。由于 $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ 具有几何不可约纤维，利用上文所述的截面 s，我们将 Pic$^{\mathcal{M}/\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ 识别为 Pic($\mathcal{C}$) 的子空间，其元素为满足 $s^*\mathcal{L} \in$ Pic($\mathcal{M}$) 平凡的线丛 $\mathcal{L}$ [Stacks，标签 0D28]。在此识别下，对于每个 $\gamma \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$, 我们将 $L_\gamma \in$Pic($\mathcal{C}$) 取为 γ 在 (1) 下的像。注意，根据构造， L_γ 是一个 n-挠类。最后，对于每个 $i : p \hookrightarrow \mathcal{M}$，由适当基变换可得 $i^*R\pi_*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = R\pi_{p*}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$。特别地，我们得到一个从 (1) 到 $\pi_p : \mathcal{C}_p \to p$ 对应图表的态射，该图表是包含映射 Pic^0($\mathcal{C}_p$)$[n] \to$Pic^0($\mathcal{C}_p$) [Stacks，标签 03RQ]。因此，每个 L_γ 都限制为 Pic^0($\mathcal{C}_p$)$[n]$ 中对应的元素。□

本节余下部分中，我们固定一个阶为 m 的元素 $\gamma \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$，并令 $r := n/m$。我们定义 $\pi_\gamma : \mathcal{C}_\gamma \to \mathcal{C}$ 为与 m-挠线丛 L_γ 对应的 m 重 étale 覆盖，即 $V(t^m - 1) \subset |L_\gamma|$，其中 t 是将 L_γ 拉回至全空间 $|L_\gamma|$ 后得到的典范截面。我们用 $G_\gamma \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 表示伽罗瓦群，它通过 μ_m 中的元素对 $|L_\gamma|$ 上的纤维坐标进行缩放。对每个纤维 C，上述构造给出典范识别 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} = \mathrm{Pic}^0(C)[n] = H^1(C, \mathbb{Z}/n) =: \Gamma$，而覆盖空间 π_γ 对应于典范映射 $H_1(C, \mathbb{Z}/n) \to G_\gamma$，其核由与 γ 配对为零的元素组成。此外，通过 $H^1(C, \mathbb{Z}/n)$ 上的交配对，$\gamma \in \Gamma$ 的选取给出一个典范定义的元素 $\kappa := \langle \gamma, - \rangle \in \hat{\Gamma}$。

现在我们可以定义证明中出现的各种 Higgs 丛模空间了。

- 令 $M_{n,\ d}(\mathcal{C}) \to \mathcal{M}$ 为逐纤维稳定的秩为 $_n$、相对次数为 n 的（粗）一般线性群 d Higgs 丛模空间 $\mathcal{C}_\gamma/\mathcal{M}$；这是 Simpson 通过几何不变量理论构造的，见 [Sim94b，定理 47]。
- 令

$$\mathbb{A}(\mathcal{C}, n) := |\pi_* \omega_{\mathcal{C}/\mathcal{M}}| \times_{\mathcal{M}} |\pi_* \omega_{\mathcal{C}/\mathcal{M}}^{\otimes 2}| \times_{\mathcal{M}} \cdots \times_{\mathcal{M}} |\pi_* \omega_{\mathcal{C}/\mathcal{M}}^{\otimes n}|$$

  为相对 Hitchin 底空间，而

$$h : M_{n,d}(\mathcal{C}) \to \mathbb{A}(\mathcal{C}, n) \to \mathcal{M}$$

  为（真）相对 Hitchin 态射。我们还令 $\mathbb{A}_0(\mathcal{C},\ n) \subset \mathbb{A}(\mathcal{C},\ n)$ 由零截面 $\mathcal{M} \overset{0}{\hookrightarrow} |\pi_* \omega_{\mathcal{C}/\mathcal{M}}|$ 的包含映射给出。
- 给定一个元素 $\mathscr{L} \in \mathrm{Pic}^{\mathcal{C}/\mathcal{M}}(\mathcal{M})$，我们如下定义稳定特殊线性群 Higgs 丛的粗模空间：考虑

$$M^0_{n,d}(\mathcal{C}) := M_{n,d}(\mathcal{C}) \times_{h, \mathbb{A}(\mathcal{C},n), 0} \mathbb{A}_0(\mathcal{C}, n)$$

  无迹稳定 Higgs 丛的模空间。接下来

$$\widetilde{M}_{n,\mathscr{L}}(\mathcal{C}) := M^0_{n,d}(\mathcal{C}) \times_{\det, \mathrm{Pic}_{\mathcal{C}/\mathcal{M}}, \mathscr{L}} \mathcal{M},$$

  其中，映射 $M^0_{n,d}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Pic}^{\mathcal{C}/\mathcal{M}}$ 由 $(E, \theta) \mapsto \det E$ 给出。本文中，我们固定 $\mathscr{L} := \mathscr{O}_{\mathcal{C}}(d s(\mathcal{M}))$，其中 $s(\mathcal{M})$ 是上述截面的像。
- 给定 $\gamma \in \Gamma$，与 L_γ 作张量积定义了一个自同态 $\widetilde{M}_{n,\mathscr{L}}(\mathcal{C})$。令 $\widetilde{M}_\gamma(\mathcal{C})$ 为不动点轨迹，令 $\mathbb{A}_\gamma(\mathcal{C}) \subset \mathbb{A}_0(\mathcal{C}, n)$ 为 $\widetilde{M}_\gamma(\mathcal{C})$ 在 h 下的像。
- 给定 $\gamma \in \Gamma$，我们定义一个空间

$$M_\pi(\mathcal{C}_\gamma) := \mathcal{M}_{r,d}(\mathcal{C}_\gamma) \times_{\mathcal{M}_{n,d}(\mathcal{C})} \widetilde{M}_{n,\mathscr{L}}(\mathcal{C}),$$

  其中第一个映射由前推给出

$$\mathcal{M}_{r,d}(\mathcal{C}_\gamma) \mapsto \mathcal{M}_{n,d}(\mathcal{C}), (E, \theta) \mapsto (\pi_{\gamma *} E, \pi_{\gamma *} \theta)$$

$\widetilde{\ }$而第二个则由包含映射 $M_{n,\mathscr{L}}(\mathcal{C}) \subset M_{n,d}(\mathcal{C})$ 给出。我们还将 $\mathbb{A}_\pi(\mathcal{C}) \subset \mathbb{A}(\mathcal{C}_\gamma, r)$ 定义为 $M_\pi(\mathcal{C}_\gamma) \subset M_{r,d}(\mathcal{C}_\gamma)$ 在相对 Hitchin 映射下的像。

注记 2.2. 在 §2.3 中，我们还将使用上述定义的以下推广：如果 $\mathscr{D} \in \mathrm{Pic}(\mathcal{C})$ 在 $\mathcal{C}/\mathcal{M}$ 或 $\mathscr{D} = \omega_{\mathcal{C}/\mathcal{M}}$ 的纤维上具有相对次数 $> 2g-2$，则我们像之前一样定义 $M_{n,d}^{\mathscr{D}}(\mathcal{C})$ $\mathbb{A}^{\mathscr{D}}(\mathcal{C}, n)$ 等等，只需将 $\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{M}}$ 在所有地方替换为 $\mathscr{D}$。（也就是说，现在 Higgs 场是一个态射 $\theta\colon E \to E \otimes \mathscr{D}$，而 $\mathbb{A}^{\mathscr{D}}(\mathcal{C}, n)$ 也相应改变。）类似地，我们像之前一样定义 $M_{n,d}^{\mathscr{D}}(\mathcal{C}_\gamma)$ 等等，但将 $\omega_{\mathcal{C}_\gamma/\mathcal{M}}$ 替换为 $\pi_\gamma^*\mathscr{D}$。

注 2.3。我们为 $\mathcal{C}/\mathcal{M}$ 定义了所有这些空间；但对于任意态射 $S \to \mathcal{M}$，我们通过基变换定义相应的空间 $M_{n,d}(\mathcal{C}_S)$ 等。特别地，对于 $* \to \mathcal{M}$，我们得到 MS [中相应定义的空间。限制到纤维时，我们使用正体字母 $C := \mathcal{C}_*$、$L := \mathscr{L}|_{\mathcal{C}_*}$ 等。这大致恢复了 MS[的记号，但有以下改动：我们使用 $\pi_\gamma : \mathcal{C}_\gamma \to \mathcal{C}$ 而不是 $\pi : C' \to C$，其中 π $\widetilde{\ }$现在表示所有映射到基底 $\mathcal{M}$ 的映射；一般线性群和特殊线性群的变体按照 CHM12], 等文献中的惯例记作 $M/M$by$\widetilde{\ }$，而不是采用 MS21] 中的 M/M。

2.2. **准备工作。** 我们首先描述 [MS21] 构造中那些或多或少属于常规步骤的相对版本。下文中，若看起来不会引起混淆，我们用 π 表示所有映到基底的映射 $\mathcal{M}$（或适当的覆盖）。我们还用 $\mathbb{Q}(X)$ 表示 X 上的常值层，并用 $D^b(X, \mathbb{Q})$ 表示 $\mathbb{Q}$-向量空间上的可构层的有界导出范畴，该空间定义在 X上。

命题 2.4. 我们有

$$R\pi_*\mathbb{Q}(M_{r,d}(\mathcal{C}_\gamma)) \cong R\pi_*\mathbb{Q}(M_{1,0}(\mathcal{C})) \otimes (R\pi_*\mathbb{Q}(M_\pi(\mathcal{C}_\gamma)))^\Gamma$$

在 $D^b(\mathcal{M}, \mathbb{Q})$ 中。

证明。 首先注意，与 L_δ 对 $\delta \in \Gamma$（分别为 $\pi_\gamma^* L_\delta$）进行张量积，会在纤维层面上给出 Γ 在 $M_{1,0}(\mathcal{C})$（分别为 $M_\pi(\mathcal{C}_\gamma)$）上的作用，其中纤维映射相对于到 $\mathcal{M}$ 的投影映射而言。此外，与逐纤维情形一样，乘积映射

$$M_{1,0}(\mathcal{C}) \times_{\mathcal{M}} M_\pi(\mathcal{C}_\gamma) \to M_{r,d}(\mathcal{C}_\gamma),\ ((L,s),(E,\theta)) \mapsto (\pi_\gamma^* L \otimes E, \pi_\gamma^* s \otimes 1 + 1 \otimes \theta)$$

是按 Γ 的对角作用取商。因此，我们有

$$R\pi_*\mathbb{Q}(M_{r,d}(\mathcal{C}_\gamma)) \cong (R\pi_*\mathbb{Q}(M_{1,0}(\mathcal{C}) \times_{\mathcal{M}} M_\pi(C_\gamma))^\Gamma. \tag{2}$$

接下来注意到，M_1,0($\mathcal{C}$) = Picard 群$^0_{\mathcal{C}/\mathcal{M}} \times_{\mathcal{M}} |\pi_*\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{M}}|$ 在$\mathcal{M}$上拓扑局部平凡，因此对每个 i, $R^i\pi_*\mathbb{Q}(M_1$,0($\mathcal{C}$)) 都是一个局部系统。由于 $\mathcal{M}$以及纤维M_1,0(C) ≅Picard 群^0(C) × $H^0(C, \omega_C)$ 和 $M_\pi(C)$ 都是光滑的 [MS21，根据光滑相对 K¨unneth （参见例如 [Ban+26，引理 3.16]）中的命题 1.1],，我们有

$$R\pi_*\mathbb{Q}(M_{1,0}(\mathcal{C}) \times_{\mathcal{M}} M_\pi(\mathcal{C}_\gamma) \cong R\pi_*\mathbb{Q}(M_{1,0}(\mathcal{C})) \otimes R\pi_*\mathbb{Q}(M_\pi(\mathcal{C}_\gamma)). \tag{3}$$

现在，我们注意到 $R\pi_*\mathbb{Q}(M_{1,\ 0}(\mathcal{C}))$ 是 Γ-不变量：事实上，根据局部平凡性，只需观察到逐纤维地，Γ 作用可扩展为连通群的作用

Picard 群$^0(C)$，因此在上同调上是平凡的。对式（ Γ 3）两边取不变量，并结合式（2），即可得到结论。□

命题 2.5。我们有

$$R\pi_*\mathbb{Q}(M_{1,0}(\mathcal{C})) \cong \oplus_{i=0}^{2g} \bigwedge^i R^1\pi_*\mathbb{Q}(M_{1,0}(\mathcal{C}))[-i]$$

在 D^b（$\mathcal{M}$、 $\mathbb{Q}$）中。特别地，存在一个定义良好且可分裂的映射

$$R\pi_*\mathbb{Q}(M_{1,0}(\mathcal{C})) \otimes (R\pi_*\mathbb{Q}(M_\pi(\mathcal{C}_\gamma)))^\Gamma \to (R\pi_*\mathbb{Q}(M_\pi(\mathcal{C}_\gamma)))^\Gamma.$$

证明。 利用上面对 $M_{1,\ 0}(\mathcal{C})$ 的描述，我们看到

$$R\pi_*\mathbb{Q}(M_{1,0}(\mathcal{C})) = R\pi_*\mathbb{Q}(\mathrm{Pic}^0_{\mathcal{C}/\mathcal{M}}),$$

其中 $\mathrm{Pic}^0_{\mathcal{C}/\mathcal{M}} \to \mathcal{M}$ 是维数为 g 的阿贝尔概形。 □

回顾一下，空间 $M_\pi(\mathcal{C}_\gamma)$ 配备了彼此交换的 Γ 作用（通过与线丛 $\pi_\gamma^* L_\delta$ 作张量积）和 G_γ 作用（通过覆盖变换拉回；由于线丛 $\pi_\gamma^* L_\delta$ 是从 $\mathcal{C}$ 拉回的，因此覆盖变换保持这些线丛不变）。由于这两个群都相对于投影 $\pi: M_\pi(\mathcal{C}_\gamma) \to \mathcal{M}$ 逐纤维地作用，我们得到 $R\pi_*\mathbb{C}(M_\pi(\mathcal{C}_\gamma))$ 关于 $\Gamma \times G_\gamma$ 的特征分解。我们首先描述 Γ 和 G_γ 在 $M_\pi(C_\gamma)$ 的分量上的作用 ˆ。（回顾一下，在交配对下， $\kappa \in \Gamma$ 被定义为与 $\gamma \in \Gamma$ 对偶。）

引理 2.6. 逐纤维地，存在一个典范态射

$$\Gamma \twoheadrightarrow \Gamma/\ker(\kappa) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\mathrm{Prym}(C_\gamma/C)), \delta \mapsto [\pi_\gamma^* L_\delta^{\otimes r}]. \tag{4}$$

给定与 n互素的 d 的选择，也存在一个典范同构

$$G_\gamma \xrightarrow{\sim} \pi_0(\mathrm{Prym}(C_\gamma/C)), \xi \mapsto \mathrm{Im}(\mathrm{Pic}^d(C_\gamma) \mapsto \mathrm{Prym}(C_\gamma/C), A \mapsto A^{-1} \otimes \xi^* A). \tag{5}$$

此外，令 L 为 $\mathscr{L}$ 在 C上的限制，则 Γ 和 G_γ 都通过映射作用于 $\pi_0((\det^{\pi_{\gamma*}})^{-1}(L))$

$$\pi_0(\mathrm{Prym}(C_\gamma/C)) \curvearrowright \pi_0((\det \pi_{\gamma*})^{-1}(L))$$

该映射由 $\mathrm{Prym}(C_\gamma/C)$-主齐性空间结构自然诱导，其中 $(\det^{\pi_{\gamma*}})^{-1}(L) \subset \mathrm{Pic}^d(C_\gamma)$。

证明。 态射 (4) 的描述来自 [MS21，命题 1。3]。根据定义，我们称 Γ 通过与 $\pi_{\gamma*})^{-1}$ (L作张量积来作用于 $\pi_\gamma^* L_\delta^{\otimes r}$，因此它与 $\Gamma \to \pi_0(\mathrm{Prym}(C_\gamma/C))$ 的相容性显而易见。（此外，$(\det^{\pi_{\gamma*}})^{-1}(L)$ 具有主齐性空间结构的描述可由 [HP12，命题 3 得出。10]）

至于 G_γ，我们首先注意到，态射 (5) 是良定义的，因为 $\mathrm{Pic}^d(C_\gamma)$ 是连通的。我们还注意到， G_γ 在 $\pi_0((\det^{\pi_{\gamma*}})^{-1}(L))$ 上的作用确实按所述方式经由某个因子分解：事实上，任取一个 $A \in (\det^{\pi_{\gamma*}})^{-1}(L)$，我们有

$$\xi \cdot A = A \otimes (A^{-1} \otimes \xi^* A)$$

按定义 $[A^{-1} \otimes \xi^* A] =$ 像$(\xi) \in \pi_0(\mathrm{Prym}(C_\gamma/C))$。最后，由于 (5) 在 $\pi_0(\mathrm{Prym}(C_\gamma/C))$ $\cong \mathbb{Z}/m$ 上的像在集合 $\pi_0((\det^{\pi_{\gamma*}})^{-1}(L))$ 上传递作用

基数 m [HT03，第 20], 态射(5) 必须是满射，因此（再次出于基数方面的原因）是一个同构。

□

特别地，利用引理给出的识别 $\Gamma/\ker(\kappa) \cong G_\gamma$ （它实质上依赖于 d ，但除此之外是典范的），我们将由 $\kappa \in \Gamma$ 诱导的 $\hat{}\,\widehat{}\,\Gamma/\ker(\kappa)$ 的特征识别为特征 $\kappa_G \in G_\gamma$。

命题 2.7. 经过有限覆盖 $S \to \mathcal{M}$ 后，存在 $R\pi_*\mathbb{C}(M_\pi(C_\gamma))$ 的一个自同构，诱导出同构

$$(R\pi_*\mathbb{C}(M_\pi(\mathcal{C}_\gamma)))_{(\alpha,\beta)} \cong (R\pi_*\mathbb{C}(M_\pi(\mathcal{C}_\gamma)))_{(\alpha+\kappa,\beta+\kappa_G)}$$

在 $D^b(S,\mathbb{C})$ 中，对每个 $(\alpha,\beta) \in \hat{}\,\Gamma \times \hat{}\,G_\gamma$。

证明。 给定一个光滑族 $X \to \mathcal{M}$，令 $\pi_{0,rel}(X) \to \mathcal{M}$ 表示其纤维在 $m \in M$ 上为 π_0 $(X_m$的覆盖。如 [MS21，命题 1 的证明。1], 中所述，态射

$$q : M_{r,d}(\mathcal{C}_\gamma) \to M_{1,d}(\mathcal{C}_\gamma), (E,\theta) \mapsto (\det E, \operatorname{tr}\theta)$$

限制在 $M_\pi(\mathcal{C}_\gamma)$ 上时，诱导出同胚 $\pi_{0,rel}(M_\pi(\mathcal{C}_\gamma)) \cong \pi_{0,rel}(\mathrm{Im}(q))$，其中 $\mathrm{Im}(q)$ 是 $\mathrm{Nm}^{-1}(\mathscr{L})$ 上的仿射丛：$= \mathrm{Pic}^d(\mathcal{C}_\gamma/\mathcal{M}) \times_{(\det \pi_{\gamma*})}, \mathrm{Pic}^d(\mathcal{C}/\mathcal{M})_{\mathscr{L}}\ \mathcal{M}$。特别地，$\pi_{0,rel}(\mathrm{Im}(q)) = \pi_{0,rel}(\mathrm{Nm}^{-1}(\mathscr{L}))$，其中后者是相对群 $\pi_{0,rel}(\mathrm{Prym}(\mathcal{C}_\gamma/\mathcal{C})) = (\Gamma/\ker(\kappa)) \times \mathcal{M}$ 的一个主齐性空间，由引理 2.6 得出。经过有限覆盖 $S \to \mathcal{M}$ （例如，次数为 $\leq m = |\Gamma/\ker(\kappa)|$），我们可以假设该主齐性空间是平凡的，因此 $M_\pi(\mathcal{C}_{\gamma,S})$ 分解为 m 个分量。此外，任意选取一个首选分量 M_0 将该主齐性空间平凡化后，我们可以将分量集识别为群 $\Gamma/\ker(\kappa) \cong G_\gamma$。（注意，态射 q 以及投影 $\mathrm{Im}(q) \to \mathrm{Nm}^{-1}(\mathscr{L})$ 都是 Γ-和 G_γ-等变的，其中 Γ 按照引理 2.6 所述，通过 $\pi_\gamma^* L_\delta^{\otimes r}$ 作用于 $M_{1,d}(\mathcal{C}_\gamma)$ 和 $\mathrm{Nm}^{-1}(\mathscr{L})$。特别地，识别 $\pi_{0,rel}(M_\pi(\mathcal{C}_\gamma)) \cong \pi_{0,rel}(\mathrm{Nm}^{-1}(\mathscr{L}))$ 是 $\Gamma \times G_\gamma$-等变的。）

现在我们考虑自同构 f，它作用于

$$R\pi_*\mathbb{C}(M_\pi(\mathcal{C}_{\gamma,S})) = \oplus_{\beta\in\Gamma/\ker(\kappa)} R\pi_*\mathbb{C}(\beta \cdot M_0) \in D^b(S,\mathbb{C})$$

通过将每个 $R\pi_*\mathbb{C}(\beta \cdot M_0)$ 缩放为 $\kappa(\beta) \in \mathbb{C}^*$。为证明这会诱导所需的$\Gamma$-特征平移，选取 $\eta \in \Gamma$，使其像生成循环群 $\Gamma/\ker(\kappa)$。然后对每个 $0 \leq i < m$，我们取 η^i：$M_0 \to [\eta^i] \cdot M_0$ 作为首选同构，从而诱导一个识别

$$R\pi_*\mathbb{C}(M_\pi(\mathcal{C}_{\gamma,S})) \cong \oplus_{i=0}^{m-1} R\pi_*\mathbb{C}(M_0) \in D^b(S,\mathbb{C}).$$

$\hat{}$ 给定一个特征 $\alpha \in \Gamma$，在此识别下我们有

$$(R\pi_*\mathbb{C}(M_\pi(\mathcal{C}_{\gamma,S})))_\alpha \cong (1, \alpha(\eta), \ldots, \alpha(\eta)^{m-1}) \cdot (R\pi_*\mathbb{C}(M_0))_{\alpha|_{\ker(\kappa)}} \subset \oplus_{i=0}^{m-1} R\pi_*\mathbb{C}(M_0$$

由于 $\ker(\kappa)$ 在每个分量上平凡地作用，η 按所述置换这些分量，且它们彼此交换并生成 Γ。由于 f 在 i^{th} 因子 $R\pi_*\mathbb{C}(M_0)$ 上的作用由 $\kappa(\eta)^i$ 给出，

由该公式显然存在一个特征平移 $\alpha \to \alpha + \kappa$。最后，关于 G_γ-特征平移的证明是相同的，只是无需考虑在 $\pi_0(M_\pi(\mathcal{C}_{\gamma,S}))$ 上的作用的核，并且经由引理2.6的识别，现在 f 依照特征 κ_G （即 G_γ的特征）作用。□

命题 2.8。 存在一个分裂投影映射

$$(R\pi_*\mathbb{C}(M_\pi(\mathcal{C}_\gamma))_\kappa \to (R\pi_*\mathbb{C}(M_\pi(\mathcal{C}_\gamma)))^{G_\gamma}_\kappa$$

在 $D^b(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ 中。

证明。 如前所述， Γ 和 G_γ 在 $M_\pi(\mathcal{C}_\gamma)$ 上的作用彼此可交换，因此等型分量（$R\pi_*\mathbb{C}(M_\pi(\mathcal{C}_\gamma))$）$_\kappa$ 带有（有限群）G_γ的作用。□

命题 2.9。 我们有一个同构

$$(R\pi_*\mathbb{C}(M_\pi(\mathcal{C}_\gamma)))^{G_\gamma}_\kappa \cong (R\pi_*\mathbb{C}(M_\gamma(\mathcal{C})))_\kappa$$

在 $D^b(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ 中。

证明。 由逐纤维结果 [MS21，(29)] 可知，推前映射

$$f : M_\pi(\mathcal{C}_\gamma) \to M_\gamma(\mathcal{C}), (E, \theta) \mapsto (\pi_{\gamma*}E, \pi_{\gamma*}\theta)$$

是由 G_γ 的（自由）作用给出的商映射。另请注意，根据投影公式， f 是 Γ-等变的。于是，作为 Γ-等变层，有 $(Rf_*\mathbb{C}(M_\pi(\mathcal{C}_\gamma)))^{G_\gamma} = \mathbb{C}(M_\gamma(\mathcal{C}))$，因此将其推前到 $\mathcal{M}$ 并取 κ- 等型分量，我们得到同构

$$(R\pi_*\mathbb{C}(M_\gamma(\mathcal{C}_\gamma)))^{G_\gamma}_\kappa = R\pi_*(Rf_*\mathbb{C}(M_\pi(\mathcal{C}_\gamma)))^{G_\gamma})_\kappa \cong (R\pi_*\mathbb{C}(M_\gamma(\mathcal{C})))_\kappa.$$

□

2.3. **Ngˆo-Yun 对应**。 本节针对 $\mathscr{D}$-Higgs 丛构造 Ngˆo-Yun 同构的相对版本，其中 $\mathscr{D}$ 的相对次数为 $> 2g-2$ 且为偶数。

我们在注 $\mathscr{D}$-Higgs 丛的模空间2.2中回顾其定义。我们还定义如下对象：

- 令 $\mathscr{C}^{\mathscr{D}}_{spec}(\mathcal{C}, n) \subset |\mathscr{D}| \times_{\mathcal{M}} \mathbb{A}^{\mathscr{D}}(\mathcal{C}, n)$ 表示通用谱曲线，该曲线按通常方式由 $|\mathscr{D}|$ 上典范截面中的多项式定义，其系数由 $\mathbb{A}^{\mathscr{D}}(\mathcal{C}, n)$ 给出。令 $p_{\mathcal{C}} : \mathscr{C}^{\mathscr{D}}_{spec}(\mathcal{C}, n) \to \mathcal{C} \times_{\mathcal{M}} \mathbb{A}^{\mathscr{D}}(\mathcal{C}, n)$ 表示由投影 $|\mathscr{D}| \to \mathcal{C}$ 诱导的有限映射。
- 回顾一下，Hitchin 态射 $M^{\mathscr{D}}_{n,d}(\mathcal{C}) \to \mathbb{A}^{\mathscr{D}}(\mathcal{C}, n)$ 将 $M^{\mathscr{D}}_{n,d}(\mathcal{C})$ 识别为族 $\mathscr{C}^{\mathscr{D}}_{spec}(\mathcal{C}, n) \to \mathbb{A}^{\mathscr{D}}(\mathcal{C}, n)$ 的紧化相对雅可比。我们用 $M^{\mathscr{D}}_{n,d}(\mathcal{C})^\circ$ 表示参数化谱曲线上线丛的开子簇。

- 在 $\mathbb{A}^{\mathscr{D}}(\mathcal{C}_\gamma, r)$ 上有一个 G_γ 作用，描述如下： G_γ 在 $\mathcal{C}_\gamma$ 上的作用在（$\pi_{\gamma*}\mathscr{O}_{\mathcal{C}_\gamma}$）$\otimes \mathscr{D} \cong \pi_{\gamma*}\pi_\gamma^*\mathscr{D}$ 上诱导出一个作用，进而在 $\pi_*(\pi_\gamma^*\mathscr{D})$ 上诱导出一个作用，再进而在 $\mathbb{A}^{\mathscr{D}}(\mathcal{C}_\gamma, r)$ 上诱导出一个作用。
- 令 $\mathbb{A}_\pi^\heartsuit(\mathcal{C}_\gamma) \subset \mathbb{A}^{\mathscr{D}}(\mathcal{C}_\gamma, r)$ 为 $\mathscr{C}^{\mathscr{D}}_{spec}(\mathcal{C}_\gamma, r) \to \mathbb{A}^{\mathscr{D}}(\mathcal{C}_\gamma, r)$ 光滑的轨迹与 G_γ 自由作用的轨迹的交集。（这是一个扎里斯基开子集，其在一个纤维上的限制是 $\mathbb{A}^\heartsuit(\pi)$ 的开子集，见 [MS21，§3.2]。）

- 根据逐纤维结果 [HP12，引理 5.1]，，商 $\mathbb{A}_\pi^{\mathscr{D}}(\mathcal{C}_\gamma)/G_\gamma$ 可嵌入$\mathbb{A}_0(\mathcal{C}, n)$，其像为 $\mathbb{A}_\gamma(\mathcal{C})$，并且与前推 $M_\pi(\mathcal{C}_\gamma) \to M_\gamma(\mathcal{C})$ 相容；后者也是一个商映射。令 $\mathbb{A}_\gamma^\heartsuit(\mathcal{C})$ 为 $\mathbb{A}_\pi^\heartsuit(\mathcal{C}_\gamma)$ 在此映射下的像。

- 商映射 $\mathbb{A}_\pi^{\mathscr{D}}(\mathcal{C}_\gamma) \to \mathbb{A}_\gamma^{\mathscr{D}}(\mathcal{C})$ 在谱曲线的语境下有如下解释 [HP12，§5.1]：将 $a \in \mathbb{A}_\pi^D(C_\gamma)$ 识别为截面 $s_a \in H^0(C_\gamma, \pi_\gamma^* D^{\otimes r})$，其零点集为相应的谱曲线，于是有

$$a \mapsto \prod_{g \in G_\gamma} g^* s_a \in H^0(C_\gamma, \pi_\gamma^* D^{\otimes n})^{G_\gamma} = H^0(C, D^{\otimes n}).$$

特别地， $G_\gamma \times G_\gamma$-商映射

$$\mathbb{A}_\pi^{\mathscr{D}}(\mathcal{C}_\gamma) \times_{\mathcal{M}} |\pi_\gamma^*\mathscr{D}| \to \mathbb{A}_\gamma^{\mathscr{D}}(\mathcal{C}) \times_{\mathcal{M}} |\mathscr{D}|$$

诱导出一个态射

$$\mathscr{C}^{\mathscr{D}}_{spec}(\mathcal{C}_\gamma, r)|_{\mathbb{A}_\pi^{\mathscr{D}}(\mathcal{C}_\gamma)} \to \mathscr{C}^{\mathscr{D}}_{spec}(\mathcal{C}, n)|_{\mathbb{A}_\gamma^{\mathscr{D}}(\mathcal{C})} \tag{6}$$

在 $\mathbb{A}_\gamma^{\mathscr{D}}(\mathcal{C})$ 上。

- 为下一个命题的目的，我们定义

$$\mathscr{C}_\pi^\heartsuit := \mathscr{C}^{\mathscr{D}}_{spec}(\mathcal{C}_\gamma, r)|_{\mathbb{A}_\pi^\heartsuit(\mathcal{C}_\gamma)} \quad \text{and} \quad \mathscr{C}_\gamma^\heartsuit := \mathscr{C}^{\mathscr{D}}_{spec}(\mathcal{C}, n)|_{\mathbb{A}_\gamma^\heartsuit(\mathcal{C})}$$

并考虑自然态射

$$p_\pi : \mathscr{C}_\pi^\heartsuit \to \mathcal{C}_\gamma \times_{\mathcal{M}} \mathbb{A}_\pi^\heartsuit(\mathcal{C}_\gamma) \to \mathcal{C} \times_{\mathcal{M}} \mathbb{A}_\pi^\heartsuit(\mathcal{C}_\gamma) \quad \text{and}$$

$$p_\gamma : \mathscr{C}_\gamma^\heartsuit \times_{\mathbb{A}_\gamma^\heartsuit(\mathcal{C})} \mathbb{A}_\pi^\heartsuit(\mathcal{C}_\gamma) \to (\mathcal{C} \times_{\mathcal{M}} \mathbb{A}_\gamma^\heartsuit(\mathcal{C})) \times_{\mathbb{A}_\gamma^\heartsuit(\mathcal{C})} \mathbb{A}_\pi^\heartsuit(\mathcal{C}_\gamma) = \mathcal{C} \times_{\mathcal{M}} \mathbb{A}_\pi^\heartsuit(\mathcal{C}_\gamma).$$

命题2.10。 存在一个线丛 $\mathscr{N} \in \mathrm{Pic}(\mathcal{C})$ ，其拉回为

$$\det(p_{\gamma*}\mathscr{O}) \otimes \det(p_{\pi*}\mathscr{O})^{-1} \in \mathrm{Pic}(\mathcal{C} \times_{\mathcal{M}} \mathbb{A}_\pi^\heartsuit(\mathcal{C}_\gamma)). \tag{7}$$

证明。由于 p_γ 和 p_π 都是有限、平坦且真映射，层 $p_{\gamma*}\mathscr{O}$ 和 $p_{\pi*}\mathscr{O}$ 是 $\mathcal{C} \times_{\mathcal{M}} \mathbb{A}_\pi^\heartsuit(\mathcal{C}_\gamma)$ 上的向量丛 [Vak25，定理 25.1。6]，，因此 (7) 确实定义了 Picard 群($\mathcal{C} \times_{\mathcal{M}} \mathbb{A}_\pi^\heartsuit(\mathcal{C}_\gamma)$) 的一个元素。现在只需注意到 $\mathcal{C} \times_{\mathcal{M}} \mathbb{A}_\pi^\heartsuit(\mathcal{C}_\gamma)$ 是 $\mathcal{C} \times_{\mathcal{M}} \mathbb{A}_\pi(\mathcal{C}_\gamma)$ 的一个开子集，而后者是 $\mathcal{C}$ 上的一个仿射丛，因此我们得到周群之间的满射 $\mathrm{CH}^1(\mathcal{C}) \to \mathrm{CH}^1(\mathcal{C} \times_{\mathcal{M}} \mathbb{A}_\pi^\heartsuit(\mathcal{C}_\gamma))$ [Ful13，命题 1.8、1.9]。由于所涉及的所有空间都是光滑的，这等价于满射 Picard 群($\mathcal{C}$) $\to$ Picard 群($\mathcal{C} \times_{\mathcal{M}} \mathbb{A}_\pi^\heartsuit(\mathcal{C}_\gamma)$)。□

命题 2.11。 存在一个 G_γ-和 Γ-等变态射

$$g : \widetilde{M}^{\mathscr{D}}_{n,\mathscr{L}}(\mathcal{C})^\circ \times_{\mathbb{A}^{\mathscr{D}}_0(\mathcal{C},n)} \mathbb{A}^\heartsuit_\pi(\mathcal{C}_\gamma) \to M^{\mathscr{D}}_{\pi,\mathscr{L}\otimes\mathscr{N}}(\mathcal{C}_\gamma)^\circ$$

在 $\mathbb{A}^\heartsuit_\pi(\mathcal{C}_\gamma)$上，将每个点处的限制都取为 $\mathcal{M}$ 到 *[MS21，推论 3 中的态射 γ]*。

证明。 首先注意到，根据 [MS21，(18)]，空间 $\mathbb{A}^\heartsuit_\pi(\mathcal{C}_\gamma)$ 与 $\mathscr{L}$ 或 $\mathscr{L}\otimes\mathscr{N}$的选取无关；谱曲线也同样如此。将 g 的源与目标视为以下子簇

$$\mathrm{Pic}_{\mathscr{C}^\heartsuit_\gamma/\mathbb{A}^\heartsuit_\gamma(\mathcal{C})} \times_{\mathbb{A}^\heartsuit_\gamma(\mathcal{C})} \mathbb{A}^\heartsuit_\pi(\mathcal{C}_\gamma) \cong \mathrm{Pic}_{\mathscr{C}^\heartsuit_\gamma \times_{\mathbb{A}^\heartsuit_\gamma(\mathcal{C})} \mathbb{A}^\heartsuit_\pi(\mathcal{C}_\gamma)/\mathbb{A}^\heartsuit_\pi(\mathcal{C}_\gamma)} \quad \text{and} \quad \mathrm{Pic}_{\mathscr{C}^\heartsuit_\pi/\mathbb{A}^\heartsuit_\pi(\mathcal{C}_\gamma)}$$

分别地，我们如下定义 g： 考虑 $\mathrm{Pic}_{-/\mathbb{A}^\heartsuit_\pi(\mathcal{C}_\gamma)}$ 上的拉回映射，它由以下态射诱导

$$\mathscr{C}^\heartsuit_\pi \to \mathscr{C}^\heartsuit_\gamma \times_{\mathbb{A}^\heartsuit_\gamma(\mathcal{C})} \mathbb{A}^\heartsuit_\pi(\mathcal{C}_\gamma)$$

由第一因子上的 (6) 给出，第二因子则投影到 Hitchin 基。根据逐纤维结果 [MS21，推论 3.7 、引理 3。9]，，此态射在 g 的源上的限制给出一个 G_γ- 等变且 Γ- 等变的态射，其目标正确。 □

考虑图

$$\mathrm{Graph}(g) \subset (\widetilde{M}^{\mathscr{D}}_{n,\mathscr{L}}(\mathcal{C})^\circ \times_{\mathbb{A}^{\mathscr{D}}_0(\mathcal{C},n)} \mathbb{A}^\heartsuit_\pi(\mathcal{C}_\gamma)) \times_{\mathbb{A}^\heartsuit_\pi(\mathcal{C}_\gamma)} M^{\mathscr{D}}_{\pi,\mathscr{L}\otimes\mathscr{N}}(\mathcal{C}_\gamma)^\circ.$$

我们将利用其闭包定义一个上同调对应

$$\Sigma_{\mathcal{M}} := \overline{\mathrm{Graph}(g)} \subset (\widetilde{M}^{\mathscr{D}}_{n,\mathscr{L}}(\mathcal{C}) \times_{\mathbb{A}^{\mathscr{D}}_0(\mathcal{C},n)} \mathbb{A}^{\mathscr{D}}_\pi(\mathcal{C}_\gamma)) \times_{\mathbb{A}^{\mathscr{D}}_\pi(\mathcal{C}_\gamma)} M^{\mathscr{D}}_{\pi,\mathscr{L}\otimes\mathscr{N}}(\mathcal{C}_\gamma).$$

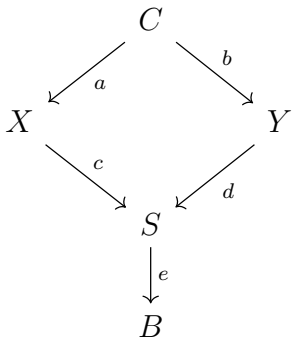
命题 2.12. 设 f： $X \to Y$ 是概形之间的有限型态射，且 $S \subset X$是一个可构造集。则存在稠密开子集 $U \subset Y$，使得对 $y \in U$ 有 $S \times_Y y = S \times_Y y$。

证明。因为 S 是可构造的，它包含 S的某个稠密开子集 S'。此外，若 η 是 Y 的一个不可约分支的泛点，且 s 是 $(S)_\eta$的一个不可约分支的泛点，则 s 实际上必定是 S 的一个泛点，从而包含于 S' 中。现在，由应用于 Y 的每个不可约分支的 [Stacks，标签 054X]，存在稠密开子集 $U \subset Y$，使得对所有 $y \in U$， $S'_y \subset S_y$ 在 $(S)_y$ 中稠密，因此我们有 $S_y = (S)_y$。 □

推论 2.13. 存在开子集 $U \subset \mathcal{M}$ 使得在 U的每一点上，$\Sigma_{\mathcal{M}}$ 限制为 Σ，其定义于 *[MS21，（75）]*。

接下来，我们检验由以下对象的 Borel-Moore 基本类诱导的上同调对应 $\Sigma_{\mathcal{M}}$ 与由以下对象诱导的上同调对应逐纤维一致 Σ 见 [MS21，定理 3。10]。

命题 2.14。 考虑复代数簇之间的态射图



其中我们假设 $C \to X \times_S Y$ 和 c, d 是适当的； $e \circ c$ 和 B 是光滑的；且 C 在 B 上是平坦的。考虑一个态射 α ： $B' \to B$，其中 B' 是光滑的，并令 X', Y', C', S' 为相应的基变换，其映射为 α_X： $X' \to X$，等等。那么，由 C 的 ***Borel–Moore*** 基本类诱导的、属于 $\mathrm{Hom}(Rd_*\mathbb{Q}, Rc_*\mathbb{Q}[2\text{维数 } X - 2\text{维数 } C])$ 的态射，经 α_S^* 拉回后，是由 C' 的基本类诱导的。

证明。 首先，展开定义可得

$$[C] \in H^{BM}_{2\dim C}(C) := \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_C, \mathbb{D}_C[-2\dim C])$$
$$= \mathrm{Hom}(b^*\mathbb{Q}_Y, a^!\mathbb{D}_X[-2\dim C]) =: \mathrm{Corr}(C; \mathbb{Q}_X[2(\dim X - \dim C)], \mathbb{Q}_Y)$$

对于 C'，利用假设可知 X 和 X' 是光滑的，类似地也有此结论。（这里假设 X 是不可约的；否则，分别对每个连通分支应用此论证，并根据需要调整 $\dim X$。我们注意到，由平坦性假设可得 $\dim X - \dim C = \dim X' - \dim C'$。现在，由 [Yun11，引理 A.4，1] 只需验证该拉回

$$\alpha^* : \text{推论}(C; \mathbb{Q}_X[2(\dim X - \dim C)], \mathbb{Q}_Y) \to \mathrm{Corr}(C'; \mathbb{Q}_{X'}[2(\dim X - \dim C)], \mathbb{Q}_{Y'}$$

将 C 的一个基本类映为 C'的一个基本类。

回顾一下，根据定义，态射 $\mathbb{Q}_C \to \mathbb{D}_C[-2\text{维数 } C]$ 是基本类，如果它在光滑轨迹 C°（来自 C ）上是同构（或在最高维各分量中稠密的任意开子集上）。根据定义 [Yun11, §A.4] 我们看到

$$\alpha^*[C] : (b')^*\mathbb{Q}_{Y'} = \alpha_C^* b^*\mathbb{Q}_Y \xrightarrow{\alpha_C^*[C]} \alpha_C^* a^!\mathbb{Q}_X[2(\dim X - \dim C)]$$
$$\xrightarrow{*!\to!*} (a')^!\alpha_X^*\mathbb{Q}_X[2(\dim X - \dim C)] = (a')^!\mathbb{Q}_{X'}[(2(\dim X' - \dim C')]$$

在 α_C^{-1} （C°） $\cap$ （C'）$^\circ$上是同构，其中包含一个开子集，在该开子集上 π'_B： $C' \to B'$ 是光滑的（这是如下子集的原像，在该子集上 π_B 是光滑的，由 π_B [Stacks，Tag 02V4]的平坦性）。最后，由每个分量的一般光滑性，对 $C' \to B'$而言，我们看到该子集在每个分量中稠密，即为所需。□

推论 2.15。 由 $\Sigma_{\mathcal{M}}$ 的基本类所诱导的上同调对应在一般纤维上的限制，由 $\Sigma_{\mathcal{M}}$ 限制到该纤维上的基本类所诱导。

证明。设 $B \subset \mathcal{M}$ 是 Σ 平坦的一个稠密开子集，在该子集上有 $S := \mathbb{A}^{\mathscr{D}}_{\pi}(\mathcal{C}_{\gamma,B})$，$X := M_{\pi,\mathscr{L}\otimes\mathscr{N}}(\mathcal{C}_{\gamma,B})$，$Y := \widetilde{M}^{\mathscr{D}}_{n,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_B) \times_{\mathbb{A}_0(\mathcal{C}_B,n)} \mathbb{A}^{\mathscr{D}}_{\pi}(\mathcal{C}_{\gamma,B})$，$C := \Sigma_B$，以及 $B' = * \hookrightarrow B$。根据构造，$C \subset X \times_S Y$ 是一个闭子集，而 c、d 源自 Hitchin 态射，因而是适当的；此外，$B \subset \mathcal{M}$ 是光滑的，并且 M_{π}、$\mathscr{L}\otimes\mathscr{N}(\mathcal{C}_{\gamma,B}) \to B$ 具有光滑纤维 [MS21，第 9] 页。现在我们应用命题 2.14。□

将这些结果结合起来，我们得到：

命题 2.16. 假设 $\mathscr{D}$ 的相对次数为 $> 2g-2$。限制到稠密开子集 $U \subset \mathcal{M}$后，存在一个同构

$$(Rh_*\mathbb{C}(\widetilde{M}^{\mathscr{D}}_{n,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_U)))_{\kappa} \cong (Rh_*\mathbb{C}(M^{\mathscr{D}}_{\gamma,\mathscr{L}\otimes\mathscr{N}}(\mathcal{C}_U)))_{\kappa}[-2d^{\mathscr{D}}_{\gamma}] \in D^b(\mathbb{A}^{\mathscr{D}}_0(\mathcal{C}_U,n),\mathbb{C}),$$

这里我们用 h 表示从 $\widetilde{M}^{\mathscr{D}}_{n,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_U)$ 和 $M^{\mathscr{D}}_{\gamma,\mathscr{L}\otimes\mathscr{N}}(\mathcal{C}_U)$ 到 *Hitchin* 基 $\mathbb{A}^{\mathscr{D}}_0(\mathcal{C}_U,n)$ 以及 $d^{\mathscr{D}}_{\gamma} := \dim \mathbb{A}^{\mathscr{D}}_0(\mathcal{C},n) - \dim \mathbb{A}^{\mathscr{D}}_{\gamma}(\mathcal{C})$的投影。

证明. 设 $U \subset \mathcal{M}$ 是一个稠密开集，在其上推论 2.13 和 2.15 适用。于是，为 Σ_U选取一个基本类，可得一个 G_{γ}- 和 Γ-等变（根据命题2.11）态射

$$Rh_*\mathbb{C}(\widetilde{M}^{\mathscr{D}}_{n,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_U) \times_{\mathbb{A}^{\mathscr{D}}_0(\mathcal{C}_U,n)} \mathbb{A}^{\mathscr{D}}_{\pi}(\mathcal{C}_{\gamma,U})) \to Rh_*\mathbb{C}(M_{\pi,\mathscr{L}\otimes\mathscr{N}}(\mathcal{C}_{\gamma,U}))[2(\dim M_{\pi,\mathscr{L}\otimes\mathscr{N}}(\mathcal{C}_{\gamma,U}) - \dim \Sigma_U)] \in D^b(\mathbb{A}^{\mathscr{D}}_{\pi}(\mathcal{C}_{\gamma,U}),\mathbb{C}),$$

这里我们再次用 h 表示到 Hitchin 基的两个（适当）态射 $\mathbb{A}^{\mathscr{D}}_{\pi}(\mathcal{C}_{\gamma,U})$。（注意，次数平移为 $-2d^{\mathscr{D}}_{\gamma}$，如上所定义，因为所有涉及的空间在 U上都是等维的，因此所有余维都与 [MS21定理 3 中的余维相同。10]）

沿着适当的 G_{γ}商映射 $q_{\mathbb{A}}$： $\mathbb{A}^{\mathscr{D}}_{\pi}(\mathcal{C}_{\gamma,U}) \to \mathbb{A}^{\mathscr{D}}_{\gamma}(\mathcal{C}_U)$ 推前并取不变量，我们得到一个态射

$$Rh_*\mathbb{C}(\widetilde{M}^{\mathscr{D}}_{n,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_U)|_{\mathbb{A}^{\mathscr{D}}_{\gamma}(\mathcal{C}_U)}) \otimes (q_{\mathbb{A}*}q^*_{\mathbb{A}}\mathbb{C})^{G_{\gamma}} = Rh_*\mathbb{C}(\widetilde{M}^{\mathscr{D}}_{n,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_U)|_{\mathbb{A}^{\mathscr{D}}_{\gamma}(\mathcal{C}_U)}) \to (Rh_*q_{M*}\mathbb{C}(M^{\mathscr{D}}_{\pi,\mathscr{L}\otimes\mathscr{N}}(\mathcal{C}_{\gamma,U}))[-2d^{\mathscr{D}}_{\gamma}])^{G_{\gamma}} = Rh_*\mathbb{C}(M^{\mathscr{D}}_{\gamma,\mathscr{L}\otimes\mathscr{N}}(\mathcal{C}_U))[-2d^{\mathscr{D}}_{\gamma}] \tag{8}$$

在 $\mathbb{A}^{\mathscr{D}}_{\gamma}(\mathcal{C}_U) \subset \mathbb{A}^{\mathscr{D}}_0(\mathcal{C}_U,n)$ 上的复形之间，其中最后一个等式利用了以下事实：q_M： $M^{\mathscr{D}}_{\pi,\mathscr{L}\otimes\mathscr{N}}(\mathcal{C}_{\gamma,U}) \to M^{\mathscr{D}}_{\gamma,\mathscr{L}\otimes\mathscr{N}}(\mathcal{C}_U)$ 是一个 G_{γ}-商映射 [HT03，命题 7.1]。现在，关键点在于，(8) 在 κ-分量上诱导出一个同构：只需在纤维上验证这一点；根据适当基变换以及关于 U 的假设，逐纤维的陈述恰好就是 [MS21，推论 3.11]。

为完成证明，我们注意到 $(Rh_*\mathbb{C}(\widetilde{M}^{\mathscr{D}}_{n,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_U)))_{\kappa}$支撑于 $\mathbb{A}^{\mathscr{D}}_{\gamma}(\mathcal{C}_U)$；由于 h 是适当的，由逐纤维结果即可得出，参见例如 [MS21，推论 2。2]。（事实上，该推论给出了关于支撑的强得多的陈述；就我们的目的而言，采用 [HP12定理 14] 中的论证的一个精细形式便已足够。）换言之，我们有

$$(Rh_*\mathbb{C}(\widetilde{M}^{\mathscr{D}}_{n,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_U)))_{\kappa} \cong (Rh_*\mathbb{C}(\widetilde{M}^{\mathscr{D}}_{n,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_U)|_{\mathbb{A}^{\mathscr{D}}_{\gamma}(\mathcal{C}_U)}))_{\kappa}.$$

将此与式 (8在 κ-分量上的限制结合起来，即得到所需的同构。 □

命题 2.17. 若 $\mathscr{D}$ 的次数为偶数，则经过 $\mathcal{M}$ 的一个有限覆盖 S 后，存在一个同构

$$(Rh_*\mathbb{C}(M^{\mathscr{D}}_{\gamma,\mathscr{L}\otimes\mathscr{N}}(\mathcal{C}_S)))_\kappa \cong (Rh_*\mathbb{C}(M^{\mathscr{D}}_{\gamma,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_S)))_\kappa$$

在 $D^b(\mathbb{A}^{\mathscr{D}}_\gamma(\mathcal{C}_S)\ \mathbb{C})$ 中。

证明。 若 $\mathscr{D}$ 的相对次数为偶数，则 $\mathscr{N}$的相对次数可被 n [MS21，引理 35]整除。因此，存在一个（非空的）相对 $\mathrm{Pic}^0_{\mathcal{C}/\mathcal{M}}[n] \cong \Gamma \times \mathcal{M}$ 主齐性空间，其n是 $\mathscr{N}$的 th 根，由下式给出

$$\mathrm{Pic}^{\deg\mathscr{N}/n}_{\mathcal{C}/\mathcal{M}} \times_{\otimes^n,\mathrm{Pic}^{\deg\mathscr{N}}_{\mathcal{C}/\mathcal{M}},\mathscr{N}} \mathcal{M}.$$

设 S 是此主齐性空间平凡化的一个有限覆盖， $\mathscr{K}$ 是一个整体截面，并将其视为 $\mathrm{Pic}^{\deg\mathscr{N}/n}_{\mathcal{C}_S/S}(S)$ 的一个元素。于是，张量乘以 $\mathscr{K}$ 定义了一个 Γ-等变同构 $\widetilde{M}^{\mathscr{D}}_{n,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_S) \xrightarrow{\sim} \widetilde{M}^{\mathscr{D}}_{n,\mathscr{L}\otimes\mathscr{N}}(\mathcal{C}_S)$，且该同构定义在两个投影 h 上。 □

2.4. **消失循环技巧**。 本节将说明如何在非-$\mathscr{D}$-扭曲情形下构造上一节中的同构。我们仍从定义开始。

定义 2.18. 给定一个族 X/S 和线丛 $A, B \in \mathrm{Pic}(X)$，我们定义一个位于 S 上的代数栈 $\widetilde{\mathcal{M}}^{B,A}_n(X/S)$如下：与 $T \to S$ 对应的群胚的对象为$\{(E,\theta)\ \alpha\colon \det E \xrightarrow{\sim} A_T\}$，其中 E是 X_T 上的秩为 n 的向量丛，且 $\theta\colon E \to E \otimes B_T$ 是一个满足 $\mathrm{tr}\ \theta = 0$ 的线性映射，使得 (E,θ) 在每个几何纤维上的限制均为（ Gieseker ）半稳定；态射由这些数据的同构给出。

我们注意到以下三个特殊情形：

(1) 给定 $\mathscr{D} \in \mathrm{Pic}(\mathcal{C})$，代数栈 $\widetilde{\mathcal{M}}^{\mathscr{D}}_{n,\mathscr{L}}(\mathcal{C}/\mathcal{M})$是粗空间$\widetilde{M}^{\mathscr{D}}_{n,\mathscr{L}}(\mathcal{C})$上的一个 μ_n-gerbe。（这里，我们利用 $\mathscr{L}$的相对次数与 n互素，因此逐纤维半稳定蕴含逐纤维稳定。）对任意态射$T \to \mathcal{M}$，结论同样成立。

(2) 回顾一下，存在一个截面 $s\colon \mathcal{M} \to \mathcal{C}$；我们将考虑 $\widetilde{\mathcal{M}}^{\mathscr{D}.}_{n}{}_{,\mathscr{L}}(s(\mathcal{M})/\mathcal{M})$，以及映射

$$\check{ev}_s : \widetilde{\mathcal{M}}^{\mathscr{D}}_{n,\mathscr{L}}(\mathcal{C}/\mathcal{M}) \to \widetilde{\mathcal{M}}^{\mathscr{D}}_{n,\mathscr{L}}(s(\mathcal{M})/\mathcal{M})$$

由沿着 s 的限制给出。（注意，在这种情况下，纤维的维数为 0，因此半稳定性条件是空的。）

(3) 如果 $U \subset \mathcal{M}$ 是一个开子集，且 $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{D}$ 在其上平凡化，那么我们注意到

$$\widetilde{\mathcal{M}}^{\mathscr{D}}_{n,\mathscr{L}}(s(U)/U) \cong \widetilde{\mathcal{M}}^{\mathscr{O}}_{n,\mathscr{O}}(s(U)/U) \cong U \times \widetilde{\mathcal{M}}^{\mathscr{O}}_{n,\mathscr{O}}(*/*) \cong U \times [\mathfrak{sl}_n/\mathrm{SL}_n].$$

我们还需要以下更一般的定义：

定义 2.19. 给定族 $X \xrightarrow{p} Y/S$ 的一个有限态射，以及线丛$A, B \in \mathrm{Pic}(Y)$，我们如下定义一个代数栈 $\mathcal{M}^{B}_{\pi,A}(X \to Y/S)$：对应于 $T \to S$ 的群胚的对象为 $\{(E,\theta)\ \alpha:\ \det p_*E \xrightarrow{\sim} A_T\}$，其中 E 是 X_T 上秩为 r 的向量丛，且 $\theta:\ E \to E \otimes p^*B_T$ 是满足 $\mathrm{tr}\, p_*\theta = 0$ 的线性映射，使得 (E,θ) 在每个几何纤维上的限制都是（Gieseker）半稳定的，其态射为这些数据的同构。

同样，我们关注以下三种情况：

(1) 给定 $\mathscr{D} \in$ Picard 群$(\mathcal{C})$，代数栈 $\mathcal{M}^{\mathscr{D}}_{\pi,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_\gamma \to \mathcal{C}/\mathcal{M})$ 是粗空间 $M^{\mathscr{D}}_{\pi,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_\gamma)$ 上的一个 μ_n-gerbe；对任意态射 $T \to \mathcal{M}$，情况也类似。(2) 我们将考虑代数栈 $\mathcal{M}^{\mathscr{D}}_{\pi,\mathscr{L}}(\pi_\gamma^{-1}(s(\mathcal{M})) \to s(\mathcal{M})/\mathcal{M})$，以及映射

$$ev^{\pi}_s : \mathcal{M}^{\mathscr{D}}_{\pi,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_\gamma \to \mathcal{C}/\mathcal{M}) \to \mathcal{M}^{\mathscr{D}}_{\pi,\mathscr{L}}(\pi_\gamma^{-1}(s(\mathcal{M})) \to s(\mathcal{M})/\mathcal{M})$$

由限制到 $\pi_\gamma^{-1}(s(\mathcal{M}))$。给出

(3) 如果 $S \to \mathcal{M}$ 是 $\mathcal{M}$ 的有限覆盖的一个开子集，在该子集上，线丛 $\mathscr{L}$，$\mathscr{D}$ 以及 m 重覆盖 $\pi_\gamma^{-1}(s(\mathcal{M})) \to s(\mathcal{M})$ 均已平凡化，那么我们有

$$\mathcal{M}^{\mathscr{D}}_{\pi,\mathscr{L}}(\pi_\gamma^{-1}(s(S)) \to s(S)/S) \cong S \times \mathcal{M}^{\mathscr{O}}_{\pi,\mathscr{O}}(\sqcup_{i=1}^m * \to */*) \cong S \times [\mathfrak{h}_\pi/H_\pi],$$

其中 $\mathfrak{h}_\pi \subset \mathfrak{sl}_n$ 和 $H_\pi \subset$特殊线性群$_n$ 定义见 [MS21，§4。2]。

注意，在 $\gamma = id$ 的情况下，这些结果可还原前面三个例子 .

给定如情形 (3) 中所述的 $S \to \mathcal{M}$，我们将考虑态射

$$\mu : \mathcal{M}^{\mathscr{D}}_{\pi,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_{\gamma,S} \to \mathcal{C}_S/S) \xrightarrow{ev^{\pi}_s} \mathcal{M}^{\mathscr{D}}_{\pi,\mathscr{L}}(\pi_\gamma^{-1}(s(S)) \to s(S)/S) \cong S \times [\mathfrak{h}_\pi/H_\pi] \xrightarrow{p_2} [\mathfrak{h}_\pi/H_\pi] \xrightarrow{c_2} \mathbb{A}^1, \tag{9}$$

其中 p_2 是到第二个因子的投影，而 $c_2(g)$ 是 $g \in \mathfrak{h}_\pi \subset \mathfrak{sl}_n$ 的特征多项式的 t^{n-2} 系数。

命题 2.20。对于 $i \in \mathbb{Z}_{>0}$，令 $\mathscr{D}_i := \omega_{\mathcal{C}/\mathcal{M}} \otimes \mathscr{O}_{\mathcal{C}}(is(\mathcal{M}))$。对 μ 的消失循环函子应用后，我们得到一个同构

$$\varphi_\mu(\mathbb{Q}(\mathcal{M}^{\mathscr{D}_i}_{\pi,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_{\gamma,S} \to \mathcal{C}_S/S))) \cong \mathbb{Q}(\mathcal{M}^{\mathscr{D}_{i-1}}_{\pi,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_{\gamma,S} \to \mathcal{C}_S/S))[-\dim \mathfrak{h}_\pi]$$

$D^b(\mathcal{M}^{\mathscr{D}_{i-1}}_{\pi,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_{\gamma,S} \to \mathcal{C}_S/S)\ \mathbb{Q})$ 中的复形之间的同构。该同构是 Γ-等变的。它并非 G_γ-等变，而是将特征平移 $\mathbb{Q}_-^{\otimes r(m+1)}$，其中 $\mathbb{Q}_-$ 是符号表示 $G_\gamma \to \{\pm 1\}, \xi \mapsto (-1)^{|\xi|}$。

证明。首先，映射 ev^{π}_s 由逐纤维结果可知是光滑的 [MS21，命题 4。1],投影 p_2 也是如此： $S \times [\mathfrak{h}_\pi/H_\pi] \to [\mathfrak{h}_\pi/H_\pi]$ 由于 S 在 $\mathcal{M}$上是光滑的。然后根据消失循环的光滑基变换 [MS21，引理 4.4(c)], 可得

$$\varphi_\mu(\mathbb{Q}(\mathcal{M}^{\mathscr{D}_i}_{\pi,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_{\gamma,S} \to \mathcal{C}_S/S))) \cong (p_2 \circ ev^{\pi}_s)^* \varphi_{c_2}(\mathbb{Q}([\mathfrak{h}_\pi/H_\pi])), \tag{10}$$

其中

$$\varphi_{c_2}(\mathbb{Q}([\mathfrak{h}_\pi/H_\pi])) \cong \mathbb{Q}([0/H_\pi])[-\dim \mathfrak{h}_\pi] \tag{11}$$

根据 [MS21，引理 4。3]以及如下事实： H_π 是连通的，因而在消失循环层上平凡地作用。现在，如同 [MS21，引理 4。2],中所指出的

$$\mathcal{M}^{\mathscr{D}_{i-1}}_{\pi,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_{\gamma,S} \to \mathcal{C}_S/S) \subset \mathcal{M}^{\mathscr{D}_i}_{\pi,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_{\gamma,S} \to \mathcal{C}_S/S)$$

由如下条件刻画： θ 沿 s 有一个零点，即这是 $p_2 \circ ev^\pi_s$ 下 $[0/H_\pi] \subset [\mathfrak{h}_\pi/H_\pi]$ 的原像。因此，结合（10）与（11），我们得到

$$\varphi_\mu(\mathbb{Q}(\mathcal{M}^{\mathscr{D}_i}_{\pi,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_{\gamma,S} \to \mathcal{C}_S/S))) \cong (p_2 \circ ev^\pi_s)^*\mathbb{Q}([0/H_\pi])[-\dim \mathfrak{h}_\pi]$$

$$\cong \mathbb{Q}(\mathcal{M}^{\mathscr{D}_{i-1}}_{\pi,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_{\gamma,S} \to \mathcal{C}_S/S))[-\dim \mathfrak{h}_\pi].$$

关于 Γ-等变性，我们注意到上述论证同样适用于$[\mathcal{M}^{\mathscr{D}_i}_{\pi,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_{\gamma,\ S} \to \mathcal{C}_S/S)/\Gamma]$ （其中 ev^π_s经由该商因子化，因为线丛s^*L_δ 是平凡的）。

关于与 G_γ的相容性，我们注意到 $p_2 \circ ev^\pi_s$ 是 G_γ-等变的，其中 G_γ通过循环置换 $\sqcup^m_{i=1}*$ 的点来作用，并与其在诸 m分量——即 $\pi_\gamma^{-1}(s(S))$的分量——上的作用相容。因此，只需对 $[\mathfrak{h}_\pi/H_\pi] \to \mathbb{A}^1$证明该陈述，或者实际上，在再取一个 G_γ-等变光滑覆盖之后，对 c_2： $\mathfrak{h}_\pi \to \mathbb{A}^1$证明即可。遵循 [MS21，命题 4.6], 的论证，我们考虑分解 $\mathfrak{h}_\pi \cong \oplus^{m-1}_{i=0}\mathfrak{h}_i\hat{}$，即按对偶群 $G_\gamma \cong \mathbb{Z}/m$的特征所作的分解。由于 c_2 是一个 G_γ-不变二次型，其定义在 $\mathfrak{h}_\pi$上，它必定分解为函数 $c^{i,\ m-i}_{2}$ （定义在 $\mathfrak{h}_i + \mathfrak{h}_{m-i}$上）之和，因而由 Thom-Sebastiani 定理，我们有

$$\varphi_{c_2}(\mathbb{Q}(\mathfrak{h}_\pi)) \cong \otimes\varphi_{c^{i,m-i}_2}(\mathbb{Q}(\mathfrak{h}_i + \mathfrak{h}_{m-i})).$$

此外， G_γ 在 $\varphi_{c^{0,\ m}_2}\mathbb{Q}(\mathfrak{h}_0)$ 上的作用是平凡的，因为 G_γ 在 $\mathfrak{h}_0$ 上的作用是平凡的；对于 $i \neq m-i$， G_γ在 $\varphi_{c^{i,m-i}_2}\mathbb{Q}(\mathfrak{h}_i \oplus \mathfrak{h}_{m-i})$ 上的作用也是平凡的，因为该作用可以扩展为连通群 $\mathbb{G}_m$ 的作用，其权为 $(1,-1)$，并且与函数$_{c^{i,}{}_2}{}^{m-i}$ 相容。

剩下要确定的是当 m 为偶数时， G_γ 在 $\varphi^{m/2}{}_{,c_2}{}^{m/2}(\mathbb{Q}(\mathfrak{h}_{m/2}))$ 上的作用。根据 [MS21，引理 4.3], ，形式 c_2 非退化；由 G_γ- 不变性可知， $c^{m/2}{}_{,2}{}^{m/2}$ 也同样非退化，即其形式为 $x_1^2 + \ldots + x^2_{\dim \mathfrak{h}_{m/2}}$，其中 $\{x_i\}$ 是$\mathfrak{h}_{m/2}$的一组基。回顾一下，对于满足 G_γ 在源上通过符号特征作用的 $x^2 : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$，我们有

$$\phi_{x^2}(\mathbb{Q}(\mathbb{A}^1)) \cong \mathbb{Q}(0)[-1] \otimes \mathbb{Q}_-$$

因为将 $\mathbb{A}^1$ 的坐标乘以 -1 会交换邻近纤维 $\{\pm\lambda\}$ 的两个点。再次根据 Thom–Sebastiani 定理，这意味着

$$\varphi_{c_2^{m/2,m/2}}(\mathbb{Q}(\mathfrak{h}_{m/2})) \cong \mathbb{Q}(0)[-\dim \mathfrak{h}_{m/2}] \otimes \mathbb{Q}_-^{\otimes \dim \mathfrak{h}_{m/2}}.$$

由于 $\mathfrak{h}_\pi \oplus \mathbb{C}_{triv} \cong V^{\oplus r^2}$，其中 V是 G_γ 的标准 $\mathbb{C}$-表示，我们可知 $\dim \mathfrak{h}_{m/2} = r^2$。换言之，取消失循环会引入一个非平凡的倍数

恰好当 $m \equiv 0$， $r \equiv 1$ 模 2 时，该倍数为符号特征。由此完成了论证：

$$\varphi_\mu(\mathbb{Q}(\mathcal{M}^{\mathscr{D}_i}_{\pi,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_{\gamma,S} \to \mathcal{C}_S/S))) \cong \mathbb{Q}(\mathcal{M}^{\mathscr{D}_{i-1}}_{\pi,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_{\gamma,S} \to \mathcal{C}_S/S)) \otimes \mathbb{Q}_-^{\otimes r(m+1)}$$

现在我们注意到，对 G_γ 的任意特征 $\mathbb{Q}_\chi$ 进行张量积与取消失循环可交换。□

推论 2.21. 经过适当的扎里斯基开子集 S，它取自 $\mathcal{M}$ 的一个有限覆盖后，存在一个同构

$$R\pi_*\mathbb{C}(\widetilde{M}_{n,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_S))_\kappa \cong R\pi_*\mathbb{C}(M_\gamma(\mathcal{C}_S))_\kappa[-2d_\gamma]$$

复形之间的同构 $D^b(S,\mathbb{C})$，其中 d_γ 定义为命题 $d_\gamma^{\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{M}}}$中的 *2.16*。

证明。 由命题 2.16和 2.17可知，由于 $\mathscr{D}_2$ 的相对次数为 $2g$，经过有限覆盖的一个扎里斯基开子集 S' 后， $\mathcal{M}$存在一个同构

$$(Rh_*\mathbb{C}(\widetilde{M}^{\mathscr{D}_2}_{n,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_{S'}))_\kappa \cong (Rh_*\mathbb{C}(M^{\mathscr{D}_2}_{\gamma,\mathscr{L}\otimes\mathscr{N}}(\mathcal{C}_{S'})))_\kappa[-2d_\gamma^{\mathscr{D}_2}] \cong (Rh_*\mathbb{C}(M^{\mathscr{D}_2}_{\gamma,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_{S'})))_\kappa[-2d_\gamma^{\mathscr{D}_2}]$$

在 $D^b(\mathbb{A}^{\mathscr{D}_2}_\gamma(\mathcal{C}_{S'})\ \mathbb{C})$ 中。此外，当粗空间 $\widetilde{M}$ 和 M_γ 被 $B\mu_n$-gerbes $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}_\gamma$ 所替代时，同样的结论也成立。特别地，我们得到

$$(Rh_*\mathbb{C}(\widetilde{\mathcal{M}}^{\mathscr{D}_2}_{n,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_{S'})))_\kappa \cong (Rh_*\mathbb{C}(\mathcal{M}^{\mathscr{D}_2}_{\pi,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_{\gamma,S'})))^{G_\gamma}_\kappa[-2d_\gamma^{\mathscr{D}_2}]. \tag{12}$$

现在，进一步取有限覆盖的一个开子集，记作 S，我们可以假设有限覆盖 $\pi_\gamma^{-1}(s(S)) \to s(S)$ 以及线丛 $s^*\mathscr{L}$和 $s^*\mathscr{O}_{\mathcal{C}_S}(s(S))$ 均已平凡化。于是，式 (9) 中的函数定义良好，对式 (12) 两边各应用两次 φ_μ，得到如下结果：

对于 等式左侧，注意到我们有一个 Γ-等变同构

$$\varphi_\mu\mathbb{C}(\widetilde{M}^{\mathscr{D}_i}_{n,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_S)) \cong \mathbb{C}(\widetilde{M}^{\mathscr{D}_{i-1}}_{n,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_S))[-\dim\mathfrak{sl}_n]$$

由命题 2.20 应用于情形 $\gamma = id$。特别地，

$$\varphi_\mu(\varphi_\mu\mathbb{C}(\widetilde{\mathcal{M}}^{\mathscr{D}_2}_{\gamma,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_S))) \cong \mathbb{C}(\widetilde{\mathcal{M}}^{\mathscr{D}_0}_{\gamma,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_S))[-2\dim\mathfrak{sl}_n] = \mathbb{C}(\widetilde{\mathcal{M}}_{\gamma,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_S))[-2\dim\mathfrak{sl}_n].$$

由于 μ 通过 h 因子化，且消失循环与适当推前可交换，我们得到

$$\varphi_\mu(\varphi_\mu(Rh_*\mathbb{C}(\widetilde{\mathcal{M}}^{\mathscr{D}_2}_{n,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_S)))_\kappa)) \cong (Rh_*\mathbb{C}(\widetilde{\mathcal{M}}_{n,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_S)))_\kappa[-2\dim\mathfrak{sl}_n]. \tag{13}$$

在 等式右侧，我们有一个 Γ-和 G_γ-等变同构

$$\varphi_\mu(\varphi_\mu(\mathbb{C}(\mathcal{M}^{\mathscr{D}_2}_{\pi,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_{\gamma,S})))) \cong \mathbb{C}(\mathcal{M}_{\pi,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_{\gamma,S}))[-2\dim\mathfrak{h}_\pi]$$

根据命题 2.20，其中 G_γ-等变性源于 $\mathbb{Q}_-^{\otimes r(m+1)}$ 的两个因子相结合后给出平凡特征标移位这一事实。与之前一样，我们有

$$\begin{aligned}\varphi_\mu(\varphi_\mu(Rh_*\mathbb{C}(\mathcal{M}^{\mathscr{D}_2}_{\pi,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_{\gamma,S})))^{G_\gamma}_\kappa) &\cong (Rh_*\mathbb{C}(\mathcal{M}_{\pi,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_{\gamma,S})))^{G_\gamma}_\kappa[-2\dim\mathfrak{h}_\pi] \\ &= (Rh_*\mathbb{C}(\mathcal{M}_{\gamma,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_S)))_\kappa[-2\dim\mathfrak{h}_\pi].\end{aligned} \tag{14}$$

因此，将 φ_μ 分别作用于同构（12）两边两次，由（13）和（14）可得

$$(Rh_*\mathbb{C}(\widetilde{\mathcal{M}}_{\gamma,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_S)))_\kappa \cong (Rh_*\mathbb{C}(\mathcal{M}_{\gamma,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_S)))_\kappa[2(\dim \mathfrak{sl}_n - \dim \mathfrak{h}_\pi - d_\gamma^{\mathscr{D}_2})].$$

所需结论可通过回到粗空间并推前到 S得到，因为根据逐纤维结果 [MS21，§4.2] 我们有 $\dim \mathfrak{sl}_n - \dim \mathfrak{h}_\pi - d_\gamma^{\mathscr{D}_2} = -d_\gamma$。□

定理 2.22。存在一个有限覆盖上的扎里斯基开子集 $\mathcal{M}$，记为 W，在其上存在一个带右逆的态射

$$R\pi_*\mathbb{C}(M_{r,d}(\mathcal{C}_{\gamma,W})) \to (R\pi_*\mathbb{C}(\widetilde{M}_{n,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_W))_\kappa[2d_\gamma] \in D^b(W,\mathbb{C}).$$

证明。令 W 为下文所引命题中出现的各个有限覆盖上的扎里斯基开子集的纤维积，则我们得到带右逆的态射

$$R\pi_*\mathbb{C}(M_{r,d}(\mathcal{C}_{\gamma,W})) \overset{2.4}{\cong} R\pi_*\mathbb{C}(M_{1,0}(\mathcal{C}_W)) \otimes (R\pi_*\mathbb{C}(M_\pi(\mathcal{C}_{\gamma,W})))^\Gamma$$

$$\overset{2.5}{\underset{\leftarrow}{\rightarrow}} (R\pi_*\mathbb{C}(M_\pi(\mathcal{C}_{\gamma,W})))^\Gamma \overset{2.7}{\cong} (R\pi_*\mathbb{C}(M_\pi(\mathcal{C}_{\gamma,W})))_\kappa$$

$$\overset{2.8}{\underset{\leftarrow}{\rightarrow}} (R\pi_*\mathbb{C}(M_\pi(\mathcal{C}_{\gamma,W})))_\kappa^{G_\gamma} \overset{2.9}{\cong} (R\pi_*\mathbb{C}(M_\gamma(\mathcal{C}_W)))_\kappa \overset{2.21}{\cong} (R\pi_*\mathbb{C}(\widetilde{M}_{n,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_W)))_\kappa[2d_\gamma].$$

□

3. Algebraic monodromy

无论是因为存在具有光滑边界的光滑紧化（见 [Cat21，命题 3.8.1]），还是因为非阿贝尔 Hodge 对应的相对形式（见命题 3.6），上一节定义的 Higgs 丛相对模空间 $M_{r,d}(\mathcal{C}_\gamma)^\sim$ 和 $M_{n,\mathscr{L}}(\mathcal{C})$ 在基底 $\mathcal{M}$（$\mathcal{M}_{g,1}$ 的一个有限覆盖）上都是拓扑局部平凡的。特别地，选取一个点 $x \in \mathcal{M}$，它对应于一条曲线 $\mathcal{C}_x =: C$，其覆盖为 $\mathcal{C}_\gamma$，$_x =: C_\gamma$，于是讨论 $\pi_1(\mathcal{M}, x) =: \pi_1(\mathcal{M})$ 在 $H^*(M_{r,d}(C_\gamma))$ 和 $H^*(M_{n,L}(C))$ 上的单值化表示 $^\sim$ 便有意义。

我们用 $\ker(\pi_1(\mathcal{M}) \curvearrowright H^*(M_{r,\ d}(C_\gamma)))$ 等表示 $\pi_1(\mathcal{M})$ 在 $\oplus_i R^i\pi_*\mathbb{C}(M_{r,\ d}(C_\gamma))$ 上的单值表示的核。（注意，单值表示的核与所选的 $\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{Q}$ 系数无关，因此我们在记号中省略系数域。）

引理 3.1。对每个 $\gamma \in \Gamma$，都有

$$\ker(\pi_1(\mathcal{M}) \curvearrowright H^*(M_{r,d}(C_\gamma))) = \ker(\pi_1(\mathcal{M}) \curvearrowright H^1(C_\gamma)).$$

证明。我们回顾若干众所周知的事实，证明或参考资料见 [Ban+26，§3-4]。首先，我们有

$$R\pi_*\mathbb{Q}(M_{r,d}(\mathcal{C}_\gamma)) \cong R\pi_*\mathbb{Q}(M_{1,0}^{\mathrm{GL}}(\mathcal{C}_\gamma)) \otimes R\pi_*\mathbb{Q}(\widehat{M}_{r,d}(\mathcal{C}_\gamma))$$

⌢[Ban+26，(13)、(17)]，，其中 $M_{rd}(\mathcal{C}_\gamma) := M_{r,d}(\mathcal{C}_\gamma)/M_{1,0}(\mathcal{C}_\gamma)$ 是 PGL-希格斯丛的相对模空间。若 $V := R^1\pi_*\mathbb{Q}(\mathcal{C}_\gamma)$ 是标准辛局部系统，则有 $R^i\pi_*\mathbb{Q}(M_{1,0}(\mathcal{C}_\gamma)) = \wedge^i V$ [Ban+26，命题 4.9]，；根据 Markman 的生成结果 [Mar02，定理 7]，存在一个满射

$$A \otimes \bigwedge^\bullet (\oplus_{j=2}^r V) \twoheadrightarrow \oplus_i R^i\pi_*\mathbb{Q}(\widehat{M}_{r,d}(\mathcal{C}_\gamma))$$

[Ban+26，推论 4.8]，其中 A 是平凡局部系统的直和。这意味着 $\ker(\pi_1(\mathcal{M}) \curvearrowright H^1(C_\gamma)) \subset \ker(\pi_1(\mathcal{M}) \curvearrowright H^*(M_{r,d}(C_\gamma)))$。另一方面，由于同样

$$R^1\pi_*\mathbb{Q}(M_{r,d}(\mathcal{C}_\gamma)) \supset R^1\pi_*\mathbb{Q}(M_{1,0}(\mathcal{C}_\gamma)) \otimes R^0\pi_*\mathbb{Q}(\widehat{M}_{r,d}(\mathcal{C}_\gamma)) = V \otimes \mathbb{Q} = V$$

我们有相反的包含映射 $\ker(\pi_1(\mathcal{M}) \curvearrowright H^1(\mathcal{C}_\gamma)) \supset \ker(\pi_1(\mathcal{M}) \curvearrowright H^*(M_{r,d}(\mathcal{C}_\gamma)))$。

□

令 $C_n \to C$ 为对应于典范映射的 ´étale覆盖

$$\pi_1(C) \to H_1(C, \mathbb{Z}) \to H_1(C, \mathbb{Z}/n)$$

并令 $\mathcal{C}_n \to \mathcal{C}$ 为 $\mathcal{M}$上的相应相对覆盖。

推论 3.2。 对于 W 如定理*2.22*中所述，我们有

$$\ker(\pi_1(W) \curvearrowright H^1(C_n)) \subset \ker(\pi_1(W) \curvearrowright H^*(\widetilde{M}_{n,L}(C))).$$

证明。回顾定理 2.22，我们有一个满射 $\oplus_{\gamma\in\Gamma} H^*(M_{r,d}(C_\gamma)) \twoheadrightarrow H^*(M_{n,L}(C))$，它是（复） $\pi_1(W)$-表示的满射，因此

$$\ker(\pi_1(W) \curvearrowright \oplus_\gamma H^*(M_{r,d}(C_\gamma))) \subset \ker(\pi_1(W) \curvearrowright H^*(\widetilde{M}_{n,L}(C))). \tag{15}$$

接下来，我们有

$$\begin{aligned}\ker(\pi_1(W) \curvearrowright \oplus_\gamma H^*(M_{r,d}(C_\gamma))) &= \cap_\gamma \ker(\pi_1(W) \curvearrowright H^*(M_{r,d}(C_\gamma))) \\ &= \cap_\gamma \ker(\pi_1(W) \curvearrowright H^1(C_\gamma)))\end{aligned} \tag{16}$$

由引理3.1。

现在，对每个 $\gamma \in \Gamma = H_1(C, \mathbb{Z}/n)^*$，我们都有一个与 $H_1(C, \mathbb{Z}/n) \xrightarrow{\gamma} \mathbb{C}^*$ 对应的覆盖映射 $C_n \to C_\gamma$。这给出了一个 $\hat{\ } \Gamma = H_1(C, \mathbb{Z}/n) = \mathrm{Gal}(C_n/C)$ 和 $\pi_1(W)$-等变识别 $H^1(C_\gamma) \cong H^1(C_n)^{\ker\gamma}$。此外，$\pi_1(W)$ 和 $\hat{\Gamma}$ 在 $H^1(C_n)$ 上的作用是可交换的，因为 $\hat{\Gamma}$ 在 W 上是平凡化的。根据 $\hat{\ } \Gamma$ 的特征分解 $H^1(C_n)$，我们得出

$$\ker(\pi_1(W) \curvearrowright H^1(C_n))) = \cap_{\gamma\in\Gamma} \ker(\pi_1(W) \curvearrowright (H^1(C_n)_\gamma) = \cap_\gamma \ker(\pi_1(W) \curvearrowright H^1(C_\gamma)),$$

因为对每个 γ，我们都有

$$\ker(\pi_1(W) \curvearrowright H^1(C_\gamma)) = \cap_{i=1}^{|\gamma|} \ker(\pi_1(W) \curvearrowright H^1(C_n)_{i\gamma}).$$

将其与上述（15）和（16）结合，结论即得。 □

引理 3.3。 对于任意 $\kappa \neq 0 \in \Gamma$，我们有

$$\ker(\pi_1(W) \curvearrowright H^*(\widetilde{M}_{n,L}(C))^\Gamma \oplus H^*(\widetilde{M}_{n,L}(C))_\kappa) \subset \ker(\pi_1(W) \curvearrowright H^1(C_\gamma)_{-\kappa_G}),$$

其中 $\kappa_G \in G_\gamma$ 定义同命题 2.7。

证明。 根据上一节的结果，我们有复数 $\pi_1(W)$-表示的同构

$$H^*(\widetilde{M}_{n,L}(C))_\kappa \overset{2.21,2.9}{\cong} H^*(M_\pi(C_\gamma))^{G_\gamma}_\kappa \overset{2.7}{\cong} H^*(M_\pi(C_\gamma))^\Gamma_{-\kappa_G}$$

and

$$H^*(M_{r,d}(C_\gamma))_{-\kappa_G} \overset{2.4}{\cong} H^*(M_{1,0}(C)) \otimes H^*(M_\pi(C_\gamma))^\Gamma_{-\kappa_G}.$$

此外，从引理 3.1 的证明（应用于 $\kappa = 0$ 的情形）可知

$$\ker(\pi_1(W) \curvearrowright H^*(\widetilde{M}_{n,L}(C))^\Gamma) = \ker(\pi_1(W) \curvearrowright H^1(C)) = \ker(\pi_1(W) \curvearrowright M_{1,0}(C)),$$

（其中，第一个等号用到了识别 $H^*(\widetilde{M}_{n,L}(C))^\Gamma = H^*(\widehat{M}_{n,d}(C))$），因此

$$\ker(\pi_1(W) \curvearrowright H^*(\widetilde{M}_{n,L}(C))^\Gamma \oplus H^*(\widetilde{M}_{n,L}(C))_\kappa) \subset \ker(\pi_1(W) \curvearrowright H^*(M_{r,d}(C_\gamma))_{-\kappa_G}).$$

接下来，注意到 G_γ-等变映射

$$\det : M_{r,d}(\mathcal{C}_{\gamma,W}) \to \mathrm{Pic}^d_{C_{\gamma,W}/W}, (E, \theta) \mapsto \det E$$

诱导出一个 $\pi_1(W)$-表示的单射 $H^*(\mathrm{Pic}^d(C_\gamma)) \hookrightarrow H^*(M_{r,d}(C_\gamma))$。（事实上，对于任意选定的 $(E, \theta) \in M_{r,d}(C_\gamma)$，我们可以将行列式映射与

$$\mathrm{Pic}^0(C_\gamma) \to M_{r,d}(C_\gamma), A \mapsto (A \otimes E, 1 \otimes \theta)$$

从而得到等源 Picard 群$^0(C_\gamma) \to$ Picard 群$^d(C_\gamma)$ $A \mapsto A^{\otimes r} \otimes \det E$。）因此我们得出

$$\ker(\pi_1(W) \curvearrowright H^*(M_{r,d}(C_\gamma))_{-\kappa_G}) \subset \ker(\pi_1(W) \curvearrowright H^*(\mathrm{Pic}^d(C_\gamma))_{-\kappa_G})$$

$$\subset \ker(\pi_1(W) \curvearrowright H^1(\mathrm{Pic}^d(C_\gamma))_{-\kappa_G}).$$

最后，回顾选取 Picard 群$^0_{C_\gamma,W/W}$-主齐性空间 Picard 群$^d_{C_\gamma,W/W}$的局部平凡化，可给出 $\pi_1(W)$-表示的一个自然同构 H^*(Picard 群$^d(C_\gamma)) \cong H^*$(Picard 群$^0(C_\gamma)$)[CHM12，引理 1.3.5]。我们注意到该同构也是 G_γ-等变的：任取 $A \in$Picard 群$^d(C_\gamma)$ 以平凡化该主齐性空间，我们看到 G_γ 通过其对 Picard 群$^0(C_\gamma)$ 的作用乘以 $\xi \mapsto \xi(A) \otimes A^{-1} \in$ Picard 群$^0(C_\gamma)$ 而作用于 Picard 群$^d(C_\gamma)$，并且由于 Picard 群$^0(C_\gamma)$ 是连通群，这第二部分在上同调上的作用是平凡的。因此

$$\ker(\pi_1(W) \curvearrowright H^1(\mathrm{Pic}^d(C_\gamma))_{-\kappa_G}) = \ker(\pi_1(W) \curvearrowright H^1(\mathrm{Pic}^0(C_\gamma))_{-\kappa_G})$$

$$= \ker(\pi_1(W) \curvearrowright H^1(C_\gamma)_{-\kappa_G}),$$

完成证明。 □

回顾一下，如果 $H_1 \cap H_2$ 在各个 H_i 中都是有限指数的，那么子群 H_1，$H_2 \subset G$ 是可公度的。

定理 3.4。子群

$$\ker(\pi_1(\mathcal{M}_{g,1}) \curvearrowright H^*(\widetilde{M}_{n,L}(C),\mathbb{Z})) \quad and \quad \ker(\pi_1(\mathcal{M}_{g,1}) \curvearrowright H^1(C_n,\mathbb{Z}))$$

在 $\pi_1(\mathcal{M}_{g,1})$ 中可公度。

证明。首先，由于 $H^*(M_{n,L}(C)\ \mathbb{Z})$ 的挠子群是有限的，因此只需考虑系数为 $\mathbb{C}$ 的上同调。此外，由于取有限覆盖相当于限制到 $\pi_1(\mathcal{M}_{g,1})$ 的一个有限指数子群，而限制到一个 Zariski 开集会在 π_1 上诱导满射，因此只需证明在 $\pi_1(W)$ 上这两个核可公度。

由推论 3.2可得

$$\ker(\pi_1(W) \curvearrowright H^1(C_n)) \subset \ker(\pi_1(W) \curvearrowright H^*(\widetilde{M}_{n,L}(C))).$$

另一方面，由于 Γ 在 W 上平凡化，我们有

$$\ker(\pi_1(W) \curvearrowright H^*(\widetilde{M}_{n,L}(C))) = \bigcap_{\kappa\neq 0\in\hat{\Gamma}} \ker(\pi_1(W) \curvearrowright H^*(\widetilde{M}_{n,L}(C))^\Gamma \oplus H^*(\widetilde{M}_{n,L}(C))_\kappa)$$

$$\subset \bigcap_{\kappa\in\hat{\Gamma}} \ker(\pi_1(W) \curvearrowright H^1(C_\gamma)_{-\kappa_G}) \tag{17}$$

由引理 3.1 (针对 $\kappa = 0$) 和 3.3 (针对 $\kappa \neq 0$)。考虑分裂

$$H^1(C_n) = \oplus_{\gamma\in\Gamma} H^1(C_n)_\gamma = \oplus_{\gamma\in\Gamma} H^1(C_n/(\ker\gamma))_\gamma = \oplus_{\gamma\in\Gamma} H^1(C_\gamma)_\gamma$$

我们看到，交集 (17) 遍历所有可能的特征。（回想一下，我们定义了 $\kappa_G \in G_\gamma \subset \Gamma$ 使之与 $\gamma \in \Gamma/\ker(\kappa) \subset \Gamma$ 通过引理2.6中的同构相对应。覆盖 $C_\gamma \to C$ 和这个同构均与所选取的生成元无关，而当 $\langle\gamma\rangle$遍历 κ 时，相应地 Γ遍历 $-\kappa_G$。） $\Gamma\square$

映射类群 $\pi_1(\mathcal{M}_g)$ 在 $H_1(C_n)$ 上的作用见 [Loo97], ，但亏格 2 时有少数例外；问题出在如下论证中：在 $H_1(C_n)$ 的不同等型分量上，单值表示（每个分量各自都已得到理解）在（虚意义下）彼此独立[Loo97，定理 2。4], 。Hodge 理论中的大单值化结果 [LLS25], 仅描述代数单值化，但对非阿贝尔伽罗瓦群也成立；它只适用于亏格 > 2。

推论 3.5。若 $g > 2$ 或 $g = 2$ 且 $(n,6) = 1$，则 $\pi(\mathcal{M}_{g,1})$ 的代数单值化群 $\curvearrowright H^*(\widetilde{M}_{n,L}(C)\ \mathbb{C})$ 是 $\mathrm{Sp}\hat{\imath}(H^1(C_n,\mathbb{C}))$的导出子群，即

$$\begin{cases} \mathrm{SL}_{2(g-1)}(\mathbb{C})^{\times(n^{2g}-2^{2g})/2} \times \mathrm{Sp}_{2(g-1)}(\mathbb{C})^{\times(2^{2g}-1)} \times \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{C}) & n \equiv 0(2) \\ \mathrm{SL}_{2(g-1)}(\mathbb{C})^{\times(n^{2g}-1)/2} \times \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{C}) & n \equiv 1(2). \end{cases}$$

如果 $g = 2$ 和 $(n,6) \neq 1$，那么代数单值性包含于该群中。

证明。首先，根据定理 3.4，以及 $\pi_1(\mathcal{M}_g,1)$ 在 $H^1(C_n)$ 上的作用可经由 $\pi_1(\mathcal{M}_g)$ 因子化这一事实（即商 $C_n \to C$ 是规范的，因而可扩张为 $\mathcal{M}_g$ 上定义良好的覆盖），只需计算 $\pi_1(\mathcal{M}_g) \curvearrowright H^1(C_n,\mathbb{C})$ 的代数单值化群。假设 g 和 n 如上所述，Looijenga 的结果表明，该群在满足单值化作用与交叉形式相容、且（转而考虑一个有限指数子群后）与 C_n 上的 Γ作用相容，并且必须是半单 [Del71]的条件下，已尽可能大；更准确地说，$\pi_1(\mathcal{M}_g)$ 的一个有限指数子群的像是 $\mathrm{Sp}\hat{\Gamma}(H^1(C_n,\mathbb{Q}))$ 的交换子子群中的一个算术子群 [Loo97，推论 2.6]。根据 Borel稠密性定理，该半单群中的算术子群是 Zariski稠密的，因此 $\mathbb{C}$ 上的闭包为$[\mathrm{Sp}\hat{\Gamma}(H^1(C_n,\mathbb{C}))、\mathrm{Sp}\hat{\Gamma}(H^1(C_n,\mathbb{C}))] \subset \mathrm{GL}(H^1(C_n,\mathbb{C}))$。（另一方面，如果 $g=2$ 和 $(n,6)\neq 1$，代数单值性可能是一个真子群。）

该群可明确描述如下：首先，$H^1(C_n,\ \mathbb{C})$ 的一个自同构与 $\hat{\Gamma}$ 交换，当且仅当它固定所有等型分量 $H^1(C_n,\ \mathbb{C})_\gamma$；由于交叉形式具有 $\hat{\Gamma}$-不变性，每个 $H^1(C_n,\ \mathbb{C})_\gamma$ 恰好与 $H^1(C_n,\ \mathbb{C})_{-\gamma}$ 非平凡配对。换言之，我们有

$$\mathrm{Sp}_{\hat{\Gamma}}(H^1(C_n,\mathbb{C})) = \prod_{\{\gamma,-\gamma\}\subset\Gamma} \mathrm{Sp}_{\hat{\Gamma}}(H^1(C_n)_\gamma + H^1(C_n)_{-\gamma})$$

其中

$$\mathrm{Sp}_{\hat{\Gamma}}(H^1(C_n)_\gamma + H^1(C_n)_{-\gamma}) = \begin{cases} \mathrm{GL}(H^1(C_n)_\gamma) & \gamma \neq -\gamma \\ \mathrm{Sp}(H^1(C_n)_\gamma) & \gamma = -\gamma. \end{cases}$$

（事实上，在第一种情况下，一个 $\hat{\Gamma}$-等变变换将固定 $H^1(C_n)_{\pm\gamma}$，它们在交配对下互为对偶，因此，和上的辛作用由 $H^1(C_n)_\gamma$ 上的一个自同构决定。在第二种情况下，交叉形式在 $H^1(C_n)_\gamma$ 上的限制是非退化的，并且该空间上的任意作用都是 $\hat{\Gamma}$-不变的。）最后，我们注意到 $[\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})、\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})] = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ 以及 $[\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{C})、\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{C})] = \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{C})$，并且对于 $\gamma \neq 0$，有 $\dim H^1(C_n)_\gamma = 2(g-1)$，而对于 $\gamma = 0$，有 $2g$（依据 [Loo97，命题 4.2]，以及 $H^1(C_n)_\gamma \cong H^1(C_\gamma)_\gamma$ 这一事实）。□

3.1. 回到特征簇。现在只需证明 $\pi_1(\mathcal{M}_{g,1})$ =Mod$(C\backslash p)$ 在 $H^*(\widetilde{M}_{n,L}(C))$ 和 $H^*(M_{\text{特殊线性群}})$ 上的作用一致。这对专家而言想必是众所周知的，但这仍无法直接从 Simpson 最初的非阿贝尔霍奇对应中得出，因为该对应只描述了 $d=0$ 的情形。

回忆一下，$\pi_1(\mathcal{M}_{g,1}) = \mathrm{Mod}(C\setminus p)$ 作用于

$$M^{\mathrm{SL}} = \{\phi \in \mathrm{Hom}(\pi_1(C\setminus p), \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})) : \phi(\gamma_p) = e^{2\pi i d/n}\,\mathrm{Id}_n\}/\,\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$$

（其中 γ_p 是围绕穿孔 p的逆时针环路），通过其在$\pi_1(C\setminus p)$ 上的外作用。（更多讨论见 [Ban+26，定义 2。3] ）我们还考虑“次数 d” PGL_n 特征簇

$$M^{\mathrm{PGL}} := M^{\mathrm{SL}}/\,\mathrm{Hom}(\pi_1(C\setminus p), \mu_n),$$

其中，$\mathrm{Hom}(\pi_1(C\setminus p),\mu_n)$ 的作用定义为 μ_n 通过标量乘法在 SL_n 上的作用。$\pi_1(\mathcal{M}_{g,1})$ 在 $H^*(M^G)$ 上的作用可描述为“簇的局部系统” $M^G(\mathcal{C}_{g,1}) := \mathcal{T}_{g,1}\times_{\pi_1(\mathcal{M}_{g,1})} M^G$ 上的单值化作用，其中 $\mathcal{M}_{g,1}$ 是 Teichmüller 空间 $\mathcal{T}_{g,1}$ 对基本群 $\pi_1(\mathcal{M}_{g,1})$ 取商所得。

如引理证明中所述3.1，也存在一个模空间 $\widehat{M}_{n,d}(C) := M_{n,L}(C)/\text{Picard 群}^0(C)[n]$，即“次数 d”的 PGL Higgs 丛，其中 Picard 群$^0(C)[n]=\Gamma$ 通过$\widehat{\ }$张量积作用。类似地，在 $\mathcal{M}_g$,1 上存在相对版本 $M_{n,d}(\mathcal{C}_g$,1)，并且由 Simpson 的次数 0 相对非阿贝尔霍奇对应 [Sim94a、定理 9.11、引理 9.4] 可知，在 $\mathcal{M}_g$,1 上存在 $M^{\mathrm{PGL}}(\mathcal{C}_g$,1) 与 $\widehat{M}_{n,d}(\mathcal{C}_g$,1) 的典范同胚。（参见 [Ban+26, §3]，其中讨论了这种形式的相对 PGL 非阿贝尔霍奇对应。）

命题 3.6. $\pi_1(\mathcal{M}_{g,1})$在 $H^*(M_{n,L}(C))\cong H^*(M^{\mathrm{SL}})$ 上的两个单值化表示在一个有限指数子群上一致。

证明。 如例如在 [HT03 的 §2]，中所述，在 $\mathcal{M}_{g,1}$ 的每一点 (C,p) 之上，存在一个（未必典范的）非阿贝尔霍奇同胚 $\widetilde{M}_{n,L}(C)\cong M^{\mathrm{SL}}(C\setminus p)$，它在由特殊线性群$_n$ →射影一般线性群$_n$ 于对应两侧诱导的商映射下下降为典范同胚 $\widehat{M}_{n,d}(C)\cong M^{\mathrm{PGL}}(C\setminus p)$。

现在，由于 Γ 在 $M_{n,L}(C)$ 上的作用是泛自由的，从而 $M_{n,L}(C)\to M_{n,d}(C)=M_{n,L}(C)/\Gamma$ 在某个 Zariski 开集上是平展的（其原像在 $M_{n,L}(C)$ 的欧氏拓扑中稠密），我们看到，$M_{n,L}(C)$ 在 $M_{n,d}$ 的恒等映射上的同构由其到该开子集的限制所决定，因而由覆盖群 Γ 来标记。于是存在 $\mathcal{M}_g$,1 的一个 n^{2g} 重覆盖 S，其在 (C,p) 上的纤维由位于典范同胚 $\widehat{M}_{n,d}(C)\cong M^{\mathrm{PGL}}(C\setminus p)$ 之上、并由 Simpson 的非阿贝尔霍奇对应给出的纤维逐点同胚 $\widetilde{M}_{n,L}(C)\cong M^{\mathrm{SL}}(C\setminus p)$ 组成；并且由构造，在 S 上存在 $M_{n,\mathscr{L}}(\mathcal{C}_S)$ 与 $M^{\mathrm{SL}}(\mathcal{C}_S)$ 的相对同胚；特别地，$\pi_1(S)$ 在 $H^*(\widetilde{M}_{n,L}(C))$ 与 $H^*(M^{\mathrm{SL}})$ 上的单值化表示一致。□

注记 3.7。 [HT03] 的非阿贝尔霍奇对应并非先验典范的，因为正如 [HT04] 所述，在一般线性群的情形下，我们从 C 上的具有恒定中心曲率 $di\omega\mathrm{Id}_n$ 的联络模空间（与$M_{n,d}(C)$典范等同）转到 $C\setminus p$ 上的平坦联络空间（其在穿孔周围的单值化为 $e^{2\pi id/n}\mathrm{Id}_n$，并与 $M^{\mathrm{GL}}(C\setminus p)$典范等同），方法是取一组任意选定的、对应于生成元 $\pi_1(C\setminus p)$的环路的单值化。然而，由于改变同伦类中环路的选择会使单值化乘以 $\mathbb{C}^*$，我们确实得到 PGL 空间之间的典范对应。

事实上，应当存在一个典范的次数为 d 特殊线性群的非阿贝尔霍奇对应，定义在 $\mathcal{M}_{g,1}$ 上；它由 Simpson 在带 punctures 的曲线 $C\setminus p$ [Sim90]，上给出的抛物非阿贝尔霍奇对应所确定，或者更确切地说，等价地定义在根栈 $C(\frac{p}{n})$ [Sim11] 上。不过，无论如何，我们的结果只在 $\mathcal{M}_{g,1}$ 的有限覆盖上成立，而且由于

为 GL 以外的约化群表述这些对应关系会遇到一些困难$_n$（不过参见 [Hua+23] 和 [HS25]，其中给出了曲线上抛物丛的完整结果），我们不再进一步探讨这个问题。

鉴于前一个命题，定理 1.1 和推论 1.2 与相应的 Higgs 向量丛版本，即定理 3.4 和推论 3.5。

References

[Ban+26] Ishan Banerjee 等。万有特征簇的稳定上同调。2026。arXiv: 2512.13879 [math.AG]。URL: https://arxiv.org/abs/2512.13879.[Cat21] Mark Andrea de Cataldo。“Dolbeault 模空间的射影紧化”。载于：Int. Math. Res. Not. IMRN 5 (2021)，第 3543–3570 页。ISSN: 1073- 7928,1687-0247. DOI: 10.1093/imrn/rnaa069。URL: https://doi.org/10.1093/imrn/rnaa069.[CHM12] Mark Andrea A. de Cataldo、Tam´as Hausel 和 Luca Migliorini。“Hitchin 系统的拓扑与特征簇的霍奇理论：情形 A_1”。载于：Ann. of Math. (2) 175.3 (2012)，第 1329–1407 页。ISSN: 0003-486X,1939-8980.DOI: 10.4007/annals.2012.175.3.7。URL: https://doi.org/10.4007/annals.2012.175.3.7.[Del71] Pierre Deligne。“霍奇理论 II”。载于：Inst. Hautes ´Etudes Sci. Publ. Math. 40 (1971)，第 5–57 页。ISSN: 0073-8301,1618-1913. URL: http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1971__40__5_0.[DM69] P. Deligne 和 D. Mumford。“给定亏格的曲线空间的不可约性”。载于：Inst. Hautes ´Etudes Sci. Publ. Math. 36 (1969)，第 75– 109 页。ISSN: 0073-8301,1618-1913。URL: http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1969__36__75_0.[Ful13] William Fulton。《交叉理论》。第 2 卷。Springer Science & Business Media，2013。[HP12] Tam´as Hausel 和 Christian Pauly。“谱覆盖的 Prym 簇”。载于：Geom. Topol. 16.3 (2012)，第 1609–1638 页。ISSN: 1465-3060,1364-0380。DOI: 10.2140/gt.2012.16.1609。URL: https://doi.org/10.2140/gt.2012.16.1609。[HS25] Pengfei Huang 和 Hao Sun。曲线上滤过 G-局部系统的模空间。2025。arXiv: 2304.09999 [math.AG]。URL: https://arxiv.org/abs/2304.09999.[HT03] Tam´as Hausel 和 Michael Thaddeus。“镜像对称、朗兰兹对偶与 Hitchin 系统”。载于：Invent. Math. 153.1 (2003)，第 197–229 页。ISSN: 0020-9910,1432-1297。DOI: 10.1007/s00222-003-0286-7。URL: https://doi.org/10.1007/s00222-003-0286-7。

[HT04] Tam´asHausel 和 Michael Thaddeus。“秩 2 Higgs 丛模空间上同调环的生成元”。载于：*Proc. London Math. Soc.(3)*88.3 (2004)，第 632–658 页。 ISSN: 0024-6115,1460-244X。 DOI: 10.1112/S0024611503014618。 URL: https://doi.org/10.1112/S0024611503014618

[Hua+23] Pengfei Huang 等。曲线上的温和抛物型非阿贝尔霍奇对应。2023 年。arXiv: 2205.15475 [math.AG]. URL: https://arxiv.org/abs/2205.15475.[LLS25] Aaron Landesman、Daniel Litt 和 Will Sawin。“高阶 Prym 表示的大单值”。载于：Geom. Topol. 29.5（2025），第 2733–2782 页。 ISSN: 1465-3060,1364-0380。 DOI: 10.2140/gt.2025.29.2733。 URL: https://doi.org/10.2140/gt.2025.29.2733.[Loo97] Eduard Looijenga。“映射类群的 Prym 表示”。载于：Geom. Dedicata 64.1（1997），第 69–83 页。 ISSN: 0046-5755,1572-9168。 DOI: 10.1023/A:1004909416648。 URL: https://doi.org/10.1023/A:1004909416648。[Mar02] Eyal Markman。“辛曲面上层的模空间的上同调环的生成元”。载于：J. Reine Angew. Math. 544（2002），第 61–82 页。 ISSN: 0075-4102,1435-5345。 DOI: 10.1515/crll.2002.028。 URL: https://doi.org/10.1515/crll.2002.028。[Mar07] Eyal Markman。“泊松曲面上层的模空间的上同调环的整数生成元”。载于：Adv. Math. 208.2（2007），第 622–646 页。 ISSN: 0001-8708,1090-2082。 DOI: 10.1016/j.aim.2006.03.006。 URL: https://doi.org/10.1016/j.aim.2006.03.006。[Mer15] Martin Mereb。“一族 Sl_n-特征簇的 E-多项式”。载于：Math. Ann. 363.3-4（2015），第 857–892 页。 ISSN: 0025-5831,1432-1807。 DOI: 10.1007/s00208-015-1183-2。 URL: https://doi.org/10.1007/s00208-015-1183-2。[MS21] Davesh Maulik 和 Junliang Shen。“端oscopic 分解与 Hausel-Thaddeus 猜想”。载于：Forum Math. Pi 9（2021），论文编号 e8，共 49 页。 ISSN: 2050-5086。 DOI: 10.1017/fmp.2021.7。 URL: https://doi.org/10.1017/fmp.2021.7。[Sim11] Carlos Simpson。“适当代数 V-流形上的局部系统”。载于：Pure Appl. Math. Q. 7.4（2011），第 1675–1759 页。 ISSN: 1558-8599,1558-8602。 DOI: 10.4310/PAMQ.2011.v7.n4.a27。 URL: https://doi.org/10.4310/PAMQ.2011.v7.n4.a27。[Sim90] Carlos T. Simpson。“非紧曲线上的调和丛”。载于：J. Amer. Math. Soc. 3.3（1990），第 713–770 页。 ISSN: 0894-0347,1088-6834。 DOI: 10。2307/1990935。 URL: https://doi.org/10.2307/1990935。[Sim94a] Carlos Simpson。“光滑射影簇的基本群表示的模空间。II”。载于：高等科学研究所学报。数学 80

（1994），第 5–79 页。 ISSN：0073-8301,1618-1913。 URL：http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1994__80__5_0。[Sim94b] Carlos T. Simpson。“光滑射影簇的基本群表示的模空间。I”。载于：高等科学研究所学报。数学 79（1994），第 47–129 页。 ISSN：0073-8301,1618-1913。 URL：http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1994__79__47_0。[Stacks] Stacks Project 作者。Stacks Project。 https://stacks.math.columbia.edu。2018 年。[Vak25] Ravi Vakil。《上升之海——代数几何基础》。普林斯顿大学出版社，美国新泽西州普林斯顿， [2025] ©2025，第 xxiii+662。 ISBN：978-0- 691-26866-8；978-0-691-26867-5；978-0-691-26868-2。[Yun11] Zhiwei Yun。“整体 Springer 理论”。载于：Adv. Math. 228.1（2011），第 266–328 页。 ISSN：0001-8708,1090-2082。 DOI： 10.1016/j.aim.2011.05.012。 URL：https://doi.org/10.1016/j.aim.2011.05.012。

Department of Mathematics, MIT, 77 Massachusetts Avenue, Cambridge, MA 02139,USA电子邮件地址：annelars@mit.edu