arXiv:2603.12486v1 [math.QA] 12 Mar 2026

经由双有理泊松映射在 GL_n 上的广义簇结构

MISHA GEKHTMAN ，MICHAEL SHAPIRO ，与ALEK VAINSHTEIN

Abstract. 在最近的一项工作中，我们构造了一个从单李群 $\mathcal{G}$ 到其自身的有理映射，该映射将 $\mathcal{G}$上的标准泊松–李结构与由一对经典杨–巴克斯特方程（经典杨–巴克斯特方程）的拟三角解（称为R矩阵）所定义的泊松齐次结构缠结在一起。我们还证明，在 SL_n的情形下，若与这些R矩阵相关联的组合Belavin–Drinfeld数据满足某些 *aperiodicity conditions*，则该映射事实上是双有理的，并可通过Berenstein–福明–泽列文斯基簇变量的拉回，用来得到 SL_n 上奇异簇结构的初始簇。第一作者与D. Voloshyn后来采用同一策略，描述了与由拟三角R矩阵定义的泊松-李括号的Poisson 对偶相容的广义簇结构。

本文进一步推广了双有理泊松映射在构造广义簇结构中的应用，将其用于非周期性条件不成立的情形。为此，我们描述了 GL_n 上的一种广义簇结构，该结构与由两个通过最长 Weyl 群元共轭相关的 Cremmer–Gervais 经典杨–巴克斯特方程解所定义的泊松齐次括号相容。我们构造中的关键要素是一个双有理映射，它将所考虑的括号与另外两个泊松括号联系起来：一个是 GL_{n-1} 上 Cremmer–Gervais 泊松-李括号的 Poisson 对偶，另一个定义在某个单变量复有理函数空间上，并与 Coxeter–Toda 流的簇代数诠释密切相关。我们构造中还发挥重要作用的，是关于 *regular pullback of a seed* 的新概念和关于 *almost-cluster structure* 的新概念，其详细描述见另一篇论文。

Contents

1. 引言 2 2. 预备知识与主要结果 5 2.1. 泊松–李群 5 2.2. 广义簇结构与相容泊松括号 7 2.3. 种子的正则拉回与近簇结构 8 2.4. 主要结果 9 2.5. 与 Cremmer–Gervais 括号相容的 $GL_n^\dagger$ 上的广义簇结构 10 2.6. 有理函数上的簇结构 12 2.7. 证明概要 14 3. 映射 Ψ 与定理 2.10 的证明 20

2020 *Mathematics Subject Classification.* 53D17, 13F60。*Key words and phrases.* 泊松–李群、簇代数、Belavin–Drinfeld 三元组、双有理泊松映射。

3.1. 映射 Ψ' 与定理 2.10(i) 的证明 20 3.2. 映射 Ψ'' 与定理 2.10(ii) 的证明 26 3.3. 定理 2.10(iii) 的证明 29 4. 显式表达式：定理 2.11 的证明 30 4.1. 定理 2.11(i) 的证明 30 4.2. 定理 2.11(ii) 的证明 32 4.3. 定理 2.11(iii) 的证明 36 4.4. 定理 2.11(iv) 的证明 37 5. 命题 2.14–2.16 的证明 38 5.1. 命题2.14 的证明 38 5.2. 命题 2.15 的证明及应用 38 5.3. 命题2.16 的证明 40 6. 相容性与环面作用 40 6.1. 预备结果 40 6.2. 相容性 43 6.3. 环面作用 51 7. 正则性与完备性 51 7.1. 定理 2.23 的证明 51 7.2. 突变序列 W_n：定理 2.24(i) 的证明 55 7.3. 定理 2.24(ii) 的证明 64 7.4. 定理 2.17 证明的最后步骤 70 7.5. 定理2.25 的证明 71 附录：有理函数空间上的正则完备簇结构 72 参考文献 74

1. Introduction

自福明和泽列文斯基发现簇代数以来，探索代数簇正则函数环上的簇结构一直是簇代数理论中最活跃的研究方向之一。文献中构造簇结构的两种方法有着明显区别。第一种方法依托于 Weyl 群和辫群的组合理论，并已成功应用于许多代数簇，尤其是李理论中出现的代数簇：从簇代数发展初期的格拉斯曼流形 [23] 和单连通单李群 [2] 的双布吕阿胞，到近期关于辫簇上簇结构的研究 [4]。第二种方法由作者在 [9] 中开创，他们在那里引入了与簇变换相容的泊松结构这一概念，并首次实施了这样一种策略：从一个正则对数典范坐标卡出发，在泊松簇的正则函数环中构造簇结构。此处的泊松括号是相对于 GL_n 自然作用的泊松齐次括号，而 GL_n 配备了标准泊松–李括号；由此得到的簇结构与 [23] 中的簇结构最终证明是一致的。同样，在 [10,第 4 章3] 中，我们证明了 [2] 在单连通单李群 $\mathcal{G}$ 的双布吕阿胞上的簇结构，与 $\mathcal{G}$上的标准泊松–李结构相容。

但是，如果改变底层代数簇上的泊松括号，会发生什么？是否仍存在与之相容的簇结构？如果存在，它与原来的簇结构有什么关系？我们在 [12] 中针对简单泊松–李群提出了这个问题；同时，我们注意到，早在 SL_2 中就存在一种与任何簇结构都不相容的泊松–李括号，并据此提出猜想：对于与经典杨–巴克斯特方程（CYBE）的拟三角解相对应的泊松–李括号，存在与之相容的簇结构。这些解由 Belavin 和 Drinfeld 在 [1]中分类，称为 R矩阵。它们由离散数据和连续参数加以参数化：离散数据由 $\mathcal{G}$ 的李代数根系中正根的两个子集之间的等距映射构成；连续参数则可描述为 Cartan 子代数张量平方中的一个元素，并满足由离散数据决定的线性方程组。离散数据决定了 R矩阵及相应泊松–李括号的一个 Belavin–Drinfeld（BD）类，而连续数据则指定该类中的一个具体 R矩阵及一个括号。给定 $\mathcal{G}$ 上的两个此类括号，且它们分别对应于两个 BD 类的代表元，我们可以定义一个配备直积泊松结构的泊松–李群 $\mathcal{G}\times\mathcal{G}$，进而构造 $\mathcal{G}$ 上的泊松齐性结构，其中 $\mathcal{G}$ 承载着 $\mathcal{G}\times\mathcal{G}$ 通过右乘与左乘给出的作用。

在一系列论文中，最终我们研究了 [18], [19], 所提出猜想的一个扩展版本：对于任意一对BD数据所关联的泊松齐次括号，在 $\mathcal{G}$的正则函数环中都存在一个与之相容的正则完备簇结构，该结构也可能是广义的。在 [18], [19], 中，我们证明了当BD数据为非周期的时， SL_n 满足这一猜想。这里，非周期性是指由BD数据的离散部分在单正根上自然诱导的某个映射 δ 没有周期轨道。 [19] 阐明了非周期性条件的几何意义；在该文中，我们采用了一种新方法，为所研究的泊松齐次括号在 $\mathcal{G}$ 上构造正则对数正则坐标图。这是揭示我们所寻求的簇结构的首要且关键的一步。与 [18], 不同，后者采用特设猜想来确定一个初始对数正则函数族，证明则由冗长的直接计算构成；在 [19] 中，我们构造并利用了一个有理泊松映射 $h^{r,r'}$，它连接了两个赋有不同泊松齐次结构的 $\mathcal{G}$ 副本。其中一个是 $\{\cdot,\cdot\}_{r,r'}$，由来自两个任意BD类的R矩阵对决定。另一个是 $\{\cdot,\cdot\}_r^{\mathrm{st}},_{r'}$，对应于来自标准BD类的两个R矩阵，其嘉当部分分别与 r,r'的嘉当部分相匹配。映射 $h^{r,r'}$ 将 $(\mathcal{G},\{\cdot,\cdot\}_r^{\mathrm{st}},_{r'})$ 映到 $(\mathcal{G},\{\cdot,\cdot\}_{r,r'})$。在BD数据为非周期的 SL_n 情形下， $h^{r,r'}$ 是双有理的，因此我们能够将标准簇结构 $\mathcal{G}$ 中一个恰当选取的簇拉回，从而得到一个初始种子，使之构成与 $\{\cdot,\cdot\}_{r,r'}$相容的簇结构。

在 [17], 中，我们考察了 SL_6 中的一个非非周期BD数据的例子，以说明这种情形下广义簇交换关系的出现，并概述了一种相容的广义簇结构的猜想性构造。我们将在未来的出版物中重新讨论这一构造。不过，必须强调 [17]中所考察的例子所揭示的一个关键点。也就是说，在 SL_n的非非周期情形下，由 BD 数据诱导的映射 δ 在正单根集合上的周期轨道被划分为若干等价类。每个等价类族都会产生一个无限周期阶梯矩阵，其广义特征

多项式给出了相应广义簇交换关系的系数。

本文进一步阐明了在非非周期情形下出现于 SL_n 的广义簇结构，并全面分析了 $\mathcal{GC}_n$ 上的一种广义簇结构 SL_n （以及它在 GL_n 和 Mat$_n$ 上的扩展），该结构与 $\{\cdot,\cdot\} = \{\cdot,\cdot\}_{r,\ r'}$ 相容，其中 r 和 r' 是两个满足经典杨–巴克斯特方程的 Cremmer–Gervais 解，它们通过 Weyl 群最长元的共轭相关联。我们选择这个例子，是因为从某种意义上说，它代表了一种“纯粹”的非非周期情形：相应的映射 δ 仅有周期轨道，且这些轨道构成单个等价类。某种程度上，这一非周期对 (r, r') 的选择，反映了我们对非周期情形进行系统研究的进展；该研究始于 [13, 14], ，当时我们描述了与 Cremmer–Gervais 泊松-李括号相容的奇异簇结构。

本文进一步推进一种基于双有理泊松映射、从已知结构恢复新的（广义）簇结构的方法。继 [19],之后，这一方法也在 [21] 中被用于描述与 Poisson 对偶 $\{\cdot,\cdot\}_r^\dagger$ 相容的广义簇结构，该对偶对应于由经典杨–巴克斯特方程的拟三角解 r 所定义的泊松-李括号。我们以 [21] 中的构造作为关键要素来定义双有理映射 Ψ ，该映射将上文所定义的括号 $\{\cdot,\cdot\}$ 与另外两个泊松括号联系起来：Cremmer–Gervais Poisson–Lie 括号的 Poisson 对偶 $\{\cdot,\cdot\}^\dagger$ （位于 SL_{n-1}上），以及括号 $\{\cdot,\cdot\}^T$，它定义在某个一元复有理函数空间 $\bar{\mathcal{R}}_n$ 上，该空间与我们在 [11]中、于 Coxeter–Toda 流的 B¨acklund–Darboux 变换的簇代数解释这一背景下所研究的空间密切相关。利用种子的正则拉回这一概念，我们应用 Ψ 以得到 $\mathcal{GC}_n$ 的初始种子，这些种子来自与 $\{\cdot,\cdot\}^\dagger$ 和 $\{\cdot,\cdot\}^T$相容的结构的初始种子，其中前者（广义）构造于 [21]，后者则是 [11]中那个结构的轻微修改。我们期望映射$(SL_n, \{\cdot,\cdot\}) \to (SL_{n-1}, \{\cdot,\cdot\}^\dagger)$——它出现在我们对 Ψ 的构造中——对于任意非非周期BD数据，就 δ 的周期轨道的每一个等价类而言都有一个类似物，其目标空间为$(SL_k, \{\cdot,\cdot\}^\dagger)$，其中 k 由该数据决定，但$\{\cdot,\cdot\}^\dagger$ 与本文中相同。Poisson 空间$(\bar{\mathcal{R}}_n, \{\cdot,\cdot\}^T)$应当替换成什么，才能对任意非非周期BD数据定义映射 Ψ 的类似物，这一问题是我们未来研究的主要方向之一。

本文安排如下。第 2 节首先简要回顾必要的背景知识，包括泊松–李群、由准三角 r-矩阵的 Belavin–Drinfeld 分类所产生的单李群上的泊松齐次结构，以及与泊松括号相容的广义簇结构。我们还在第 2.3 节讨论种子的正则拉回这一概念，它在我们的主要构造中发挥重要作用；关于这一主题的更详细讨论见另一篇论文 [20]。在第 2.4 节，我们定义了本文研究的核心对象——泊松齐次括号 $\{\cdot,\cdot\}$ ，它对应于“相反”Cremmer–Gervais 数据的非周期对——并陈述主要结果，即关于存在与 $\{\cdot,\cdot\}$ 相容的广义簇结构 $\mathcal{GC}_n$ 的定理 2.2。第 2 节余下部分概述主定理的证明，该证明依赖于一个双有理映射 Ψ 的定义及其性质；此映射将括号 $\{\cdot,\cdot\}$ 与另外两个泊松括号联系起来：Poisson 对偶

$\{\cdot,\cdot\}^{\dagger}$ 到 GL_{n-1} 上的 Cremmer–Gervais 泊松-李括号，以及某个空间 $\mathcal{R}_n$ 上的括号 $\{\cdot,\cdot\}^{T-}$。该空间由与一个变量有关的复有理函数构成，与我们在 [11] 中研究的空间密切相关；当时我们是在簇代数解释 Coxeter–Toda 流的 B¨acklund–Darboux 变换的背景下进行研究的。通过经由 Ψ 对与 $\{\cdot,\cdot\}^{\dagger}$ 和 $\{\cdot,\cdot\}^{T}$ 相容的结构的初始簇进行正则拉回，我们得到 $\mathcal{GC}_n$ 的初始种子。所需的对 [11] 构造进行修改的证明见附录。

构成主定理证明步骤的结果陈述于第2.7节。其详细证明见第3—7节。其中包括若干额外的技术性结论，我们认为它们或许在本文的具体语境之外也有用，例如命题 2.15，它阐明了与泊松括号相容的簇结构中冻结变量的泊松几何性质。

我们的研究部分得到美国国家科学基金会研究基金 DMS #2100785（M. G.）和 DMS #2100791（M. S.），以及以色列科学基金会基金 #876/20 和 #2848/25（A. V.）的资助。在继续开展这一项目期间，我们受益于以下机构提供的支持与热情接待：国际数学科学中心，爱丁堡（M. G.、M. S.、A. V.，2023年夏；M. S.，2024年夏、2025年春）；高等科学研究所，布尔叙尔伊韦特（A. V.，2023年秋）；海德堡大学数学研究所（M. G.，2024年夏，获墨卡托奖学金资助）；马克斯·普朗克数学科学研究所（M. G.，2024/25年夏季）；密歇根州立大学（A. V.，2025年春）；弗朗切斯科·塞韦里国家高等数学研究所和拉奎拉大学（A. V.，2025年春）；纯数学与应用数学研究所和里约热内卢天主教大学（M. S.，2025年夏）。我们感谢所有这些机构的热情接待，以及它们提供的卓越工作条件。特别感谢 P. Pushkar' 和 D. Voloshyn 与我们进行了宝贵的讨论。

2. Preliminaries and Main Result

2.1. 泊松–李群。配备泊松括号 $\{\cdot,\cdot\}$ 的约化复李群 $\mathcal{G}$，若其乘法映射 $\mathcal{G}\times\mathcal{G}\ni(X,Y)\mapsto XY\in\mathcal{G}$ 为泊松映射，则称为泊松–李群。或许，最重要的一类泊松–李群是与拟三角李双代数相关联的一类，这些李双代数是用经典 R 矩阵定义的（详细介绍这些结构，参见例如 [5, 第 1], [22] 章和 [26] ）。

令 $\mathfrak{g}$ 为与 $\mathcal{G}$ 对应的李代数，$\langle\cdot$ 为 $\mathfrak{g}$ 上的不变非退化形式，并令 $\mathfrak{t}\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ 为相应的卡西米尔元。对于任意元素 $r=\sum_i a_i\otimes b_i\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$，记

$$[[r,r]]=\sum_{i,j}[a_i,a_j]\otimes b_i\otimes b_j+\sum_{i,j}a_i\otimes[b_i,a_j]\otimes b_j+\sum_{i,j}a_i\otimes a_j\otimes[b_i,b_j]$$

以及 $r^{21}=\sum_i b_i\otimes a_i$。经典 R 矩阵是一个满足经典杨-巴克斯特方程（经典杨–巴克斯特方程） $[[r,r]]=0$ 并满足条件$r+r^{21}=\mathfrak{t}$的元素 $r\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$。与 r 对应的 $\mathcal{G}$ 上的泊松-李括号可写为

$$\begin{aligned}\{f_1,f_2\}_r&=\langle R_+(\nabla^L f_1),\nabla^L f_2\rangle-\langle R_+(\nabla^R f_1),\nabla^R f_2\rangle\\&=\langle R_-(\nabla^L f_1),\nabla^L f_2\rangle-\langle R_-(\nabla^R f_1),\nabla^R f_2\rangle,\end{aligned}\tag{2.1}$$

其中 R_+、$R_- \in \operatorname{End}\mathfrak{g}$ 由 $\langle R_+\eta, \zeta\rangle = \langle r, \eta\otimes\zeta\rangle$、$-\langle R_-\zeta, \eta\rangle = \langle r, \eta\otimes\zeta\rangle$给出，对任意 η、$\zeta \in \mathfrak{g}$ 成立；而 ∇^L、∇^R 是关于 $\langle\cdot$的 $\mathcal{G}$上函数的右梯度和左梯度，其定义为

$$\left\langle \nabla^R f(X), \xi \right\rangle = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(e^{t\xi}X), \quad \left\langle \nabla^L f(X), \xi \right\rangle = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(Xe^{t\xi})$$

对任意 $\xi \in \mathfrak{g}$、$X \in \mathcal{G}$。

$\mathfrak{g}$ 的双是 $D(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}$，配备不变非退化双线性形式 $\langle\langle(\xi,\eta)$、$(\xi',\eta')\rangle\rangle = \langle\xi,\xi'\rangle - \langle\eta,\eta'\rangle$。定义 $D(\mathfrak{g})$ 的子代数 $\mathfrak{d}_\pm$，使得 $\mathfrak{d}_+ = \{(\xi,\xi) : \xi \in \mathfrak{g}\}$，且 $\mathfrak{d}_- = \{(R_+(\xi)\ R_-(\xi)) : \xi \in \mathfrak{g}\}$。利用关于 $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ 的右梯度和左梯度，可以在 $D(\mathcal{G}) = \mathcal{G}\times\mathcal{G}$ 上定义泊松–李结构，它是群 $\mathcal{G}$ 的 Drinfeld 双，详情参见 [15] 。

对角子群 $\{(X,X) : X \in \mathcal{G}\}$ 是 $D(\mathcal{G})$ 的泊松–李子群（其李代数为 $\mathfrak{d}_+$），且自然同构于 $(\mathcal{G}, \{\cdot,\cdot\}_r)$。李代数为 $\mathfrak{d}_-$ 的群 $\mathcal{G}^*$ 是 $D(\mathcal{G})$ 的泊松–李子群，称为 $\mathcal{G}$ 的对偶泊松–李群。映射 $D(\mathcal{G}) \to \mathcal{G}$，由 $(X,Y) \mapsto U = X^{-1}Y$ 给出，在 $\mathcal{G}$ 上诱导出另一种泊松括号，参见 [22]；我们将此括号记为 $\{\cdot,\cdot\}_r^\dagger$。此映射在 $\mathcal{G}^*$ 上的限制的像记为 $\mathcal{G}^\dagger = (\mathcal{G}, \{\cdot,\cdot\}_r^\dagger)$。正如 [15, 引理 5.5] 所证明的（见其中公式（5.6））， 该括号由下式给出

$$\{f_1,f_2\}_r^\dagger = \langle R_+([\nabla f_1, U]), [\nabla f_2, U]\rangle - \langle [\nabla f_1, U], \nabla f_2 \cdot U\rangle. \tag{2.2}$$

正如 [18, 19], 中所详细解释的，考虑括号（2.1）的如下推广是很自然的。设 r、$\bar r$ 为两个经典 R 矩阵，且 R_+、R_+ 为相应的算子，则记为

$$\{f_1,f_2\}_{r,\bar r} = \langle \bar R_+(\nabla^L f_1), \nabla^L f_2\rangle - \langle R_+(\nabla^R f_1), \nabla^R f_2\rangle. \tag{2.3}$$

根据 [22, 命题 12，11], 上述表达式定义了一个泊松括号；除非 $r = \bar r$，否则它不是泊松–李括号。在 $r = \bar r$的情形下，$\{f_1,f_2\}_{r,\ r}$ 显然与$\{f_1,f_2\}_r$重合。括号（2.3）在 $\mathcal{G}$ 上定义了一个泊松齐性结构，其中左乘和右乘分别对应于泊松–李群（$\mathcal{G}$、$\{\cdot,\cdot\}_{\bar r}$）和（$\mathcal{G}$、$\{\cdot,\cdot\}_r$）。它将是本文研究的主要对象之一。

单复李群的经典 R 矩阵分类由 Belavin 和 Drinfeld 在 [1]中给出。设 $\mathcal{G}$ 为一个单复李群，Φ 为与其李代数 $\mathfrak{g}$相关联的根系，Φ^+ 为正根集合，$\Pi \subset \Phi^+$为正单根集合。一个 Belavin–Drinfeld 三元组 $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma_1, \Gamma_2, \gamma)$（下文简称 BD 三元组）由 Π 的两个子集 Γ_1、Γ_2 以及一个等距映射γ: $\Gamma_1 \to \Gamma_2$ 组成，并满足如下幂零条件：对每个 $\alpha \in \Gamma_1$，存在 $m \in \mathbb{N}$，使得 $\gamma^j(\alpha) \in \Gamma_1$（$j \in [0, m-1]$成立），但 $\gamma^m(\alpha) \notin \Gamma_1$。我们称满足 γ^*的 BD 三元组$\mathbf{\Gamma}^* = \{\Gamma_2, \Gamma_1, \gamma^*\}$为：由 $\gamma^*(\gamma(\alpha)) = \alpha$定义的 $\Gamma_2 \to \Gamma_1$，其中 $\alpha \in \Gamma_1$取 $\mathbf{\Gamma}$的伴随。回忆一下，$\mathfrak{g}$ 的 Weyl 群的最长元 w_0 作用于Φ，并将正单根映射为负单根。我们通过 $\mathbf{\Gamma}^{w_0} = \{-w_0\Gamma_1, -w_0\Gamma_2, \gamma^{w_0}\}$定义 $\mathbf{\Gamma}$的 w_0-共轭，其中 γ^{w_0}: $-w_0\Gamma_1 \to -w_0\Gamma_2$由 $\gamma^{w_0}(-w_0\alpha) = -w_0\gamma(\alpha)$给出，且 $\alpha \in \Gamma_1$。

等距映射 γ 给出了李子代数 $\mathfrak{g}^{\Gamma_1}$ 与 $\mathfrak{g}^{\Gamma_2}$ 之间的一个同构（也记作 γ），它们分别对应于 Γ_1 和 Γ_2。该同构由性质$\gamma e_\alpha = e_{\gamma(\alpha)}$ 唯一确定，其中 $\alpha \in \Gamma_1$，而 e_α 是对应于根 α的 Chevalley 生成元。同构 γ^*: $\mathfrak{g}^{\Gamma_2} \to \mathfrak{g}^{\Gamma_1}$ 定义为关于双线性形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle$与 γ互为伴随的映射。它对应于等距映射 γ^*，并由下式给出

$\gamma^* e_{\gamma(\alpha)} = e_\alpha$ ，其中 $\alpha \in \Gamma_1$。通过首先分别关于 $\langle \cdot, \cdot \rangle$对 $\mathfrak{g}^{\Gamma_1}$ （或 $\mathfrak{g}^{\Gamma_2}$）作正交投影， γ 和 γ^* 都可以扩展为从 $\mathfrak{g}$ 到自身的映射；显然，扩展后的映射仍互为伴随。注意， γ 和 γ^* 在 $\mathfrak{g}$ 的正幂零子代数$\mathfrak{n}_+$ 和负幂零子代数 $\mathfrak{n}_-$ 上的限制，分别是从 $\mathfrak{n}_+$ 和 $\mathfrak{n}_-$ 到自身的李代数同态，并且对所有 $\alpha \in \Pi \setminus \Gamma_1$， $\gamma(e_{\pm\alpha}) = 0$。此外，如果 $\mathfrak{g}$ 是单连通的，那么 γ 可以提升为$\boldsymbol{\gamma} = \exp \gamma$；注意， $\boldsymbol{\gamma}$ 仅定义在分别对应于 $\mathfrak{n}_+$ 和 $\mathfrak{n}_-$的子群 $\mathcal{N}_+$ 和 $\mathcal{N}_-$ 上，并且是群同态。

根据分类定理，每个经典 R 矩阵都等价于一个来自由 BD 三元组 $\mathbf{\Gamma}$定义的 Belavin–Drinfeld 类的 R 矩阵 $r^{\mathbf{\Gamma}}$ 。对应于该类中某个元素的算子$R_+^{\mathbf{\Gamma}}$ 为

$$R_+^{\mathbf{\Gamma}} = R_0^{\mathbf{\Gamma}} + \frac{1}{1-\gamma}\pi_> - \frac{\gamma^*}{1-\gamma^*}\pi_<, \tag{2.4}$$

其中 $\pi_>$、 $\pi_<$ 是 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{n}_+$ 和 $\mathfrak{n}_-$ 上的投影，而 $R_0^{\mathbf{\Gamma}}$ 作用于 $\mathfrak{h}$ （更多细节见 [18] ）。

2.2. 广义簇结构与相容泊松括号。遵循 [15, 16], ，我们回顾由带重数的箭图表示的广义簇结构的定义。设 $Q = (Q, d_1, \ldots, d_N)$ 是一个定义在 N 个可变顶点和 M 个冻结顶点上的箭图，并且每个可变顶点 d_i 具有正整数重数。若某个顶点的重数大于 1，则称其为特殊顶点。若一个冻结顶点未与任何其他顶点相连，则称其为孤立顶点。

扩展种子是一个三元组 $\Sigma = (\mathbf{x}\ Q, \mathcal{P})$，其中 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}, \ldots, x_{N+M})$ 是附属于 Q 顶点的簇变量和冻结变量，而 $\mathcal{P}$ 是一组 N 字符串。第 i 个字符串是由单项式 $p_{ir} \in \mathbb{A} = \mathbb{Z}[x_{N+1}, \ldots, x_{N+M}]$,$0 \le r \le d_i$ 组成的集合，满足 $p_{i0} = p_{id_i} = 1$；若 $d_i = 1$，则称其为平凡字符串，因此该字符串的两个元素都等于 1。单项式 p_{ir} 称为交换系数。

给定上述种子，方向 $k, 1 \le k \le N$ 上相邻的簇定义为 $\mathbf{x}' = (\mathbf{x} \setminus \{x_k\}) \cup \{x_k'\}$，其中新的簇变量 x_k' 由广义交换关系给出

$$x_k x_k' = \sum_{r=0}^{d_k} p_{kr} u_{k;>}^r v_{k;>}^{[r]} u_{k;<}^{d_k - r} v_{k;<}^{[d_k - r]} \tag{2.5}$$

with

$$u_{k;>} = \prod_{k \to i \in Q} x_i, \qquad u_{k;<} = \prod_{i \to k \in Q} x_i,$$

and

$$v_{k;>}^{[s]} = \prod_{N+1 \le i \le N+M} x_i^{\lfloor s b_{ki}/d_k \rfloor}, \qquad v_{k;<}^{[s]} = \prod_{N+1 \le i \le N+M} x_i^{\lfloor s b_{ik}/d_k \rfloor},$$

其中， b_{ki} 是从 k 到 i 的边数，而 b_{ik} 是从 i 到 k 的边数。字符串保持不变，除了第 k 个字符串反向：$p'_{kr} = p_{k,d_k - r}$。

方向 k 上箭图变异的标准定义修改如下：如果路径 $i \to k \to j$ 中的两个顶点 i 和 j 都是可变的，那么该路径会为变异后的箭图 Q' 贡献 d_k 条 $i \to j$；如果顶点 i 或 j 中有一个是冻结的，那么该路径会为 Q' 贡献 d_j 或 d_i 条 $i \to j$。顶点上的重数不变。注意，孤立顶点在 Q' 中仍然保持孤立。

给定一个扩展种子 $\Sigma = (\mathbf{x}\ Q, \mathcal{P})$，若种子 $\Sigma' = (\mathbf{x}', Q', \mathcal{P}')$ 与 Σ 相邻（方向为 k），则称其与 Σ 相邻，当 $\mathbf{x}'$、Q' 和 $\mathcal{P}'$ 如上所述。若两个这样的种子可以通过一系列两两相邻的种子连接起来，则称它们突变等价。所有与 Σ 突变等价的种子构成的集合称为与 Σ 相关联的广义簇结构，记作 $\mathcal{GC} = \mathcal{GC}(\Sigma)$。

固定一个基环 $\widehat{\mathbb{A}}$，使得 $\mathbb{A} \subseteq \widehat{\mathbb{A}} \subseteq \bar{\mathbb{A}} = \mathbb{Z}[x_{N+1}^{\pm 1}, \ldots, x_{N+M}^{\pm 1}]$。广义上簇代数$\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{GC})$是在 $\mathcal{GC}$中所有种子上取的、关于簇变量的、系数属于 $\mathbb{A}$ 的Laurent多项式环的交集。设 V 是 $\mathbb{C}$上的有理簇， $\mathbb{C}(V)$是 V的函数域， $\mathcal{O}(V)$是 V上的正则函数环。 $\mathbb{C}(V)$中的广义簇结构 $\mathcal{GC}$ 是将$\mathbf{x}$嵌入 $\mathbb{C}(V)$，且该嵌入可延拓为环境域与 $\mathbb{C}$ 的张量积和 $\mathbb{C}(V)$之间的域同构。若任一簇中的任一簇变量都属于 $\mathcal{O}(V)$，则称其在 V 上正则；若$\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{GC})$与 $\mathbb{C}$ 的张量积同构于 $\mathcal{O}(V)$，则称其完备。基环的选取在 [15, 第2节1]中讨论。

设 $\{\cdot,\cdot\}$ 为环境域上的泊松括号， $\mathcal{GC}$ 为广义簇结构。若任一扩展簇 $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, \ldots, x_{N+M})$关于 $\{\cdot,\cdot\}$是对数正则的，即 $\{x_i, x_j\} = \omega_{ij} x_i x_j$，其中对所有 i、j、$1 \le i$、$j \le N+M$， $\omega_{ij} \in \mathbb{Z}$ 均为常数，则称该括号与该广义簇结构相容。在相容性研究中起关键作用的，是簇变量与冻结变量中某些称为 y-变量的Laurent单项式。它们对任意可变顶点 $k \in Q$ 由下式定义

$$y_k = \frac{u_{k;>} v_{k;>}}{u_{k;<} v_{k;<}}. \tag{2.6}$$

2.3. 种子的正则拉回与几乎簇结构。设 $\Psi : \mathbb{A}^{L'} \to \mathbb{A}^{L}$ 为支配有理映射。假设 $\mathbb{A}^{L}$ 上的正则函数代数被赋予由初始种子$\Sigma = (\mathbf{x}\ Q)$所定义的簇结构 $\mathcal{C}$ 。设 x_k 为附属于 Q的顶点 k 的簇变量；令$\tilde{x}_k = x_k \circ \Psi$。显然， $\tilde{x}_k$ 是 $\mathbb{A}^{L'}$上的有理函数；设 u_k 与 z_k 分别为 $\tilde{x}_k$的分子与分母，并假定它们互素。进一步，设 $\{w_p\}_{p=1}^{P}$为 Q 所有顶点处分母 z_k 的全部不可约因子所成之族，从而每个 z_k 可写成 $z_k = \prod_{p=1}^{P} w_p^{\lambda_{pk}}$，其中 λ_{pk}为某个非负整数；多项式 w_p 称为特异多项式。顶点 k 相对于 w_p 的偏差由下式定义

$$\delta_{pk} = \sum_i b_{ik} \lambda_{pi} - \sum_j b_{kj} \lambda_{pj}. \tag{2.7}$$

定义箭图 $\Psi^* Q$ 为 Q 的一个副本，并附加 P 个冻结顶点，分别对应于 w_p、$p \in [1, P]$。冻结顶点 p与 $\Psi^* Q$中的顶点 k 之间有 $|\delta_{pk}|$ 条箭头；若 $\delta_{pk} < 0$，箭头方向从 k 指向 p，否则方向相反。由此得到种子 $\Psi^*\Sigma = (\mathbf{u}\ \Psi^* Q)$：将 u_k 附加到顶点 k，并将 w_p 附加到冻结顶点 p。此种子称为Σ的正则拉回。根据基环的选择，它定义了$\mathbb{A}^{L'}$ 上的簇结构，或定义了准仿射代数簇 $U \subset \mathbb{A}^{L'}$ 上的簇结构；后者由某些 w_p 非零所确定。

以下事实是定义的直接推论。

命题 2.1. 种子 $\Psi^*\Sigma$ 的 y-变量与种子 Σ的 y-变量经 Ψ 的拉回相重合。

注意，一般而言，种子的拉回与突变不可交换。若二者可交换，则该拉回称为相容的。相容正则拉回存在的充分条件见 [20]。

正则拉回的构造可以推广到一般化簇结构的情形。在这种情况下，箭图 Ψ^*Q 可能包含特殊类型的 2-圈，即重数大于一的顶点与冻结顶点之间的反向箭头。重数为$d_k > 1$ 的顶点处的偏差表达式 (2.7) 经过修改：将可变邻点的贡献乘以 d_k，并保留冻结邻点的贡献。与簇结构的正则拉回情形不同，偏差 δ_{pk} 仅表示 k 与 p 之间两个相反方向箭头数量的差。要确定箭头的实际数量，还需要额外信息。这些信息包括函数 $\chi_{pk}(r)$、 $r \in [0, d_k]$以及斜率 τ_{pk} ，它们通过广义交换关系 (2.5) 各项中的多项式 w_p 的次数来定义；详见 [20, 第 4] 节。若满足相容性条件，种子 $\Psi^*\Sigma = (\mathbf{u}\ \Psi^*Q, \Psi^*\mathcal{P})$便定义了一个近簇结构。在这类结构中，交换关系的首项和末项不必互素，因为其中可能包含同一冻结变量的某些幂。近簇结构的上簇代数与簇结构的情形类似，定义为对所有种子取 Laurent 多项式环（其系数环为冻结变量的多项式环）所得的交集。

当准仿射代数簇 V 上的正则广义簇结构被提升到环境仿射空间 $\mathbb{A}^L$ 时，也会出现类似的情形。在这种情况下，特征多项式 w_p 由不可约多项式取代，这些多项式定义了除子，而这些除子的并集就是 $\mathbb{A}^L$ 中 V 的补集。在 [20, 定理 6.2] 中，我们给出充分条件，使得 V 上的正则完备广义簇结构在 $\mathbb{A}^L$ 上具有相容的完备正则拉回。

2.4. 主要结果。对 [18, 19] 中与括号 (2.3) 相容的 $\mathcal{G}$ 上簇结构的研究表明，BD 三元组对 $(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Gamma})$ 大致分为两种本质不同的类型 [-]。区分这两种类型的条件可以用映射 $\delta = (-w_0)\bar{\gamma}^*(-w_0)\gamma$ 来表述：若存在 $\alpha \in \Gamma_1$ 和自然数 $m > 0$ ，使得 $\delta^m(\alpha) = \alpha$，则称一对 $(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Gamma})$ 不满足非周期性条件；否则称该对 $(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Gamma})$ 为非周期对（关于相应 BD 图的无环性如何体现这两种类型，详见 [18, 第 3.1] 节）。文献 [18, 19] 全面研究了与非周期 BD 三元组对相容的 SL_n 上的簇结构。违反非周期性条件的情形复杂得多，并会导向广义簇结构。构造此类 BD 三元组对 $(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Gamma})$ 的最简单方法是选取 $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^{w_0}$。在自对偶情形 $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^{w_0}$ 下，这会产生与泊松–李结构相容的广义簇结构。这类情形中规模最小的例子出现在 $n = 6$ ，并在 [17] 中作了详细讨论。

本文研究 Cremmer–Gervais BD 三元组$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{CG}}$对应的数对（$\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Gamma}^{w_0}$）。具体而言，设 $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\}$ 为 $\mathfrak{sl}_n$情形下的正单根集合；Cremmer–Gervais 三元组由 $\Gamma_1 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}\}$、$\Gamma_2 = \{\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}\}$和 γ给出： $\alpha_i \mapsto \alpha_{i+1}$对于 $i \in [1, n-2]$。注意，在此情形下$\mathbf{\Gamma}^{w_0} = \mathbf{\Gamma}^*$。回顾一下，对应 Cremmer–Gervais 三元组的非周期对（$\mathbf{\Gamma}^{\mathrm{CG}}, \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{CG}}$）的研究，提供了$GL_n$上的奇异簇结构的首批实例之一，参见 [13, 14]。令 $\{\cdot, \cdot\}$ 表示满足 $r = r^{\mathbf{\Gamma}}$ 和 $\bar{r} = r^{\mathbf{\Gamma}^{w_0}}$的括号（2.3）

对于 $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{CG}}$。我们沿用相同记号，表示该括号在 GL_n 上的泊松括号提升，其中 $\det X$ 是一个卡西米尔元。本文的主要结果是

定理 2.2. 对任意 $n \geq 4$，存在一个与 $\{\cdot,\cdot\}$ 相容的 GL_n 上的正则完备广义簇结构 $\mathcal{GC}_n$ 。

注 2.3. 定理中提到的广义簇结构的基环是 $\mathbb{C}[x_{1n}, x_{n1}, \det X^{\pm 1}]$。照常，经过显而易见的子式修改，同一构造可在基环 $\mathbb{C}[x_{1n}, x_{n_1}]$ 上为 SL_n 提供一个正则完备广义结构。将此结构扩展到 Mat_n（基环为 $\mathbb{C}[x_{1n}, x_{n1}, \det X]$）则稍微复杂一些，将在第 2.7.6 节中讨论。

注 2.4. 定理 2.2 对 $n = 3$ 也成立。$n = 3$ 的情形比较特殊，而对 $n \geq 4$ 适用的某些构造需要作出修改。配套论文 [20] 对此进行了详细讨论。

事实上，对于 $n \geq 4$，我们将 $\mathcal{GC}_n$ 构造为两种簇结构的 amalgamation；这两种结构与此前已知的两种结构密切相关：$r = r^{\mathbf{\Gamma}^{\mathrm{CG}}}$ 的 $GL_{n-1}^{\dagger}$ 上与括号 (2.2) 相容的广义簇结构，该结构在[21] 中研究；以及在 [11]中研究的有理函数上的簇结构。为使论述自成一体，我们在下文简要介绍这些结构。

2.5. 与 Cremmer– Gervais 括号相容的 $GL_n^{\dagger}$ 上的广义簇结构。$GL_n^{\dagger}$ 上与任意 BD 数据的括号 (2.2) 相容的正则完备广义簇结构是在 [21]中构造的。本文需要将这一构造特化到 Cremmer–Gervais BD 数据的情形。记 $\{\cdot,\cdot\}^{\dagger}$ 为 $r = r^{\mathbf{\Gamma}^{\mathrm{CG}}}$的括号 (2.2)。[21] 中构造的 $GL_n^{\dagger}$ 上的广义结构$\mathcal{GC}_n^{\dagger}$ 由箭图 $Q_n^{\dagger}$ 定义，该箭图有一个重数为 n的特殊顶点、初始扩展簇 $\mathcal{D}_n$ 以及唯一的系数串 P_n。

箭图 $Q_n^{\dagger}$ 对应于 $n \geq 3$，由两个等边三角形组成，每个三角形都包含$n(n-1)/2$ 个顶点。两个三角形底边相对，拼成一个菱形；$n = 5$时的情形见图1。为便于说明，我们称它们为左三角形和右三角形。菱形最左侧的顶点是特殊顶点，最右侧的顶点是冻结顶点，其余顶点均为可变顶点。左三角形中的顶点以数对 (k, l) 标记，其中 $1 \leq k, l \leq n-1$, $k + l \leq n$，最左侧顶点为 $(1, 1)$，k 沿三角形上边递增，l 沿其下边递增，因此底边上的顶点自下而上依次为 $(m, n-m)$，其中 $1 \leq m \leq n-1$。右三角形中的顶点以数对 $\langle i, j\rangle = \langle n+1-k, n+2-k-l\rangle$ 标记，其中 $1 \leq k, l \leq n-1$, $k+l \leq n$，最右侧顶点为 $\langle n, n\rangle$，对应于 $k = l = 1$, k 沿三角形下边递增，l 沿其上边递增，因此底边上的顶点自下而上依次为 $\langle m, 2\rangle$，其中 $2 \leq m \leq n$。这种编号沿用了 [15], 中推导的、用于 GL_n 的 Drinfeld 双上的广义簇结构之箭图顶点编号，因此左右三角形的编号有所不同。

两个三角形中的箭头构成完整的三角网格，箭头分别指向南、东北和西北，但左三角形上边和右三角形下边上的箭头除外。两个底边由箭头 $\langle m, 2\rangle \to (m-1, n-m+1)$ 相连，其中 $2 \leq m \leq n$ 指向西

，而 $(m-1,n-m+1) \to \langle m+1,2\rangle$ 中的 $2 \le m \le n-1$ 指向东北。此外，左三角形中还有一条由箭头 $(1,l) \to (l+1,1) \to (1,l+1)$ 构成的长度为 $2(n-2)$ 的路径，其中 $1 \le l \le n-2$；右三角形中也有一条由箭头$\langle n, j-1\rangle \to \langle j-1, j-1\rangle \to \langle n, j\rangle$ 构成的相同长度的路径，其中 $1 \le j \le n-2$。为便于观察，图1中用虚线表示这两条路径。最后，还有一个额外的冻结顶点 $(0,0)$、 $n-1$ 个图1中未显示的孤立冻结顶点，以及另外两个箭头：一个从左三角形中的 $(1,1)$ 指向额外的冻结顶点 $(0,0)$，另一个从该顶点指向右三角形中的 $\langle 2,2\rangle$ 。

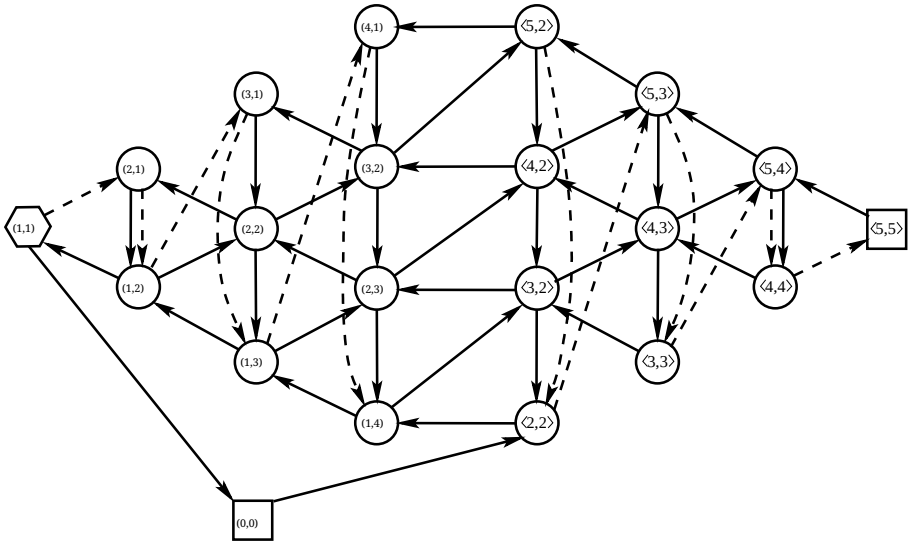


FIGURE 1. 箭图 $Q_5^\dagger$

根据 [21, 第7节。2], 初始扩展簇 $\mathcal{D}_n$ 由三个函数子族组成。设 U 为$GL_n^\dagger$的一个元素。定义 $n \times n$ 矩阵 $\Phi_{kl}(U)$,$k,l \in [1,n-1]$, $k+l \le n$：取 U^0的前 k 列，接着附加 $U^1 = U$的前l列，再附加矩阵 U^p的第一列，其中$2 \le p \le n-k-l+1$。第一个子族由附属于左三角形顶点(k,l)的 $n(n-1)/2$ 个函数 $\varphi_{kl}(U)$组成，其定义为

$$\varphi_{kl}(U) = s_{kl}^n \det \Phi_{kl}(U), \tag{2.8}$$

其中符号 s_{kl}^n 由下式给出

$$s_{kl}^n = \begin{cases} (-1)^{k(l+1)} & \text{for } n \text{ even}, \\ (-1)^{(n-1)/2+k(k-1)/2+l(l-1)/2} & \text{for } n \text{ odd}. \end{cases} \tag{2.9}$$

第二个子族由附属于右三角形顶点$\langle i,j\rangle$的 $n(n-1)/2$ 函数 $g_{ij}(U)$组成，并通过 $g_{i2}(U) = \det U_{[i,n]}^{[2,n-i+2]}$定义，以及

$$g_{ij}(U) = \sum_{I_1, I_2, \ldots, I_{j-2}} \det U_{[i,n]}^{I_1} \det U_{\gamma^*(I_1)\cup[n-i+j,n]}^{I_2} \prod_{m=2}^{j-2} \det U_{\gamma^*(I_m)\cup n}^{I_{m+1}} \tag{2.10}$$

对于 $j > 2$，其中求和遍及 $I_{j-1} = [2, n]$ 的所有大小为 $|I_1| = n-i+1$ 和 $|I_m| = n-j+m$ 的子集 $I_1, \ldots, I_{j-2}$，对应于 $2 \leq m \leq j-2$（关于从第 4.2 节中给出的任意 BD 数据构造函数 $g_{ij}(U)$的一般过程推导上述表达式，见下文第 4.2 节）。第三个子族由 U特征多项式的带符号系数组成，即 n 函数 $c_r(U)$，$1 \leq r \leq n$:

$$\det(\mathbf{1}_n + \lambda U) = 1 + \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r(n-1)} \lambda^r c_r(U). \tag{2.11}$$

用于 $1 \leq r \leq n-1$的函数 $c_r(U)$对应于孤立顶点； $c_n(U) = \det U$对应于附加的冻结顶点(0, 0)。 $\mathcal{P}_n$ 中唯一的字符串是(1, $c_1(U) \ldots, c_{n-1}(U)$, 1)，因此，种子($\mathcal{D}_n$, $Q_n^\dagger, \mathcal{P}_n$)中特殊顶点处的交换关系为

$$\varphi_{11}(U)\varphi'_{11}(U) = \sum_{r=0}^{n} \varphi_{21}^r(U)\varphi_{12}^{n-r}(U)c_r(U)$$

其中 $= 1$ $c_0(U)$。

以下定理在 [21]中得到证明。

定理 2.5. 对任意 $n \geq 3$，初始种子($\mathcal{D}_n, Q_n^\dagger, \mathcal{P}_n$)定义了 GL_n 上的一个正则完备广义簇结构 $\mathcal{GC}_n^\dagger$，且与括号 $\{\cdot,\cdot\}^\dagger$相容。

注 2.6. 注意，对应的广义上簇代数 $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{GC}_n^\dagger)$ 的基环为 $\mathbb{C}[g_{nn}, \det U^{\pm 1}]$。

显然，与泊松括号兼容的（广义）簇结构也与其负数兼容，因此 $\mathcal{GC}_n^\dagger$ 也与括号 $-\{\cdot,\cdot\}^\dagger$ 兼容。

2.6. 有理函数上的簇结构。记 $\mathcal{R}_n$ 为如下形式的单变量复有理函数空间： $M(\lambda) = q(\lambda)/p(\lambda)$，其中 $p(\lambda)$ 是次数为 $n \geq 2$ 的首一多项式，而 $q(\lambda)$ 是次数至多为 $n-1$ 且与 $p(\lambda)$ 互素的多项式。与括号兼容的簇结构 $\mathcal{C}_n^T$ 在 $\mathcal{R}_n$ 上

$$\{M(\lambda), M(\mu)\}^T = -(\lambda M(\lambda) - \mu M(\mu)) \frac{M(\lambda) - M(\mu)}{\lambda - \mu} \tag{2.12}$$

是在 [11] 中构造的。下面我们描述对此构造的一种轻微修改，它通过拟同构与初始构造相关联。箭图 Q_n^T 由两行顶点组成，每行有 n 个顶点。上、下两行的顶点分别从右向左标记为 $(m, +)$ 和 $(m, -)$， $1 \leq m \leq n$。每行最左侧的顶点 $(n, +)$ 和 $(n, -)$ 为冻结顶点，其余顶点均为可变顶点。对任意 $2 \leq m \leq n$，存在水平箭头 $(m, +) \to (m-1, +)$ 和 $(m, -) \to (m-1, -)$、双竖直箭头 $(m, -) \Rightarrow (m, +)$，$1 \leq m \leq n-1$（方向向上）、双斜箭头 $(m, +) \Rightarrow (m+1, -)$， $1 \leq m \leq n-2$（方向向下），以及一条普通斜箭头 $(n-1, +) \to (n, -)$（方向向下），见图 2。

为构造初始扩展簇 $\mathcal{T}_n$，写出 Laurent 展开

$$M(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{h_i}{\lambda^{i+1}}$$

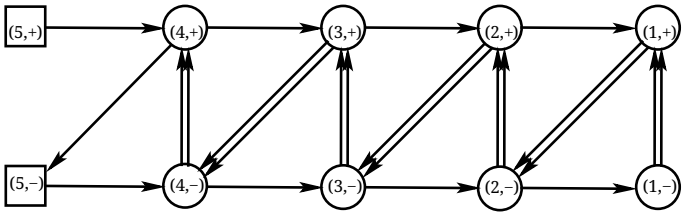


FIGURE 2. 箭图 Q_5^T

并为每个 $m \in [1,n]$ 定义两个 $m \times m$ Hankel 矩阵 $H_m^- = (h_{\alpha+\beta-2})_{\alpha,\ \beta=1}^m$和 $H_m^+ = (h_{\alpha+\beta-1})_{\alpha,\ \beta=1}^m$。族 $\mathcal{T}_n$由分配给顶点 $(m,-)$ 和 $(m,+)$ 的函数 $2n-1$ $\det H_m^-, 1 \le m \le n$ 和 $t_m^+ = \det H_m^+,\ 1 \le m \le n-1$，以及分配给顶点 $(n,+)$ 的函数 t_n^+/t_n^- 组成。注意，用系数 h_i 表示的括号 (2.12) 为

$$\{h_i, h_j\}^T = \sum_{k=i}^{j-1} h_{k+1} h_{i+j-k-1} \tag{2.13}$$

对于 $i < j$。

注 2.7. 1. 上文描述的箭图应与 [11] 中的箭图 (5.28)（关于其中心反射后）进行比较。附着于冻结顶点 $(n,+)$ 的冻结变量，与箭图 (5.28) 中对应的冻结顶点所附着的冻结变量不同，后者等于 t_n^-/t_n^+。这一差异解释了水平箭头 $(n,+) \to (n-1,+)$ 方向的反转。

2. 空间 $\mathcal{R}_n$ 在 [11] 中的定义包含一项额外的技术性要求 $p(0) \neq 0$，而在我们的情形下并不需要。在 [11], 中，簇结构被用于赋予 B¨acklund–Darboux 变换以簇理论的解释，这些变换连接 GL_n 上的 Coxeter–Toda 流；该结构被用来区分那些与 Coxeter 双 Bruhat 胞腔中元素的 Weyl 函数成比例的有理函数。

3. 括号的表达式 (2.13) 引自 [6]；已更正求和上限处的印刷错误。

¯上述构造可轻易推广到如下形式的单变量复有理函数空间 $\mathcal{R}_n$ of¯ $M(\lambda) = \bar{q}(\lambda)/p(\lambda)$：其中，$p(\lambda)$ 与前述相同，而 $\bar{q}(\lambda)$ 是次数至多为 n 、且与 $p(\lambda)$¯互素的多项式。 $M(\lambda)$ 的 Laurent 展开为

$$\bar{M}(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\bar{h}_i}{\lambda^i}. \tag{2.14}$$

¯显然，对于 $i > 0$ ，系数 h_i 与函数$M(\lambda) = \bar{M}(\lambda) - \bar{h}_0 \in \mathcal{R}_n$所计算的 h_{i-1} 一致。我们通过以下方式将括号 $\{\cdot,\cdot\}^T$扩展至 $\bar{h}_i$：

$$\{\bar{h}_i, \bar{h}_j\}^T = \sum_{k=i}^{j-1} \bar{h}_{k+1} \bar{h}_{i+j-k-1} \tag{2.15}$$

对于 $i<j$，这立即得到

$$\{\bar{M}(\lambda),\bar{M}(\mu)\}^T=-(\lambda\bar{M}(\mu)-\mu\bar{M}(\lambda))\frac{\bar{M}(\lambda)-\bar{M}(\mu)}{\lambda-\mu}. \tag{2.16}$$

箭图 $\bar{Q}_n^T$包含 n个顶点（$m,+$）、 $1\le m\le n$，以及 $n+1$个顶点（$m,-$），$1\le m\le n+1$。两个冻结顶点分别为（$n,+$）和（$n+1,-$）。除了斜箭头（$n-1,+$）$\to(n,-)$被替换为双斜箭头（$n-1,+$）$\Rightarrow(n,-)$之外，箭图 Q_n^T的所有箭头都出现在 $\bar{Q}_n^T$中。此外，还有一条竖直箭头（$n,-$）$\to(n,+)$和一条水平箭头（$n+1,-$）$\to(n,-)$。我们以菱形的方式绘制 $\bar{Q}_n^T$，见图 3。

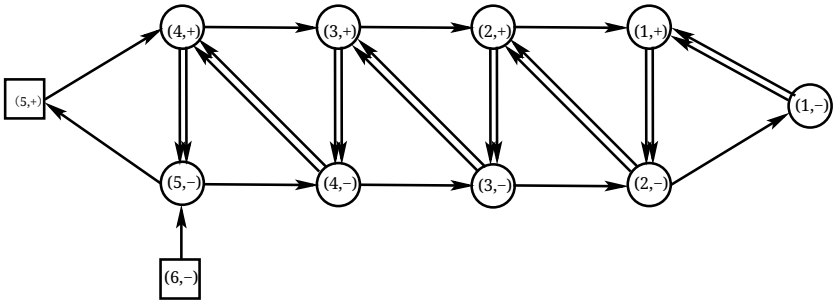


FIGURE 3. 箭图 $\bar{Q}_5^T$

与上文类似，我们定义 Hankel矩阵 $\bar{H}_m^-=(\bar{h}_{\alpha+\beta-2})_{\alpha,\beta=1}^m$ 和 $\bar{H}_m^+=(h_{\alpha+\beta-1})_{\alpha,\beta=1}^m$，以及相应的行列式 $\bar{t}_m^-=\det\bar{H}_m^-$, $m\in[1,n+1]$，和 $\bar{t}_m^+=(-1)^m\det\bar{H}_m^+$, $m\in[1,n]$。初始簇 $\bar{\mathcal{T}}_n$由 $2n$ 函数$\bar{t}_m^{\pm}$, $1\le m\le n$组成，分别赋给顶点 $(m,+)$ 和 $(m,-)$，函数 $\bar{t}_{n+1}^-/\bar{t}_n^+$则赋给顶点 $(n+1,-)$。

定理 2.8. 对任意 $n\ge2$，初始种子 $(\bar{\mathcal{T}}_n,\bar{Q}_n^T)$ 在 $\bar{\mathcal{R}}_n$ 上定义了一个与括号 $\{\cdot,\cdot\}^T$ 相容的正则完备簇结构 $\bar{\mathcal{C}}_n^T$。

注2.9. 请注意，相应上簇代数$\overline{\mathcal{A}}(\bar{\mathcal{C}}_n^T)$的基环为$\mathbb{C}[\bar{t}_{n+1}^-/\bar{t}_n^+,(\bar{t}_n^+)^{\pm1}]$。

该定理的证明见附录。

2.7. 证明概要。以下在本节中，除非另有明确说明，我们假设 $n\ge4$。为证明定理 2.2，我们执行以下步骤。

1. 我们构造两个映射： $\Psi'\colon GL_n\to GL_{n-1}$ 和 $\Psi''\colon GL_n\to\mathcal{R}_{n-1}$，并证明以下定理。

定理2.10. (i) 映射 $\Psi'\colon(GL_n,\{\cdot,\cdot\})\to\widetilde{GL}_{n-1}^{\dagger}=(GL_{n-1},-\{\cdot,\cdot\}^{\dagger})$ 是泊松映射。

(ii) 映射 $\Psi''\colon(GL_n,\{\cdot,\cdot\})\to\bar{\mathcal{R}}_{n-1}^T=(\bar{\mathcal{R}}_{n-1},\{\cdot,\cdot\}^T)$ 是泊松映射。

(iii) 由函数 $\det U$ （对于 $U\in GL_{n-1}$）和 $\bar{q}(0)$（对于 $\bar{q}(\lambda)/p(\lambda)$）定义的纤维积 uct 下，组合映射 $\Psi\colon(GL_n,\{\cdot,\cdot\})\to\widetilde{GL}_{n-1}^{\dagger}\times_{\mathbb{C}}\bar{\mathcal{R}}_{n-1}^T$ 是泊松映射。

2. 我们分别考虑第 2.5 节和第 2.6 节中描述的簇结构 $\mathcal{GC}^{\dagger}_{n-1}$ 和 $\bar{\mathcal{C}}^{T}_{n-1}$。相应的箭图示意图如图 4 所示。

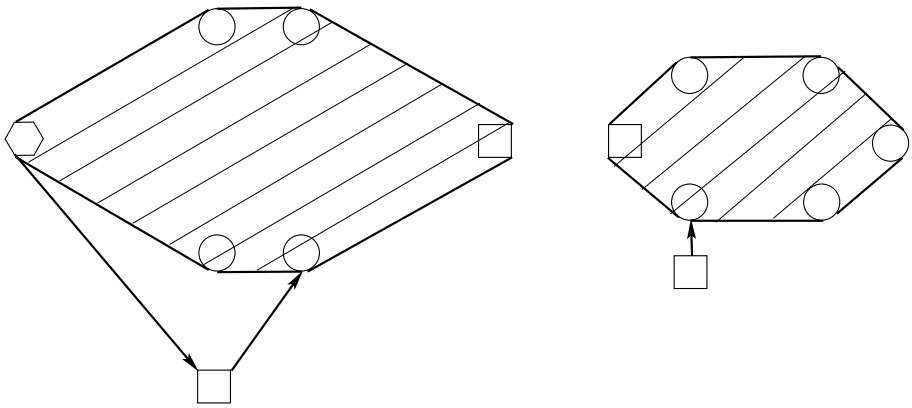


FIGURE 4. 箭图 $Q^{\dagger}_{n-1}$（左侧）和 $\bar{Q}^{T}_{n-1}$（右侧）

为了求出函数 $\varphi_{kl}(\Psi'(X))$、$g_{ij}(\Psi'(X))$、$c_p(\Psi'(X))$ 和 $\bar{t}^{\pm}_{m}(\Psi''(X)$，对于$X \in GL_n$，我们需要以下对象。

首先，我们定义 $(n-1)(n-2)/2$ 矩阵 $\Phi_{kl}(X)$，其中 k、$l \in [1, n-2]$ 和 $k+l \leq n-1$ 的尺寸为 $(n-k-l)(n+1) \times (n-k-l)(n+1)$。接着，我们定义 $(n-1)(n-2)/2$矩阵 $\mathsf{G}_{ij}(X)$，其中 $i \in [2, n-1]$ 和 $j \in [2, i]$ 的尺寸为 $(n+j-1) \times (n+j-1)$。最后，我们再定义三个矩阵：尺寸为 $(n+1) \times (n+1)$ 的 $\mathsf{A}(X)$ 和 $\mathsf{B}(X)$，以及尺寸为 $(2n-1) \times (2n-1)$ 的 $\mathsf{F}(X)$。所有矩阵的元素均为零或 X 的元素。这些矩阵的显式构造见下文第 4 节。

令 $\phi_{kl}(X) = \det \Phi_{kl}(X)$、$\mathsf{g}_{ij}(X) = \det \mathsf{G}_{ij}(X)$，并将 $\mathsf{c}_p(X)$ 定义为 $\det(\mathsf{A}(X) + \lambda \mathsf{B}(X))$ 中 λ^p 处的系数，符号为 $(-1)^{pn}$；将 $\mathsf{f}_m(X)$ 定义为从右下角开始的 $\mathsf{F}(X)$ 的第 m 个主尾子式。由上文可知，所有这些函数都是 X 的元素的多项式。

定理 2.11。(i) 对于 k、$l \in [1, n-2]$ 和 $k+l \leq n-1$，函数 $\varphi_{kl}(\Psi'(X))$ 可写为

$$\varphi_{kl}(\Psi'(X)) = \mathsf{s}_{kl} \frac{\phi_{kl}(X)}{(x_{1n} \det X)^{n-k-l}} \tag{2.17}$$

with

$$\mathsf{s}_{kl} = \begin{cases} (-1)^{(n-2)/2+k(k-1)/2+l(l-1)/2} & \text{for } n \text{ even}, \\ (-1)^{(n-1)/2+k(k-1)/2+l(l-1)/2} & \text{for } n \text{ odd}. \end{cases}$$

(ii) 对于 $i \in [2, n-1]$ 和 $j \in [2, i]$，函数 $g_{ij}(\Psi'(X))$ 可写为

$$g_{ij}(\Psi'(X)) = \hat{\mathsf{s}}_{ij} \frac{\mathsf{g}_{ij}(X)}{x_{1n}^{j-1} \det X} \tag{2.18}$$

其中 $\hat{\mathsf{s}}_{ij} = (-1)^{(n+j+1)(i+j)}$。

(iii) 函数 $c_r(\Psi'(X))$ 可写为

$$c_r(\Psi'(X)) = \frac{\mathsf{c}_r(X)}{x_{1n} \det X} \tag{2.19}$$

对于 $r \in [1, n-1]$。特别是，$c_{n-1}(\Psi'(X)) = \det \Psi'(X) = x_{n1}/x_{1n}$。

（iv）函数 $\bar{t}_m^{\pm}(\Psi''(X))$ 可写为

$$\bar{t}_m^{-}(\Psi''(X)) = \frac{\mathtt{f}_{2m-1}(X)}{x_{1n}^{2m-1}}, \qquad \bar{t}_m^{+}(\Psi''(X)) = \frac{\mathtt{f}_{2m}(X)}{x_{1n}^{2m}}, \tag{2.20}$$

其中，第一种情况下为 $m \in [1,n]$，第二种情况下为 $m \in [1,n-1]$。特别地，$\bar{t}_n^{-}(\Psi''(X))/\bar{t}_{n-1}^{+}(\Psi''(X)) = x_{n1}/x_{1n}$。

注记 2.12。注意，映射 Ψ 对 $n=3$ 也有定义，并且定理 2.11 在这种情况下仍然成立。

下面的事实可通过在每个顶点处进行直接计算来验证。

推论 2.13. 对于 $Q_{n-1}^{\dagger}$的任意可变顶点 v，对所有与 v 相邻的顶点（k、l）以及 $\langle i$、$j\rangle$，符号 s_{kl} 和 $\hat{\mathsf{s}}_{ij}$ 的乘积等于一。

因此，我们可以通过将每个 φ_{kl} 替换为 $\mathsf{s}_{kl}\varphi_{kl}$，并将每个 $\widetilde{g_{ij}}$替换为 $\hat{\mathsf{s}}_{ij}g_{ij}$，来修改 $\mathcal{D}_{n-1}$；对于修改后的簇 $\mathcal{D}_{n-1}$，定理 2.5 仍然成立。

3. 我们分别基于定理 2.11 中给出的显式表达式以及第 2.3 节所述的构造，在 Ψ' 和 Ψ''下对种子（$\widetilde{\mathcal{D}}_{n-1}$、$Q_{n-1}^{\dagger}$、$\mathcal{P}_{n-1}$）和（$\bar{\mathcal{T}}_{n-1}$、$\bar{Q}_{n-1}^{T}$）构造正则拉回。

命题2.14. (i) 箭图 $\Psi'^{*}Q_{n-1}^{\dagger}$ 由 $Q_{n-1}^{\dagger}$ 添加两个冻结顶点 A 和 B 以及四条箭头得到：$(n-2,1) \to A \to (1,1)$ 和 $(n-2,1) \to B \to \langle n-1,2\rangle$。

(ii) 箭图 $\Psi''^{*}\bar{Q}_{n-1}^{T}$ 由 $\bar{Q}_{n-1}^{T}$ 通过添加一个额外的冻结顶点 A 和一条箭头 $A \to (1,-)$ 得到。

相应的箭图示意性地显示于图 5 中。箭图 $\Psi'^{*}Q_{n-1}^{\dagger}$ 和 $\Psi''^{*}\bar{Q}_{n-1}^{T}$ 的顶点保留了分别与 $Q_{n-1}^{\dagger}$ 和 $\bar{Q}_{n-1}^{T}$中相同的标记。分配给 $\Psi'^{*}Q_{n-1}^{\dagger}$ 的顶点的簇变量为 ϕ_{kl} 和 g_{ij}，分配给 $\Psi''^{*}\bar{Q}_{n-1}^{T}$ 的顶点的簇变量为 f_m。注意，由于我们考虑到 GL_n的拉回，在 $(1,1)$ 处的广义交换关系的系数为 $\mathsf{c}_r(X)/\det X$。

4. 注意，在两个以相同字母标记的箭图中，相应顶点所分配的函数相同：x_{1n} 对应顶点 A，x_{n1} 对应顶点 C，而 $\mathsf{g}_{n-1,n-1}(X) = \mathsf{f}_{2n-2}(X)$ 对应顶点 D；为论证后一断言，我们注意到 $\mathsf{G}_{n-1,n-1}(X) = \mathsf{F}(X)_{[2,2n-1]}^{[2,2n-1]}$（见下文第 4 节中这些矩阵的定义）。因此，我们可以通过将这三对冻结顶点分别识别，将图 5 中的两个箭图粘合成一个箭图。

此外，与泊松括号 $\{\cdot,\cdot\}_{\mathcal{GC}}$ 相容的正则完备广义簇结构 $\mathcal{GC}$ 中的冻结顶点由以下性质刻画（证明见第 5.2 节）。

命题 2.15. 设 V 上存在一个与泊松括号 $\{\cdot,\cdot\}_{\mathcal{GC}}$ 相容的正则完备广义簇结构 $\mathcal{GC}$。簇变量 f 在 $\mathcal{GC}$ 中是冻结的，当且仅当对于任意正则函数 g，$\tilde{g} = \{f,g\}_{\mathcal{GC}}/f$ 都是正则的。

受命题 2.15 的启发，我们检验其条件对变量x_{1n} 和 x_{n1}成立，见下文第 5.2 节。然而，我们观察到（借助计算机辅助计算），对于 $n=4$, $\{\mathsf{f}_6(X)\ x_{23}\}/\mathsf{f}_6(X)$并非正则函数。这表明，虽然 x_{1n}、x_{n1}和 $\det X$ 应保持冻结（回顾一下，根据构造，$\det X$ 是括号 $\{\cdot,\cdot\}$ 在 GL_n上的一个卡西米尔元），但无法得到一个

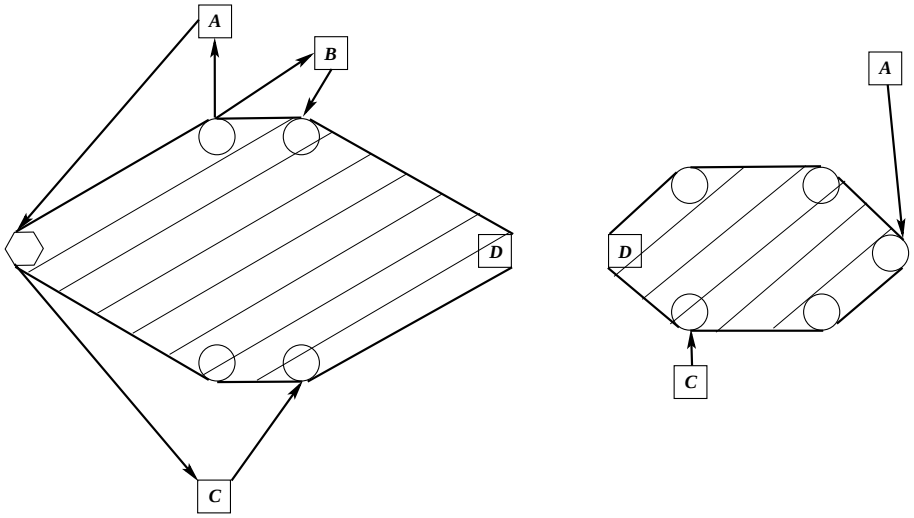


FIGURE 5. 箭图 $\Psi'^{*}Q_{n-1}^{\dagger}$ （左侧）和 $\Psi''^{*}\bar{Q}_{n-1}^{T}$ （右侧）

正则完备广义簇结构，除非将顶点 D解冻。事实上，第 7 节稍后将对任意 n 证明这一点，见注7.16。为了得到这样的结构，我们将顶点 D解冻。但这样一来，待定交换关系中的单项式次数就不平衡了。为消除这种不平衡，我们必须添加指向和/或来自 D的箭头。显然，在 D 与一个可变顶点之间添加箭头会破坏该顶点处的平衡，因此唯一可能新增的箭头是 D 与其他冻结顶点之间的箭头，也就是 A、 B 和 C。容易看出，至多存在一种新增箭头的选取方式，能够保证在对 D 进行突变后，新函数是正则的。以下在第5.3节证明的陈述确定了这一选取方式。

命题 2.16. 设 $\mathsf{g}(X) = \det \mathsf{G}_{n-1,\ n-2}(X)_{[2,2n-3]}^{[2,2n-3]}$，则

$$\mathsf{g}_{n-1,n-1}(X)\mathsf{g}(X) = \mathtt{f}_{2n-3}(X)\mathsf{g}_{n-2,n-2}(X) + x_{n1}\mathtt{f}_{2n-4}(X)\mathsf{g}_{n-1,n-2}(X). \tag{2.21}$$

因此，我们用一条额外的箭头将 D 连接到顶点 C。相应的箭图 Q_n 示意图见图6。

初始簇 $\mathcal{F}_n$ 定义如下：将函数 $\phi_{kl}(X)$ 指派给顶点 (k,l)，将函数 $\mathsf{g}_{ij}(X)$ 指派给顶点 $\langle i,j\rangle$，将函数 $\mathsf{f}_{2i}(X)$ 指派给顶点 $(i,+)$，将函数 $\mathsf{f}_{2i-1}(X)$ 指派给顶点 $(i,-1)$。此外， $\mathcal{F}_n$ 包含冻结变量 x_{1n} ，指派给 A；$\det X$ 指派给B ，而 x_{n1} 指派给 C。最后，还有孤立冻结变量 $\mathsf{c}_r(X)$，它们只出现在字符串 $\mathcal{P}_n = (1, \mathsf{c}_1(X)/\det X, \ldots, \mathsf{c}_{n-2}(X)/\det X, 1)$ 中，因此广义交换关系为

$$\phi_{11}(X)\phi'_{11}(X) = x_{1n}\phi_{12}^{n-1}(X) + \sum_{r=1}^{n-2} \frac{\mathsf{c}_r(X)}{\det X}\phi_{21}^{r}(X)\phi_{12}^{n-1-r}(X) + x_{n1}\phi_{21}^{n-1}(X). \tag{2.22}$$

现在我们可以将定理 2.2 重新表述如下。

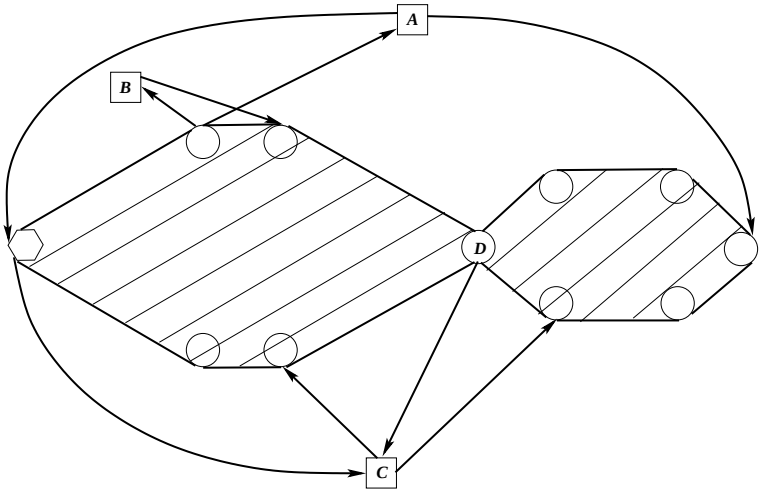


FIGURE 6. 箭图 Q_n： x_{1n} 对应于 A，$\det X$ 对应于 B，x_{n1} 对应于 C，$\mathsf{g}_{n-1,\ n-1}(X) = \mathsf{f}_{2n-2}(X)$ 对应于 D

定理 2.17. 广义簇结构 $\mathcal{GC}_n = \mathcal{GC}(\mathcal{F}_n, Q_n, \mathcal{P}_n)$ 是 GL_n 上一个正则的完备广义簇结构，并且与 $\{\cdot,\cdot\}$ 兼容。

注2.18. 定理 2.17 的类似结论对于 $n = 3$也成立。事实上，初始种子的分量$\mathcal{F}_3$ 和 $\mathcal{P}_3$ 由与上文相同的公式定义；箭图Q_3 有所不同，详情见 [20] 。

5. 对于对角矩阵 $D = \mathsf{diag}(d_1, \dots, d_n)$，记对角矩阵 $\mathsf{diag}(t^{d_1}, \dots, t^{d_n})$ 为 t^D。令 $D_n = \mathsf{diag}(n, \dots, 2, 1)$，且 $\bar{D}_n = \mathsf{diag}(1, 2, \dots, n)$。若函数 g关于作用 $X \mapsto t^{D_n} X s^{\bar{D}_n}$ 是齐次的，则

$$g(t^{D_n} X s^{\bar{D}_n}) = t^{\xi_g} s^{\bar{\xi}_g} g(X), \tag{2.23}$$

¯其中，数值 ξ_g 和 ξ_g 仅取决于 g。

定理 2.17 中相容性陈述的证明基于 [16, 命题 2.1] ，并利用初始簇$\mathcal{F}_n$中簇变量的齐次性；详情见下文第 6 节。由此立即可得，扩展交换矩阵满秩（见 [15, 命题 2.5]）。

另一个推论如下。

命题 2.19. $\mathcal{GC}_n$ 中的每个簇变量都是关于 X 矩阵元素的齐次函数，并且相对于作用 $X \mapsto t^{D_n} X s^{\bar{D}_n}$也是齐次的。

注 2.20. 实际上，命题 2.19 描述了 $(\mathbb{C}^*)^2$ 在$\mathcal{GC}_n$上的全局环面作用，相关定义见 [15, 第 2.1] 节。与一般猜想一致，¯此作用的秩等于 $|\Pi \setminus \Gamma_1| + |\Pi \setminus \Gamma_1| = 2$。

为继续证明，我们调用以下对命题 2.1] 的修改版 [14, 。

命题 2.21. 设 V是 $\mathbb{C}^{n+m}$ 中的一个扎里斯基开子集， $\mathcal{GC}$ 是 $\mathbb{C}(V)$中的一个广义簇结构，具有 n 可变变量和 m 冻结变量，使得

(i) 初始扩展簇由正则函数组成；

(ii) 初始种子的每次突变都会产生一个正则函数；(iii) V 上的每个正则函数都属于上簇代数 $\overline{\mathcal{A}}_{\mathbb{C}}(\mathcal{GC})$。那么， $\mathcal{GC}$ 是一个正则完备广义簇结构。

条件 (i) 可由上述构造得出。对于所有与顶点 D 不同的可变顶点，条件 (ii) 由定理 2.5 和 2.8 立即得出。顶点 D 处的条件 (ii) 则由命题2.16验证。

为验证命题2.21中的条件 (iii)，我们使用 $[14,$ 引理 8.3]的一个简单变体。

命题 2.22. 设 $R \subset \mathbb{C}(V)$是一个唯一分解整环，且 $F \in \mathbb{C}(V)$。若存在两个 Laurent 表示 $F = F_1/f_1 = F_2/f_2$，使得 F_1 和 F_2属于在 R 上的上簇代数 $\overline{\mathcal{A}}_{\mathbb{C}} \subseteq \mathbb{C}(V)$，并且 f_1 和 f_2 是由簇变量构成的单项式，且在 $\mathbb{C}[V]$中互素，则 F 本身属于 $\overline{\mathcal{A}}_{\mathbb{C}}$。

我们从以下陈述开始。

定理 2.23. X 的每个矩阵元都可以表示为初始种子（$Q_n, \mathcal{F}_n, \mathcal{P}_n$）中的簇变量的 Laurent 多项式，其中该初始种子属于 $\mathcal{GC}_n = \mathcal{GC}(Q_n, \mathcal{F}_n, \mathcal{P}_n)$；此外，在任意一个非顶点 $\langle 2,2\rangle, \ldots, \langle n-1, n-1\rangle = (n-1, +)$ 处进行单次突变所得到的种子中，每个矩阵元也都可以表示为簇变量的 Laurent 多项式。

因此，我们得到了 X所有矩阵元素的 Laurent 表示。为了完成完备性的证明，我们还需要在某个不含 $\mathrm{f}_{2n-2}(X)$ 作为簇变量的种子中得到另一种 Laurent 表示。为实现这一目标，我们进行一系列较长的突变：从在 D 处进行突变开始，最终得到一个与我们在 $[19]$ 中的构造相呼应的种子；在该种子中，可以结合 $[19]$ 中有理泊松映射的性质，以及我们在 $[15]$ 中研究过的三角元素共轭下标准形的性质，证明 Laurent 性质。

为此，我们定义另一族 $n(n-1)/2-1$ 矩阵 $\mathrm{K}_{ij}(X)$，其中$1 \le j < i \le n$，$(i,j) \neq (n, 1)$，其大小为 $(n-j+2) \times (n-j+2)$，且其元素或者为零，或者为 X 的元素，并令 $\mathrm{k}_{ij}(X) = \det \mathrm{K}_{ij}(X)$。此外，对于 $i \in [1,n]$，令 $\mathrm{k}_{ii}(X) = \det X^{[i,n]}_{[i,n]}$，从而 $\mathrm{k}_{11}(X) = \det X$。

定理 2.24。 (i) 存在一个变异序列 W_n，它从 $\mathcal{GC}_n$ 中的初始种子开始，并得到一个其可变簇变量集合为以下集合的种子：

$$\{\phi_{kl}(X):\ k、\ l \ge 1、\ k+l \le n-1\} \cup \{\mathrm{k}_{ij}(X):\ 1 \le j \le i \le n、(i,j) \neq (1,1)、(n,1)\}.$$

(ii) X 的所有矩阵元素都是关于该种子的 Laurent 多项式，且分母中不含任何冻结变量。

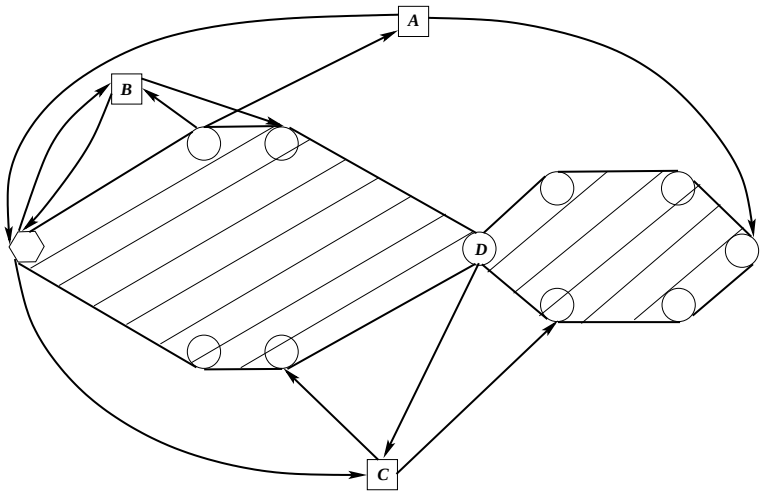
定理 2.24 使我们能够完成关于 $\mathcal{GC}_n$ 的正则性和完备性的证明。

6. 为了将所述广义簇结构的构造扩展到 Mat_n （如注 2.3 中所述），我们再次使用 $[20]$ 中描述的正则拉回构造。所得的近簇结构由$\widehat{\ }$箭图 Q_n 定义，该箭图由 Q_n 通过添加两条反向箭头得到：一条从 $(1,1)\widehat{\ }$指向 B，另一条从 B 指向 $(1,1)$，见图 7。 Q_n 的突变按 $[20,$ 注 4.6], 中的说明进行，即如果通常的变异规则在 $(1,1)$ 与 B 之间产生 $\Delta \neq 0$条箭头，则突变后的箭图在 Δ 方向上有箭头

，而在反方向上没有箭头；否则，箭图在这两个顶点之间有一对反向箭头。例如，在 (1, 1) 处进行突变会保留这对反向箭头，并添加从 B指向 (2, 1) 以及从 (1, 2) 指向 B的箭头。随后在 (2, 1) 处进行突变，会将这对反向箭头替换为从 B 指向 (1, 1) 的 $n-1$ 条箭头。与 Q_n 顶点关联的函数

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$与 Q_n 中的完全相同。唯一的字符串 $\mathcal{P}$ 由 $\frown\mathcal{P} = (1, \mathsf{c}_1(X) \ldots, \mathsf{c}_{n-2}(X), 1)$ 给出，因此 (2.22) 被替换为

$$\phi_{11}(X)\hat{\phi}'_{11}(X) = \det X x_{1n}\phi_{12}^{n-1}(X) + \sum_{r=1}^{n-2} \mathsf{c}_r(X)\phi_{21}^{r}(X)\phi_{12}^{n-1-r}(X) + \det X x_{n1}\phi_{21}^{n-1}(X).$$



$\frown$FIGURE 7. 箭图 Q_n

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$定理2.25。近簇结构 $\mathcal{GC}_n = \mathcal{GC}(\mathcal{F}_n, Q_n, \mathcal{P}_n)$ 是 Mat_n 上与 $\{\cdot,\cdot\}$ 兼容的正则完全几乎簇结构。

3. MAP Ψ AND THE PROOF OF THEOREM 2.10

3.1. 映射 Ψ' 及定理2.10(i)的证明。正如在 [18], 中详细阐述的，给定一对 BD-三元组，数对 $(\Gamma_1^{\mathrm{r}}, \Gamma_1^{\mathrm{c}})$ 和 $(\Gamma_2^{\mathrm{r}}, \Gamma_2^{\mathrm{c}})$ 分别将表示 GL_n 中某个元素的矩阵划分为称为 X-块和 Y-块的子块，而映射 γ^{r} 和 γ^{c} 则将这些块粘合成具有阶梯形状的复合矩阵。当这对三元组是非周期的时，相应的复合矩阵是有限的，其尾部子式构成与这对三元组所定义的泊松括号相容的簇结构的初始簇。若不满足非周期性条件，相应的复合矩阵便是无穷的，由此产生的簇结构也就是广义的。 [17] 提出了一种处理这种情形的方法，其基础是利用所得到的无穷复合矩阵的周期阶梯结构。在 [17, 第 6] 节中，我们研究了 GL_6的这类广义簇结构的最简单例子。尽管

这种方法在一般情形下是否成立仍属猜想，但它提供了必要的直观认识。

在我们的情形中，只有一个 X 块和一个 Y 块，而且它们都与初始矩阵重合。如图 8 所示，这些块被拼接成一个无限复合矩阵。周期阶梯结构由同一图中的虚线标出。周期阶梯结构的块是 $(n+1)\times(n+1)$ 矩阵 $\mathsf{A}=\mathsf{A}(X)$ 和 $\mathsf{B}=\mathsf{B}(X)$，使得 $\mathsf{A}_{[1,n]}^{[3,n+1]}=X^{[1,n-1]}$、$\mathsf{B}_{[1,n]}^{[1,1]}=X^{[n,n]}$ 且 $\mathsf{B}_{[2,n+1]}^{[2,n+1]}=X$；$\mathsf{A}$ 和 B 的所有其他元素均为零。

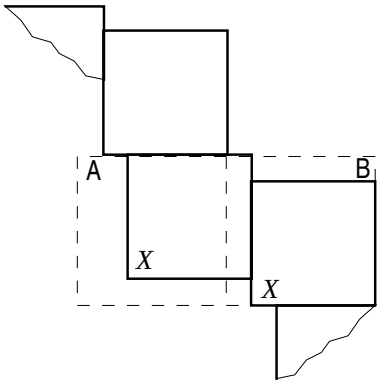


FIGURE 8. 无限复合矩阵的周期阶梯结构

根据 [17, 定理 3.2], ，我们预期广义交换关系的系数就是特征多项式 $\det(\lambda\mathsf{A}+\mathsf{B})$ 的系数。假设$x_{1n}x_{n1}\neq 0$，可以利用初等行变换将其改写为

$$\det(\lambda\mathsf{A}+\mathsf{B})=\det\left(\lambda\begin{bmatrix}0&0&x_{11}&\dots&x_{1,n-1}\\0&0&&&\\\vdots&\vdots&&X_L&\\0&0&&&\\0&0&0&\dots&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_{1n}&0&0&\dots&0\\0&0&&&\\\vdots&\vdots&&X_R&\\0&0&&&\\0&x_{n1}&x_{n2}&\dots&x_{nn}\end{bmatrix}\right)\tag{3.1}$$
$$=x_{1n}\det X\det(\lambda U+\mathbf{1}_{n-1}),$$

其中，X_L 和 X_R 分别是 x_{n1} 和 x_{1n} 的舒尔补，即由下式给出的（$n-1$）$\times$（$n-1$）矩阵:

$$X_L=X_{[2,n]}^{[1,n-1]}-X_{[2,n]}^{[n,n]}x_{1n}^{-1}X_{[1,1]}^{[1,n-1]},$$
$$X_R=X_{[1,n-1]}^{[2,n]}-X_{[1,n-1]}^{[1,1]}x_{n1}^{-1}X_{[n,n]}^{[2,n]},$$

以及 $U=X_LX_R^{-1}$。注意,

$$\det U=\frac{x_{n1}}{x_{1n}},\tag{3.2}$$

从而得到 $U\in GL_{n-1}$。这表明，可以利用由Ψ' 定义的映射 $\Psi'\colon GL_n\to GL_{n-1}$ $X\mapsto U$，在 GL_n上构造一个与 $\{\cdot,\cdot\}$相容的广义簇结构。

我们通过若干初步的技术计算开始证明定理2.10(i)。首先，我们将矩阵 X_L 和 X_R 的定义改写为

$$\begin{aligned} X_L &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_{n-1} \end{bmatrix} (X - XE_LX) \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ X_R &= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n-1} & 0 \end{bmatrix} (X - XE_RX) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{n-1} \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

其中，$E_L = e_n x_{1n}^{-1} e_1^T$、 $E_R = e_1 x_{n1}^{-1} e_n^T$、 e_1 和 e_n 分别是 $\mathbf{1}_n$的第一列和最后一列。由 (3.3) 得

$$\begin{aligned} \delta X_L &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_{n-1} \end{bmatrix} (\mathbf{1}_n - XE_L)\delta X(\mathbf{1}_n - E_LX) \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \delta X_R &= \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n-1} & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{1}_n - XE_R)\delta X(\mathbf{1}_n - E_RX) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{1}_{n-1} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \delta U = \delta X_L X_R^{-1} - U\delta X_R X_R^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_{n-1} \end{bmatrix} (\mathbf{1}_n - XE_L)\delta X(\mathbf{1}_n - E_LX) \begin{bmatrix} X_R^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} U & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{1}_n - XE_R)\delta X(\mathbf{1}_n - E_RX) \begin{bmatrix} 0 \\ X_R^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

可知，点 $X \in GL_n$ 处的梯度 $\nabla(f \circ \Psi')$ 与点$U = \Psi'(X)$处的梯度 $\nabla f \in GL_{n-1}$ 之间满足关系

$$\begin{aligned} \nabla(f \circ \Psi') &= (\mathbf{1}_n - E_LX) \begin{bmatrix} X_R^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \nabla f \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_{n-1} \end{bmatrix} (\mathbf{1}_n - XE_L) \\ &\quad - (\mathbf{1}_n - E_RX) \begin{bmatrix} 0 \\ X_R^{-1} \end{bmatrix} \nabla f \begin{bmatrix} U & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{1}_n - XE_R) \\ &= (\mathbf{1}_n - E_LX) \begin{bmatrix} 0 & X_R^{-1}\nabla f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{1}_n - XE_L) - (\mathbf{1}_n - E_RX) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ X_R^{-1}\nabla f U & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{1}_n - XE_R). \end{aligned}$$

注意，(3.3) 蕴含

$$\begin{aligned} X(\mathbf{1}_n - E_LX) = (\mathbf{1}_n - XE_L)X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ X_L & 0 \end{bmatrix}, \\ X(\mathbf{1}_n - E_RX) = (\mathbf{1}_n - XE_R)X = \begin{bmatrix} 0 & X_R \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

从而 $f \circ \Psi'$ 的左梯度和右梯度可以写成

$$\begin{aligned} \nabla(f \circ \Psi')X &= (\mathbf{1}_n - E_LX) \begin{bmatrix} X_R^{-1}\nabla f X_L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - (\mathbf{1}_n - E_RX) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X_R^{-1}\nabla f X_L \end{bmatrix}, \\ X\nabla(f \circ \Psi') &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & U\nabla f \end{bmatrix} (\mathbf{1}_n - XE_L) - \begin{bmatrix} \nabla f U & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{1}_n - XE_R). \end{aligned}$$

引入

$$\begin{aligned} \eta &= -x_{1n}^{-1} X_{[1,1]}^{[1,n-1]} X_R^{-1}\nabla f X_L, & \zeta &= -x_{n1}^{-1} X_{[n,n]}^{[2,n]} X_R^{-1}\nabla f X_L, \\ \xi &= -U\nabla f X_{[2,n]}^{[n,n]} x_{1n}^{-1}, & \nu &= -\nabla f U X_{[1,n-1]}^{[1,1]} x_{n1}^{-1}, \end{aligned}$$

我们将 $f\circ\Psi'$ 的左梯度和右梯度表达式改写为

$$\begin{aligned}\nabla(f\circ\Psi')X &= \begin{bmatrix} X_R^{-1}\nabla f X_L & 0\\ \eta & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \zeta\\ 0 & X_R^{-1}\nabla f X_L\end{bmatrix},\\ X\nabla(f\circ\Psi') &= \begin{bmatrix} 0 & 0\\ \xi & U\nabla f\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\nabla f U & \nu\\ 0 & 0\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

现在我们继续计算 $\{\cdot,\cdot\}$ 的括号。将 $\{\cdot,\cdot\}$ 重写为如下形式会很方便：其中，γ 的李理论定义被 $\mathfrak{gl}_n$ 的标准矩阵表示上的一个更具体的变换所替代。令 E_{kj} 表示在位置（k, j）处为 1、其他位置均为 0 的 $n\times n$ 矩阵。令 $\bar S = E_{12}+\cdots+E_{n-1,\,n}$ 以及 $S=\bar S^T$，并通过以下方式定义 γ 和 γ^* 在 $\mathfrak{gl}_n$ 上的作用

$$\gamma(A) = SA\bar S, \qquad \gamma^*(A) = \bar S A S.$$

显然，对于具有一个（$n-1$）$\times$（$n-1$）块 M 的 $n\times n$ 矩阵，有

$$\gamma\begin{bmatrix} M & \star\\ \star & \star\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & M\end{bmatrix}, \qquad \gamma^*\begin{bmatrix}\star & \star\\ \star & M\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

其中 $\star$ 的具体取值并不重要。

根据（2.4），R_+ 在 $\mathfrak{gl}_n$ 上可写为

$$\bar R_+ = \bar R_0 + \frac{1}{1-\gamma^*}\pi_> - \frac{\gamma}{1-\gamma}\pi_<$$

其中 R_0 由下式给出

$$\bar R_0(\eta) = \frac{n-1}{2n}\operatorname{Tr}\eta\cdot\mathbf{1}_n + \frac{1}{n}\left(\operatorname{Tr}\eta\cdot\bar D_n - \operatorname{Tr}(\bar D_n\eta)\cdot\mathbf{1}_n\right) - \frac{\gamma}{1-\gamma}\eta, \tag{3.6}$$

其中 $D_n=$对角矩阵$(1,2,\ldots,n)$，参见 [14, 引理 4.1]。

因此，$R_+(\nabla(f\circ\Psi')X)$ 的分量是

$$\begin{aligned}\bar R_0\left(\begin{bmatrix} X_R^{-1}\nabla f X_L & 0\\ \eta & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \zeta\\ 0 & X_R^{-1}\nabla f X_L\end{bmatrix}\right) &= -\bar R_0(1-\gamma^*)\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & (X_R^{-1}\nabla f X_L)_0\end{bmatrix},\\ \frac{1}{1-\gamma^*}\left(\begin{bmatrix} X_R^{-1}\nabla f X_L & 0\\ \eta & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \zeta\\ 0 & X_R^{-1}\nabla f X_L\end{bmatrix}\right)_> &= -\begin{bmatrix} 0 & \zeta\\ 0 & (X_R^{-1}\nabla f X_L)_>\end{bmatrix},\\ \frac{\gamma}{1-\gamma}\left(\begin{bmatrix} X_R^{-1}\nabla f X_L & 0\\ \eta & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \zeta\\ 0 & X_R^{-1}\nabla f X_L\end{bmatrix}\right)_< &= -\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & (X_R^{-1}\nabla f X_L)_<\end{bmatrix};\end{aligned}$$

此处及下文中 $M_> = \pi_>(M)$、$M_0=\pi_0(M)$ 和 $M_< = \pi_<(M)$。

由 (3.6) 可知，对于对角 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵 D，有

$$\bar R_0(1-\gamma^*)\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & D\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & D\end{bmatrix} - \frac{1}{n}\operatorname{Tr}D\cdot\mathbf{1}_n.$$

将 $R_+(\nabla(f\circ\Psi')X)$ 的分量相加，得到

$$\begin{aligned}\bar R_+(\nabla(f\circ\Psi')X) &= -\begin{bmatrix} 0 & \zeta\\ 0 & X_R^{-1}\nabla f X_L\end{bmatrix} + \frac{1}{n}\operatorname{Tr}(X_R^{-1}\nabla f X_L)\cdot\mathbf{1}_n\\ &= -(\mathbf{1}_n - E_R X)\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & X_R^{-1}\nabla f X_L\end{bmatrix} + \frac{1}{n}\operatorname{Tr}(X_R^{-1}\nabla f X_L)\cdot\mathbf{1}_n.\end{aligned} \tag{3.7}$$

因此，(2.3) 右边的第一项为

$$\begin{aligned}&\left\langle \bar{R}_+(\nabla(f_1\circ\Psi')X), \nabla(f_2\circ\Psi')X\right\rangle\\ &\qquad = -\left\langle (\mathbf{1}_n - E_R X)\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & X_R^{-1}\nabla f_1 X_L\end{bmatrix}, (\mathbf{1}_n - E_L X)\begin{bmatrix}X_R^{-1}\nabla f_2 X_L & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\rangle\\ +\left\langle \begin{bmatrix}0 & \zeta(f_1)\\ 0 & X_R^{-1}\nabla f_1 X_L\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & \zeta(f_2)\\ 0 & X_R^{-1}\nabla f_2 X_L\end{bmatrix}\right\rangle &+\left\langle \frac{1}{n}\operatorname{Tr}(X_R^{-1}\nabla f X_L)\cdot\mathbf{1}_n, \nabla(f_2\circ\Psi')X\right\rangle.\end{aligned}$$

由 (3.5) 立即可知，左梯度属于 $\mathfrak{sl}_n$，因此上式右侧的第三项为零。此外，第二项就是$\langle X_R^{-1}\nabla f_1 X_L, X_R^{-1}\nabla f_2 X_L\rangle$。利用 (3.4)，我们将第一项改写为

$$-\left\langle X^{-1}\begin{bmatrix}0 & X_R\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & X_R^{-1}\nabla f_1 X_L\end{bmatrix}, X^{-1}\begin{bmatrix}0 & 0\\ X_L & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_R^{-1}\nabla f_2 X_L & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\rangle,$$

于是最终得到

$$\begin{aligned}&\left\langle \bar{R}_+(\nabla(f_1\circ\Psi')X), \nabla(f_2\circ\Psi')X\right\rangle\\ &\qquad = -\left\langle X^{-1}\begin{bmatrix}0 & \nabla f_1 X_L\\ 0 & 0\end{bmatrix}, X^{-1}\begin{bmatrix}0 & 0\\ U\nabla f_2 X_L & 0\end{bmatrix}\right\rangle + \langle X_R^{-1}\nabla f_1 X_L, X_R^{-1}\nabla f_2 X_L\rangle.\end{aligned} \tag{3.8}$$

接下来计算 $R_+(X\nabla(f\circ\Psi'))$，其中 R_+ 在 $\mathfrak{gl}_n$ 上由下式给出

$$R_+ = R_0 + \frac{1}{1-\gamma}\pi_> - \frac{\gamma^*}{1-\gamma^*}\pi_<$$

而 R_0 由下式定义

$$R_0(\eta) = \frac{n-1}{2n}\operatorname{Tr}\eta\cdot\mathbf{1}_n + \frac{1}{n}\left(\operatorname{Tr}\eta\cdot D_n - \operatorname{Tr}(D_n\eta)\cdot\mathbf{1}_n\right) - \frac{\gamma^*}{1-\gamma^*}\eta \tag{3.9}$$

¯与 $D_n =$对角矩阵$(n, \dots, 2, 1)$，类似于 R_0 上文。

$R_+(X\nabla(f\circ\Psi'))$的分量为

$$\begin{aligned}R_0\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ \xi & U\nabla f\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\nabla fU & \nu\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right) &= R_0\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & (U\nabla f)_0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}(\nabla fU)_0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right),\\ \frac{1}{1-\gamma}\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ \xi & U\nabla f\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\nabla fU & \nu\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)_> &= -\frac{1}{1-\gamma}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & [\nabla f, U]_>\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}(\nabla fU)_> & \nu\\ 0 & 0\end{bmatrix},\\ \frac{\gamma^*}{1-\gamma^*}\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ \xi & U\nabla f\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\nabla fU & \nu\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)_< &= -\frac{1}{1-\gamma^*}\begin{bmatrix}[\nabla f, U]_< & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(\nabla fU)_< & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

注意

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ \xi & U\nabla f\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\nabla fU & \nu\\ 0 & 0\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}0 & 0\\ \xi & [\nabla f, U]\end{bmatrix} - (1-\gamma)\begin{bmatrix}\nabla fU & \nu\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

且右侧的两个矩阵均属于 $\mathfrak{sl}_n$。由 (3.9) 可知，对于对角矩阵（$n-1$） $\times$ （$n-1$） D，有

$$R_0(1-\gamma)\begin{bmatrix}D & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}D & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} - \frac{1}{n}\operatorname{Tr} D\cdot\mathbf{1}_n,$$

因此

$$R_0\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & (U\nabla f)_0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}(\nabla fU)_0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$
$$=-R_0\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & [\nabla f,U]_0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}(\nabla fU)_0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\frac{1}{n}\operatorname{Tr}(\nabla fU)\cdot\mathbf{1}_n.$$

将 $R_+(X\nabla(f\circ\Psi'))$ 的各分量相加，我们得到

$$R_+(X\nabla(f\circ\Psi'))=-R_0\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & [\nabla f,U]_0\end{bmatrix}+\frac{1}{n}\operatorname{Tr}(\nabla fU)\cdot\mathbf{1}_n \tag{3.10}$$
$$-\frac{1}{1-\gamma}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & [\nabla f,U]_>\end{bmatrix}+\frac{\gamma^*}{1-\gamma^*}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & [\nabla f,U]_<\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\nabla fU & \nu\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

为了计算 (2.3) 右侧的第二项，我们分别处理 (3.10) 中各项对 $\langle R_+(X\nabla(f_1\circ\Psi'))$ $X\nabla(f_2\circ\Psi')\rangle$ 的贡献。第一项的贡献为以下各项之和：

$$\left\langle -R_0\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & [\nabla f_1,U]_0\end{bmatrix},-\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & [\nabla f_2,U]_0\end{bmatrix}\right\rangle=\langle R_0[\nabla f_1,U]_0,[\nabla f_2,U]_0\rangle$$

（注意，右侧的 R_0 是与相应 Cremmer–Gervais 数据相关联的 $\mathfrak{gl}_{n-1}$ 上的算子），以及

$$\left\langle -R_0\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & [\nabla f_1,U]_0\end{bmatrix},-(1-\gamma)\begin{bmatrix}(\nabla f_2U)_0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\rangle$$
$$=\left\langle\frac{1}{1-\gamma}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & [\nabla f_1,U]_0\end{bmatrix},(1-\gamma)\gamma^*\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & (\nabla f_2U)_0\end{bmatrix}\right\rangle$$
$$=\left\langle\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & [\nabla f_1,U]_0\end{bmatrix},\frac{(1-\gamma)\gamma^*}{1-\gamma^*}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & (\nabla f_2U)_0\end{bmatrix}\right\rangle$$
$$=-\langle[\nabla f_1,U]_0,(\nabla f_2U)_0\rangle;$$

这里，最后一个等号来自这样一个事实： $\gamma\gamma^*$ 通过在左侧乘以 $\left[\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathbf{1}_{n-1}\end{smallmatrix}\right]$ 起作用。为说明第一个等号，注意，根据 [18, 引理 4.2]， R_0 在 sl_n 的 Cartan 子代数上的作用由 $R_0=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\gamma}-\frac{1}{1-\gamma^*}\right)$ 给出；此外，很容易验证，在这个子代数上 $\frac{\gamma}{1-\gamma}+\frac{1}{1-\gamma^*}=0$，因此最终得到 $R_0=\frac{1}{1-\gamma}$。第二项的贡献为零，因为根据 (3.5)，右梯度属于 $\mathfrak{sl}_n$。

第三项和第四项的贡献之和为

$$\left\langle-\frac{1}{1-\gamma}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & [\nabla f_1,U]_>\end{bmatrix}+\frac{\gamma^*}{1-\gamma^*}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & [\nabla f_1,U]_<\end{bmatrix},-\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & [\nabla f_2,U]\end{bmatrix}\right\rangle$$
$$=\left\langle\frac{1}{1-\gamma}[\nabla f_1,U]_>-\frac{\gamma^*}{1-\gamma^*}[\nabla f_1,U]_<,[\nabla f_2,U]\right\rangle$$

and

$$\left\langle -\frac{1}{1-\gamma}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & [\nabla f_1, U]_>\end{bmatrix} + \frac{\gamma^*}{1-\gamma^*}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & [\nabla f_1, U]_<\end{bmatrix}, -(1-\gamma)\begin{bmatrix}\nabla f_2 U & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\rangle$$
$$= \left\langle \frac{(1-\gamma^*)\gamma}{1-\gamma}\begin{bmatrix}[\nabla f_1, U]_> & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}[\nabla f_1, U]_< & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\nabla f_2 U & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\rangle$$
$$= \left\langle -\begin{bmatrix}[\nabla f_1, U] & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}[\nabla f_1, U]_0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\nabla f_2 U & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\rangle$$
$$= -\langle [\nabla f_1, U], \nabla f_2 U\rangle + \langle [\nabla f_1, U]_0, (\nabla f_2 U)_0\rangle;$$

这里，第二个等式由 $\gamma^*\gamma$ 通过乘以 b 作用这一事实得出 $\begin{bmatrix}\mathbf{1}_{n-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ 在左侧。

最后，(3.10) 右端最后一项的贡献为

$$\left\langle -\begin{bmatrix}\nabla f_1 U & \nu(f_1)\\ 0 & 0\end{bmatrix}, -\begin{bmatrix}\nabla f_2 U & \nu(f_2)\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\rangle = \langle \nabla f_1 U, \nabla f_2 U\rangle$$

and

$$\left\langle -\begin{bmatrix}\nabla f_1 U & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}(\mathbf{1}_n - XE_R), \begin{bmatrix}0 & 0\\ U\nabla f_2 & 0\end{bmatrix}(\mathbf{1}_n - XE_l)\right\rangle$$
$$= -\left\langle \begin{bmatrix}\nabla f_1 U & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & X_R\\ 0 & 0\end{bmatrix}X^{-1}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ U\nabla f_2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ X_L & 0\end{bmatrix}X^{-1}\right\rangle$$
$$= -\left\langle \begin{bmatrix}\nabla f_1 X_L & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}X^{-1}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ U\nabla f_2 X_L & 0\end{bmatrix}X^{-1}\right\rangle$$

由 (3.4) 得出。将所有贡献相加，我们得到

$$\langle R_+(X\nabla(f_1\circ\Psi')), X\nabla(f_2\circ\Psi')\rangle \tag{3.11}$$
$$= \langle R_0[\nabla f_1, U]_0, [\nabla f_2, U]_0\rangle + \left\langle \frac{1}{1-\gamma}[\nabla f_1, U]_> - \frac{\gamma^*}{1-\gamma^*}[\nabla f_1, U]_<, [\nabla f_2, U]\right\rangle$$
$$- \langle [\nabla f_1, U], \nabla f_2 U\rangle + \langle \nabla f_1 U, \nabla f_2 U\rangle - \left\langle \begin{bmatrix}\nabla f_1 X_L & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}X^{-1}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ U\nabla f_2 X_L & 0\end{bmatrix}X^{-1}\right\rangle.$$

注意，(3.11) 中的前三项构成 $\langle R_+[\nabla f_1, U], [\nabla f_2 U]\rangle$，而 (3.11) 中的最后两项与 (3.8) 的右端相同。因此，我们得到

$$\{f_1\circ\Psi', f_1\circ\Psi'\} = \langle [\nabla f_1, U], \nabla f_2 U\rangle - \langle R_+[\nabla f_1, U], [\nabla f_2, U]\rangle,$$

这与括号 $-\{\cdot,\cdot\}^\dagger$ 的表达式一致，见 [15, 式 (5.6)]。 □

3.2. 映射 Ψ'' 及定理 2.10(ii) 的证明。给定 $X \in GL_n$ 和一个有理函数 $M(\lambda) = \bar{q}(\lambda)/p(\lambda) \in \mathcal{R}_{n-1}$，满足

$$\bar{q}(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1}\bar{q}_i\lambda^i, \qquad p(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1}p_i\lambda^i, \tag{3.12}$$

定义映射 $\Psi''\colon\ GL_n \to \mathcal{R}_{n-1}$，通过 $\Psi''\colon\ X \mapsto M(\lambda)$ 给出

$$\bar{q}_i\circ\Psi'' = \frac{x_{n,i+1}}{x_{1n}}, \qquad p_i\circ\Psi'' = \frac{x_{1,i+1}}{x_{1n}}, \qquad i\in[0,n-1].$$

我们首先计算元素 x_{1k} 和 x_{nj}的左右梯度，以此开始定理 2.10(ii) 的证明。显然，$\nabla x_{1k} = E_{k1}$ 和 $\nabla x_{nj} = E_{jn}$，因此

$$\begin{aligned} &\nabla x_{1k} X = e_k X_{[1,1]}, && \nabla x_{nj} X = e_j X_{[n,n]}, \\ &X \nabla x_{1k} = X^{[k,k]} e_1^T, && X \nabla x_{nj} = X^{[j,j]} e_n^T. \end{aligned} \tag{3.13}$$

由此立即得到 $\gamma^*(X\nabla x_{1k}) = 0$ 和 $(X\nabla x_{1k})_> = 0$，类似地，$\gamma(X\nabla x_{nj}) = 0$ 和 $(X\nabla x_{nj})_< = 0$。因此，我们得到

$$\begin{aligned} \{x_{1k}, x_{1l}\} &= \left\langle \bar{R}_+(\nabla x_{1k} X), \nabla x_{1l} X \right\rangle - \langle R_+(X\nabla x_{1k}), X\nabla x_{1l} \rangle \\ &= \left\langle \bar{R}_0 E_{kk}, E_{ll} \right\rangle x_{1k} x_{1l} - \langle R_0 E_{11}, E_{ll} \rangle x_{1k} x_{1l} \\ &\quad + \left\langle \frac{1}{1-\gamma^*} (e_k X_{[1,1]})_> - \frac{\gamma}{1-\gamma} (e_k X_{[1,1]})_<, e_l X_{[1,1]} \right\rangle. \end{aligned}$$

假设 $l < k$，我们可以将上面的最后一项改写为

$$\sum_{s=1}^{l-1} x_{1s} x_{1,k+l-s} - \sum_{t=1}^{l-1} x_{1,k+t} x_{1,l-t} = 0;$$

此处及下文中，我们假设当 $i > n$ 时，x_{1i} 和 x_{ni} 均为零。因此，对于 $l < k$，我们得到

$$\{x_{1k}, x_{1l}\} = \left(\left\langle \bar{R}_0 E_{kk}, E_{ll} \right\rangle - \langle R_0 E_{11}, E_{ll} \rangle \right) x_{1k} x_{1l}.$$

注意到 $E_{kk} \in gl_n$，因此我们分别对 R_0 和 R_0使用表达式 (3.6) 和 (3.9)。

因此，$\left\langle \bar{R}_0 E_{kk}、 E_{ll} \right\rangle = \frac{n-1}{2n} + \frac{1}{n}(l-k)$ 和 $\langle R_0 E_{11}、 E_{11} \rangle = \frac{n-1}{2n}$，故对于 $l < k$，有 $\{x_{1k}, x_{1l}\} = \frac{l-k}{n} x_{1k} x_{1l}$。对于 $l > k$，有 $\{x_{1k}, x_{1l}\} = -\{x_{1l}, x_{1k}\} = -\frac{k-l}{n} x_{1k} x_{1l} = \frac{l-k}{n} x_{1k} x_{1l}$，于是最终得到

$$\{x_{1k}, x_{1l}\} = \frac{l-k}{n} x_{1k} x_{1l}. \tag{3.14}$$

与上文类似,

$$\begin{aligned} \{x_{nk}, x_{nl}\} &= \left\langle \bar{R}_+(\nabla x_{nk} X), \nabla x_{nl} X \right\rangle - \langle R_+(X\nabla x_{nk}), X\nabla x_{nl} \rangle \\ &= \left(\left\langle \bar{R}_0 E_{kk}, E_{ll} \right\rangle - \langle R_0 E_{nn}, E_{nn} \rangle \right) x_{nk} x_{nl} \\ &\quad + \left\langle \frac{1}{1-\gamma^*} (e_k X_{[n,n]})_> - \frac{\gamma}{1-\gamma} (e_k X_{[n,n]})_<, e_l X_{[n,n]} \right\rangle, \end{aligned}$$

且对于 $l < k$，最后一项消失。此外，$\langle R_0 E_{nn}、 E_{nn} \rangle = \frac{n-1}{2n}$，因此

$$\{x_{nk}, x_{nl}\} = \frac{l-k}{n} x_{nk} x_{nl}. \tag{3.15}$$

我们接下来进行

$$\begin{aligned} \{x_{1k}, x_{nl}\} &= \left\langle \bar{R}_+(\nabla x_{1k} X), \nabla x_{nl} X \right\rangle - \langle R_+(X\nabla x_{1k}), X\nabla x_{nl} \rangle \\ &= \left(\left\langle \bar{R}_0 E_{kk}, E_{ll} \right\rangle - \langle R_0 E_{11}, E_{nn} \rangle \right) x_{1k} x_{nl} \\ &\quad + \left\langle \frac{1}{1-\gamma^*} (e_k X_{[1,1]})_> - \frac{\gamma}{1-\gamma} (e_k X_{[1,1]})_<, e_l X_{[n,n]} \right\rangle. \end{aligned}$$

假设 $l \leq k$，我们可以将上面的最后一项改写为

$$\sum_{s=1}^{l-1} x_{ns}x_{1,k+l-s} - \sum_{t=1}^{l-1} x_{n,k+t}x_{1,l-t} = \sum_{j=1}^{l-1}(x_{1,k+l-j}x_{nj} - x_{1j}x_{n,k+l-j}).$$

此外，$\langle R_0E_{11}, E_{nn}\rangle = \frac{n-1}{2n} - \frac{n-1}{n}$，使得

$$\{x_{1k}, x_{nl}\} = \frac{n+l-k-1}{n}x_{1k}x_{nl} + \sum_{j=1}^{l-1}(x_{1,k+l-j}x_{nj} - x_{1j}x_{n,k+l-j}) \tag{3.16}$$

对于 $l \leq k$。

最后，考虑

$$\begin{aligned}\{x_{nk}, x_{1l}\} &= \left\langle \bar{R}_+(\nabla x_{nk}X), \nabla x_{1l}X\right\rangle - \langle R_+(X\nabla x_{nk}), X\nabla x_{1l}\rangle \\ &= \left(\left\langle \bar{R}_0E_{kk}, E_{ll}\right\rangle - \langle R_0E_{nn}, E_{11}\rangle\right)x_{nk}x_{1l} \\ &+ \left\langle \frac{1}{1-\gamma^*}(e_kX_{[n,n]})_> - \frac{\gamma}{1-\gamma}(e_kX_{[n,n]})_<, e_lX_{[1,1]}\right\rangle \\ &- \left\langle \frac{1}{1-\gamma}(X^{[k,k]}e_n^T)_> - \frac{\gamma*}{1-\gamma*}(X^{[k,k]}e_n^T)_<, X^{[l,l]}e_l^T\right\rangle.\end{aligned}$$

这里 $l < k$ 的第三项等于

$$\sum_{j=1}^{l-1}(x_{n,k+l-j}x_{1j} - x_{nj}x_{1,k+l-j})$$

与上文类似，第四项等于 $x_{nl}x_{1k}$，且 $\langle R_0E_{nn}、\ E_{11}\rangle = -\frac{n+1}{2n} + \frac{n-1}{n}$，因此

$$\{x_{nk}, x_{1l}\} = \frac{l-k+1}{n}x_{nk}x_{1l} + \sum_{j=1}^{l-1}(x_{n,k+l-j}x_{1j} - x_{nj}x_{1,k+l-j}) - x_{nl}x_{1k}$$

对于 $l < k$，最终得到

$$\{x_{1k}, x_{nl}\} = \frac{n+l-k-1}{n}x_{1k}x_{nl} + \sum_{j=1}^{k}(x_{1,k+l-j}x_{nj} - x_{1j}x_{n,k+l-j}) \tag{3.17}$$

对于 $l > k$。

由（3.14）–（3.17）立即可得

$$\{p_k \circ \Psi'', p_l \circ \Psi''\} = 0, \qquad \{\bar{q}_k \circ \Psi'', \bar{q}_l \circ \Psi''\} = 0,$$

$$\{p_k \circ \Psi'', \bar{q}_l \circ \Psi''\} = \begin{cases} \sum_{j=0}^{l-1}(p_{k+l-j}\bar{q}_j - p_j\bar{q}_{k+l-j}) \circ \Psi'', & l \leq k, \\ \sum_{j=0}^{k}(p_{k+l-j}\bar{q}_j - p_j\bar{q}_{k+l-j}) \circ \Psi'', & l > k, \end{cases}$$

可概括为

$$\{p \circ \Psi''(\lambda), p \circ \Psi''(\mu)\} = 0, \qquad \{\bar{q} \circ \Psi''(\lambda), \bar{q} \circ \Psi''(\mu)\} = 0,$$

$$\{p \circ \Psi''(\lambda), \bar{q} \circ \Psi''(\mu)\} = \frac{\mu}{\lambda - \mu}\left(p(\lambda)\bar{q}(\mu) - p(\mu)\bar{q}(\lambda)\right) \circ \Psi''.$$

因此，

$$\{\bar{M}\circ\Psi''(\lambda),\bar{M}\circ\Psi''(\mu)\}=-\left(\lambda\bar{M}(\mu)-\mu\bar{M}(\lambda)\right)\frac{\bar{M}(\lambda)-\bar{M}(\mu)}{\lambda-\mu}\circ\Psi'',$$

根据(2.16)，这意味着 $\{\bar{M}\circ\Psi''(\lambda)\ \bar{M}\circ\Psi''(\mu)\}=\{\bar{M}(\lambda)\ \bar{M}(\mu)\}^T\circ\Psi''$。 □

3.3. 定理 2.10(iii)的证明。为证明定理2.10的剩余部分，只需证明 $\{u_{ij}\circ\Psi',p_k\circ\Psi''\}=\{u_{ij}\circ\Psi',\bar{q}_k\circ\Psi''\}=0$ 对任意元素 u_{ij}（U 的）以及任意系数 p_k 和 $\bar{q}_k$（$M(\lambda)$的）$=\Psi''(X)$。

我们首先计算 $\{u_{ij}\circ\Psi',x_{1k}\}$。我们使用(3.4)中的第二个方程，类似于推导(3.8)时的做法，将(3.7)改写为

$$\bar{R}_+(\nabla(f\circ\Psi')X)=-X^{-1}\begin{bmatrix}0&\nabla fX_L\\0&0\end{bmatrix}+\frac{1}{n}\operatorname{Tr}(X_R^{-1}\nabla fX_L)\cdot\mathbf{1}_n.$$

因此，

$$\begin{aligned}&\left\langle\bar{R}_+(\nabla(u_{ij}\circ\Psi')X),\nabla x_{1k}X\right\rangle\\&\quad=-\left\langle X^{-1}\begin{bmatrix}0&\nabla u_{ij}X_L\\0&0\end{bmatrix},e_kX_{[1,1]}\right\rangle+\left\langle\frac{1}{n}\operatorname{Tr}(X_R^{-1}\nabla u_{ij}X_L)\cdot\mathbf{1}_n,e_kX_{[1,1]}\right\rangle\\&\qquad=-\left\langle\begin{bmatrix}0&\nabla u_{ij}X_L\\0&0\end{bmatrix},E_{k1}\right\rangle+\frac{1}{n}u_{ij}x_{1k}.\end{aligned}$$

此外，我们利用同一等式（3.4）将（3.10）改写为

$$\begin{aligned}R_+(X\nabla(f\circ\Psi'))&=-R_0\begin{bmatrix}0&0\\0&[\nabla f,U]_0\end{bmatrix}+\frac{1}{n}\operatorname{Tr}(\nabla fU)\cdot\mathbf{1}_n\\&\quad-\frac{1}{1-\gamma}\begin{bmatrix}0&0\\0&[\nabla f,U]_>\end{bmatrix}+\frac{\gamma^*}{1-\gamma^*}\begin{bmatrix}0&0\\0&[\nabla f,U]_<\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&\nabla fU\\0&0\end{bmatrix}X^{-1}.\end{aligned}\tag{3.18}$$

因此，$\langle R_+(X\nabla(u_{ij}\circ\Psi'))\ X\nabla x_{1k}\rangle$ 的表达式共有五项。（3.18）中的第二项的贡献为$\frac{1}{n}u_{ij}x_{1k}$。第三项和第四项的贡献均为零，因为这两个矩阵的首行为零，而 $X\nabla x_{1k}=X^{[k,k]}e_1^T$ 唯一的非零列是第一列。第五项的贡献为

$$-\left\langle\begin{bmatrix}0&\nabla u_{ij}X_L\\0&0\end{bmatrix}X^{-1},X^{[k,k]}e_1^T\right\rangle=-\left\langle\begin{bmatrix}0&\nabla u_{ij}X_L\\0&0\end{bmatrix},E_{k1}\right\rangle.$$

最后，根据（3.9），第一项的贡献等于

$$-\left\langle\frac{1}{n}\operatorname{Tr}\left(D_n\begin{bmatrix}0&0\\0&[\nabla u_{ij},U]_0\end{bmatrix}\right)\mathbf{1}_n,X^{[k,k]}e_1^T\right\rangle-\left\langle\frac{\gamma^*}{1-\gamma^*}\begin{bmatrix}0&0\\0&[\nabla u_{ij},U]_0\end{bmatrix},X^{[k,k]}e_1^T\right\rangle,$$

由于 $\operatorname{Tr}[\nabla u_{ij},U]=0$。注意 $\left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&[\nabla u_{ij},U]\end{smallmatrix}\right]=E_{j+1,\ j+1}-E_{i+1,\ i+1}$，因此

$$\operatorname{Tr}\left(D_n\begin{bmatrix}0&0\\0&[\nabla u_{ij},U]_0\end{bmatrix}\right)=i-j$$

and

$$\frac{\gamma^*}{1-\gamma^*}\begin{bmatrix}0&0\\0&[\nabla u_{ij},U]_0\end{bmatrix}=\begin{cases}E_{i+1,i+1}+\cdots+E_{jj}&\text{for } i<j,\\0&\text{for } i=j,\\-E_{j+1,j+1}-\cdots-E_{ii}&\text{for } i<j.\end{cases}\tag{3.19}$$

显然，后一表达式中的左上角元素对任意 i 与 j 均为零，因此它对 $\langle R_+(X\nabla(u_{ij}\circ\Psi'))\ X\nabla x_{1k}\rangle$ 的贡献为零，而前一表达式的贡献为 $\frac{i-j}{n}u_{ij}x_{1k}$。将所有项的贡献相加，我们得到 $\{u_{ij}\circ\Psi', x_{1k}\} = \frac{j-i}{n}u_{ij}x_{1k}$，因此

$$\{u_{ij}\circ\Psi', p_k\circ\Psi''\} = \left\{u_{ij}\circ\Psi', \frac{x_{1,k+1}}{x_{1n}}\right\} = 0.$$

类似地，可以计算括号 $\{u_{ij}\circ\Psi', x_{nk}\}$。具体而言，

$$\left\langle \bar{R}_+(\nabla(u_{ij}\circ\Psi')X), \nabla x_{nk}X\right\rangle = -\left\langle \begin{bmatrix} 0 & \nabla u_{ij}X_L \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{kn}\right\rangle + \frac{1}{n}u_{ij}x_{nk}.$$

此外，(3.18) 中第二项的贡献为 $\frac{1}{n}u_{ij}x_{nk}$。第三项和第四项的贡献为零，因为两个矩阵的最后一行均为零，而 $X\nabla x_{nk} = X^{[k,k]}e_n^T$ 的唯一非零列是最后一列。第五项的贡献为 $-\left\langle \left[\begin{smallmatrix} 0 & \nabla u_{ij}X_L \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], E_{kn}\right\rangle$。最后，(3.18) 中第一项的贡献为 $\frac{i-j}{n}u_{ij}x_{1k}$，因为 (3.19) 中右下角的元素为零（因为 i 和 j 至多为 $n-1$）。将所有项的贡献相加，得到 $\{u_{ij}\circ\Psi', x_{nk}\} = \frac{j-i}{n}u_{ij}x_{nk}$，因此

$$\{u_{ij}\circ\Psi', q_k\circ\Psi''\} = \left\{u_{ij}\circ\Psi', \frac{x_{n,k+1}}{x_{1n}}\right\} = 0.$$

□

4. Explicit expressions: the proof of Theorem 2.11

4.1. 定理 2.11(i) 的证明。定义 $(n-1)(n-2)/2$ 矩阵 $\Phi_{kl}(X)$，其中k、$l\in[1,n-2]$ 和 $k+l\le n-1$ 的大小分别为 $(n-k-l)(n+1)\times(n-k-l)(n+1)$。矩阵 $\Phi_{kl}(X)$ 由 $n-k-l$ 个宽度为 $n+1$的块列组成。每一列在垂直方向上分为四层。第 i 列的上层是一个零块 $\mathbf{0}_{(i-1)n\times(n+1)}$。第二层为 $\begin{bmatrix} X_{I\cup n} & 0\end{bmatrix}$，对于除最后一列以外的所有列，其 $I=[2,n-1]$；而对于最后一列，则 $I=[l+1,n-1]$。注意，每个第二层的最后一行中最左边的元素是 x_{n1}。第三层为 $\begin{bmatrix} 0 & X_{1\cup\gamma(J)}\end{bmatrix}$，对于除最后两列以外的所有列，其 $J=[2,n-1]$；对于从右数第二列，$J=[l+1,n-1]$，而对于最后一列，$J=[k+1,n-1]$。注意，每个第三层的第一行中最右边的元素是 x_{1n}。最后，下层再次为相应大小的零块。注意，第一列的上层为空，而最后一列的下层为空。例如，

矩阵 $\Phi_{21}(X)$（其中 $n=6$）为

$$\begin{bmatrix}
x_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_{41} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_{51} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_{61} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{36} & x_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x_{41} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{46} & x_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x_{51} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{56} & x_{41} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x_{61} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{66} & x_{51} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{61} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{36} & x_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{26} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{41} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{46} & x_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{36} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{51} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{56} & x_{41} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{46} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{61} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{66} & x_{51} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{56} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{61} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{66} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{16} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{41} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{46} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{51} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{56} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{61} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{66}
\end{bmatrix}.$$

利用按上述方式放置的 x_{n1} 和 x_{1n}，并在每个块列内施行列运算，我们将其变换为

$$\begin{bmatrix}
\star & & 0 \\
\vdots & (X_R)_I & \vdots \\
\star & & 0 \\
x_{n1} & 0\dots0 & 0 \\
0 & 0\dots0 & x_{1n} \\
0 & & \star \\
\vdots & (X_L)_J & \vdots \\
0 & & \star
\end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
\star & & 0 \\
\vdots & \mathbf{1}_I & \vdots \\
\star & & 0 \\
x_{n1} & 0\dots0 & 0 \\
0 & 0\dots0 & x_{1n} \\
0 & & \star \\
\vdots & U_J & \vdots \\
0 & & \star
\end{bmatrix} \operatorname{diag}(1, X_R, 1),$$

其中 $U = X_L X_R^{-1} = \Psi'(X)$和 $\star$通常表示在后续计算中无关紧要的元素。注意，元素 x_{1n} 和 x_{n1} 是整个矩阵 $\Phi_{kl}(X)$相应行中仅有的非零元素。考虑到 $\det X_R = (-1)^{n+1} x_{n1}^{-1} \det X$，我们得到

$$\begin{aligned}
&\phi_{kl}(X) = \det \Phi_{kl}(X) \\
&\quad = (x_{1n} \det X)^{n-k-l} \det \begin{bmatrix}
\mathbf{1}_{[2,n-1]} & \dots & 0 & 0 \\
U_{[2,n-1]} & \ddots & 0 & 0 \\
\ddots & \mathbf{1}_{[2,n-1]} & 0 & 0 \\
0 & U_{[2,n-1]} & \mathbf{1}_{[2,n-1]} & 0 \\
0 & \dots & U_{[l+1,n-1]} & \mathbf{1}_{[l+1,n-1]} \\
0 & \dots & 0 & U_{[k+1,n-1]}
\end{bmatrix},
\end{aligned}$$

其中，$\mathbf{1}$ 是大小为$(n-1)\times(n-1)$的单位矩阵。进一步进行分块列变换后，上述矩阵可化简为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_{[2,n-1]} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{[2,n-1]} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1}_{[2,n-1]} & 0 \\ 0 & \cdot s & 0 & \mathbf{1}_{[l+1,n-1]} \\ (-1)^{j-1}U^j_{[k+1,n-1]} & \cdot s & -U^2_{[k+1,n-1]} & U_{[k+1,n-1]} \end{bmatrix}$$

与 $j=n-k-l$，因此

$$\begin{aligned}\phi_{kl}(X) &= (-1)^{\frac{j(j-1)}{2}}\,(x_{1n}\det X)^j\,(-1)^{n\frac{j(j-1)}{2}+(n-l-1)(n-k-1)} \\ &\quad\times \det\left[\mathbf{1}^{[1,k]}\ (U^j)^{[1,1]}\ \cdot s\ (U^2)^{[1,1]}\ U^{[1,l]}\right] \\ &= (x_{1n}\det X)^j\,(-1)^{n\frac{j(j-1)}{2}+kn}s_{kl}^{n-1}\varphi_{kl}(U).\end{aligned}$$

考虑到 (2.9) 中符号 s_{kl} 的定义，我们得到 (2.17)。 □

4.2. 定理 2.11(ii) 的证明。我们从推导函数 $g_{ij}(U)$ 的表达式 (2.10) 开始证明。

我们将一个一般元素 $X\in GL_n$ 分解为 $X=X_+X_{0,\ -}$，其中 $X_{0,\ -}\in\mathcal{B}_-$ 且 $X_+\in\mathcal{N}_+$。按照 [21, 第7节。1], ，我们定义一列有理映射H_k： $GL_n\to GL_n$，如下

$$H_0(X)=X,\quad H_k(X)=X\boldsymbol{\gamma}(H_{k-1}(X)_+),\ k\geq 1,\quad X\in GL_n. \tag{4.1}$$

有理映射 H： $GL_n\to GL_n$ 定义为极限

$$H(X)=\lim_{k\to\infty}H_k(X),\quad X\in GL_n. \tag{4.2}$$

下面的引理是 [21, 引理 4.6] 的一个特例。这里我们给出一个针对本文需要的证明。

引理 4.1。序列 $Y_k=H_k(X)$ 在 $k=n-2$ 处稳定。

证明。我们将用归纳法证明，对于 $k\geq 0$ 存在 $N_k\in\gamma^k(\mathcal{N}_+)$ 使得

$$(Y_k)_+=(Y_{k-1})_+N_k,\quad Y_k=Y_{k-1}\boldsymbol{\gamma}(N_{k-1}). \tag{4.3}$$

因此，由于 $\boldsymbol{\gamma}^{n-1}(\mathcal{N}_+)=\{\mathbf{1}_n\}$,

$$Y=Y_{n-2}=Y_{n-1}=Y_n=\cdot s$$

从而结论成立。

事实上，对于 $k=1$，(4.3) 中的第二个关系由 H_1 的定义以及 $N_0=X_+$ 直接得到。为得到第一个关系，我们将 $Y_1=X_+X_{0,\ -}\boldsymbol{\gamma}(X_+)=X_+N_1B_1$ 与 $N_1\in\boldsymbol{\gamma}(\mathcal{N}_+)$、$B_1\in\mathcal{B}_-$ 重新分解。然后由归纳法得到

$$Y_k=X\boldsymbol{\gamma}((Y_{k-1})_+)=X\boldsymbol{\gamma}((Y_{k-2})_+)\boldsymbol{\gamma}(N_{k-1})=Y_{k-1}\boldsymbol{\gamma}(N_{k-1}),$$

而 $N_k\in\boldsymbol{\gamma}^k(\mathcal{N}_+)$ 随后通过重因式分解$(Y_{k-1})_{0,\ -}\boldsymbol{\gamma}(N_{k-1})=N_kB_k$ 来定义。这证明了 (4.3)。 □

推论 4.2. (i) $Y = H(X)$ 满足关系

$$Y = X\boldsymbol{\gamma}(Y_+),$$

因此， H 是一个双有理映射。

（ii）对于 $1 \le \alpha \le \beta \le n$ 以及任意大小为 $\beta - \alpha + 1$ 的 $I \subset [2, n]$,

$$\det Y_I^{[\alpha,\beta]} = \det(Y_k)_I^{[\alpha,\beta]} \quad \textit{for } k \ge \alpha - 2. \tag{4.4}$$

证明。（i）由引理 4.1 立即得出。

（ii）由（4.3）中的第二个关系可得，因为在右侧乘以 $\boldsymbol{\gamma}^k(\mathcal{N}_+)$ 中的一个元素，不会改变从第一列 $k+1$ 开始的列连续子式。□

引理 4.3。对于任意 $1 < \alpha \le \beta \le n$ 和 $I \subset [1, n]$、$|I| = \beta - \alpha + 1$,

$$\begin{aligned} &\det(Y_{\alpha-2})_I^{[\alpha,\beta]} \prod_{s=1}^{\alpha-2} \det(Y_{\alpha-2-s})_{[\alpha-s,n]}^{[\alpha-s,n]} \\ &\quad = \sum_{I_1,\dots,I_{\alpha-2}} \det X_I^{I_1} \det X^{I_2}_{\gamma^*(I_1)\cup[\beta,n]} \det X^{I_3}_{\gamma^*(I_2)\cup n} \cdot s \det X^{[2,n]}_{\gamma^*(I_{\alpha-2})\cup n}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

其中 I_1 和 $I_2, \dots, I_{\alpha-2}$ 是 $[2, n]$ 的子集，其大小分别为 $\beta-\alpha+1$ 和 $n-\alpha+2, \dots, n-2$。

证明。由 (4.1) 和比奈-柯西公式，

$$\begin{aligned} \det(Y_{\alpha-2})_I^{[\alpha,\beta]} &= \sum_{I_1\subset[2,n],|I_1|=|I|} \det X_I^{I_1} \det \boldsymbol{\gamma}((Y_{\alpha-3})_+)_{I_1}^{[\alpha,\beta]} \\ &= \sum_{I_1\subset[2,n],|I_1|=|I|} \det X_I^{I_1} \det((Y_{\alpha-3})_+)_{\gamma^*(I_1)}^{[\alpha-1,\beta-1]} \\ &= \sum_{I_1\subset[2,n],|I_1|=|I|} \det X_I^{I_1} \frac{\det(Y_{\alpha-3})^{[\alpha-1,n]}_{\gamma^*(I_1)\cup[\beta,n]}}{\det(Y_{\alpha-3})^{[\alpha-1,n]}_{[\alpha-1,n]}}. \end{aligned}$$

现在，考虑推论 4.2(ii) 后即可通过归纳法得到 (4.5)。 □

现在我们可以推导函数 $g_{ij}(U)$ 的表达式 (2.10)。在 [21,第7节.2],中，函数 $g_{ij}(U)$、$1 < j \le i \le n$ 是通过 $H(U)$ 的某些旗子子式，利用倒数关系定义的

$$\begin{aligned} g_{ij}(U) &= \det[H(U)]_{[i,n]}^{[j,n-i+j]} \prod_{s=2}^{j-1} \det[H(U)]_{[s,n]}^{[s,n]}, \\ \det(H(U))_{[i,n]}^{[j,n-i+j]} &= \begin{cases} \dfrac{g_{ij}(U)}{g_{j-1,j-1}(U)} & \text{if } j \ge 3, \\ g_{ij}(U) & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned} \tag{4.6}$$

命题 4.4. 函数 $g_{ij}(U)$ 由表达式 (2.10) 给出

(4.7)

$$\begin{aligned} g_{ij}(U) &= \det(H(U))_{[i,n]}^{[j,n-i+j]} \prod_{s=2}^{j-1} \det[H(U)]_{[s,n]}^{[s,n]} \\ &= \sum_{I_1,\dots,I_{j-2}} \det U_{[i,n]}^{I_1} \det U^{I_2}_{\gamma^*(I_1)\cup[n-i+j,n]} \det U^{I_3}_{\gamma^*(I_2)\cup n} \cdot s \det U^{[2,n]}_{\gamma^*(I_{j-2})\cup n}, \end{aligned}$$

其中 I_1 与 $I_2, \ldots, I_{j-2}$ 分别是 $[2,n]$ 的大小为 $n-i+1$ 与 $n-j+2, \ldots, n-2$ 的子集。

证明。由 (4.6) 和引理 4.3 直接可得。 □

为证明定理 2.11(ii)，我们需要两个辅助技术命题。对于大小为 k 的指标集 I，记 $(-1)^I = (-1)^{k(k-1)/2} \prod_{i \in I} (-1)^i$，并用 $A_{\hat{I}}$ 表示 A 中不属于 I 的那些行所构成的子矩阵。

引理 4.5。对于任意两个大小同为 k 的指标集 I、$J \subset [1, n-1]$，

$$\det \Psi'(X)_I^J = (-1)^{(n-1)k} \frac{(-1)^J}{x_{1n} \det X} \det \begin{bmatrix} X_{\hat{J}} & 0 \\ 0 & X_{1 \cup \gamma(I)} \end{bmatrix}. \tag{4.8}$$

证明。与上一节的证明类似，我们利用上分块左下角的 x_{n1} 和下分块右上角的 x_{1n}，通过列运算将 (4.8) 右端的行列式化为

$$(-1)^{n-1} x_{n1} x_{1n} \det \begin{bmatrix} (X_R)_{\hat{J}} \\ (X_L)_I \end{bmatrix} = (-1)^{n-1} x_{n1} x_{1n} \det X_R \det \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{\hat{J}} \\ \Psi'(X)_I \end{bmatrix},$$

其中 $\mathbf{1} = \mathbf{1}_{n-1}$。考虑到上述矩阵的行列式等于 $(-1)^{(n-1)k}(-1)^J \det \Psi'(X)_I^J$，且 $\det X_R = (-1)^{n-1} x_{n1}^{-1} \det X$，最终得到 (4.8)。□

引理 4.6。设 m, q, p 为自然数，满足 $m \geq q + p$，且 $q > p$, A,B, C 是 $[1,m]$ 的三个子集，其大小分别为 p, q 和 $q-p$，并且 L 是一个$m \times q$ 矩阵。那么

$$\sum_{B' \subset B, |B'| = p} (-1)^{B'} \det L_{A \cup (B \setminus B')} \det L_{B' \cup C} = \det L_B \det L_{A \cup C}. \tag{4.9}$$

证明。考虑一个 $2q \times 2q$ 矩阵

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} L_A & 0 \\ L_B & L_B \\ 0 & L_C \end{bmatrix}.$$

根据分块拉普拉斯展开公式，$\det \tilde{L}$ 等于 (4.9) 左端，至多相差一个符号 $(-1)^{p(q+p)}$。另一方面，从 L 的第二个块列中减去第一个块列 ~，再对结果的行进行置换，可得 $\det L$ 等于

$$(-1)^{pq+p} \det \begin{bmatrix} L_B & 0 \\ 0 & L_{A \cup C} \end{bmatrix} = (-1)^{pq+p} \det L_B \det L_{A \cup C}.$$

□

此外，我们引入一些额外的记号。设 I_1、...、I_k 是 $[1,n]$ 的子集。我们将由子矩阵 X_{I_1}、...、X_{I_k} 按如下方式自上而下堆叠而成、大小为 $\sum_l |I_l| \times (n+k-1)$ 的矩形矩阵记为 $\mathsf{G}(I_1, \ldots, I_k)$：$X_{I_1}$ 占据 $\mathsf{G}(I_1, \ldots, I_k)$ 的左上角，每个块 $X_{I_{l+1}}$ 相对于其上方的块 X_{I_l} 向右移动一列。因此，$\mathsf{G}(I_1, \ldots, I_k)$ 有 k 个块行，其大小依次为 $|I_1| \times (n+k-1)$、...、$|I_k| \times (n+k-1)$；第 l 个块前有 $l-1$ 列初始零列，随后是 X_{I_l}，再后是 $k-l$ 列零列。对于 $\mathsf{G}(I_1, \ldots, I_k)$ 的行指标集，我们采用记号 $(J_1, \ldots, J_k)$，其中 $J_1 \subset I_1$、...、$J_k \subset I_k$。特别值得关注的是 $I_1 = I_2 = \cdots =$

$I_{k-2} = I$；相应的矩阵记为 $\mathtt{G}(I^{k-2}, I_{k-1}, I_k)$。特别地，对于 $i \in [2, n-1]$ 和 $j \in [2, i]$，我们定义 $\mathtt{G}_{ij}(X)$ 如下：

$$\mathtt{G}_{ij}(X) = \mathtt{G}(\{1, n\}^{j-2}, 1 \cup [n+j-i, n], 1 \cup [i+1, n]).$$

注意，在这种情况下 $\sum_l |I_l| = n + j - 1$，因此$\mathtt{G}_{ij}(X)$是大小为$(n+j-1) \times (n+j-1)$的方阵。例如，对于 $n = 6$，矩阵$\mathtt{G}_{53}(X)$由下式给出

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & 0 & 0 \\ x_{61} & x_{62} & x_{63} & x_{64} & x_{65} & x_{66} & 0 & 0 \\ 0 & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & 0 \\ 0 & x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} & x_{46} & 0 \\ 0 & x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} & x_{56} & 0 \\ 0 & x_{61} & x_{62} & x_{63} & x_{64} & x_{65} & x_{66} & 0 \\ 0 & 0 & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} \\ 0 & 0 & x_{61} & x_{62} & x_{63} & x_{64} & x_{65} & x_{66} \end{bmatrix}.$$

引理 4.7. 设 $U = \Psi'(X)$、 $2 \le \alpha \le \beta \le n-1$，且 I 是 $[2, n-1]$的一个大小为 $\beta - \alpha + 1$的子集。则

$$\det[H(U)]_I^{[\alpha,\beta]} \prod_{s=2}^{\alpha-1} \det[H(U)]_{[s,n-1]}^{[s,n-1]} = \frac{\sigma(n,\alpha,\beta)}{x_{1n}^{\alpha-1} \det X} \det \mathtt{G}(\{1,n\}^{\alpha-2}, 1 \cup [\beta+1, n], 1 \cup \gamma(I)), \tag{4.10}$$

其中符号 $\sigma(n, \alpha, \beta)$不依赖于 I，并由下式给出

$$\sigma(n,\alpha,\beta) = (-1)^{(n-1)(\beta-\alpha-1)+\alpha\beta}. \tag{4.11}$$

证明. 我们对 α使用归纳法。对于 $\alpha = 2$，(4.10)由(4.4)和引理 4.5得出，同时注意到ˆ方程(4.8)右边出现的矩阵是$\mathtt{G}(J, 1 \cup \gamma(I))$。在这种情况下，

$$\sigma(n, 2, \beta) = (-1)^{(n-1)(\beta-1)}(-1)^{[2,\beta]} = (-1)^{(n-1)(\beta-1)}. \tag{4.12}$$

接下来，由 (4.4) 和 (4.1)，

$$\begin{aligned} \det[H(U)]_I^{[\alpha+1,\beta]} &= \det[H_{\alpha-1}(U)]_I^{[\alpha+1,\beta]} = \det\left[U\boldsymbol{\gamma}(H_{\alpha-2}(U)_+)\right]_I^{[\alpha+1,\beta]} \\ &= \sum_{\substack{K \subset [2,\beta] \\ |K| = \beta-\alpha}} \det U_I^K \det\left[H_{\alpha-2}(U)_+\right]_{\gamma^*(K)}^{[\alpha,\beta-1]} \\ &= \sum_{\substack{K \subset [2,\beta] \\ |K| = \beta-\alpha}} \det U_I^K \frac{\det\left[H_{\alpha-2}(U)\right]_{\gamma^*(K)\cup[\beta,n-1]}^{[\alpha,n-1]}}{\det\left[H_{\alpha-2}(U)\right]_{[\alpha,n-1]}^{[\alpha,n-1]}} \\ &= \sum_{\substack{K \subset [2,\beta] \\ |K| = \beta-\alpha}} \det U_I^K \frac{\det\left[H(U)\right]_{\gamma^*(K)\cup[\beta,n-1]}^{[\alpha,n-1]}}{\det\left[H(U)\right]_{[\alpha,n-1]}^{[\alpha,n-1]}}. \end{aligned}$$

利用归纳假设和引理 4.5，我们得到一个大小为 $\beta-\alpha$ 的 $[2,n-1]$ 的子集 I

$$\begin{aligned}(4.13)\quad &\det[H(U)]_I^{[\alpha+1,\beta]}\prod_{s=2}^{\alpha}\det[H(U)]_{[s,n-1]}^{[s,n-1]}\\ &=\sum_{\substack{K\subset[2,\beta]\\|K|=\beta-\alpha}}\det U_I^K\det\left[H(U)\right]_{\gamma^*(K)\cup[\beta,n-1]}^{[\alpha,n-1]}\prod_{s=2}^{\alpha-1}\det[H(U)]_{[s,n-1]}^{[s,n-1]}\\ =&\sum_{\substack{K\subset[2,\beta]\\|K|=\beta-\alpha}}\det U_I^K\frac{\sigma(n,\alpha,n-1)}{x_{1n}^{\alpha-1}\det X}\det\mathtt{G}(\{1,n\}^{\alpha-2},\{1,n\},1\cup K\cup[\beta+1,n])\\ &=\frac{(-1)^{(n-1)(\beta-\alpha)}\sigma(n,\alpha,n-1)}{x_{1n}^{\alpha}(\det X)^2}\sum_{\substack{K\subset[2,\beta]\\|K|=\beta-\alpha}}(-1)^K\det\mathtt{G}(\hat{K},1\cup\gamma(I))\times\\ &\qquad\det\mathtt{G}(\{1,n\}^{\alpha-2},\{1,n\},1\cup K\cup[\beta+1,n]).\end{aligned}$$

注意，对于 $J=[2,\beta]\setminus K$，有 $(-1)^J=(-1)^K(-1)^{\beta(\alpha+1)}$，因此在乘以 $(-1)^{\beta(\alpha+1)}x_{n1}^{\alpha-1}x_{1n}$ 并转为对 J 求和之后，上述和式可改写为

$$(4.14)\qquad\sum_{J\subset[2,\beta],|J|=\alpha-1}(-1)^J\det\mathtt{G}(n^{\alpha-1},1\cup J\cup[\beta+1,n],1\cup\gamma(I))\det\mathtt{G}(\{1,n\}^{\alpha-1},\hat{J},1),$$

并且我们可以应用引理 4.6，取 $L=\mathtt{G}(\{1,n\}^{\alpha-1},[1,n],1\cup\gamma(I))$、$m=n+\alpha+\beta-2$、$q=n+\alpha$、$p=\alpha-1$、$A=(1,\dots,1,\varnothing,\dots\varnothing)$，其中 $\alpha-1$ 为非空子集，$B=(n,\dots,n,[1,n],1)$，$C=(n,\dots,n,1\cup[\beta+1,n],1\cup\gamma(I))$。于是 (4.14) 中的和等于

$$\det L_B\det L_{A\cup C}=\left(x_{n1}^{\alpha-1}x_{1n}\det X\right)\det\mathtt{G}(\{1,n\}^{\alpha-1},1\cup[\beta+1,n],1\cup\gamma(I)).$$

因此，我们由 (4.13) 得到 (4.10)，其中 $\sigma(n,\alpha,\beta)$ 满足递推关系

$$\sigma(n,\alpha+1,\beta)=(-1)^{(n-1)(\beta-\alpha)+\beta(\alpha+1)}\sigma(n,\alpha,n-1).$$

容易验证，满足初始条件 (4.12) 的该递推关系的解由 (4.11) 给出 □

由 (4.6) 和引理 4.7 可立即推出 $I=[i,n-1]$, $\alpha=j$, $\beta=n-1-i+j$ 的定理 2.11(ii) 结论。□

4.3. 定理 2.11(iii) 的证明。回顾一下，函数 $\mathsf{c}_r(X)$ 是通过 $\det(\lambda\mathsf{A}(X)+\mathsf{B}(X))=\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{rn}\lambda^r\mathsf{c}_r(X)$ 定义的，其中 $\mathsf{A}(X)$ 和 $\mathsf{B}(X)$ 是第 3.1 节开头定义的周期阶梯结构的分块。关系 (2.19) 可由 (3.1) 以及函数 $c_r(U)$ 对 GL_{n-1} 的定义 (2.11) 直接推出。注意，$\mathsf{c}_0(X)=x_{1n}\det X$ 不包含在初始簇 $\mathcal{F}_n$ 中。□

4.4. 定理 2.11(iv) 的证明。令 $\bar{q}_i$ 和 p_i, $i \in [0, n-1]$ 为有理函数 $M(\lambda) \in \mathcal{R}_{n-1}$（如 (3.12) 中所定义）的系数[¯]；回顾一下，$p_{n-1} = 1$。此外，对 $i < 0$ 和 $i \geq n$ 定义 $\bar{q}_i = p_i = 0$。Laurent 展开 (2.14) 得到

$$\bar{q}_j = \sum_{i=0}^{\infty} p_{i+j} \bar{h}_i \qquad \text{for } j \in \mathbb{Z}. \tag{4.15}$$

[¯]通过以下方式定义一个 $(2n-1) \times (2n-1)$ 矩阵 $F = F(M)$

$$F_{2i,j} = p_{j-i-1}, \qquad F_{2i+1,j} = \bar{q}_{j-i-1}$$

并记 $F_k = F^{[2n-k,2n-1]}_{[2n-k,2n-1]}$，其中 $k \in [1, 2n-1]$。为计算 $\det F_k$，我们从 F_k 中的每个 $\bar{q}$ 行减去其上方 F_k 中所有 p 行的线性组合，其中系数 h_0 对应紧邻其上方的 p 行，h_1 对应前一行 p，依此类推。因此，根据 (4.15)，F_k 中每个 $\bar{q}$ 行的最后 $\lfloor k/2 \rfloor$ 个元素均为零。对于 $k = 2m-1$，第 t 个 $\bar{q}$ 行的第 s 个元素等于

$$\sum_{i=s-1}^{\infty} p_{n-m+t-1+i} \bar{h}_i.$$

因此，

$$\det F_{2m-1} = (-1)^{m(m-1)/2} \det(h_{\alpha+\beta-2})^m_{\alpha,\beta=1} \det(p_{\alpha+\beta+n-m-2})^m_{\alpha,\beta=1} = \bar{t}^-_m,$$

因为上面的第二个行列式等于 $(-1)^{m(m-1)/2}$。对于 $k = 2m$，第 s 行的第 t 个元素等于

$$\sum_{i=s}^{\infty} p_{n-m+t-2+i} \bar{h}_i.$$

因此，

$$\det F_{2m} = (-1)^{m(m+1)/2} \det(h_{\alpha+\beta-1})^m_{\alpha,\beta=1} \det(p_{\alpha+\beta+n-m-2})^m_{\alpha,\beta=1} = \bar{t}^+_m$$

理由与上面相同。

为完成证明，定义一个 $(2n-1)\times(2n-1)$ 矩阵 $\mathsf{F}(X) = x_{1n} F(\Psi''(X))$。$\mathsf{F}(X)$ 的第一行与 X 的最后一行相同，后面附加 $n-1$ 个零；第二行和第三行分别是 X 的第一行和最后一行向右移一位后，附加 $n-2$ 个零；依此类推。例如，$n = 4$ 时的矩阵 $\mathsf{F}(X)$ 等于

$$\begin{bmatrix} x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & 0 & 0 \\ 0 & x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & 0 \\ 0 & 0 & x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 0 & 0 & 0 & x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{bmatrix}.$$

最后，令 $\mathsf{f}_k(x) = \det \mathsf{F}(X)^{[2n-k,2n-1]}_{[2n-k,2n-1]} = x^k_{1n} \det F_k(\Psi''(X))$。由上述讨论立即可得关系式 (2.20)。关系式 $\bar{t}^-_n(\Psi''(X))/\bar{t}^+_{n-1}(\Psi''(X)) = x_{n1}/x_{1n}$ 现在显而易见。□

5. Proof of Propositions 2.14–2.16

5.1. 命题2.14的证明。(i) 根据定理 2.11，分母的不可约因子集合由 $z_1 = x_{1n}$ 和 $z_2 = \det X$组成。除 (1, 1) 外， $Q^{\dagger}_{n-1}$ 的所有顶点处的情况均由第 4.1 节中的构造和注 4.8]涵盖。通过对表达式 (2.17)、(2.18) 和 (2.20) 进行直接计算可知，由 (2.7) 计算得到的偏差 δ_{1v} 在 $Q^{\dagger}_{n-1}$ 的所有顶点$v \neq (1, 1)$ 处均为零，除了 $(n-2, 1)$ 处，此时 $\delta_{1v} = 1$。因此，在 $\Psi'^{*}Q^{\dagger}_{n-1}$中添加一个对应于 x_{1n} 的新顶点 A 以及一条箭头 $(n-2, 1) \to A$。类似地，偏差 δ_{2v} 在除 $(n-2, 1)$ 和$\langle n-1, 2\rangle$之外的所有顶点处均为零；在这两处，偏差分别为 $\delta_{2v} = 1$和 $\delta_{2v} = -1$。因此，在 $\Psi'^{*}Q^{\dagger}_{n-1}$中添加一个对应于 $\det X$的新顶点B，并添加箭头 $(n-2, 1) \to B$和 $B \to \langle n-1, 2\rangle$。(1, 1) 处的情况按照第 4.4] 节中的说明处理：通过关系式 [20, 式 (4.5)] 中第一式计算得到的函数 $\varphi_1(r)$，在 $r \in [1, n-1]$ 时等于 $1 - r/(n-1)$，在 $r = 0$ 时为零；而通过关系式 [20, 式 (4.5)] 中第二式计算得到的 τ_1 等于 $1/(n-1)$。因此，我们恰好满足 [20, 例 4.7(i)], 的条件，于是在 $\Psi'^{*}Q^{\dagger}_{n-1}$ 中添加一条从 A 指向 (1, 1) 的箭头，并按通常方式在突变下改变它。

（ii）根据定理 2.11，分母中唯一的不可约因子是 $z_1 = x_{1n}$。由于 $\bar{Q}^{T}_{n-1}$ 没有广义顶点，第 4 节中关于 [20, 的构造1]适用。类似于（i）中的直接计算表明，偏差 δ_{1v} 在 $\bar{Q}^{T}_{n-1}$ 的所有顶点 v 处均消失，唯独在 (1, –) 处除外，在该处 $\delta_{1v} = -1$。因此，在 $\bar{\Psi}''^{*}Q^{T}_{n-1}$中添加了一个对应于 x_{1n} 的新顶点 A 以及一条箭头$A \to (1, –)$。□

5.2. 命题 2.15 的证明及应用。（i）假设 f 是冻结的，那么根据相容性，对于任意簇t中的任意簇变量，都有 $\{f, x_i(t)\}_{\mathcal{GC}} = c_i f x_i(t)$；此外，对于 t中由簇变量构成的任意 Laurent 单项式 $L(t)$，都有 $\{f, L(t)\}_{\mathcal{GC}} = c_L f L(t)$。令 $g \in \mathbb{C}[V]$。由于 $\mathcal{GC}$ 是完备的，对于任意 t，都可以将 g 写成 t中簇变量的 Laurent 单项式之和： $g = \sum_k L_k(t)$。因此，对于 $\tilde{g} = \sum_k c_{L_k} L_k(t)$，有$\{f, g\}_{\mathcal{GC}} = \sum_k c_{L_k} f L_k(t) = f\tilde{g}$。所以，对于任意固定的 t， $\tilde{g}$在 t 的簇变量中具有 Laurent 表示，因此属于上簇代数 $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{GC})$。由 $\mathcal{GC}$的正则性可知，这意味着 $\tilde{g}$ 是正则的。

(ii) 首先注意，对于任意抽象广义簇结构，若 Laurent 单项式的分母中含有簇变量，则它不属于上簇代数。事实上，设 $L = M'/M''$ 是一个 Laurent 单项式，且 $M'' = f^d \bar{M}''$ 是一个单项式 $\bar{M}''$，其中 f 是某个簇 t 中的簇变量，并且 $d > 0$。在通过对 f 进行突变得到的相邻簇 t' 中，我们可以写成 $L = M'(f')^d/P^d\bar{M}''$，其中 P 是交换关系 $ff' = P$ 的右端。假设 L 属于簇 t' 中 Laurent 多项式构成的环，则有 $M'(f')^d/P^d\bar{M}'' = Q/\tilde{M}$，其中 Q 是某个多项式， $\tilde{M}$ 是某个单项式，从而得到 $P^d Q\bar{M}'' = M'\tilde{M}(f')^d$，这就矛盾了，因为右端是一个单项式，而左端不是。因此，对于 V 上的正则完备广义结构，这样的单项式不是正则函数。

现在假设 f是普通可变的，且 $ff' = M_1 + M_2$是 f的交换关系。我们声称 $\{f, f'\}_{\mathcal{GC}}/f$不是正则的。事实上，由于 M_1 和 M_2 中的所有簇变量都与 f 位于同一个簇中，相容性给出 $\{f, M_1\}_{\mathcal{GC}} = c_1 f M_1$, $\{f, M_2\}_{\mathcal{GC}} = c_2 f M_2$。另一方面， [10, 定理 1.4] 给出 $\{f, M_1/M_2\}_{\mathcal{GC}} = (c_1 - c_2) f M_1/M_2$，其中 $c_1 - c_2 \neq 0$。因此，

$\{f, f'\}_{\mathcal{GC}}/f = (c_1 M_1 + c_2 M_2)/f$，对于 $c_1 \neq c_2$。注意，后一个表达式的正则性与 $f' = (M_1 + M_2)/f$ 的正则性结合起来，将意味着M_1/f 和 M_2/f 都正则，这就产生了矛盾。

现在设 f 为阶数为 d 的广义可变元，并设 f 的交换关系为 $ff' = \sum_{i=0}^{d} M_i$。与上述情况类似，我们得到 $\{f, M_i\}_{\mathcal{GC}} = c_i f M_i$。假设 f 的交换关系右端按 [15, 式 (2.4)]，规定的形式书写，则由 [15, 命题 2.5] 可推知 $c_0 \neq c_d$，并且对 $i \in [0, d]$，有 $c_i = c_0 + i(c_d - c_0)/d$。定义一个函数序列

$$f_j = \frac{1}{f} \sum_{i=j}^{d} \frac{i!}{(i-j)!} M_i$$

对 $j \in [0, d]$，使得 $f_0 = f'$，则对 $j \in [0, d-1]$，有 $\{f, f_j\}_{\mathcal{GC}}/f = c_j f_j + \frac{c_d - c_0}{d} f_{j+1}$。因此， f_j 的正则性以及左端的正则性意味着 f_{j+1} 正则。注意到 f_0 正则，因此假设对 $j \in [0, d-1]$， $\{f, f_j\}_{\mathcal{GC}}/f$ 都正则，我们便得到 $f_d = d! M_d/f$ 正则，这就产生了矛盾。这个矛盾表明，集合 $\{f_0, \ldots, f_{d-1}\}$ 至少包含一个正则函数 f_j，使得 $\{f, f_j\}_{\mathcal{GC}}/f$ 不正则。□

作为一项应用，我们证明，在与 $\{\cdot, \cdot\}$ 兼容的正则完备广义簇结构中， x_{1n} 和 x_{n1} 应当被冻结。事实上，由 (3.13) 可立即推出

$$(\nabla x_{1n} X)_> = (X \nabla x_{1n})_> = 0, \quad \gamma(\nabla x_{1n} X)_< = 0, \quad \gamma^*(X \nabla x_{1n})_< = 0,$$

¯，因此， R_+ 和 R_+ 的表达式 (2.4) 中的第二项和第三项均为零。进一步，由 (3.6) 和 (3.9),

$$\bar{R}_0(\nabla x_{1n} X) = -\frac{n+1}{2n} x_{1n} \mathbf{1}_n + \frac{1}{n} x_{1n} \bar{D}_n, \quad R_0(X \nabla x_{1n}) = -\frac{n+1}{2n} x_{1n} \mathbf{1}_n + \frac{1}{n} x_{1n} D_n,$$

因此，对于任意函数 g，有

$$\{x_{1n}, g\} = \frac{x_{1n}}{n} \left(\left\langle \bar{D}_n - \frac{n+1}{2} \mathbf{1}_n, (\nabla g X)_0 \right\rangle - \left\langle D_n - \frac{n+1}{2} \mathbf{1}_n, (X \nabla g)_0 \right\rangle \right) \tag{5.1}$$
$$= \frac{x_{1n}}{n} \left(\langle \bar{D}_n, (\nabla g X)_0 \rangle - \langle D_n, (X \nabla g)_0 \rangle \right)$$

因为 $\langle \mathbf{1}_n, (\nabla g X)_0 \rangle = \langle \mathbf{1}_n, (X \nabla g)_0 \rangle$。显然，如果 g 是正则函数，那么上面的括号内表达式也是正则函数，因此命题 2.15 适用。

类似地，由 (3.13) 可推出

$$(\nabla x_{n1} X)_< = (X \nabla x_{n1})_< = 0, \quad \gamma(\nabla x_{n1} X)_> = 0, \quad \gamma^*(X \nabla x_{n1})_> = 0,$$

¯，因此， R_+ 和 R_+ 的表达式 (2.4) 中的第三项为零，而第二项分别变为 $(e_1 X_{[n,n]})_>$ 和 $(X^{[1,1]} e_n^T)_>$。进一步，由 (3.6) 和 (3.9),

$$\bar{R}_0(\nabla x_{n1} X) = \frac{n-3}{2n} x_{n1} \mathbf{1}_n + \frac{1}{n} x_{n1} \bar{D}_n, \quad R_0(X \nabla x_{n1}) = \frac{n-3}{2n} x_{n1} \mathbf{1}_n + \frac{1}{n} x_{n1} D_n,$$

因此，对于任意函数 g，有

$$\{x_{n1}, g\} = \frac{x_{n1}}{n} \left(\left\langle \bar{D}_n - \frac{n+3}{2} \mathbf{1}_n, (\nabla g X)_0 \right\rangle - \left\langle D_n - \frac{n+3}{2} \mathbf{1}_n, (X \nabla g)_0 \right\rangle \right)$$
$$+ \left\langle e_1 X_{[n,n]}, \nabla g X \right\rangle - \left\langle X^{[1,1]} e_n^T, X \nabla g \right\rangle.$$

注意到 $Xe_1X_{[n,n]} = X^{[1,1]}e_n^TX$，因此最后两项相互抵消，从而得到

$$\{x_{n1}, g\} = \frac{x_{n1}}{n}\left(\langle \bar{D}_n, (\nabla g X)_0\rangle - \langle D_n, (X\nabla g)_0\rangle\right), \tag{5.2}$$

因此，出于与上文相同的原因，命题 2.15 适用。

由此计算可立即得到以下结论。

引理 5.1. x_{1n}/x_{n1} 是括号 $\{\cdot,\cdot\}$的卡西米尔元。

5.3. 命题2.16 的证明。回顾一下，对于一个（$k+3$）$\times k$ 矩阵 A 和六个指定的行指标 $\alpha<\beta<\gamma<\delta<\xi<\zeta$，四项 Pl¨ucker 关系写作

$$\widehat{\alpha,\beta,\gamma}\cdot\widehat{\delta,\xi,\zeta} - \widehat{\alpha,\beta,\delta}\cdot\widehat{\gamma,\xi,\zeta} + \widehat{\alpha,\gamma,\delta}\cdot\widehat{\beta,\xi,\zeta} - \widehat{\beta,\gamma,\delta}\cdot\widehat{\alpha,\xi,\zeta} = 0$$

其中 i_1, i_2, i_3 是从 A中删去行 i_1, i_2, i_3 后得到的 $k\times k$ 子式。定义一个 (2n + 1) × (2n − 2) 矩阵 G(X)，它由 G($\{1,n\}^{n-3}$, $\{1,n-1,n\}$, $\{1,n\}$) 在最上方添加 $[1,0,\dots,0]$ 作为首行，随后添加 $[0,\dots,0,1]$得到，并考虑 G(X) 与 $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=3$, $\delta=2n-2$,$\xi=2n$, $\zeta=2n+1$的四项 Pl¨ucker 关系。容易看出

$$\widehat{\alpha,\beta,\gamma} = x_{n1}\mathtt{g}_{n-1,n-2}(X), \quad \widehat{\delta,\xi,\zeta} = \mathtt{f}_{2n-4}(X), \quad \widehat{\alpha,\beta,\delta} = \mathtt{g}_{n-1,n-1}(X),$$
$$\widehat{\beta,\xi,\zeta} = 0, \quad \widehat{\beta,\gamma,\delta} = \mathtt{f}_{2n-3}(X), \quad \widehat{\alpha,\xi,\zeta} = -\mathtt{g}_{n-2,n-2}(X),$$

这验证了 g(X) = γ, ξ, ζ满足 (2.21)。显然，由该关系定义的 g(X) 等于 detG$_{n-1,\ n-2}(X)^{[2,2n-3]}_{[2,2n-3]}$。□

6. Compatibility and toric action

6.1. 预备结果。本节的主要技术工具是以下结论。

引理 6.1. 若 g 满足 (2.23)，则 $\{x_{1n}, g\} = \frac{1}{n}(\bar{\xi}_g - \xi_g)x_{1n}g$ 且 $\{x_{n1}, g\} = \frac{1}{n}(\bar{\xi}_g - \xi_g)x_{n1}g$。

证明. 由 (5.1) 和 (5.2) 可立即得出。□

鉴于上述引理，我们首先证明$\mathcal{F}_n$ 中的所有簇变量关于作用 $X \mapsto t^{D_n}Xs^{\bar{D}_n}$ 是齐次的，并计算¯相应的权 ξ 和 ξ。

引理 6.2. $\mathcal{F}_n$ 中的所有簇变量满足(2.23)。相应的权由

$$
\begin{aligned}
&\xi_{x_{1n}} = \bar{\xi}_{x_{1n}} = n, \qquad \xi_{x_{n1}} = \bar{\xi}_{x_{n1}} = 1, \qquad \xi_{\det X} = \bar{\xi}_{\det X} = \frac{n(n+1)}{2},\\
&\xi_{\mathsf{c}_r} = \bar{\xi}_{\mathsf{c}_r} = \frac{n(n+3)}{2} - r,\\
&\xi_{\mathsf{g}_{ij}} = \frac{(i-j)(i-j+1)}{2} + \frac{(n-i)(n-i-1)}{2} + (j+1)n - 1,\\
&\bar{\xi}_{\mathsf{g}_{ij}} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(j+1)(j-2)}{2} + i,\\
&\xi_{\mathsf{f}_m} = \begin{cases} \dfrac{m(n+1)}{2} & \text{for } m \text{ even},\\ \dfrac{(m-1)(n+1)}{2} + 1 & \text{for } m \text{ odd}, \end{cases} \qquad (6.1)\\
&\bar{\xi}_{\mathsf{f}_m} = \begin{cases} nm - \dfrac{m^2}{4} & \text{for } m \text{ even},\\ nm - \dfrac{m^2-1}{4} & \text{for } m \text{ odd}, \end{cases}\\
&\xi_{\phi_{kl}} = \frac{n(n-k-l)(k+l+4)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} + \frac{l(l-1)}{2} + \frac{k(k+1)}{2},\\
&\bar{\xi}_{\phi_{kl}} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}(n-k-l) - \frac{(n-k-l-1)(n-k-l+2)}{2} - n + k.
\end{aligned}
$$

证明。 x_{1n}、 x_{n1}和 $\det X$ 的齐次性显而易见，而式 (6.1) 中相应的表达式可由定义 (2.23) 立即得出。为处理函数 c_r，注意到由 (2.19) 可知，$\mathsf{c}_r(X) = x_{1n} \det X c_r(\Psi'(X))$。观察到

$$
\begin{aligned}
\left(t^{D_n} X s^{\bar{D}_n}\right)_L &= t^{D_{n-1}} X_L s^{\bar{D}_{n-1}},\\
\left(t^{D_n} X s^{\bar{D}_n}\right)_R &= t^{D_{n-1}+\mathbf{1}_{n-1}} X_L s^{\bar{D}_{n-1}+\mathbf{1}_{n-1}},
\end{aligned}
$$

因此

$$
\Psi'\left(t^{D_n} X s^{\bar{D}_n}\right) = \frac{1}{ts}\Psi'(X).
$$

由于 $c_r(\Psi'(X))$ 是 $\Psi'(X)$ 的特征多项式的第 r 个系数（相差一个符号），我们得出 $c_r(\Psi'(X))$ 满足 (2.23)，其中 $\xi_{c_r} = \bar{\xi}_{c_r} = -r$。因此，
$\xi_{\mathsf{c}_r} = \xi_{x_{1n}} + \xi_{\det X} + \xi_{c_r} = n(n+3)/2 - r$，对 $\bar{\xi}_{\mathsf{c}_r}$ 也同样成立。

为了处理作用的 t 部分对函数 $\mathsf{g}_{ij}(X)$ 的影响，注意到 $\mathsf{G}_{ij}(X)$ 的每一行都等于 X 的某一行，并在前后补上若干个零。由此立即可知，g_{ij} 关于作用的 t 部分是齐次的，并且

$$
\begin{aligned}
\xi_{\mathsf{g}_{ij}} &= (j-2)(n+1) + n + (1+2+\cdots+i-j+1) + n + (1+2+\cdots+n-i)\\
&= \frac{(i-j)(i-j+1)}{2} + \frac{(n-i)(n-i-1)}{2} + (j+1)n - 1.
\end{aligned}
$$

为了处理作用的 s 部分，写作

$$\mathtt{G}_{ij}(Xs^{\bar{D}_n}) = \operatorname{diag}(\mathbf{1}_2, s^{-1}\mathbf{1}_2, \dots, s^{-j+3}\mathbf{1}_2, s^{-j+2}\mathbf{1}_{i-j+2}, s^{-j+1}\mathbf{1}_{n-i+1}\mathtt{G}_{ij}(X) \times \operatorname{diag}(s, s^2, \dots, s^{n+j-1}).$$

由此可知，g^{ij} 关于作用的 s 部分是齐次的，并且

$$\bar{\xi}_{\mathsf{g}^{ij}} = -(j-2)(j-3)-(j-2)(i-j+2)-(j-1)(n-i+1)+(1+2+\cdots+n+j-1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(j+1)(j-2)}{2} + i.$$

对于函数 $\mathsf{f}_m(X)$，要处理作用的 t 部分，回忆一下它们定义为矩阵 $\mathsf{G}_{n-1,n-1}(X)$ 的尾部子式，并且根据 (6.1)，$\xi_{\mathsf{g}_{n-1,n-1}} = n^2-1$。因此，对于 m 偶数

$$\xi_{\mathtt{f}_m} = \xi_{\mathtt{g}_{n-1,n-1}} - (n+1)\left(n-1-\frac{m}{2}\right) = \frac{m(n+1)}{2},$$

而对于 m 奇数

$$\xi_{\mathtt{f}_m} = \xi_{\mathtt{g}_{n-1,n-1}} - (n+1)\left(n-1-\frac{m-1}{2}\right)+1 = \frac{(m-1)(n+1)}{2}+1.$$

函数 $\mathsf{f}_m(X)$ 的作用的 s 部分与 $\mathsf{g}^{ij}(X)$ 类似处理：当 m 为偶数时，相应的矩阵左乘 $\operatorname{diag}(s^{m/2-1}, s^{m/2-1}, \dots, s, s, 1, 1)$，右乘 $\operatorname{diag}(s^{n-m+1}, \dots, s^n)$，得到

$$\bar{\xi}_{\mathtt{f}_m} = mn - (1+\cdots+m-1) + 2\left(1+\cdots+\frac{m}{2}-1\right) = mn - \frac{m^2}{4}.$$

当 m 为奇数时，相应的矩阵在左侧乘以对角矩阵$(s^{(m-1)/2}, s^{(m-1)/2-1}, s^{(m-1)/2-1}, \dots, s, s, 1, 1)$，在右侧乘以对角矩阵$(s^{n-m+1}, \dots, s^n)$，从而得到

$$\bar{\xi}_{\mathtt{f}_m} = mn - (1+\cdots+m-1) + 2\left(1+\cdots+\frac{m-1}{2}-1\right) + \frac{m-1}{2} = mn - \frac{m^2-1}{4}.$$

为处理函数 $\phi_{kl}(X)$ 的作用的 t 部分，记

$$\Phi_{kl}(t^{D_n}X) = \operatorname{diag}(t^{D'_n+(n-k-l-1)\mathbf{1}_{n-1}}, t^{2n-k-l-1}, \dots, t^{D'_n+\mathbf{1}_{n-1}}, t^{n+1}, t^{D'_{n-l+1}}, t^n, t^{D'_{n-k}}) \times \Phi_{kl}(X)\operatorname{diag}(t^{-n+k+l+1}\mathbf{1}_{n+1}, \dots, t^{-1}\mathbf{1}_{n+1}, \mathbf{1}_{n+1})$$

其中 $D'_m = \operatorname{diag}(m-1, \dots, 1)$，这意味着

$$\xi_{\phi_{kl}} = (1+\cdots+n-1)(n-k-l-1)+(1+\cdots+n-k-l-1)n+n(n-k-l)+(1+\cdots+n-l) + (1+\cdots+n-k-1)-(1+\cdots+n-k-l-1)(n+1) = \frac{n(n-k-l)(k+l+4)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} + \frac{l(l-1)}{2} + \frac{k(k+1)}{2}.$$

最后，函数 $\phi_{kl}(X)$ 的作用的 s 部分由以下内容描述

$$\begin{aligned}&\Phi_{kl}(Xs^{\bar{D}_n})\\&\quad=\operatorname{diag}(\mathbf{1}_{n-1},s^{-1}\mathbf{1}_n,\dots,s^{-n+k+l+2}\mathbf{1}_n,s^{-n+k+l+1}\mathbf{1}_{n-l+1},s^{-n+k+l}\mathbf{1}_{n-k})\\&\qquad\times\Phi_{kl}(X)\operatorname{diag}(\bar{D}_{n+1},\bar{D}_{n+1}+\mathbf{1}_{n+1},\dots,\bar{D}_{n+1}+(n-k-l-1)\mathbf{1}_{n+1}).\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_{\phi_{kl}}&=\frac{(n+1)(n+2)}{2}(n-k-l)+(1+\dots+n-k-l-1)(n+1)-(1+\dots+n-k-l-2)n\\&\qquad-(n-k-l-1)(n-l+1)-(n-k-l)(n-k)\\&=\frac{(n+1)(n+2)}{2}(n-k-l)-\frac{(n-k-l-1)(n-k-l+2)}{2}-n+k.\end{aligned}$$

□

6.2. 相容性。定理 2.17 中相容性陈述的证明依赖于 [16, 命题 6.31] ，为方便读者，现将其重述如下。

命题 6.3. 假设所有 Laurent 单项式

$$\hat{p}_{kr}=\frac{\left(p_{kr}v_{k;>}^{[r]}v_{k;<}^{[d_k-r]}\right)^{d_k}}{\left(v_{k;>}^{[d_k]}\right)^{r}\left(v_{k;<}^{[d_k]}\right)^{d_k-r}}$$

都是括号 $\{\cdot,\cdot\}$ 的卡西米尔元，并且对于任意可变顶点 $\alpha\in Q$

$$\{x_\beta,y_\alpha\}=\lambda d_\alpha\delta_{\alpha\beta}x_\beta y_\alpha\quad \textit{for any } \beta\in Q, \tag{6.2}$$

其中 d_α 是 α 处的重数， y_α 是由 (2.6) 给出的 α 处的 y-变量， λ 是一个不依赖于 α 的有理数，而 $\delta_{\alpha\beta}$ 是克罗内克符号。则括号 $\{\cdot,\cdot\}$ 与 $\mathcal{GC}(\Sigma)$ 相容。

我们先来检查命题 6.2 中关于单项式 $\hat{}p_{kr}$ 的条件。在我们的情形下 $k=1$，唯一的广义交换关系由 (2.22) 给出：

$$\phi_{11}\phi'_{11}=x_{1n}\phi_{12}^{n-1}+\sum_{r=1}^{n-2}\frac{\mathsf{c}_r}{\det X}\phi_{12}^{n-1-r}\phi_{21}^{r}+x_{n1}\phi_{21}^{n-1}.$$

因此， $d_1=n-1$, $v_1^{[d_1]};_{>}=x_{n1}$, $v_1^{[d_1]};_{<}=x_{1n}$, $v_1^{[r]};_{>}=v_1^{[d_1-r]};_{<}=1$ 对于 $r\in[1,n-2]$,$p_{1r}=\mathsf{c}_r/\det X$，因此

$$\hat{p}_{1r}=\left(\frac{\mathsf{c}_r}{x_{1n}}\right)^{n-1}\left(\frac{x_{1n}}{x_{n1}}\right)^{r}\frac{1}{\det X^{n-1}}. \tag{6.3}$$

注意，按构造，$\det X$ 是一个卡西米尔元（见定理 2.2 前紧邻的段落），而根据引理 5.1， x_{1n}/x_{n1} 是一个卡西米尔元。此外，由 (2.19)， $\mathsf{c}_r/x_{1n}=c_r(\Psi'(X))\det X$，因此只需证明 $c_r(\Psi'(X))$是括号 $\{\cdot,\cdot\}$的卡西米尔元。回想一下，如第3节 [16,所述， $c_r(U)$ 是括号 $\{\cdot,\cdot\}^\dagger$的卡西米尔元。因此，根据定理 2.10(i)，对于任意函数 $f(U)$， $\{c_r(\Psi'(X))\ f(\Psi'(X))\}$ 均为零。此外，根据定理 2.10(iii)，对于所有 $m\in[1,n]$， $\{c_r(\Psi'(X))\ x_{1m}/x_{1n}\}=\{c_r(\Psi'(X))\ x_{nm}/x_{1n}\}=0$。为证明 $\{c_r(\Psi'(X))\ x_{1n}\}=0$，我们使用引理 6.1 以及 $\xi_{c_r}=\xi_{c_r}=-r$ 这一事实（见上文引理 6.2 的证明）。

引理 6.2以及第2.7节中对箭图 Q_n 的描述推出以下结论。

引理 6.4. 对于任意可变顶点 $\alpha \in Q_n$，变量 y_α 满足 (2.23) 和 $\xi_{y_\alpha} = \xi_{y_\alpha} = 0$。

证明. 依据 (6.1) 可直接验证，尽管过程繁琐。例如，对于$\alpha = D$，由 (2.21) 得，

$$y_D = \frac{\mathtt{g}_{n-1,n-2}(X)\mathtt{f}_{2n-4}(X)x_{n1}}{\mathtt{g}_{n-2,n-2}(X)\mathtt{f}_{2n-3}(X)},$$

因此

$$\xi_{y_D} = \left(\frac{1\cdot 2}{2} + \frac{1\cdot 0}{2} + (n-1)n - 1 + (n-2)(n+1) + 1\right) - \left(\frac{0\cdot 1}{2} + \frac{2\cdot 1}{2} + (n-1)n - 1 + (n-2)(n+1) + 1\right) = 0$$

and

$$\bar{\xi}_{y_D} = \left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)(n-4)}{2} + n - 1 + n(2n-4) - (n-2)^2 + 1\right) - \left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)(n-4)}{2} + n - 2 + n(2n-3) - \frac{(2n-3)^2 - 1}{4}\right) = 0.$$

□

为证明 (6.2)，我们区分以下三种情况。

情形 1： $\alpha \in \Psi'^* Q^\dagger_{n-1}$, $\alpha \neq D$。先假设 $\beta = (k,l)$，则

$$\{x_\beta, y_\alpha\} = \{\phi_{kl}(X), y_\alpha(X)\} = \mathtt{s}_{kl}\left\{(x_{1n}\det X)^{n-k-l}\varphi_{kl}(\Psi'(X)), y_\alpha(X)\right\}$$

由 (2.17) 得。后一个括号包含三个部分:

$$\{x_{1n}^{n-k-l}, y_\alpha(X)\} = (n-k-l)\{x_{1n}, y_\alpha(X)\},$$
$$\{\det X^{n-k-l}, y_\alpha(X)\} = (n-k-l)\{\det X, y_\alpha(X)\},$$

以及 $\{\varphi_{kl}(\Psi'(X))\ y_\alpha(X)\}$。上面的第一个表达式由引理 6.1 和引理 6.4 可知为零。第二个表达式为零，因为 $\det X$ 是括号$\{\cdot,\cdot\}$的卡西米尔元。此外,

$$\{\varphi_{kl}(\Psi'(X)), y_\alpha(X)\} = \{\varphi_{kl}(\Psi'(X)), y_\alpha(\Psi'(X))\} = -\{\varphi_{kl}(U), y_\alpha(U)\}^\dagger$$

由 [20, 命题 4.1、注 4.8] 和定理 2.10(i) 可得。第 [15,节 6.2] 证明了，对于 $(k,l) \neq \alpha$，后一个表达式为零；而对于 $(k,l) = \alpha$，它等于 $\varphi_{kl}(U)y_\alpha(U)$。因此，(6.2) 在 $\lambda = 1$ 的情况下成立。情形 $\beta = \langle i,j\rangle$ 的处理方式相同。情形 $\beta = A, B, C$ 可由引理 6.1 和引理 6.4 （对于 A 和 C）以及 $\det X$ 的卡西米尔性质（对于 B）得到。最后，情形 $\beta = (m,+)$ 和 $\beta = (m,-)$ 可类似地依据定理 2.10(iii) 处理。

情形 2: $\alpha \in D$。这种情形的处理方式与前一种类似。括号 (6.2) 中的非平凡部分为

$$\{\bar{t}^{\pm}_m(\Psi''(X)), y_\alpha(X)\} = \{\bar{t}^{\pm}_m(\Psi''(X)), y_\alpha(\Psi''(X))\} = \{\bar{t}^{\pm}_m(\bar{M}), y_\alpha(\bar{M})\}^T$$

根据定理 2.10(ii)。引理 5.1] 证明，对于 $(m,\pm) \neq \alpha$，后一个表达式为零；而对于 $(m,\pm) = \alpha$，它等于 $\bar{t}^{\pm}_m(\bar{M})y_\alpha(\bar{M})$。因此，(6.2) 对 $\lambda = 1$ 成立。

情形3: $\alpha = D$。将 $y_D(X) = \mathsf{g}(X)\mathsf{f}(X)$ 写成

$$\mathsf{g}(X) = \frac{\mathsf{g}_{n-1,n-2}(X)}{\mathsf{g}_{n-2,n-2}(X)} = \pm\frac{g_{n-1,n-2}(\Psi'(X))}{g_{n-2,n-2}(\Psi'(X))},$$
$$\mathsf{f}(X) = \frac{\mathsf{f}_{2n-4}(X)x_{1n}}{\mathsf{f}_{2n-3}(X)} = \pm\frac{\bar{t}^+_{n-2}(\Psi''(X))}{\bar{t}^-_{n-1}(\Psi''(X))}$$

（符号的具体表达式并不重要，因为它们不会出现在最终公式中）。首先考虑 $\beta = D$ 的情形。括号 $\{x_D, y_D(X)\}$ 由两部分组成: $\{x_D,\mathsf{g}(X)\}$ 和 $\{x_D,\mathsf{f}(X)\}$。为处理第一部分，我们写作 $x_D = \mathsf{f}_{2n-2}(X) = x_{1n}^{2n-2}\bar{t}^+_{n-1}(\Psi''(X))$，于是

$$\{x_D, \mathsf{g}(X)\} = x_{1n}^{2n-2}\left\{\bar{t}^+_{n-1}(\Psi''(X)), \frac{g_{n-1,n-2}(\Psi'(X))}{g_{n-2,n-2}(\Psi'(X))}\right\} + (2n-2)x_{1n}^{2n-3}\bar{t}^+_{n-1}(\Psi''(X))\{x_{1n}, \mathsf{g}(X)\}.$$

上面的第一个括号根据定理 2.10(iii) 为零。第二个括号根据引理 6.1 等于 $\frac{x_{1n}\mathsf{g}(X)}{n}(\bar{\xi}_\mathsf{g} - \xi_\mathsf{g}) = \frac{x_{1n}\mathsf{g}(X)}{n}$。

为处理 $\{x_D, y_D(X)\}$ 的第二部分，我们写作 $x_D = \mathsf{g}_{n-1,\,n-1}(X) = \pm x_{1n}^{n-2}\det X g_{n-1,\,n-1}(\Psi'(X))$，于是略去平凡项后

$$\{x_D, \mathsf{f}(X)\} = x_{1n}^{n-2}\det X\left\{g_{n-1,n-1}(\Psi'(X)), \frac{\bar{t}^+_{n-2}(\Psi''(X))}{\bar{t}^-_{n-1}(\Psi''(X))}\right\} + (n-2)x_{1n}^{n-3}\det X\{x_{1n}, \mathsf{f}(X)\}.$$

上面的第一个括号因与之前相同的理由而为零。根据引理 6.1，第二个括号等于 $\frac{x_{1n}\mathsf{f}(X)}{n}(\bar{\xi}_\mathsf{f} - \xi_\mathsf{f}) = -\frac{x_{1n}\mathsf{f}(X)}{n}$。综上可得

$$\{x_D, y_D(X)\} = \left(\frac{2n-2}{n} - \frac{n-2}{n}\right)x_D y_D(X) = x_D y_D(X),$$

因此，此情形下的 (6.2) 满足 $\lambda = 1$。

现在假设 $\beta = \langle i, j\rangle \neq D$。与上文类似，括号 $\{\mathsf{g}_{ij}(X)\ y_D(X)\}$有两个分量: $\{\mathsf{g}_{ij}(X),\mathsf{f}(X)\}$ 和 $\{\mathsf{g}_{ij}(X),\mathsf{g}(X)\}$。对于第一个分量，我们利用 (2.18)、引理 6.1、关于权 ξ_f 和 ξ_f的计算，以及定理 2.10(iii)，得到

$$\{\mathsf{g}_{ij}(X), \mathsf{f}(X)\} = \{x_{1n}^{j-1}\det X g_{ij}(\Psi'(X)), \mathsf{f}(X)\} = \frac{j-1}{n}x_{1n}^{j-2}\det X g_{ij}(\Psi'(X))\{x_{1n}, \mathsf{f}(X)\} = -\frac{j-1}{n}\mathsf{g}_{ij}(X)\mathsf{f}(X)$$

（括号的所有其他分量均为零）。对于第二个要素，我们使用（2.18）、引理 6.1、关于权 ξ_g 和 ξ_g的计算，以及定理2.10(i),

并利用 [20, 命题 4.1] 得到

$$\begin{aligned}\{\mathsf{g}_{ij}(X),\mathsf{g}(X)\} &= \{x_{1n}^{j-1}\det X g_{ij}(\Psi'(X)),\mathsf{g}(X)\}\\ &= \frac{j-1}{n}x_{1n}^{j-2}\det X g_{ij}(\Psi'(X))\{x_{1n},\mathsf{g}(X)\}\\ &+ x_{1n}^{j-1}\det X\left\{g_{ij}(\Psi'(X)),\frac{g_{n-1,n-2}(\Psi'(X))}{g_{n-2,n-2}(\Psi'(X))}\right\}\\ &= \frac{j-1}{n}\mathsf{g}_{ij}(X)\mathsf{g}(X) - x_{1n}^{j-1}\det X\left\{g_{ij}(U),\frac{g_{n-1,n-2}(U)}{g_{n-2,n-2}(U)}\right\}^{\dagger}\end{aligned}$$

满足 $U=\Psi'(X)\in GL_{n-1}$。上面第一项的贡献抵消了第一种成分的贡献。为了计算第二项，引入变量$z_j(U)=g_{n-1,\,j}(U)/g_{jj}(U)$，对应于 $j\in[2,n-1]$，使得 $z_{n-1}(U)=1$。此外，定义 $z_1(U)=\varphi_{n-2,\,1}(U)/\det U$。根据箭图 $Q_{n-1}^{\dagger}$ 的描述，很容易推导出

$$y_j(U)=\prod_{i=j}^{n-1}y_{ij}(U)=\frac{z_{j-1}(U)z_{j+1}(U)}{z_j^2(U)},\qquad j\in[2,n-2]. \tag{6.4}$$

根据括号 $\{\cdot,\cdot\}^{\dagger}$ 与广义簇结构$\mathcal{GC}_{n-1}^{\dagger}$的相容性（见定理 2.5），对于 $i\in[j,n-1]$，有 $\{g_{ij}(U)\ y_m(U)\}^{\dagger}=-\delta_{jm}g_{ij}(U)y_m(U)$。通过 $\{g_{ij}(U)\ z_m(U)\}^{\dagger}=\omega_m^{ij}g_{ij}(U)z_m(U)$ 引入常数 ω_m^{ij}，我们利用 (6.4) 将上述关系改写为一个线性方程组

$$\omega_{m-1}^{ij}+\omega_{m+1}^{ij}-2\omega_m^{ij}=-\delta_{mj},\quad m\in[2,n-2],\qquad \omega_{n-1}^{ij}=0,$$

由此得到 $\omega_1^{ij}=-(j-1)+(n-2)\omega_{n-2}^{ij}$。

为了继续推进，我们需要以下结论。

引理 6.5. 对所有 $j\in[2,n-2]$ 和 $i\in[j,n-1]$，$\omega_1^{ij}=-(j-1)$。

证明。由于 $\varphi_{n-2,\,1}(U)=u_{n-1,\,1}$，我们需要证明

$$\{u_{n-1,1},g_{ij}(U)\}^{\dagger}=(j-1)u_{n-1,1}g_{ij}(U). \tag{6.5}$$

在第 4.2 节中，我们定义了映射 $U\mapsto H(U)$，使得函数 $g_{ij}(U)$ 可以通过 $H(U)$ 的旗子子式表示，见 (4.6)，其中 n 应替换为 $n-1$。由推论 4.2(i)，$H(U)$ 满足关系 $U=H(U)\gamma(H(U)_+)^{-1}$。我们对右侧进行重因式分解，并定义 $\widehat{H}(U)=\gamma(H(U)_+)^{-1}H(U)$。注意，对于 $j\le i$，$\det[\widehat{H}(U)]_{[i,n-1]}^{[j,n+j-i-1]}=\det[H(U)]_{[i,n-1]}^{[j,n+j-i-1]}$。仿照 [19],，定义括号 $\{\cdot,\cdot\}_{\varnothing}^{\dagger}$ 为括号 (2.2)，其中 $R_+=R_0+\pi_>$，而 R_0 由 (3.9) 给出。根据 [21, 命题 3.15], ，由$\curlywedge H(U)\mapsto U$ 给出的映射 $(GL_{n-1},\{\cdot,\cdot\}_{\varnothing}^{\dagger})\to(GL_{n-1},\{\cdot,\cdot\}^{\dagger})$ 是泊松映射。因此，由 (4.6)，

$$\begin{aligned}\{u_{n-1,1},g_{ij}(U)\}^{\dagger} = \Bigg(&\left\{\log v_{n-1,1},\log\det[H(V)]_{[i,n-1]}^{[j,n+j-i-1]}\right\}_{\varnothing}^{\dagger}\\ &+\sum_{s=2}^{j-1}\left\{\log v_{n-1,1},\log\det[H(V)]_{[s,n-1]}^{[s,n-1]}\right\}_{\varnothing}^{\dagger}\Bigg)u_{n-1,1}g_{ij}(U).\end{aligned} \tag{6.6}$$

为继续推导，记 $N = N(V) = V_{0,-}$ 和 $B = B(V) = V_+$，则对于 $\mathcal{B}_-$ 上的任意函数 f，有

$$(\nabla f \circ N)\cdot V = \mathrm{Ad}_{N^{-1}}(N\nabla f)_{\geq}, \qquad V\cdot(\nabla f \circ N) = \mathrm{Ad}_B(N\nabla f)_{\geq} \in \mathfrak{b}_+.$$

因此，对于 $\mathcal{B}_-$ 上任意两个函数 f_1、f_2，我们得到

$$\begin{aligned}(6.7)\quad &\{f_1\circ N, f_2\circ N\}^{\dagger}_{\varnothing}\\ &= \langle (R_0+\pi_>)\left(\mathrm{Ad}_{N^{-1}}(N\nabla_1)_{\geq} - \mathrm{Ad}_B(N\nabla_1)_{\geq}\right), \mathrm{Ad}_{N^{-1}}(N\nabla_2)_{\geq} - \mathrm{Ad}_B(N\nabla_2)_{\geq}\rangle\\ &\qquad - \langle \mathrm{Ad}_{N^{-1}}(N\nabla_1)_{\geq} - \mathrm{Ad}_B(N\nabla_1)_{\geq}, \mathrm{Ad}_{N^{-1}}(N\nabla_2)_{\geq}\rangle\end{aligned}$$

其中 $\nabla_1 = \nabla f_1$、$\nabla_2 = \nabla f_2$。上面的第二项可改写为

$$\langle (N\nabla_1)_{\geq}, (N\nabla_2)_{\geq}\rangle - \langle \mathrm{Ad}_B(N\nabla_1)_{\geq}, \mathrm{Ad}_{N^{-1}}(N\nabla_2)_{\geq}\rangle,$$

这等于

$$\begin{aligned}&\langle (N\nabla_1)_0, (N\nabla_2)_0\rangle - \langle (N\nabla_1)_0, \mathrm{Ad}_{N^{-1}}(N\nabla_2)_{\geq}\rangle - \langle (\mathrm{Ad}_B(N\nabla_1)_{\geq})_>, \mathrm{Ad}_{N^{-1}}(N\nabla_2)_{\geq}\rangle\\ &= \langle (N\nabla_1)_0, (N\nabla_2)_0\rangle - \langle (N\nabla_1)_0, (\nabla_2\cdot N)_0\rangle - \langle (\mathrm{Ad}_B(N\nabla_1)_{\geq})_>, \mathrm{Ad}_{N^{-1}}(N\nabla_2)_{\geq}\rangle.\end{aligned}$$

对于第一项，注意到

$$\begin{aligned}&(R_0+\pi_>)\left(\mathrm{Ad}_{N^{-1}}(N\nabla_1)_{\geq} - \mathrm{Ad}_B(N\nabla_1)_{\geq}\right)\\ &\quad = (R_0+\pi_>)(\nabla_1\cdot N) - R_0(N\nabla_1)_0 - (\mathrm{Ad}_B(N\nabla_1)_{\geq})_>\\ &\quad = R_0([\nabla_1, N]_0) + (\nabla_1\cdot N)_> - (\mathrm{Ad}_B(N\nabla_1)_{\geq})_>.\end{aligned}$$

注意，$\langle (\nabla_1\cdot N - \mathrm{Ad}_B(N\nabla_1)_{\geq})_>$、$\mathrm{Ad}_B(N\nabla_2)_{\geq}\rangle$ 消失了，因为它是 $\mathfrak{n}_+$ 中的一个元素与 $\mathfrak{b}_+$ 中的一个元素的配对。此外，

$$\begin{aligned}&\langle (\nabla_1\cdot N)_>, \mathrm{Ad}_{N^{-1}}(N\nabla_2)_{\geq}\rangle = \langle (\nabla_1\cdot N)_>, \nabla_2\cdot N - \mathrm{Ad}_{N^{-1}}(N\nabla_2)_<\rangle\\ &= \langle (\nabla_1\cdot N)_>, \nabla_2\cdot N\rangle - \langle N\nabla_1, (N\nabla_2)_<\rangle = \langle (\nabla_1\cdot N)_>, \nabla_2\cdot N\rangle - \langle (N\nabla_1)_>, N\nabla_2\rangle,\end{aligned}$$

因此，（6.7）中的第一项等于

$$\begin{aligned}&\langle R_0([\nabla_1, N]_0) + (\nabla_1\cdot N)_> - (\mathrm{Ad}_B(N\nabla_1)_{\geq})_>, \mathrm{Ad}_{N^{-1}}(N\nabla_2)_{\geq} - \mathrm{Ad}_B(N\nabla_2)_{\geq}\rangle\\ &\quad = \langle R_0([\nabla_1, N]_0), [\nabla_2, N]_0\rangle + \langle (\nabla_1\cdot N)_>, \nabla_2\cdot N\rangle - \langle (N\nabla_1)_>, N\nabla_2\rangle\\ &\qquad - \langle (\mathrm{Ad}_B(N\nabla_1)_{\geq})_>, \mathrm{Ad}_{N^{-1}}(N\nabla_2)_{\geq}\rangle.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\{f_1\circ N, f_2\circ N\}^{\dagger}_{\varnothing} &= \langle R_0([\nabla_1, N]_0), [\nabla_2, N]_0\rangle - \langle (N\nabla_1)_0, (N\nabla_2)_0\rangle\\ &\quad + \langle (N\nabla_1)_0, (\nabla_2\cdot N)_0\rangle + \langle (\nabla_1\cdot N)_>, \nabla_2\cdot N\rangle - \langle (N\nabla_1)_>, N\nabla_2\rangle.\end{aligned}$$

回顾一下，标准 Sklyanin 括号定义为

$$\begin{aligned}\{f_1\circ N, f_2\circ N\}_{\varnothing} &= \frac{1}{2}\langle (\nabla_1\cdot N)_0, (\nabla_2\cdot N)_0\rangle + \langle (\nabla_1\cdot N)_>, \nabla_2\cdot N\rangle\\ &\quad - \frac{1}{2}\langle (N\nabla_1)_0, (N\nabla_2)_0\rangle - \langle (N\nabla_1)_>, N\nabla_2\rangle,\end{aligned}$$

参见，例如，[14, 第 9], 页，从而最终

$$\begin{aligned}(6.8)\quad \{f_1\circ N, f_2\circ N\}^{\dagger}_{\varnothing} &= \{f_1\circ N, f_2\circ N\}_{\varnothing} + \langle R_0([\nabla_1, N]_0), [\nabla_2, N]_0\rangle\\ &\quad + \langle (N\nabla_1)_0, (\nabla_2\cdot N)_0\rangle - \frac{1}{2}\left(\langle (N\nabla_1)_0, (N\nabla_2)_0\rangle + \langle (\nabla_1\cdot N)_0, (\nabla_2\cdot N)_0\rangle\right).\end{aligned}$$

注意，出现在 (6.6) 右侧的函数 $\log v_{n-1,n}$ 和 $\operatorname{logdet}[H(V)]_{[i,n-1]}^{[j,n+j-i-1]}$ 实际上是定义在 $\mathcal{B}_-$ 上的函数，因此要完成计算，我们可以对.....使用 (6.8)

$$f_1 = \log n_{n-1,1} \qquad \text{and} \qquad f_2 = \log\det[H(N)]_{[i,n-1]}^{[j,n+j-i-1]}, i \geq j \geq 2.$$

回顾一下， N 的各元素所对应的标准 Sklyanin 括号为

$$\{n_{ij}, n_{kl}\}_{\varnothing} = \frac{1}{2}(\operatorname{sign}(k-i) + \operatorname{sign}(l-j))n_{il}n_{kj},$$

例如参见 [10, 第 12] 页。特别地，

$$\{n_{n-1,1}, n_{kl}\}_{\varnothing} = \begin{cases} 0 & \text{for } k < n-1, \\ \frac{1}{2}n_{n-1,1}n_{kl} & \text{for } k = n-1,\ l > 1. \end{cases}$$

利用 $\det[H(N)]_{[i,n-1]}^{[j,n+j-i-1]}$ 关于最后一行的拉普拉斯展开，我们得到

$$\{n_{n-1,1}, \det[H(N)]_{[i,n-1]}^{[j,n+j-i-1]}\}_{\varnothing} = \frac{1}{2}n_{n-1,n}\det[H(N)]_{[i,n-1]}^{[j,n+j-i-1]},$$

因此，对于上述的 f_1 和 f_2，可得 $\{f_1 \circ N, f_2 \circ N\}_{\varnothing} = 1/2$。此外

$$(\nabla_1 \cdot N)_0 = e_{11}, \qquad (\nabla_2 \cdot N)_0 = e_{jj} + \cdots + e_{n+j-i-1,n+j-i-1},$$
$$(N\nabla_1)_0 = e_{n-1,n-1}, \qquad (N\nabla_2)_0 = e_{ii} + \cdots + e_{n-1,n-1}.$$

如上文第 3.1 节所示， R_0 在 $\mathfrak{sl}_{n-1}$上作用为 $1/(1-\gamma)$，因此

$$R_0([\nabla_1, N]_0) = \frac{1}{(1-\gamma)}(e_{11} - e_{n-1,n-1}) = \mathbf{1}_{n-1} - e_{n-1,n-1},$$

于是 $\langle R_0([\nabla_1, N]_0)\ [\nabla_2, N]_0\rangle = 1 - \delta_{ij}$。接下来，

$$\langle (N\nabla_1)_0, (\nabla_2 \cdot N)_0\rangle = \delta_{ij}, \quad \langle (N\nabla_1)_0, (N\nabla_2)_0\rangle = 1, \quad \langle (\nabla_1 \cdot N)_0, (\nabla_2 \cdot N)_0\rangle = 0,$$

因此最终由 (6.8) 得到 $\{f_1 \circ N, f_2 \circ N\}_{\varnothing}^{\dagger} = 1$。代入 (6.6) 即得所需的 (6.5)。□

立即可得 $\omega_{n-2}^{ij} = 0$，因此 $\left\{g_{ij}(U)\ {}^{g_{n-1,\ n-2}(U)}g_{n-2,\ n-2}(U)\right\}^{\dagger}$ 消失，从而 (6.2) 对 $\beta = \langle i, j\rangle \neq D$ 成立。

情形 $\beta = (k, l)$ 可用类似的方法处理，从而得到

$$\{\phi_{kl}(X), \mathtt{f}(X)\} = -\frac{n-k-l}{n}\phi_{kl}(X)\mathtt{f}(X)$$

and

$$\{\phi_{kl}(X), \mathtt{g}(X)\} = \frac{n-k-l}{n}\phi_{kl}(X)\mathtt{g}(X) - (x_{1n}\det X)^{n-k-l}\left\{\varphi_{kl}(U), \frac{g_{n-1,n-2}(U)}{g_{n-2,n-2}(U)}\right\}^{\dagger}.$$

为处理后一表达式中的第二项，我们引入常数 $\bar{\omega}_m^{kl}$ via$\{\varphi_{kl}(U)\ z_m(U)\}^{\dagger} = \bar{\omega}_m^{kl}\varphi_{kl}(U)z_m(U)$。根据括号 $\{\cdot,\cdot\}^{\dagger}$与广义簇结构 $\mathcal{GC}_{n-1}^{\dagger}$的相容性，我们有 $\{\varphi_{kl}(U)\ y_m(U)\}^{\dagger} = 0$，利用 (6.4) 可将其改写为一个线性方程组

$$\bar{\omega}_{m-1}^{kl} + \bar{\omega}_{m+1}^{kl} - 2\bar{\omega}_m^{kl} = 0, \quad m \in [2, n-2], \qquad \bar{\omega}_{n-1}^{kl} = 0.$$

因此， $\bar{\omega}_1^{kl} = (n-2)\bar{\omega}_{n-2}^{kl}$。

与前一种情形类似，我们需要以下陈述。

引理6.6. 对于所有满足 $1 \le k$、$l \le n-2$、$k+l \le n-1$、$\bar{\omega}_1^{kl} = 0$ 的 k、l。

证明。根据 $\bar{\omega}_1^{kl}$ 的定义，我们必须证明

$$\{\varphi_{kl}(U), \varphi_{n-2,1}(U)\}^\dagger = 0$$

其中括号 $\{\cdot,\cdot\}^\dagger$ 由 (2.2) 给出，而 R_+ 由 (2.4) 给出。注意，每个 $\varphi_{kl}(U)$ 在 $\mathcal{N}_+$ 中元素的共轭作用下都是不变的，而 $\varphi_{n-2,1}(U)$ 还同时具有左、右 $\mathcal{N}_+$- 不变性。因此， $[\nabla\varphi_{kl}(u)\ U] \in \mathfrak{n}_+$ 和 $\nabla\varphi_{n-2,1}(U)\cdot U \in \mathfrak{n}_+$，于是

$$\begin{aligned}&\{\varphi_{kl}(U), \varphi_{n-2,1}(U)\}^\dagger\\ &= \langle R_0([\nabla\varphi_{kl}(U), U]_0), [\nabla\varphi_{n-2,1}(U), U]_0\rangle - \langle [\nabla\varphi_{kl}(U), U]_0, (\nabla\varphi_{n-2,1}(U)\cdot U)_0\rangle\end{aligned}$$

其中 R_0 由 (3.9) 给出。为了继续进行，我们计算对角矩阵 $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_{n-1})$ 的共轭作用的权 $w_{kl} = (w_{kl}^1, \dots, w_{kl}^{n-1})$，其定义为

$$\varphi_{kl}(DUD^{-1}) = \prod_{i=1}^{n-1} d_i^{w_{kl}^i}\varphi_{kl}(U).$$

显然， $[\nabla\varphi_{kl}(U)\ U]_0 = -w_{kl}\varphi_{kl}(U)$。

我们有

$$\begin{aligned}\varphi_{kl}(DUD^{-1}) &= \pm\det\left[\mathbf{1}_{n-1}^{[1,k]}\ (DUD^{-1})^{[1,l]}\ (DUD^{-1})^2 e_1\ \dots\ (DUD^{-1})^{n-k-l}e_1\right]\\ &= \pm d_1\cdot d_{n-1}\det\left[(D^{-1})^{[1,k]}\ (UD^{-1})^{[1,l]}\ U^2D^{-1}e_1\ \dots\ U^{n-k-l}D^{-1}e_1\right]\\ &= \frac{d_{k+1}\cdot d_{n-1}}{d_1\cdot d_l}\varphi_{kl}(U)d_1^{-(n-k-l-1)} = \frac{d_{k+1}\cdot d_{n-1}}{d_1^{n-k-l}d_2\cdot d_l}\varphi_{kl}(U),\end{aligned}$$

因此 $w_{kl} = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1) - (n-k-l, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$，其中第一个向量有 k 个零，第二个向量有 $n-l-1$ 个零。特别地， $w_{n-2,\ 1} = (-1, 0, \dots, 0, 1)$。

此外，(3.9) 中的前两项为零，第三项与 $\mathbf{1}_{n-1}$ 成正比，因此其贡献为零。剩余项的贡献为

$$-\left\langle\frac{\gamma^*}{1-\gamma^*}w_{kl}, w_{n-2,1}\right\rangle\varphi_{kl}(U)\varphi_{n-2,1}(U) = (n-k-l)\varphi_{kl}(U)\varphi_{n-2,1}(U).$$

另一方面，

$$\begin{aligned}&\langle[\nabla\varphi_{kl}(U), U]_0, (\nabla\varphi_{n-2,1}(U)\cdot U)_0\rangle\\ &\qquad = -\langle w_{kl}, (1, 0, \dots, 0)\rangle\varphi_{kl}(U)\varphi_{n-2,1}(U) = (n-k-l)\varphi_{kl}(U)\varphi_{n-2,1}(U),\end{aligned}$$

因此，括号 $\{\varphi_{kl}(U)\,\varphi_{n-2,\ 1}(U)\}^\dagger$ 为零。 □

由此立即可得 $\bar{\omega}_{n-2}^{kl} = 0$，因此 $\left\{\varphi_{kl}(U)\ \underline{^{g_{n-1,\ n-2}(U)\,g_{n-2,\ n-2}(U)}}\right\}^\dagger$ 为零，从而 (6.2) 对 $\beta = (k, l)$ 成立。

现在假设 $\beta = (m, +) \ne D$。与前两种情况类似，我们有

$$\{\mathtt{f}_{2m}(X), \mathtt{g}(X)\} = \frac{2m}{n}\mathtt{f}_{2m}(X)\mathtt{g}(X)$$

and

$$\{\mathtt{f}_{2m}(X),\mathtt{f}(X)\}=-\frac{2m}{n}\mathtt{f}_{2m}(X)\mathtt{f}(X)+x_{1n}^{2m}\left\{\bar{t}_m^+(\bar{M}),\frac{\bar{t}_{n-2}^+(\bar{M})}{\bar{t}_{n-1}^-(\bar{M})}\right\}^T.$$

前一个表达式与后一个表达式中的第一项相互抵消。为处理剩余项，我们引入 $\zeta_j(\bar{M})=\bar{t}_j^+(\bar{M})/\bar{t}_{j+1}^-(\bar{M})^-$，其中 $j\in[1,n-2]$ 满足 $\zeta_{n-1}(\bar{M})=0$ 且 $\zeta_0=1/h_0$。根据箭图 $\bar{Q}_{n-1}^T$ 的描述，很容易推出

$$\bar{y}_j(\bar{M})=y_{j,+}(\bar{M})y_{j+1,-}(\bar{M})=\frac{\zeta_{j-1}(\bar{M})\zeta_{j+1}(\bar{M})}{\zeta_j^2(\bar{M})},\qquad j\in[1,n-2],\tag{6.9}$$

与 (6.4) 类似。根据括号 $\{\cdot,\cdot\}^T$ 与簇结构 $\bar{\mathcal{C}}_{n-1}^T$ 的相容性（见定理 2.8），我们有 $\{\bar{t}_m^+(\bar{M})\ \bar{y}_j(\bar{M})\}^T=\delta_{jm}\bar{t}_m^+(\bar{M})\bar{y}_j(\bar{M})$。引入常数 ω_j^m，通过 $\{\bar{t}_m^+(\bar{M})\ \zeta_j(\bar{M})\}^T=\omega_j^m\bar{t}_m^+(\bar{M})\zeta_j(\bar{M})$，利用 (6.9) 将上述关系改写为一个线性方程组

$$\omega_{j-1}^m+\omega_{j+1}^m-2\omega_j^m=\delta_{mj},\quad j\in[1,n-3],$$

由此得到 $\omega_0^m=m+(n-1)\omega_{n-2}^m$。

要继续进行，我们需要以下陈述。

引理 6.7。 $\omega_0^m=m$。

证明。回顾 $\zeta_0(\bar{M})=1/\bar{h}_0$，因此我们需要从 $\{\bar{h}_0,\bar{t}_m^+(\bar{M})\}^T=\omega_0^m\bar{h}_0\bar{t}_m^+(\bar{M})$中计算 ω_0^m。注意，可以通过考察乘积$\bar{h}_0\bar{t}_m^+(\bar{M})$中的任意一项，并找出该项以何种系数进入左端，来计算 ω_0^m。考虑表示汉克尔矩阵 H_m^+的反对角线的项 $\bar{h}_0\bar{h}_m^m$。根据（2.15），左端中该项的唯一来源是括号 $\{\bar{h}_0,\bar{h}_m^m\}^T=mh_m^{m-1}\{\bar{h}_0,\bar{h}_m\}^T=m\sum_{k=0}^{m-1}\bar{h}_{k+1}\bar{h}_{m-k-1}$，其中包含项 $-mh_0h_m^m$，因此 $\omega_0^m=m$。□

作为直接推论，我们得到 $\omega_{n-2}^m=0$，这意味着括号 (6.2) 在 $\beta=(m,+)\neq D$ 时消失。

情形 $\beta=(m,-)$ 可类似处理。相应的方程为 e $\{\bar{t}_m^-(\bar{M})\ \bar{y}_j(\bar{M})\}^T=\delta_{j-1,\ m}\bar{t}_m^-(\bar{M})\bar{y}_j(\bar{M})$，并且它们被转化为

$$\bar{\omega}_{j-1}^m+\bar{\omega}_{j+1}^m-2\bar{\omega}_j^m=\delta_{m,j-1},\quad j\in[1,n-3]$$

对于通过 $\{\bar{t}_m^-(\bar{M})\ \zeta_j(\bar{M})\}^T=\bar{\omega}_j^m\bar{t}_m^-(\bar{M})\zeta_j(\bar{M})$ 定义的常数 $\bar{\omega}_j^m$。因此，$\bar{\omega}_0^m=m-1+(n-1)\bar{\omega}_{n-2}^m$。

引理 6.7 的类似结论如下。

引理 6.8。 $\bar{\omega}_0^m=m-1$。

证明。与引理 6.7 的证明类似，我们通过考察乘积 $\bar{h}_0\bar{t}_m^-(\bar{M})$ 中的项 $\bar{h}_0\bar{h}_{m-1}^m$ 来计算 $\bar{\omega}_0^m$。根据 (2.15)，括号 $\{\bar{h}_0,\bar{t}_m^-(\bar{M})\}^T$ 中有两处会产生这样的项：$\{\bar{h}_0,\bar{h}_{m-1}^m\}^T=mh_{m-1}^{m-2}\{\bar{h}_0,\bar{h}_{m-1}\}^T$，它产生项 $m\bar{h}_0\bar{h}_{m-1}^m$；以及 $-\{\bar{h}_0,\bar{h}_0\bar{h}_{m-1}^{m-2}\bar{h}_{2m-2}\}^T$，它产生项 $-h_0h_{m-1}^m$，因此 $\bar{\omega}_0^m=m-1$。□

作为直接推论，我们得到 $\bar{\omega}_{n-2}^m=0$，这意味着对于 $\beta=(m,-)$，括号 (6.2) 为零。最后，当 β 是冻结顶点，即 $\beta=A,B,C$ 时，对 (6.2) 的验证是显然的，由此完成了定理 2.17 中相容性条件的证明。□

6.3. 环面作用。现在我们可以证明命题 2.19。事实上， $\mathcal{F}_n$ 中所有簇变量都是齐次多项式。此外，直接验证可知，交换关系的所有右端也都是齐次的。接下来，根据引理 6.2， $\mathcal{F}_n$ 中的所有簇变量关于作用 $X \mapsto t^{D_n} X s^{\bar{D}_n}$ 都是齐次的；根据引理 6.4，交换关系的所有右端关于此作用也都是齐次的；对于广义交换关系，还需要额外验证以下关系

$$\xi_{\mathsf{c}_r} - \xi_{\det X} + r(\xi_{\phi_{21}} - \xi_{\phi_{12}}) = \xi_{x_{1n}}, \qquad \bar{\xi}_{\mathsf{c}_r} - \bar{\xi}_{\det X} + r(\bar{\xi}_{\phi_{21}} - \bar{\xi}_{\phi_{12}}) = \bar{\xi}_{x_{1n}},$$

它们可直接由 (6.1) 得出。最后，由 (6.3) 给出的卡西米尔元 $\hat{}p_{1r}$ 是权重为 0 的齐次函数，并且

$$\xi_{\hat{p}_{1r}} = \bar{\xi}_{\hat{p}_{1r}} = (n-1)\left(\frac{n(n+3)}{2} - r - n\right) + r(n-1) - (n-1)\frac{n(n+1)}{2} = 0.$$

命题 2.19 现在可由广义簇结构的局部环面作用的可延拓性标准条件得出，见 [15, 命题 2.6]。□

7. Regularity and Completeness

7.1. 定理 2.23 的证明。我们的首要目标是求出定理 2.10(iii) 中出现的组合映射 Ψ: $(GL_n, \{\cdot,\cdot\}) \to \widetilde{GL}_{n-1}^{\dagger} \times_{\mathbb{C}} \bar{\mathcal{R}}_{n-1}^{T}$ 的逆映射。记

$$\widetilde{X} = X \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n-1} & 0 \\ -x_{1n}^{-1} X_{[1,1]}^{[1,n-1]} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x_{1n} \\ X_L & X_{[2,n-1]}^{[n,n]} \end{bmatrix}, \tag{7.1}$$

则 $U = U(X)$ 的定义方程 $X_L = U X_R$ 可改写为

$$\begin{bmatrix} \widetilde{X}_{[2,n-1]}^{[1,n-1]} \\ \widetilde{X}_{[n,n]}^{[1,n-1]} \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} 0 & x_{1n} \\ \widetilde{X}_{[2,n-1]}^{[1,n-1]} & X_{[2,n-1]}^{[n,n]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ \mu \end{bmatrix}, \tag{7.2}$$

其中

$$M = \begin{bmatrix} -{x_{n1}}^{-1} X_{[n,n]}^{[2,n-1]} & -{x_{n1}}^{-1} x_{nn} \\ \mathbf{1}_{n-2} & 0 \end{bmatrix},$$
$$\mu = -(x_{1n} x_{n1})^{-1} \begin{bmatrix} \det X_{1n}^{12} & \cdots & \det X_{1n}^{1n} \end{bmatrix}.$$

~我们将 (7.2) 视为关于 $X_{[2,n-1]}$ 的线性方程。为处理该方程，进行变量替换将十分方便。以引理 4.1 为指导，记 $V = V_+ V_{0,-}$ 为 GL_{n-1} 中通过 $U = V\gamma(V_+)^{-1}$ 与 U 相关的元素。令

$$Y = (V_+^{-1})_{[1,n-2]}^{[1,n-2]} \widetilde{X}_{[2,n-1]}^{[1,n-1]}, \qquad y = (V_+^{-1})_{[1,n-2]}^{[1,n-2]} X_{[2,n-1]}^{[n,n]}, \tag{7.3}$$

则 (7.2) 变为

$$\begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix} + v\ m = V_{0,-} \begin{bmatrix} 0 & x_{1n} \\ Y & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ \mu \end{bmatrix}, \tag{7.4}$$

其中我们记

$$m = \widetilde{X}_{[n,n]}^{[1,n-1]} = -{x_{1n}}^{-1} \begin{bmatrix} \det X_{1n}^{1n} & \dots & \det X_{1n}^{n-1,n} \end{bmatrix}, \qquad v = (V_+^{-1})^{[n-1,n-1]}.$$

引理 7.1. 设

$$C = \begin{bmatrix} \mu \\ \mu M \\ \vdots \\ \mu M^{n-2} \end{bmatrix},$$

于是 $m = \begin{bmatrix} x_{n,n-1} & \dots & x_{n1} \end{bmatrix} C$。

证明。首先，注意到根据凯莱–哈密顿定理，

$$CM = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_{n-2} \\ -\frac{x_{nn}}{x_{n1}} & \cdots -\frac{x_{n2}}{x_{n1}} \end{bmatrix} C.$$

接下来，恒等式

$$x_{n,j+1} \det X_{1n}^{1n} - x_{n1} \det X_{1n}^{j+1,n} = x_{nn} \det X_{1n}^{1,j+1}.$$

推出 $mM = -x_{nn}\mu$。因此，

$$\begin{aligned} mC^{-1} &= -x_{nn}\mu(CM)^{-1} = -x_{nn}\mu C^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_{n-2} \\ -\frac{x_{nn}}{x_{n1}} & \cdots -\frac{x_{n2}}{x_{n1}} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= -x_{nn} e_1^T \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_{n-2} \\ -\frac{x_{nn}}{x_{n1}} & \cdots -\frac{x_{n2}}{x_{n1}} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} x_{n,n-1} & \dots & x_{n1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

利用引理 7.1，我们通过引入再次改写方程组 (7.4)

$$\widetilde{Y} = Y + v_{[1,n-2]} m, \qquad \tilde{y} = y + x_{nn} v_{[1,n-2]}, \tag{7.5}$$

于是 (7.4) 变为

$$\begin{bmatrix} \widetilde{Y} \\ m \end{bmatrix} = V_{0,-} \begin{bmatrix} 0 & x_{1n} \\ \widetilde{Y} & \tilde{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ \mu \end{bmatrix}. \tag{7.6}$$

为对线性方程组进行最后一次变换，考虑满足 $V_{0,-} = \gamma^*(N)^{-1} N$ 的 $N \in \mathcal{B}_-$。容易验证，这样的 N 由下式给出

$$N = \cdots (\gamma^*)^2(V_{0,-})\gamma^*(V_{0,-})V_{0,-}.$$

注意， N 的左上角元素等于$V_{0,-}$的所有对角元素之积，因此

$$n_{11} = \det V_{0,-} = \det V = \det U = \frac{x_{n1}}{x_{1n}}. \tag{7.7}$$

引入

$$\Upsilon = N_{[2,n-1]}^{[2,n-1]} \widetilde{Y}, \qquad \upsilon = N_{[2,n-1]}^{[2,n-1]} \tilde{y} + x_{1n} N_{[2,n-1]}^{[1,1]}, \tag{7.8}$$

利用 (7.7)，我们可以进一步简化 (7.6)：

$$\begin{bmatrix} \Upsilon \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x_{n1} \\ \Upsilon & \upsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ \mu \end{bmatrix}. \tag{7.9}$$

引理 7.2。(7.9) 的解为

$$\upsilon_j = x_{n,j+1}, \quad j \in [1, n-2], \qquad \Upsilon = \begin{bmatrix} x_{n1} & 0 & \dots & 0 \\ x_{n2} & x_{n1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ x_{n,n-2} & \dots & x_{n2} & x_{n1} \end{bmatrix} C_{[1,n-2]\cdot}$$

证明。将 (7.9) 逐行重写：

$$\begin{aligned}\Upsilon_{[1,1]} &= x_{n1}\mu,\\ \Upsilon_{[i+1,i+1]} &= \Upsilon_{[i,i]}M + \upsilon_i\mu, \quad i \in [1, n-3],\\ m &= \Upsilon_{[n-2,n-2]}M + \upsilon_{n-2}\mu,\end{aligned}$$

可以看出，(7.9) 等价于

$$\begin{bmatrix}\Upsilon\\ m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n1} & 0 & \dots & 0\\ \upsilon_1 & x_{n1} & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ \upsilon_{n-2} & \dots & \upsilon_1 & x_{n1}\end{bmatrix} C. \tag{7.10}$$

将上面的最后一行与引理 7.1 比较，我们得到 υ_j 的所需结果，而 Υ 的公式也随之得出。□

现在我们可以利用 (7.8)、(7.5)、(7.3)、(7.1) 从 U、$X_{\{1,n\}}$ 恢复 $X_{[2,n-1]}$。首先，定义

$$\Theta = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & V_+\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} x_{n1} & 0 & \dots & 0\\ x_{n2} & x_{n1} & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ x_{n,n-1} & \dots & x_{n2} & x_{n1}\end{bmatrix} C.$$

命题 7.3.

$$X = \Theta \cdot \left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ L & 0\end{bmatrix} + X^T_{[n,n]} x^{-1}_{1n} X_{[1,1]}\right). \tag{7.11}$$

证明. 由 (7.8) 和引理 7.2,

$$\begin{aligned}\tilde{y} &= \left(N^{[2,n-1]}_{[2,n-1]}\right)^{-1}(X^{[2,n-1]}_{[n,n]})^T - \left(N^{[2,n-1]}_{[2,n-1]}\right)^{-1} N^{[1,1]}_{[2,n-1]} x_{1n}\\ &= \left(N^{[2,n-1]}_{[2,n-1]}\right)^{-1}(X^{[2,n-1]}_{[n,n]})^T - e_1^T \frac{x_{n1}}{n_{11}}\\ &= \left(N^{-1}\right)_{[2,n-1]}(X^{[1,n-1]}_{[n,n]})^T,\end{aligned}$$

thus

$$y = \tilde{y} - x_{nn} v_{[1,n-2]} = \left[\left(N^{-1}\right)_{[2,n-1]} \ (-v_{[1,n-2]})\right] X^T_{[n,n]},$$

$$X^{[n,n]}_{[2,n-1]} = (V_+)^{[1,n-2]}_{[1,n-2]}\left[\left(N^{-1}\right)_{[2,n-1]} \ (-v_{[1,n-2]})\right] X^T_{[n,n]}.$$

注意到

$$-(V_+)^{[1,n-2]}_{[1,n-2]} v_{[1,n-2]} = (V_+)^{[n-1,n-1]}_{[1,n-2]},$$

因此我们得到

$$X^{[n,n]}_{[2,n-1]} = (V_+)_{[1,n-2]}\begin{bmatrix}\left(N^{-1}\right)_{[2,n-1]} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} X^T_{[n,n]} = \Theta_{[2,n-1]} X^T_{[n,n]}.$$

类似地,

$$\widetilde{Y} = \left(N^{[2,n-1]}_{[2,n-1]}\right)^{-1}\Upsilon, \qquad Y = \left[\left(N^{[2,n-1]}_{[2,n-1]}\right)^{-1} \ (-v_{[1,n-2]})\right]\begin{bmatrix}\Upsilon\\ m\end{bmatrix},$$

and

$$\tilde{X}^{[1,n-1]}_{[2,n-1]} = (V_+)^{[1,n-2]}_{[1,n-2]} Y = (V_+)^{[1,n-2]}_{[1,n-2]} \left[\left(N^{[2,n-1]}_{[2,n-1]} \right)^{-1} \ (-v_{[1,n-2]}) \right] \begin{bmatrix} \Upsilon \\ m \end{bmatrix}$$
$$= \Theta^{[2,n]}_{[2,n-1]} L.$$

最后，

$$X^{[1,n-1]}_{[2,n-1]} = \tilde{X}^{[1,n-1]}_{[2,n-1]} + X^{[n,n]}_{[2,n-1]} x_{1n}^{-1} X^{[1,n-1]}_{[1,1]}$$
$$= \Theta_{[2,n-1]} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix} + X^T_{[n,n]} x_{1n}^{-1} X^{[1,n-1]}_{[1,1]} \right).$$

考虑到根据引理 7.1 有 $m = L_{[n-1,n-1]}$，并利用 (7.7)，我们得到 X 的所需公式。□

为完成定理 2.23 的证明，我们需要以下辅助结论。设 $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{GC}^\dagger_{n-1})$ 是由广义簇结构 $\mathcal{GC}^\dagger_{n-1}$ 定义的广义上簇代数，$\overline{\mathcal{A}}(\bar{\mathcal{C}}^T_{n-1})$ 是由簇结构 $\bar{\mathcal{C}}^T_{n-1}$ 定义的上簇代数，其中两种情况下的基环均为相应的冻结变量多项式环。根据定理 2.5 和注 2.6，$\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{GC}^\dagger_{n-1})$ 可由 $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{GC}^\dagger_{n-1})$ 在 $\det U$ 处局部化得到。类似地，根据定理 2.8 和注2.9，$\overline{\mathcal{A}}(\bar{\mathcal{C}}^T_{n-1})$ 可由 $\overline{\mathcal{A}}(\bar{\mathcal{C}}^T_{n-1})$ 在 t^+_{n-1} 处局部化得到。

引理 7.4. 设 ψ' 是 $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{GC}^\dagger_{n-1})$ 的一个元素，且 ψ'' 是 $\overline{\mathcal{A}}(\bar{\mathcal{C}}^T_{n-1})$ 的一个元素。那么，$\psi'(\Psi'(X))$ 和 $\psi''(\Psi''(X))$ 是广义上簇代数 $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{GC}_n)$ 中的元素，除以 x_{1n}、x_{n1} 和 $\det X$ 中的单项式。

证明。我们对 ψ' 证明该断言；对 ψ'' 也可采用类似论证。根据第2.7节所述的一般构造以及命题2.14，标准的拟同构考量表明，在 $\mathcal{GC}^\dagger_{n-1}$ 中将任意簇变量取值于 $\Psi'(X)$ 的像，所得结果等于 $\mathcal{GC}_n$ 中对应的簇变量乘以冻结变量 x_{1n}、x_{n1}、$\det X$ 的 Laurent 单项式。由于 $\psi' \in \overline{\mathcal{A}}(\mathcal{GC}^\dagger_{n-1})$，它在与 $(\mathcal{D}_{n-1}, Q^\dagger_{n-1}, \mathcal{P}_{n-1})$ 相邻的所有种子中都有 Laurent 多项式表达式。因此，$\psi'(\Psi'(X))$ 在 $\mathcal{GC}_n$ 中与初始种子在所有方向 (k, l) 以及 $\langle k, l\rangle$ 上相邻的所有种子中，都有 Laurent 多项式表达式。方向 $\langle n-1, n-1\rangle$ 需要单独考虑，因为对应的顶点在 $\mathcal{GC}^\dagger_{n-1}$ 中是冻结的；但变量 $g_{n-1,n-1}(X)$ 以多项式形式出现在 $\psi'(\Psi'(X))$ 中，因此该断言仍然成立。最后，在方向 $(i, -)$、$i \in [1, n-1]$、$(i, +)$、$i \in [1, n-2]$ 上的突变不会影响 $\psi'(\Psi'(X))$ 的 Laurent 多项式表达式。因此，$\psi'(\Psi'(X))$ 在 $\mathcal{GC}_n$ 中初始种子的星上有 Laurent 多项式表达式，其分母可能包含 x_{1n}、x_{n1}、$\det X$，引理的断言由此得证。□

现在我们可以完成定理 2.23 的证明了。根据命题 7.3，X 可以表示为两个矩阵的乘积。第二个矩阵的元素除去一个关于 x_{1n} 和 x_{n1}的 Laurent 单项式后，是关于 X的第一行和最后一行元素的多项式。根据映射 Ψ'' 的定义，这些元素中的每一个都是多项式 P，其变量为式 (3.12) 中定义的 $\bar{q}(\lambda)$、$p(\lambda)$的系数，再乘以一个关于 x_{1n} 和 x_{n1}的 Laurent 单项式。如上所述，P 属于在t^+_{n-1}处局部化的上簇代数$\overline{\mathcal{A}}(\bar{\mathcal{C}}^T_{n-1})$。利用引理 7.4 和式 (2.20)，我们得出

式 (7.11) 中第二个因子的每个矩阵元都是 $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{GC}_n)$中的一个元素，除以 $\mathrm{f}_{2n-2} = \mathrm{g}_{n-1,\ n-1}$ 和 x_{1n}, x_{n1}的单项式。

另一方面，(7.11)中 Θ 的元素是 $U = \Psi'(X)$的矩阵元素的有理函数。由 V、N和 Θ 的定义可知，这些以 V 的矩阵元素表示的函数的分母是关于 V的尾随主子式的单项式。由推论 4.2 及(4.6),

$$\det V_{[j,n-1]}^{[j,n-1]} = \begin{cases} \dfrac{g_{jj}(U)}{g_{j-1,j-1}(U)} & \text{if } j \geq 3, \\ g_{jj}(U) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

此外，(4.5)连同(4.6)表明，$j > 2$ 的每个矩阵元 v_{ij} 是 U 中的一个多项式（因而属于$\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{GC}_{n-1}^{\dagger})$的一个元素）除以$g_{j-1,j-1}(U)$，其中 $v_{i1} = u_{i1}$、$v_{i2} = u_{i2}$、$i \in [1, n-1]$。再次利用引理 7.4 以及(2.18)，我们看到 Θ 的每个矩阵元是$\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{GC}_n)$的一个元素除以一个单项式，该单项式可能只包含$\mathrm{g}_{22}$，.....，$\mathrm{g}_{n-1,n-1}$ 以及冻结变量x_{1n}、x_{n1}、$\det X$。因此，X的矩阵元素同样如此。□

注 7.5. 可以证明，命题 7.3 中出现的矩阵 L 实际上是对称的，其元素由下式给出

$$L_{ij} = -\frac{1}{x_{1n}} \sum_{s=0}^{\min(i-1,n-j-1)} \det X_{1n}^{i-s,j+1+s}$$

对于 $i \leq j$。然而，定理 2.23 的证明并不需要这一显式公式，故我们略去其推导。

7.2. 突变序列 W_n：定理 2.24(i) 的证明。

7.2.1. 箭图 Q_n^0 与通用记号。我们首先对 $1 \leq j < i \leq n$、$(i,j) \neq (n,1)$ 定义大小为 $(n-j+2) \times (n-j+2)$ 的矩阵 $\mathrm{K}^{ij}(X)$。它们是类型为 $\mathrm{G}(I_1, I_2)$ 的矩阵的最大末尾子矩阵，即占据所有行以及最后 $|I_1| + |I_2|$ 列的方子矩阵（此类矩阵的定义见第 4.2 节中紧接引理 4.6 的证明之后）。与 K^{ij} 相对应的子集 I_1 和 I_2 分别为 $I_1 = [i,n]$和 $I_2 = [n+j-i, n]$。回顾：对 $1 \leq j < i \leq n$、$(i,j) \neq (n,1)$，有 $\mathrm{k}^{ij}(X) = \det \mathrm{K}^{ij}(X)$，且 $\mathrm{k}_{ii}(X) = \det X_{[i,n]}^{[i,n]}$。

由于函数 $\phi_{kl}(X)$、k、$l \geq 1$、$k+l \leq n-1$ 以及 $\mathrm{k}_{nn}(X) = f_1(X)$ 已经出现在初始簇 $\mathcal{F}_n$ 中，我们援引 [3, 定理 3.6]，该定理指出：若两个种子突变等价且共享一组公共簇变量，则存在一条连接这些种子且不涉及这些公共簇变量的变异序列。因此，我们必须对初始箭图 Q_n 中不含对 $k+l < n-1$ 而言的顶点 (k,l) 的子箭图 Q_n^0 进行突变。对 $1 \leq k \leq n-2$ 而言的顶点 $(k, n-k-1)$ 以冻结顶点身份进入 Q_n^0，与顶点 B 和 C 相同；顶点 $(1, -)$ 同样是冻结的，因此顶点 A 不包含在 Q_n^0 中。为便于描述突变序列，我们引入箭图 Q_n^0 顶点的通用编号，使得同一顶点在所有不同 n 的 Q_n^0 中获得相同编号。顶点 D 获得编号 0，Q_n^0 中对应于 $Q_{n-1}^{\dagger}$ 的部分里的可变顶点用从 1 到 $n(n-3)/2$ 的正整数逐层编号，从最靠近 D 的层开始，每一层自下而上。Q_n^0 这一部分中的冻结顶点用从 $n(n-3)/2+1$ 到$n(n-1)/2$ 的正整数编号，方式如下：先是 B，然后是 C，再然后是顶点 $(k, n-k-1)$ 自下

而上。 Q_n^0 中对应于 Q_n^T 的部分里的可变顶点用从 -1 到 $-2n+4$ 的负整数逐层编号，从最靠近 D 的层开始，每一层自下而上。其余的冻结顶点编号为 $-2n+3$。其顶点采用通用编号的箭图 Q_6^0 如图 9 所示。

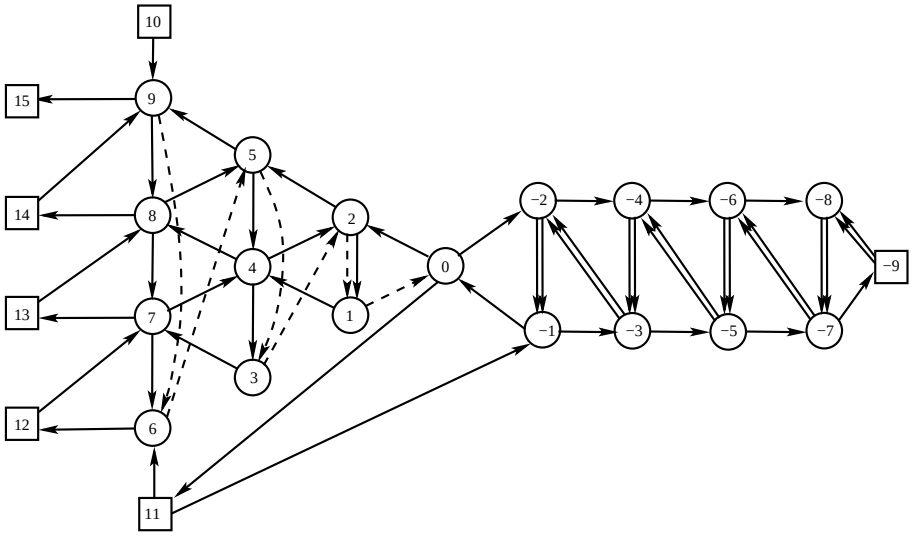


FIGURE 9. 箭图 Q_6^0

我们的目标是找到一个突变序列，将对应于Q_n^0 的可变顶点的簇变量$_{ij}$变为函数 $\mathbf{k}_{ij}(X)$，其中 $1 \le j \le i \le n$、$(i,j) \ne (1,1)$、$(n,1)$、(n,n)。我们将看到，沿着变异路径产生的所有簇变量（不包括 $\mathbf{k}_{ij}$ 本身）都是某些以下两种类型的矩阵 $\mathbf{G}(I_1,\dots,I_p)$ 的最大末尾子矩阵的行列式：

(i) I_j 由第一行和 $|I_j|-1>0$ 末行组成，或
(ii) I_1 由 $|I_1|>0$ 末行组成，并且 I_j 由第一行和 $|I_j|-1>0$ 末行组成。

为便于记号，将第一类函数记作 $[k_1\,k_2\dots k_p]$，第二类函数记作 $\bar{}\,[k_1\,k_2\dots k_p]$，其中 $k_j=|I_j|$。注意，只要 $n\ge k_i$、 $i\in[1,p]$ 和 $n+p-1\ge\sum_{i=1}^p k_i$，符号 $[k_1\,k_2\dots k_p]$ 就定义了一个函数。若 k_j 的连续 r 个值都等于同一个值 k，我们有时用 k^r 代替 $k\dots k$。相应的矩阵分别记作 $\mathbf{G}(k_1,\dots,k_p)$ 和 $\bar{}\mathbf{G}(k_1,\dots,k_p)$。采用这一记号，我们将顶点 0 处的簇变量 $\mathbf{g}_{n-1,\,n-1}(X)$ 写作 $[2^{n-1}]$。此外，从下往上，0 左侧第 k 层各顶点处的簇变量依次为 $[2^{n-k-3}\,2\,k{+}2]$、$[2^{n-k-3}\,3\,k{+}1]$、…、$[2^{n-k-3}\,k+2\,2]$。 B 处的簇变量为 $[n]$；冻结层各顶点处的簇变量从下往上依次为 $[\bar{2}\;n-1]$、 $[\bar{3}\;n-2]$、…、$[\overline{n-1}\;2]$。顶点 $-2k+1$ 处的变量为 $[\bar{1}\;2^{n-k-1}]$，顶点 $-2k$ 处的变量为 $[2^{n-k-1}]$。

我们按如下方式定义上述函数的提升： $[k_1\dots k_p]$ 的提升为 $[2\,k_1\dots k_p]$，$[\bar{1}\,k_2\dots k_p]$ 的提升为 $[\bar{1}\,2\,k_2\dots k_p]$， $[\bar{k}_1\,k_2\dots k_p]$ 对于 $k_1>1$ 的提升为 $[\bar{1}\,k_1+1\,k_2\dots k_p]$。已提升函数的降级定义如下： $[2\,k_1\dots k_p]$ 的降级为 $[\bar{1}\,k_1\dots k_p]$，$[\bar{1}\,k_1\dots k_p]$ 的降级为 $[k_1\dots k_p]$。注意，提升与降级

并非彼此的逆；若二者均可适用，则它们可交换。矩阵 G 的提升与降级以类似方式定义。注意，对于 Q^0_{n-1} 的任意具有通用数 i的可变顶点， Q^0_n 中附着于 i 的变量是 Q^0_{n-1}中附着于 i 的变量的提升。我们称此为 Q^0_{n-1} 与 Q^0_n的提升性质。假设 Q'_{n-1} 与 Q'_n 分别由 Q^0_{n-1} 与Q^0_n经由同一变异序列得到。若 Q'_n 中附着于 i 的变量是 Q'_{n-1}中附着于 i 的变量的提升，则称提升性质对 Q'_{n-1} 与 Q'_n 在 i 处成立。

使用上文引入的记号，顶点 D 处的交换关系（2.21）写作

$$[2^{n-1}] \cdot [\bar{1}\ 2^{n-4}\ 3] = [\bar{1}\ 2^{n-2}] \cdot [2^{n-3}\ 3] + [2^{n-2}] \cdot [\bar{1}\ 2^{n-4}\ 3\ 2]. \tag{7.12}$$

注意，右侧的最后一项对应于 x_{n1} 与 $\mathsf{g}_{n-1,n-2}(X)$ 的乘积；在沿着涉及顶点 C的序列进行的所有突变中，我们都在寻找该项，而 x_{n1} 以类似的方式进入交换关系。回顾一下，关系（7.12）是在第5.3节中作为如下矩阵的四项 Pl¨ucker 关系得到的：该矩阵由在 G(2^{n-3}, 3, 2) 前置行 $[0, \dots, 0, 1]$ 和 $[1, 0, \dots, 0]$，并按如下方式选取指标而得： α 和 β 对应于前置的行， γ 对应于第一个块行的第一行， δ 对应于倒数第二个块行的第二行， ξ 和 ζ 对应于最后一个块行中的行。稍微滥用术语，我们称其为 G(2^{n-3}, 3, 2) 的四项 Pl¨ucker 关系。更一般地， G($k_1, \dots, k_{p-1}$, 2) 的四项 Pl¨ucker 关系，是在其最后 $\sum_{i=1}^{p} k_i - 1$ 列前置行 $[0, \dots, 0, 1]$ 和 $[1, 0, \dots, 0]$，并以与上面相同的方式定义 α、 β、 γ、 δ、 ξ 和 ζ 得到的。注意，这类关系中的一项恒等地为零，因此实际上它们只有三项。特别地，带有 $k > 2$ 的 G(k, 2) 的四项 Pl¨ucker 关系写作

$$[k-1\,2] \cdot [\overline{k-1}] = [\overline{k-2}\,2] \cdot [k] + [\overline{k-1}\,2] \cdot [k-1]. \tag{7.13}$$

下述陈述可由定义直接得到。

命题 7.6. (i) 矩阵 G($k_1, \dots, k_{p-1}$, 2) 之提升的四项 Pl ¨ucker 关系，是通过对 G($k_1, \dots, k_{p-1}$, 2) 的四项 Pl ¨ucker 关系中所涉及的每个函数进行提升而得到的。

(ii) 提升矩阵之降级的四项 Pl ¨ucker 关系，是通过对该提升矩阵的四项 Pl ¨ucker 关系中所涉及的每个函数进行降级而得到的。

因此， G($2^q, k$, 2) 及其降级 G($\bar{1}, 2^{q-1}, k$, 2) 的四项 Pl¨ucker 关系为

$$\begin{aligned} &[2^q\,k-1\,2] \cdot [\bar{1}\,2^{q-1}\,k] = [\bar{1}\,2^{q-1}\,k-1\,2] \cdot [2^q\,k] + [\bar{1}\,2^{q-1}\,k\,2] \cdot [2^q\,k-1], \\ &[\bar{1}\,2^{q-1}\,k-1\,2] \cdot [2^{q-1}\,k] = [2^{q-1}\,k-1\,2] \cdot [\bar{1}\,2^{q-1}\,k] + [2^{q-1}\,k\,2] \cdot [\bar{1}\,2^{q-1}\,k-1]. \end{aligned} \tag{7.14}$$

我们还将使用关于一个 $(r+1) \times r$ 矩阵 A 以及三行 α、 β和 γ 的德斯南诺–雅可比恒等式（见 [14, 式 (6.2)]），其形式为

$$\widehat{\beta} \cdot \widehat{\alpha, \gamma} = \widehat{\gamma} \cdot \widehat{\alpha, \beta} + \widehat{\alpha} \cdot \widehat{\beta, \gamma}, \tag{7.15}$$

其中， $\widehat{\ }$ i表示通过删除第 i行从 A得到的 $r \times r$子式，而 i, j表示通过删除第 i 行、第 j 行和第1列从 A 得到的$(r-1) \times (r-1)$子式。对于带有 $k_p > 2$ 的G($k_1, \dots, k_p$)，其德斯南诺–雅可比恒等式可由上述关系得到，其中 A 是G($k_1, \dots, k_p$)最末的 $\sum_{i=1}^{p} k_i - 1$ 列构成的子矩阵， α

是第一块行的第一行， β 是倒数第二块行的第二行，而 γ 是G($k_1, \ldots, k_p$)最后一个块行的第二行。特别地，对于带有 $k_1, k_2 > 2$ 的G(k_1, k_2)，德斯南诺–雅可比恒等式为

$$[k_1 - 1\, k_2] \cdot [\overline{k_1 - 1}\, k_2 - 1] = [k_1\, k_2 - 1] \cdot [\overline{k_1 - 2}\, k_2] + [\overline{k_1 - 1}\, k_2] \cdot [k_1 - 1\, k_2 - 1]. \tag{7.16}$$

以下命题 7.6 的类似结论可直接由定义得到。

命题 7.7。（i）通过对 G($k_1, \ldots, k_p$) 的提升，将涉及的每个函数都进行提升，即可得到关于矩阵 G($k_1, \ldots, k_p$) 的提升的德斯南诺–雅可比恒等式。

（ii）通过对提升矩阵的德斯南诺–雅可比恒等式中涉及的每个函数进行降级，即可得到关于提升矩阵降级的德斯南诺–雅可比恒等式。

因此，G($2^q, k_1, k_2$) 连同 $k_1, k_2 > 2$ 的德斯南诺–雅可比恒等式，以及其降级 G($\bar{1}$, $2^{q-1}, k_1, k_2$) 的德斯南诺–雅可比恒等式如下：

$$\begin{aligned} [2^q\, k_1 - 1\, k_2] \cdot [\bar{1}\, 2^{q-1}\, k_1\, k_2 - 1] &= [2^q\, k_1\, k_2 - 1] \cdot [\bar{1}\, 2^{q-1}\, k_1 - 1\, k_2] \\ &\quad + [\bar{1}\, 2^{q-1}\, k_1\, k_2] \cdot [2^q\, k_1 - 1\, k_2 - 1], \\ [\bar{1}\, 2^{q-1}\, k_1 - 1\, k_2] \cdot [2^{q-1}\, k_1\, k_2 - 1] &= [\bar{1}\, 2^{q-1}\, k_1\, k_2 - 1] \cdot [2^{q-1}\, k_1 - 1\, k_2] \\ &\quad + [2^{q-1}\, k_1\, k_2] \cdot [\bar{1}\, 2^{q-1}\, k_1 - 1\, k_2 - 1]. \end{aligned} \tag{7.17}$$

序列 W$_n$ 定义为两个序列的串接：头部 H$_n$ 和尾部 T$_n$，它们将分别处理。

7.2.2. 序列 H$_n$。序列 H$_n$又由四个子序列串接而成：前缀 P$_n$、中缀 I$_n$、根 R$_n$和后缀 S$_n$。根 R$_n$由第（$n-3$）层中位于 0 左侧的顶点自下而上组成。它是 Q_n^0 中最左侧可变层，因此 R$_4$ = 1 2、R$_5$ = 3 4 5，依此类推。其余三个子序列递归定义如下

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{H}_{n-1}, \qquad \mathbf{I}_n = \mathbf{R}_{n-1}^{-}\mathbf{S}_{n-1}^{-}, \qquad \mathbf{S}_n = \mathbf{I}_n^{-},$$

其中，A$^-$ 表示将 A 中的每个指标减 1。递归从 $n = 4$ 开始，此时 P$_4$ = 0、I$_4$ = -1 和 S$_4$ = -2，因此 H$_4$ = 0 -1 1 2 -2。此外，P$_5$ =0 -1 1 2 -2、I$_5$ = 0 1 -3、S$_5$ = -1 0 -4，因此 H$_5$ = 0 -1 1 2 -2 0 1 -3 3 4 5 -1 0 -4，依此类推。

考虑箭图 Q_n^n，它与 Q_n^0（冻结顶点和可变顶点）的顶点集合相同，但排列方式不同。Q_n^n 的顶点排列成大小为 $n-1$、$n+1$、n、.....、3 的回旋镖形状。每个回旋镖形状都包含一组编号连续且递减的顶点。这些形状放置在 ($n+1$) × ($n+1$) 网格上，如 $n = 6$ 情形的图10所示。坐标为 i 和 j 的点上放置的顶点记为 $|i, j|$。

箭图 Q_n^n 的箭头为 $|i, j| \to |i-1, j+1|$，其中 $i \in [2, n+1]$, $j \in [1, n-i+2]$,$|i, j| \neq |2, 2|$, $|i, j| \to |i, j-1|$ 对应 $i \in [2, n]$, $j \in [2, n-i+2]$, $|i, j| \neq |2, 3|$,$|i, j| \to |i+1, j|$，而 $i \in [1, n-1]$, $j \in [2, n-i+1]$ 对应.....。此外，还有一条有向路径 $|1, n+1| \to |3, 1| \to |2, n| \to \cdots \to |n-k-1, k+3| \to |n-k+1, 1| \to |n-k, k+2| \to \cdots \to |n-1, 3| \to |n+1, 1| \to |1, n+1|$。箭图 Q_6^6 如图11所示；附加路径中的箭头以虚线表示。

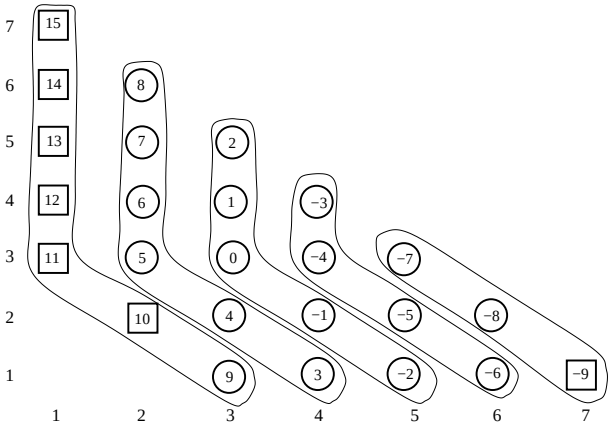


FIGURE 10. 箭图 Q_6^6 的顶点排列

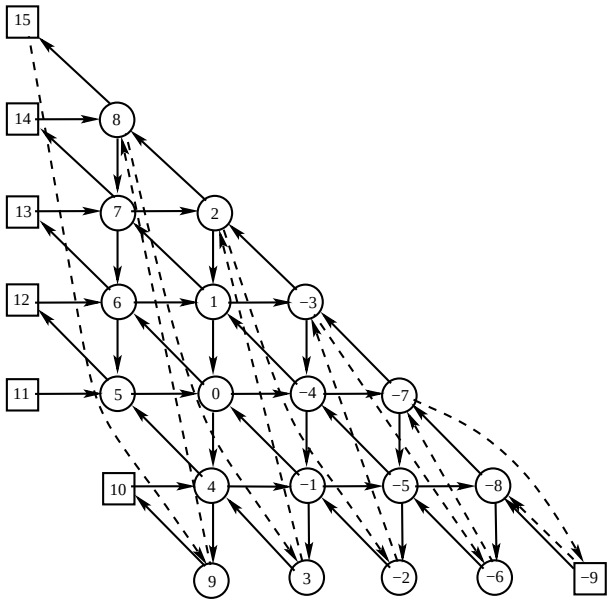


FIGURE 11. 箭图 Q_6^6

引理7.8. 对箭图 Q_n^0 应用突变序列 $\mathbf{H}_n$ 后得到 Q_n^n。除顶点 $C = |1$ 外， Q_n^n 中与顶点 $|i$、$j|$ 相连的变量为 $\overline{[j-2}\ n-i-j+4]$（对应 $j \geq 3$）；与顶点 $3|$、$[n-i+2]$ 相连的变量为 $j = 2$；与顶点 $\overline{[n-i+2]}$ 相连的变量为 $j = 1$。

证明。通过对 n 进行归纳法来证明。对于 $n=4$，沿着变异路径 H_4 的交换关系为

$$
\begin{aligned}
0: &\quad [2^3]\cdot[\bar{1}\,3] = [\bar{1}\,2^2]\cdot[2\,3] + [2^2]\cdot[\bar{1}\,3\,2],\\
-1: &\quad [\bar{1}\,2^2]\cdot[3] = [\bar{1}\,3]\cdot[2^2] + [3\,2]\cdot[\bar{1}\,2],\\
1: &\quad [2\,3]\cdot[\bar{2}\,2] = [\bar{1}\,3]\cdot[3\,2] + [2^2]\cdot[\bar{2}\,3],\\
2: &\quad [3\,2]\cdot[\bar{3}] = [\bar{2}\,2]\cdot[4] + [3]\cdot[\bar{3}\,2],\\
-2: &\quad [2^2]\cdot[\bar{2}] = [3]\cdot[\bar{1}\,2] + [\bar{2}\,2]\cdot[2].
\end{aligned}
\tag{7.18}
$$

直接检验可知，引理中的断言成立。另外可以检验，对于 $n>4$，上述突变序列会添加一条从 3 指向 C 的箭头，并删除一条从 5 指向 3 的箭头。

注意，上述前两个交换关系是 (7.14) 在 $k=3$ 和 $q=2$ 时的特例，第三个关系是 (7.16) 在 $k_1=k_2=3$ 时的情形，而最后两个关系分别是 (7.13) 在 $k=4$ 和 $k=3$ 时的情形。因此我们看到，为了处理 $n=4$ 的情形，需要考虑矩阵 G(3,2)（更确切地说，是其提升 G(2,3,2)）、G(3,3) 和 G(4,2)。

假设引理中的断言对 H_{n-1}成立，并考察 Q_n^0 及其相关簇变量沿突变序列 H_n 的变化。该序列分为连续的七个线段：H_n =$\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{I}_{n-1}\mathrm{R}_{n-1}\mathrm{S}_{n-1}\mathrm{I}_n\mathrm{R}_n\mathrm{S}_n$。回顾一下，对于 Q_{n-1}^0 和 Q_n^0，提升性质在 Q_{n-1}^0的每个可变顶点处都成立。此外，H_n 前两个线段中的突变与 H_{n-1} = $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{I}_{n-1}\mathrm{R}_{n-1}\mathrm{S}_{n-1}$前两个线段中的突变相同，也就是说，涉及的顶点具有相同的通用数，且由相同的箭头连接。因此，根据命题 7.6 和 7.7，沿该序列的所有变异顶点处，提升性质仍然成立。

接下来，比较 H_{n-1} 第三个线段中的突变与 H_n第三个线段中的突变。回顾一下，这些突变分别发生在 Q_{n-1}^0 最左侧的可变层和 Q_n^0从左数第二个可变层中。该层最底部顶点的通用数为 $i=(n-3)(n-4)/2$。如上所述，该层内部及其右侧的箭头在两个变异后的箭图中完全相同。对于由 Q_n^0 得到的箭图，还有一个额外的归纳假设如下：

(i) 从顶部顶点到 i 的箭头被删除；(ii) 该层内的所有其他箭头与 Q_n^0中相同；(iii) 从 i 到 $i-1$ 的箭头被反向；(iv) 存在从 i 到 C 以及从 C 到 $i-1$的箭头。

该层左侧的箭头并未参与先前的突变，因此它们分别与 Q_{n-1}^0 和 Q_n^0中完全保持一致。这一假设可通过直接观察 $n=5$加以验证。

我们从对 i的突变开始第三段。突变前后，由 Q_{n-1}^0 得到的箭图中 i 的左邻域如图12a)所示。附着于冻结顶点 $j=(n-2)(n-3)/2+2$ 的变量为 $[\bar{2}\,n-2]$。由 Q_n^0 得到的箭图中类似的邻域如图12b)所示。附着于可变顶点 $j-1$ 的变量为 $[3\,n-2]$。此外，在第二种情况下，顶点 C 上还附着有 x_{1n}。注意，附着于 $j-1$ 和 C 的变量之积为 $[\bar{1}\,3\,n-2]$，也就是 $[\bar{2}\,n-2]$ 的提升。因此，命题 7.7 保证 i 处的提升性质仍然

有效。并且，突变 $i+1$ 之前的情形与之前完全相同，只是所有数字都加一。因此，应用第三段后， Q^0_{n-1} 的所有可变顶点处的提升性质仍然有效。注意，在本段最后一次突变中，图12b)中对应于 $i+1$ 和 $j-1$ 的顶点分别是下一层的底部和顶部顶点，因此，删除从 $j-1$ 到 $i+1$ 的箭头即可证明归纳假设 (i)；反转从 $i+1$ 到 i 以及从 i到 C 的箭头，并添加从 $i+1$ 到 C 的箭头，即可证明归纳假设 (iii) 和 (iv)。本段中的其他所有突变都不会影响 Q^0_n 的最左侧可变层中的箭头，从而证明归纳假设 (ii)。

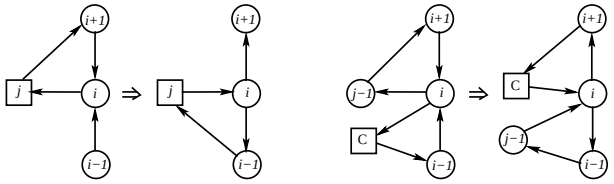


FIGURE 12. i 在R_{n-1}中第一次变异之前与之后的左邻域：a）对于H_{n-1}；b）对于H_n

最后，H_{n-1} 与H_n 中第四段的突变同样只涉及由相同箭头连接、编号相同的顶点，因此到H_n 中前四个线段结束时，提升性质对 Q^0_{n-1}的所有可变顶点仍然成立。考虑到关于Q^{n-1}_{n-1}结构的归纳假设，我们可以描述由 Q^0_n 经突变序列H_{n-1} 得到的箭图 Q^{n-1}_n及其顶点上所附的变量，并与Q^{n-1}_{n-1}相比较。

箭图 Q^{n-1}_n与 Q^{n-1}_{n-1}一样置于网格上。 Q^{n-1}_n在位置 $|i、\ j|$、 $i\in[3,n+1]$、 $j\in[1,n-i+2]$处的限制，与 Q^{n-1}_{n-1}在位置 $|i、\ j|$、 $i\in[2,n]$、 $j\in[1,n-i+1]$处的限制相同，因此， Q^{n-1}_n中位于位置 $|i、\ j|$的顶点的通用数，与 Q^{n-1}_{n-1}中位于位置 $|i-1、\ j|$的顶点的通用数相同。因此，根据提升性质，对于 $i\in[3,n+1]$、 $j\in[1,n-i+2]$，附属于位置 $|i、\ j|$的变量分别为 $[\bar{1}\,j-1\,n-i-j+5]$（对应 $j\geq 3$）、 $[2\,n-i+3]$（对应 $j=2$）和 $[\bar{1}\,n-i+2]$（对应 $j=1$）。这两个限制的唯一区别是：在 Q^{n-1}_{n-1} 中，位置 $|2、\ 2|$和 $|n、\ 1|$处的顶点是冻结顶点；而在 Q^{n-1}_n中，相应的 $|3、\ 2|$和 $|n+1、\ 1|$处的顶点是可变顶点。 Q^0_n最左层的冻结顶点按照相同的垂直顺序，置于 $j\in[3,n]$的 $|1、\ j|$处。下一层的顶点按照相同的垂直顺序，置于 $j\in[2,n]$ 的 $|2、\ j|$处，但底部可变顶点（$n-2$）（$n-3$）/2除外，它已置于 $|3、\ 2|$处。这两层顶点之间的箭头不受 H_{n-1}中的突变影响，但归纳假设 (i)–(iv) 中描述的情形除外；这些情形已在这一层得到证明。这一层与其右侧一层之间箭头的变化见图12b。最后，顶点 $-2n+4$和 $-2n+5$ 分别置于位置 $|n+1、\ 3|$和 $|n+2、\ 2|$。它们与其余顶点之间的箭头不受突变的影响

H_{n-1}。箭图 Q_6^5 如图13a所示）。 Q_6^5 中与上述 Q_5^5 部分重合的部分，包含在细线所示的三角形内。

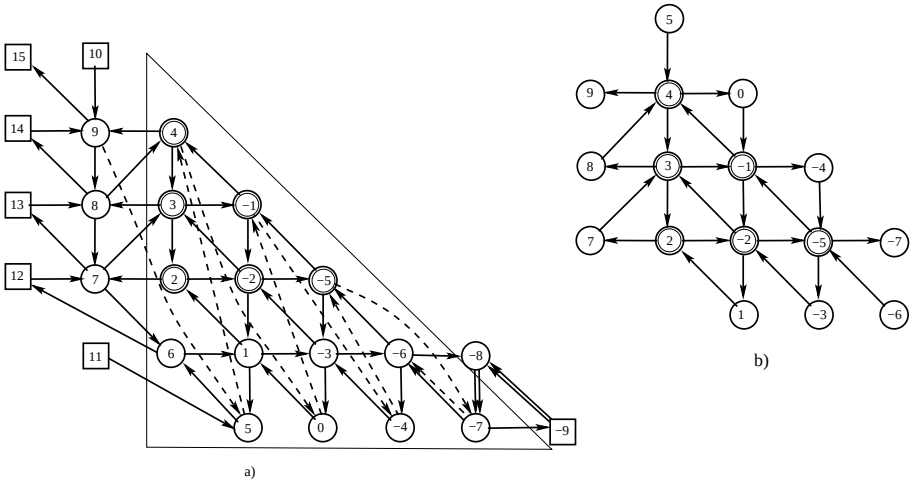


FIGURE 13. 箭图 Q_6^5：a）箭图；b）与序列 I_6相关的 Q_6^5 部分

根据提升性质，这个三角形内的变量是 Q_5^5中相应变量的提升，因此根据归纳假设，附属于 $|i、\ j|$ 的变量是 $[\bar{1}\, j-1\, n-i-j+3]$。三角形外的变量保持其初始值。容易看出，在序列 I_n 中发生突变的顶点构成三角形 $i \in [3, n-1]$、$j \in [3, n-i+2]$，其顺序是按列从左向右排列，每列内从下向上排列。箭图 Q_6^5 中对应的顶点在图13中以双圆圈标出。因此，三角形外与此相关的顶点是 $|2、\ j|$ 及 $j \in [3, n-1]$，附属于它们的变量为 $[j\, n-j+1]$。图13b展示了与序列 I_6 相关的 Q_6^5 部分。

在应用序列 I_n 后，我们按如下方式重新排列 Q_n^{n-1}的顶点：将第 $j=1$、2行的顶点向左移一位，并将上对角线 $i+j=n+2$ 上的顶点$|i、\ j|$向下移 j并向右移一位，使其现在构成箭图的下行。箭图 Q_6^5 重新排列后的结果如图14所示。

比较箭图 Q_n^{n-1}（应用 I_n之前）和 Q_{n-1}^{n-2} （应用 I_{n-1} 之后），我们观察到，后一个箭图中与序列 $\mathrm{R}_{n-1}\mathrm{S}_{n-1}$ 相关的子箭图，与前一个箭图中与序列 I_n相关的子箭图同构。此外，后一个箭图中附着于与 $|i,j|$ 的 Q_n^{n-1} 相对应的顶点的变量是 $[j-1\, n-i-j+3]$。容易看出， Q_n^{n-1} 中附着于 $|i,j|$ 的变量 $[\bar{1}\, j-1\, n-i-j+3]$ 是通过连续提升和降级从 $[j-1\, n-i-j+3]$ 得到的；两个同构子箭图中的所有其他顶点也同样如此。因此，根据提升和降级性质，我们得出结论：沿序列 I_n 的所有交换关系，都是通过对沿序列 $\mathrm{R}_{n-1}\mathrm{S}_{n-1}$ 的交换关系连续进行提升和降级得到的。因此，对于 $i \in [2, n-1]$，重排后箭图中附着于 $|i,\ j|$ 的顶点的变量是 $[j-1\, n-i-j+4]$，

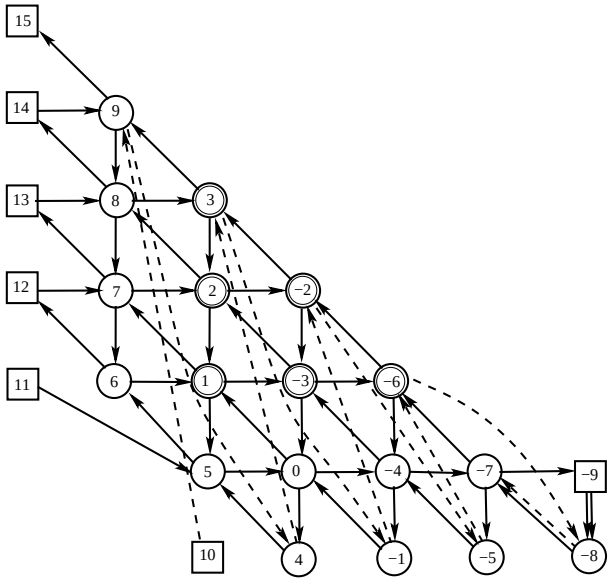


FIGURE 14. 箭图 Q_6^5 在突变序列 I_6 和重新排列之后

$j \in [3, n-i+2]$, $[\overline{1}\, n-i+2]$ 对于 $j=2$, $i \in [3,n]$, $[n-i+3]$ 对于 $i \in [3, n+1]$, 而 $[\overline{j-2}\, n-j+3]$ 对于 $i=1, j \in [4, n+1]$。

此外，还应用序列 R_n 。不难看出，参与该序列的顶点是当前箭图第二列中的顶点，自下而上排列（对于 $n=6$，即图14中的顶点6、7、8、9）。相应的交换关系对于 $k_1 = j$ 和 $k_2 = n-j+2$ 是带有 $j \in [3, n-1]$的(7.16)，对于 $k=n$则是(7.13)。所得变量对于 $j \in [3, n-1]$为$[\overline{j-1}\, n-j+1]$，对于 $j=n$为 $[\overline{n-1}]$。

最后，应用序列 S_n 。不难看出，参与该序列的顶点构成三角形 $i \in [3, n-1]$、$j \in [3, n-i+2]$ （在图14中以双圆表示）。突变顺序按列从左到右，每列自下而上。直接检查表明，箭图的相关部分与序列 $\mathrm{R}_{n-1}\mathrm{S}_{n-1}$ 和 I_n的情形完全相同；对于 $n=6$的情形，参见图13b)。此外，与突变涉及的顶点相连的函数与 $\mathrm{R}_{n-1}\mathrm{S}_{n-1}$ 的情形完全相同，因此突变后与这些顶点相连的变量，恰好与 H_{n-1}结束时得到的变量一致。还需要按照之前的方式重新排列所得箭图：第 $j=1$、2行中的顶点向左移动一格，第一列的顶点向下移动一格，上对角线$i+j=n+2$ 上的顶点 $|i$、$j|$ 向下移动 j 并向右移动一格，使它们现在构成箭图的下行。重新排列的结果与箭图Q_n^n重合。□

7.2.3. 序列 T_n。注意，附着在箭图Q_n^n 第一行上的变量（参见 $n=6$图11）恰好是 $\mathrm{k}_{ii}(X)$，因此我们再次调用 [3, 定理 3。6]并将它们冻结。其余的可变顶点按列从

右向左进行突变（这与 H_n 中的突变相反）。正如我们将看到的，同一列中的突变彼此可交换。

¯交换关系是关于矩阵 $\mathrm{G}(k_1, k_2)$ 的 Desnanot–Jacobi 恒等式，其中$k_2 > 2$这些矩阵由（7.15）得到：当 A是 $\mathrm{G}(k_1, k_2)$ 的最后 $k_1 + k_2 - 1$¯列中的子矩阵时， α 是第一块行的第一行， β 是¯第二块行的第一行，而 γ 是 $\mathrm{G}(k_1, k_2)$ 的第二块行的第二行。因此，相应的关于 $k_1 > 1$ 的 Desnanot–Jacobi 恒等式为

$$[\overline{k_1 - 1}\, k_2 - 1] \cdot [\bar{k}_1\, \overline{k_2 - 1}] = [\bar{k}_1\, k_2 - 1] \cdot [\overline{k_1 - 1}\, \overline{k_2 - 1}] + [\overline{k_1 - 1}\, k_2] \cdot [\bar{k}_1\, \overline{k_2 - 2}], \tag{7.19}$$

以及对于 $k_1 = 1$,

$$[k_2 - 1] \cdot [\bar{1}\, \overline{k_2 - 1}] = [\bar{1}\, k_2 - 1] \cdot [\overline{k_2 - 1}] + [k_2] \cdot [\bar{1}\, \overline{k_2 - 2}]. \tag{7.20}$$

T_n 中的第一次变异发生在包含唯一可变顶点$|n$的列 n 中$2|$。$|n$处的交换关系是关于 $2|$ 的（7.20），它产生 $\mathtt{k}_{n,n-1}(X)$。由于在 $|n, 2|$处发生了变异，列 $n-1$中顶点之间的箭头消失，因此，如上所述，在 $|n-1, 2|$ 和 $|n-1, 3|$ 处的变异可交换。相应的交换关系是 $|n-1, 2|$处关于 $k_2 = 4$ 的（7.20），它产生 $\mathtt{k}_{n,n-2}(X)$；以及 $|n-1, 3|$ 处关于 $k_1 = 2$, $k_2 = 3$ 的（7.19），它产生 $\mathtt{k}_{n-1,n-2}(X)$。由于这两次变异，列 $n-2$ 中顶点之间的箭头消失，因此该列中顶点处的变异可交换。按照这一模式，我们证明列 i 的顶点 $|i, j|$,$j \in [2, n-i+2]$处的交换关系为：当 $j = 2$时，关于 $k_2 = n - i + 4$ 的（7.20），它产生 $\mathtt{k}_{n,i-1}$；以及当 $j > 2$时，带有 $k_1 = j - 1$, $k_2 = n - i - j + 4$ 的（7.19），它产生 $\mathtt{k}_{n-j+2,i-1}(X)$。注意，对于 $i = 2, j = 3$，即对于 $k_1 = 2, k_2 = n$，右侧（7.19）中的函数$[\bar{1}\, n]$是乘积 $x_{n1} \det X$。

定理 2.24(i) 的证明至此完成。 □

7.3. 定理 2.24(ii) 的证明。回顾一下，上一节构造的簇中的可变变量和冻结变量分别是

$$\{\phi_{kl}(X) : k, l \geq 1,\ k + l \leq n - 1\} \cup \{\mathtt{k}_{ij}(X) : 1 \leq j \leq i \leq n, (i, j) \neq (1, 1), (n, 1)\}. \tag{7.21}$$

and

$$\{x_{1n}, x_{n,1}, \mathtt{k}_{11}(X) = \det X\} \cup \{\mathtt{c}_r / \det X : 1 \leq r \leq n - 1\}, \tag{7.22}$$

。略微滥用一下术语，如果 X 能用（7.21）、（7.22）中的变量表示为劳朗多项式，则称其为 Laurent。进一步地，如果该劳朗多项式表达式的分母中不含冻结变量，则称 Laurent 函数为好洛朗。若一个矩阵的每个元素都具有此性质，则称该矩阵为 Laurent（或好洛朗）矩阵。用这种术语来说，我们的目标是证明 X 是好洛朗的。

考虑$X = X_+ X_{0,-}$ 的高斯分解。我们首先处理第二个因子。

引理 7.9。$X_{0,-}$ 是仅依赖于 $\mathtt{k}_{ij}(X)$ 和 x_{n1} 的好洛朗对象。

证明。显然

$$(X_{0,-})_{ii} = (X_0)_{ii} = \frac{\det X^{[i,n]}_{[i,n]}}{\det X^{[i+1,n]}_{[i+1,n]}} = \frac{\mathtt{k}_{ii}(X)}{\mathtt{k}_{i+1,i+1}(X)}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

对于 $X, Y \in \mathrm{Mat}_n$ 和 $i > j$，定义

$$\hat{\mathtt{k}}_{ij}(X,Y) = \det \begin{bmatrix} Y_{[i,n]} & 0 \\ 0 & X_{[n+j-i,n]} \end{bmatrix}^{[j,n+1]}, \tag{7.23}$$

从而 $\mathtt{k}_{ij}(X) = \hat{\mathtt{k}}_{ij}(X,X)$。于是对任意 β_1、$\beta_2 \in \mathcal{N}_+$ 和 $\nu \in \mathcal{N}_-$,

$$\hat{\mathtt{k}}_{ij}(X,Y) = \hat{\mathtt{k}}_{ij}(\beta_1 X \nu, \beta_2 Y \gamma(\nu)),$$

并且，特别地,

$$\begin{aligned} \mathtt{k}_{ij}(X) = \hat{\mathtt{k}}_{ij}(X,X) = \hat{\mathtt{k}}_{ij}(X_{0,-}, X_{0,-}) &= \hat{\mathtt{k}}_{ij}\left(X_0, X_0 X_- \gamma(X_-^{-1})\right) \\ &= \det\left(X_- \gamma(X_-^{-1})\right)_{[i,n]}^{[j,n+j-i]} \det X_{[i,n]}^{[i,n]} \det X_{[n+j-i,n]}^{[n+j-i,n]}. \end{aligned}$$

记 $N = X_- \gamma(X_-^{-1})$。我们看到

$$\det N_{[i,n]}^{[j,n+j-i]} = \frac{\mathtt{k}_{ij}(X)}{\mathtt{k}_{ii}(X)\mathtt{k}_{n+j-i,n+j-i}(X)}, \quad 1 \le j < i \le n,\ (i,j) \ne (n,1). \tag{7.24}$$

将上述子式连同 $N_{n1} = x_{n1}$ 视为 N 的函数，它们构成 $n \times n$ 下三角幺幺矩阵上标准簇结构的一个初始簇。众所周知（详见 [15, 注记 3.4], ，该注记又依赖于 [2]），这一簇结构是正则且完备的，因此所有矩阵元素 N_{ij} 都具有用初始簇表示的洛朗多项式表达式。作为冻结变量，$N_{n1} = x_{n1}$ 仅出现在这些表达式的分子中。由于

$$X_{0,-} = X_0 X_- = X_0 N \gamma(N) \gamma^2(N) \dots$$

and

$$(X_0)_{ii} = \frac{\mathtt{k}_{ii}(X)}{\mathtt{k}_{i+1,i+1}(X)}, \quad i \in [1, n-1], \qquad (X_0)_{nn} = \mathtt{k}_{nn}(X), \tag{7.25}$$

证明完毕。 □

我们从以下断言开始处理 X 的高斯分解中的第一个因子。

引理 7.10。 X_+ 第一行的矩阵元素都是好洛朗。

证明。由于 $(X_+)_{11} = 1$ and $(X_+)_{1n} = x_{1n}/x_{nn} = x_{1n}/\mathtt{k}_{nn}(X)$, 我们只需考虑 $(X_+)_{1j}$ for $j \in [2, n-1]$。回顾 $\phi_{k,n-1-k}$ 的行列式描述

见第 4.1 节开头给出的内容：

$$\begin{aligned}
\phi_{k,n-1-k}(X) &= \det \begin{bmatrix} X_{[n-k,n]} & 0 \\ 0 & X_{1\cup[k+2,n]} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} (X_0N)_{[n-k,n]} & 0 \\ 0 & (X_+X_0)_{1\cup[k+2,n]} \end{bmatrix} \\
&= \det X^{[n-k,n]}_{[n-k,n]} \det X^{[k+2,n]}_{[k+2,n]} \det \begin{bmatrix} N^{[1,k+2]}_{[n-k,n]} \\ 0 & (X_+X_0)^{[1,k+1]}_1 \end{bmatrix} \\
&= \mathtt{k}_{n-k,n-k}(X)\mathtt{k}_{k+2,k+2}(X) \\
&\quad \times \left((X_+X_0)_{1,k+1} \det N^{[1,k+1]}_{[n-k,n]} + \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+k} (X_+X_0)_{1j} \det N^{[1,k+1]\setminus\{j+1\}}_{[n-k,n]} \right) \\
&= \mathtt{k}_{n-k,1}(X) \cdot (X_+)_{1,k+1} \\
&\quad + \mathtt{k}_{n-k,n-k}(X)\mathtt{k}_{k+2,k+2}(X) \left(\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+k} (X_+X_0)_{1j} \det N^{[1,k+1]\setminus\{j+1\}}_{[n-k,n]} \right);
\end{aligned}$$

在最后一个等式中，我们对 $i = n-k$ 和 $j = 1$ 使用了 (7.24)，对 $i = k+1$ 使用了 (7.25)。由此得到的公式 $\phi_{1,\ n-2}(X)$、$\phi_{2,\ n-3}(X)\ldots$、$\phi_{n-1,\ 1}(X)$ 可视为关于 $(X_+)_{12}$、$\ldots$、$(X_+)_{1,\ n-1}$ 的三角线性方程组。根据引理 7.9，该方程组的系数是好洛朗的；递归求解该方程组以求出 $(X_+)_{12}$、$\ldots$、$(X_+)_{1,\ n-1}$ 时，只需除以 $\mathtt{k}_{n-k,\ 1}(X)\ldots$、$\mathtt{k}_{21}(X)$，由此证明了该断言。□

为得到 X_+ 其余矩阵元素所需的 Laurent 多项式表达式，我们首先将该映射推广为

$$\Psi' : GL_n \to GL_{n-1}, \quad \Psi' : X \mapsto U(X) = X_L X_R^{-1}$$

从第 3.1 节到一个映射

$$\widehat{\Psi}' : GL_n \times GL_n \to GL_{n-1}, \quad \widehat{\Psi}' : (X,Y) \mapsto \widehat{U}(X,Y) = X_L Y_R^{-1}$$

并注意到它满足以下易于验证的不变性：

$$\widehat{U}(\gamma(\beta)X\nu, \beta Y\gamma(\nu)) = \beta^{[1,n-1]}_{[1,n-1]} \widehat{U}(X,Y) \left(\beta^{[1,n-1]}_{[1,n-1]}\right)^{-1}$$

对于任意 $\beta \in \mathcal{N}_+$ 和 $\nu \in \mathcal{N}_-$。因此，

$$\begin{aligned}
U(X) &= \widehat{U}\left(X_+X_{0,-}, X_+X_{0,-}\right) \\
&= (X_+^{-1})^{[1,n-1]}_{[1,n-1]} \widehat{U}\left(\gamma(X_+^{-1})X_+X_0, X_0X_-\gamma(X_-^{-1})\right) (X_+)^{[1,n-1]}_{[1,n-1]}.
\end{aligned} \tag{7.26}$$

记

$$V = \gamma(X_+^{-1})X_+. \tag{7.27}$$

由于函数 (2.8) 在 GL_{n-1} 的上幺零元共轭作用下保持不变，上述公式意味着

$$\varphi_{kl}(U(X)) = \varphi_{kl}\left(\widehat{U}\left(VX_0, X_0N\right)\right). \tag{7.28}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$为了更好地理解 $\widehat{\mathrm{U}} = U(VX_0, X_0N)$ 的结构，注意，对于上三角矩阵 B 和下三角矩阵 C,

$$B_L = B^{[2,n]}_{[2,n]} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_{n-2} \\ -\frac{b_{11}}{b_{1n}} & \dots - \frac{b_{1,n-1}}{b_{1n}} \end{bmatrix},$$

$$C_R^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{c_{n2}}{c_{n1}} & \dots - \frac{c_{nn}}{c_{n1}} \\ \mathbf{1}_{n-2} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \tilde{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_{n-2} \\ -\frac{c_{n1}}{c_{nn}} & \dots - \frac{c_{n,n-1}}{c_{nn}} \end{bmatrix} \tilde{C}^{-1}$$

其中 $\tilde{C} = C^{[1,n-1]}_{[1,n-1]}$。因此，若我们选择 $B = VX_0, C = X_0N$，则

$$\widehat{\mathrm{U}} = B^{[2,n]}_{[2,n]} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_{n-2} \\ -\frac{(X_{+,0})_{11}}{-1x_{1n}} & \dots - \frac{(X_{+,0})_{1,n-1}}{x_{1n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_{n-2} \\ -N_{n1} & \dots - N_{n,n-1} \end{bmatrix} \tilde{C}^{-1}.$$

记 $M = \left(B^{[2,n]}_{[2,n]}\right)$ $\widehat{\ }$U，并令

$$D_1 = \mathrm{diag}(\mathbf{1}_{n-2}, x_{1n}), \quad D_2 = \mathrm{diag}(\mathbf{1}_{n-2}, \det X). \tag{7.29}$$

引理 7.11. 矩阵 $(Mw_0)^{-1}_+$ 和 $(Mw_0)^{-1}_{0,-}(D_1D_2)^{-1}$ 是好洛朗。

证明。由引理 7.9 和 7.10， M 的所有矩阵元素都是 Laurent。此外，在左侧将 M 乘以 D_1，并在右侧乘以 $w_0D_2w_0^{-1} =$ 对角矩阵$(\det X, \mathbf{1}_{n-2})$ 后，所得矩阵 M 的所有矩阵元素都成为好洛朗。

$\widehat{\ }$此外，$(Mw_0)_{0,-} =$ $(\widehat{\mathrm{U}}w_0)_{0,-}$，因此由 (7.26)、(2.8) 和 (2.17),

$$\det(Mw_0)^{[i,n-1]}_{[i,n-1]} = \det \widehat{\mathrm{U}}^{[1,n-i]}_{[i,n-1]} = \det U(X)^{[1,n-i]}_{[i,n-1]} = \pm \frac{\phi_{i-1,n-i}(X)}{x_{1n} \det X},$$

$$\det(\widetilde{M}w_0)^{[i,n-1]}_{[i,n-1]} = \det(D_1Mw_0D_2)^{[i,n-1]}_{[i,n-1]} = \pm\phi_{i-1,n-i}(X).$$

回想一下，矩阵高斯分解中出现的分母是其尾主子式，因此， Mw_0的高斯分解中所有因子的矩阵元素都是 Laurent，而 Mw_0的矩阵元素都是好洛朗。因此，$(Mw_0)_+ = D_1^{-1}(\widetilde{M}w_0)_+D_1$也是好洛朗，其逆矩阵亦然。最后，$(Mw_0)_{0,-} = D_1^{-1}(\widetilde{M}w_0)_{0,-}D_2^{-1}$，因此

$$(Mw_0)^{-1}_{0,-}(D_1D_2)^{-1} = D_2(\widetilde{M}w_0)^{-1}_{0,-}D_2^{-1}$$

是好洛朗。 □

为了将 (7.21)、(7.22) 中 $B^{[2,n]}_{[2,n]}$ 的矩阵元素还原为 Laurent 多项式，我们需要简要回顾 [15] 中的一些技术性结果。（请注意，我们需要的陈述和公式是通过对 [15] 中对应结果一致地应用 w_0 共轭，并将 n 替换为 $n-1$ 得到的。）令 $w_c = E_{12} + \ldots + E_{n-2,\ n-1} + E_{n-1,\ 1}$ 为 SL_{n-1} 中 Coxeter$\widehat{\ }$ 元素 $s_{n-2}\cdots s_1 \in S_{n-1}$的一个代表元。根据 [15, 引理 8.2],，U 可唯一表示为 $\widehat{\ }\mathrm{U} =$ $\widehat{\ }\beta(\widehat{\ }\nu w_c)\ \widehat{\ }\beta^{-1}$，其中 $\widehat{\ }\beta \in \mathcal{N}_+$、$\widehat{\ }\nu \in \mathcal{B}_-$ 是关于 $\widehat{\ }\mathrm{U}$ 的矩阵元素的有理函数。此外，根据 [15, 第 7.3.2], 节，$\hat{\nu} =$ $(\widehat{\ }\nu_{ij})^{n-1}_{i\ ,\ j=1}$ 的矩阵元素是关于函数 φ_{kl}(U) 的 Laurent 多项式。后一结论可由 [15, 等式 (5.8)] 中可改写为

$$\begin{aligned} &\varphi_{kl}(\widehat{\mathrm{U}}) = \pm \det \hat{\nu}^{[1,l-1]}_{[k+1,k+l-1]}\eta_1\cdots\eta_{n-k-l}, \quad l > 1, k+l \le n-1, \\ &\varphi_{k1}(\widehat{\mathrm{U}}) = \pm\eta_1\cdots\eta_{n-k-1}, \quad k \in [1, n-2], \end{aligned} \tag{7.30}$$

其中 $\eta_s = \hat{\nu}_{n-1,\ n-1}\cdots\hat{\nu}_{n-s,\ n-s}$ 对于 $s \in [1, n-2]$。由 (7.30) 可得关于函数 $\varphi_{kl}(\mathrm{U})$ 的单项式表达式，给出 $\hat{\nu}^{[1,n-2]}_{[1,n-2]}$ 的对角矩阵元素和旗子子式：

$$
\begin{aligned}
&\hat{\nu}_{11} = \pm\frac{x_{n1}\varphi_{21}(\widehat{\mathrm{U}})}{x_{1n}\varphi_{11}(\widehat{\mathrm{U}})},\\
&\hat{\nu}_{kk} = \pm\frac{\varphi_{k-1,1}(\widehat{\mathrm{U}})\varphi_{k+1,1}(\widehat{\mathrm{U}})}{\varphi_{k1}(\widehat{\mathrm{U}})^2}, \quad k \in [2, n-2],\\
&\hat{\nu}_{n-1,n-1} = \pm\varphi_{n-2,1}(\widehat{\mathrm{U}}),\\
&\det \hat{\nu}^{[1,l-1]}_{[k+1,k+l-1]} = \pm\frac{\varphi_{kl}(\widehat{\mathrm{U}})}{\varphi_{k+l-1,1}(\widehat{\mathrm{U}})}, \quad l \le n-1, k < n-l.
\end{aligned}
\tag{7.31}
$$

这些元素构成了 $(n-2)\times(n-2)$ 下三角矩阵上标准簇结构的一个初始簇；众所周知，该簇结构是完备的（见引理 7.9 的证明）。这保证了 $\hat{\nu}^{[1,n-2]}_{[1,n-2]}$ 的矩阵元素在 (7.21)、(7.22) 中是 Laurent 多项式。最后，通过将 $\hat{\nu}_{n-1,j},\ j \in [1, n-2]$ 的元素表示为 $\hat{\nu}^{[1,n-2]}_{[1,n-2]}$ 的非对角元素及系数 $c_1(\widehat{\mathrm{U}}), \ldots, c_{n-2}(\widehat{\mathrm{U}})$ 的多项式，再除以 $\hat{\nu}_{kk}$，$k \in [1, n-2]$ 中的单项式，我们在 [15, 第 7.3 节.2] 中得到了 $\hat{\nu}$ 最后一行的 Laurent 多项式表达式。

引理 7.12. (7.26) 中的矩阵 $B^{[2,n]}_{[2,n]}$ 可写为

$$B^{[2,n]}_{[2,n]} = w_0(Mw_0)^{-1}_{0,-}(\hat{\nu}w_cw_0)_{0,-}w_0^{-1}(\hat{\nu}w_cw_0)_+(Mw_0)^{-1}_+.$$

证明. 回忆一下，$\widehat{\mathrm{U}} = B^{[2,n]}_{[2,n]}M = \hat{\beta}(\hat{\nu}w_c)\hat{\beta}^{-1}$。在右侧乘以 w_0，并对等式两边作高斯分解，得到

$$B^{[2,n]}_{[2,n]}(Mw_0)_+(Mw_0)_{0,-} = \hat{\beta}(\hat{\nu}w_cw_0)_+(\hat{\nu}w_cw_0)_{0,-}w_0^{-1}\hat{\beta}^{-1}w_0.$$

比较后一个等式中的因子，得到

$$\hat{\beta}^{-1} = w_0(\hat{\nu}w_cw_0)^{-1}_{0,-}(Mw_0)_{0,-}w_0^{-1}$$

and

$$B^{[2,n]}_{[2,n]} = \hat{\beta}(\hat{\nu}w_cw_0)_+(Mw_0)^{-1}_+ = w_0(Mw_0)^{-1}_{0,-}(\hat{\nu}w_cw_0)_{0,-}w_0^{-1}(\hat{\nu}w_cw_0)_+(Mw_0)^{-1}_+.$$

□

现在我们可以完成 X 是好洛朗的证明了。事实上，(7.27) 中定义的 V 的第一行与 X_+ 的第一行一致，而 $V^{[2,n]}_{[2,n]} = B^{[2,n]}_{[2,n]}\left((X_0)^{[2,n]}_{[2,n]}\right)^{-1}$。若 V 是好洛朗，则 $X_+ =$ 也如此
$\cdots\gamma^2(V)\gamma(V)V$，并且根据引理 7.9，$X = X_+X_{0,\ -}$。

鉴于引理 7.9 和 7.10，为验证 X 是好洛朗，我们只需对 $B^{[2,n]}_{[2,n]}$ 建立类似的断言。首先，我们分析冻结变量 x_{n1}、x_{1n} 以及 $\det X$ 如何进入上文所讨论的矩阵元素 $\hat{\nu}_{ij}$ 的 Laurent 多项式表达式。注意到，由 (7.28) 和 (2.17)，方程 (7.31) 可以

改写为

$$
\begin{aligned}
&\hat{\nu}_{11} = \pm\frac{x_{n1}\det X\phi_{21}(X)}{\phi_{11}(X)},\\
&\hat{\nu}_{kk} = \pm\frac{\phi_{k-1,1}(X)\phi_{k+1,1}(X)}{\phi_{k1}(X)^2}, \quad k\in[2,n-2],\\
&\hat{\nu}_{n-1,n-1} = \pm\frac{\phi_{n-2,1}(X)}{x_{1n}\det X},\\
&\det\hat{\nu}^{[1,l-1]}_{[k+1,k+l-1]} = \pm\frac{\phi_{kl}(X)}{\phi_{k+l-1,1}(X)}, \quad l\le n-1, k<n-l.
\end{aligned}
\tag{7.32}
$$

这尤其意味着，$\hat{}$ $n-2$ 的第 2 行至 $n-2$ 各行元素的表达式完全不含冻结变量。

我们按照 [15, 第 7.3 节2]的策略，更仔细地考察 $\hat{}\nu$ 最后一行元素的 Laurent 多项式表达式。这涉及分两步将 $\hat{}\nu w_c$ 共轭为其友伴形式。第一步是通过以下对角共轭

$$T=\operatorname{diag}(t_1,\dots,t_{n-1}) := \operatorname{diag}(\hat{\nu}_{11}\cdots\hat{\nu}_{n-2,n-2}, \hat{\nu}_{22}\cdots\hat{\nu}_{n-2,n-2},\dots,\hat{\nu}_{n-2,n-2},1)$$

由此得到 $T^{-1}\hat{\nu}w_cT=\begin{bmatrix}0 & \zeta\\ \varkappa & \xi\end{bmatrix}$，其中

$$\varkappa=\hat{\nu}_{11}\cdots\hat{\nu}_{n-1,n-1}=\det\hat{\nu}=\pm\det U(X)=\pm\frac{x_{n1}}{x_{1n}}, \quad \xi=(\hat{\nu}_{n-1,j}t_{j+1})_{j=1}^{n-2},$$

且 ζ 是一个幺幂（$n-2$）$\times$（$n-2$）下三角矩阵，其非对角元素 $\zeta_{ij}=\hat{}\nu_{ij}t_i^{-1}t_{j+1}$, $1\le j<i<n-1$ 根据 (7.32) 中的第二个和第四个方程是好 Laurent。第二步是用矩阵 $\eta=\begin{bmatrix}1 & & & 0\\ 0 & \zeta^{-1}\gamma & & \\ & \zeta^{-1} & & \\ & & \ddots & \end{bmatrix}$ 进行共轭。所得矩阵 $\eta^{-1}T^{-1}\hat{\nu}w_cT\eta$ 是友伴形式，其特征多项式的系数位于最后一行。由于 $\hat{\nu}w_c$ 与 $U(X)$ 相似，该友伴矩阵的最后一行由函数 $\pm c_p(U(X))$ 构成。由此可知，矩阵元素 $\hat{}\nu_{n-1,j}$, $j\in[1,n-2]$ 可表示为关于 $c_i(U(X))$ 的线性表达式、关于 ζ_{ij} 的多项式，以及关于 $\hat{}\nu_{ii}$, $i\in[2,n-2]$ 的 Laurent 多项式。根据 (2.19)，$c_p(U(X)) = {}^{c_p}(x)_{x_{1n}}\det{}_X$。结合 (7.32) 中的第三个方程，这意味着 $\hat{\nu}$ 最后一行的每个矩阵元素都是一个好 Laurent 函数除以 $x_{1n}\det X$。总而言之，矩阵 $\bar{\nu}=D_1D_2\hat{\nu}$（其中 D_1, D_2 在 (7.29) 中定义）是好 Laurent。

现在，考虑 $\bar{\nu}w_cw_0$ 的高斯分解。尾随主子式为

$$
\begin{aligned}
\det(\bar{\nu}w_cw_0)^{[i,n-1]}_{[i,n-1]} &= \pm\bar{\nu}_{n-1,n-1}\det(\bar{\nu})^{[1,n-i-1]}_{[i,n-2]}\\
&= \pm x_{1n}\det X\hat{\nu}_{n-1,n-1}\det(\hat{\nu})^{[1,n-i-1]}_{[i,n-2]} = \pm\phi_{n-2,1}(X)\frac{\phi_{i-1,n-i}(X)}{\phi_{n-2,1}(X)}.
\end{aligned}
$$

因此，$\bar{\nu}w_cw_0$ 的高斯分解中的因子都是好洛朗，($\hat{}\nu w_cw_0)_+=(D_1D_2)^{-1}(\bar{\nu}w_cw_0)_+D_1D_2$也是如此，而$(\hat{}\nu w_cw_0)_{0,-}=(D_1D_2)^{-1}(\bar{\nu}w_cw_0)_{0,-}$是Laurent，但不是好洛朗。不过，我们可以将 $B^{[2,n]}_{[2,n]}$ 的方程改写为

如下形式（引理 7.12）：

$$\begin{aligned} B_{[2,n]}^{[2,n]} &= w_0(Mw_0)_{0,-}^{-1}(\hat{\nu}w_c w_0)_{0,-}w_0^{-1}(\hat{\nu}w_c w_0)_+(Mw_0)_+^{-1} \\ &= w_0\left((Mw_0)_{0,-}^{-1}(D_1D_2)^{-1}\right)(\bar{\nu}w_c w_0)_{0,-}w_0^{-1}(\hat{\nu}w_c w_0)_+(Mw_0)_+^{-1}. \end{aligned}$$

考虑引理 7.11 后，我们看到上一个表达式中的所有因子都是好洛朗，从而完成了证明。□

7.4. 定理 2.17 证明的最后步骤。要完成定理 2.17 的证明，我们必须验证命题 2.22 的条件成立。我们将把该命题应用于定理 2.23 和 2.24(ii) 中得到的 Laurent 表示。因此，我们必须验证族 $\{\mathsf{g}_{ii}(X)\ i \in [2, n-1];\ x_{1n};\ x_{n1};\ \det X\}$ 中的任意多项式，与族$\{\mathsf{k}_{ij}(X)\ 1 \le j \le i \le n、(i,j) \ne (n,1)、(1,1);\ \phi_{kl}(X)\ k, l \in [1, n-2], k+l \le n-1\}$ 中的任意多项式互素。

我们从以下命题开始。

命题 7.13。多项式 $\mathsf{g}_{ii}(X),\ i \in [2, n-1]$ 不可约。

证明。注意，$\mathsf{g}_{n-1,n-1}(X)$ 与多项式$\sum_{t=0}^{n-1} x_{1,n-t}z^t$ 和 $\sum_{t=0}^{n-1} x_{n,n-t}z^t$的结式仅相差一个符号；众所周知，该结式是不可约的（参见例如 [24, 第 5 章9]）。

对于 $i \in [2, n-2]$，假设对于大小为 $k \times k$ 且满足$k \in [i+1, n-1]$ 的 Y，$\mathsf{g}_{ii}(Y)$ 均不可约（注意，对于 $k = i+1$，$\mathsf{g}_{ii}(Y)$ 再次是一个结式），并考察 $\mathsf{g}_{ii}(X)$。显然，对于 $l \in [1, n]$，$\mathsf{g}_{ii}(X)$ 关于所有变量 $x_{i+1,l}$ 都是线性的。令 $c_{i+1,n}$ 表示 $\mathsf{g}_{ii}(X)$ 中 $x_{i+1,n}$ 的系数。容易看出，将 $c_{i+1,n}$ 限制到 $x_{1n} = x_{nn} = 0$ 后，所得结果等于矩阵 Y 的 $\mathsf{g}_{ii}(Y)$，其中矩阵 Y 是从 X 中删去第 $(i+1)$ 行和最后一列得到的；因此根据假设它不可约，从而 $c_{i+1,n}$ 本身也不可约。因此，若 $\mathsf{g}_{ii}(X) = PQ$ 且 P 依赖于 $x_{i+1,n}$，那么要么 $P = x_{i+1,n}c_{i+1,n} + \cdots$，因而 $Q = 1$；要么 $P = x_{i+1,n} + \cdots$，因而 $Q = c_{i+1,n}$。后一种情况不可能，因为$x_{i+1,n-1}$ 与 $x_{i+1,n}$ 一同出现在 P 中，因此 PQ 会含有一个带有 $x_{i+1,n-1}x_{1,n-1}^i$ 的单项式，而 $\mathsf{g}_{ii}(X)$ 只含有满足$k < i$的、带有 $x_{i+1,n-1}x_{1,n-1}^k$ 的单项式。□

注意，第一族中除 x_{n1} 外的所有多项式都依赖于 X 的第一行的元素，而第二族中的所有多项式 $\mathsf{k}_{ij}(X)$ 不依赖于该行的元素，且不能被 x_{n1} 整除。因此，由命题 7.13，第二族中的多项式 $\mathsf{k}_{ij}(X)$ 与第一族中的所有多项式互素。此外，多项式 $\phi_{kl}(X)$ 不能被任何一个 $\mathsf{g}_{ii}(X)$ 整除。事实上，所有 $\mathsf{g}_{ii}(X)$ 在 $x_{11} = x_{n1} = 0$ 上恒为零。另一方面，$\phi_{kl}(X)$ 中没有一个具有这一性质：否则将意味着存在 $\Phi_{kl}(X)\big|_{x_{11}=x_{n1}=0}$ 的行的一个非平凡线性组合表示零，这是不可能的，因为该矩阵每一列的元素都是互不相同的独立变量。类似地，$\phi_{kl}(X)$ 不能被 $\det X$ 整除这一事实源于后者在 $x_{12} = x_{22} = \cdots = x_{n2} = 0$ 上恒为零，而前者并非如此。显然，$\phi_{kl}(X)$ 也不能被 x_{1n} 和 x_{n1} 整除，因此所需的互素性再次由命题 7.13 得出。

注记 7.14。事实上，可以将上述推理与 [25, 引理 5.5]结合起来，证明两个族中的所有函数都是不可约的。

现在我们可以验证，所得到的广义簇代数的基环确实是 $\mathbb{C}[x_{1n}, x_{n1}, \det X^{\pm 1}]$，正如注 2.3 中所指出的。为实现这一目标，我们将证明，在第7.1节中得到的矩阵元素的 Laurent 表示的分母中实际上不包含 x_{1n}、 x_{n1} 和 $\det X$。这一结论基于以下观察。

命题7.15. 若广义上簇代数中某元素在某个种子 Σ 中的Laurent 表示的分母不含冻结变量，则该元素在所有种子中的Laurent表示同样如此。

证明。显然，只需证明在将簇变量 f 替换为 f 后得到的相邻种子 $\overline{\Sigma}$ 中的 Laurent 表示具有这一性质。设 R与 R 分别为 Σ 与 $\overline{\Sigma}$的簇变量上的多项式环。假设 $x = QM/f^k$，其中 $k \in \mathbb{Z}$、 $Q \in R$ 不能被单项式整除，且M 是 Σ 的簇变量（不含 f）中的Laurent 单项式，并且分母中不含冻结变量。进一步，设 $x = QM$，其中 $Q \in R$ 不能被单项式整除，且 M 是$\overline{\Sigma}$的簇变量中的 Laurent 单项式。回忆 f与 f满足交换关系 $ff = P$，其中 $P \in R \cap R$。设 m 为使 $Q = f^m\, Q|_{f=P/\bar{f}} \in R$成立的最小非负整数，则$\tilde{Q}\bar{f}^{k-m}M = \bar{Q}\bar{M}P^k$是 $\bar{R}$中的恒等式。由于 $\overline{\Sigma}$中的簇变量代数独立，该恒等式仅当 $\tilde{Q} = \bar{Q}P^k$且 $\bar{M} = \bar{f}^{k-m}M$时才可能成立，因此，M 保持分母中不含冻结变量这一性质。□

考虑到定理 2.24 中矩阵元的 Laurent 表示在分母中不含冻结变量，我们便得到所需结论。□

注7.16。现在我们可以验证，正如第2.7.4节所指出的，解冻顶点 D 已迫在眉睫。事实上，根据命题2.16，突变前位于 D 处的簇变量 $\mathsf{g}_{n-1,\ n-1}(X)$ 与突变 D 后取代它的函数 $\mathsf{g}(X)$ 之间的括号为

$$\{\mathsf{g}_{n-1,n-1}(X), \mathsf{g}(X)\} = c_1 \mathtt{f}_{2n-3}(X)\mathsf{g}_{n-2,n-2}(X) + c_2 x_{n1}\mathtt{f}_{2n-4}(X)\mathsf{g}_{n-1,n-2}(X)$$

其中 c_1 和 c_2 是某些常数。命题 6.3 的证明中的计算表明 $c_2 - c_1 = 1$，因此

$$\frac{\{\mathsf{g}_{n-1,n-1}(X), \mathsf{g}(X)\}}{\mathsf{g}_{n-1,n-1}(X)} = c_2\mathsf{g}(X) - \frac{\mathtt{f}_{2n-3}(X)\mathsf{g}_{n-2,n-2}(X)}{\mathsf{g}_{n-1,n-1}(X)}.$$

根据命题 7.13，多项式 $\mathsf{g}_{n-1,\ n-1}(X)$ 和 $\mathsf{g}_{n-2,\ n-2}(X)$ 不可约。此外，$\deg \mathtt{f}_{2n-3}(X) < \deg \mathsf{g}_{n-1,\ n-1}(X)$，因此上述表达式不是 GL_n 上的正则函数，命题 2.15 适用。

7.5. 定理 2.25 的证明。我们按照 [20], 所述，将 $\mathcal{GC}_n$ 上的广义结构正则拉回到 Mat_n 上，并取 $g_1 = \det X$ 作为特征多项式。通过 [20,式（4.5）] 中的第一个关系计算得到的函数 $\varphi_1(r)$，在 $r \in [1, n-2]$ 时等于 1，在 $r = 0$、 $n-1$时为零；而通过 [20, 式（4.5）] 中的第二个关系计算得到的 τ_1 为零。因此，我们恰好满足 [20, 备注 46], 中的条件：箭图 Q_n 中 B 与（1, 1）之间在两个方向上各有一条箭头，且其突变规则如第 2.7.6 节所述。

$\widehat{\ }$ $\mathcal{GC}_n$ 与 $\{\cdot,\cdot\}$ 的相容性直接源于 $\mathcal{GC}$ 与 $\{\cdot,\cdot\}$的相容性，因为 $\det X$ 是 $\{\cdot,\cdot\}$ 的卡西米尔元。 $\mathcal{GC}_n$的正则性可由 $\mathcal{GC}_n$的正则性推出。为证明完备性，我们援引 [20, 定理 62]。根据定理 2.24(ii)， X 的每个矩阵元 x_{ij} 都可以表示为该定理第 (i) 部分所述种子中的簇变量的 Laurent 多项式，并且这些 Laurent 多项式的分母不含冻结变量，尤其不含 $\det X$。因此，在超曲面$\{\det X = 0\}$的一般点处，每个 x_{ij} 都可以表示为这些簇变量的 Laurent 多项式，故 [20, 定理 62] 适用。□

Appendix: Regular complete cluster structure on the space $\bar{\mathcal{R}}_n$ of rational functions

本附录旨在证明定理 2.8。我们将利用一个从 ρ 到 $\bar{\mathcal{R}}_n$ 的映射 $\mathcal{R}_n$ ，它将

$$\bar{M}(\lambda) = \frac{\bar{q}(\lambda)}{p(\lambda)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\bar{h}_i}{\lambda^i}$$

将 $\bar{q}$（λ）$= \sum_{i=0}^{n} \bar{q}_i \lambda^i$、 p（λ）$= \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} p_i \lambda^i$ 映射到

$$M(\lambda) = \bar{M}(\lambda) - \bar{q}_n = \bar{M}(\lambda) - \bar{h}_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{h_i}{\lambda^{i+1}} = \frac{q(\lambda)}{p(\lambda)},$$

¯，使得对于 $n = 0$、1、.....， $h_n = h_{n+1}$ q（λ）$= \bar{q}$（λ）$- \bar{q}_n \lambda^n$。

映射 ρ 可以通过以下方式实现为一系列簇突变。首先注意，簇变量 $\bar{t}_m^+$ 附着于 $\bar{Q}_n^T$ 中的顶点（m， $+$），且与 t_m^- 对于 $m = 1$、.....、 n 相同。对初始种子（$\bar{\mathcal{T}}_n$， $\bar{Q}_n^T$）应用在顶点（1， $-$）、（2， $-$）、.....、（n， $-$）处进行突变的序列 μ。随后，附着于顶点（m， $-$）的簇变量 $\bar{t}_m^-$ 变为

$$(\bar{t}_m^-)' = \det(\bar{h}_{\alpha+\beta})_{\alpha,\beta=1}^{m} = \det(\bar{H}_{m+1}^+)_{\hat{1}}^{\hat{1}} = \det H_m^+ = t_m^+$$

对于 $m = 1$， ..... $n-1$ 以及进入

$$\frac{t_m^+}{t_{\bar{m}}^-} = \frac{\det(\bar{h}_{\alpha+\beta})_{\alpha,\beta=1}^{m}}{\det(\bar{h}_{\alpha+\beta-1})_{\alpha,\beta=1}^{m}}$$

对于 $m = n$。

事实上，容易看出，μ 中所涉及的簇变换由

$$\begin{aligned}
&\bar{t}_1^-(\bar{t}_1^-)' = \bar{t}_2^- + (\bar{t}_1^+)^2,\\
&\bar{t}_m^-(\bar{t}_m^-)' = \bar{t}_{m+1}^-(\bar{t}_{m-1}^-)' + (\bar{t}_m^+)^2, \quad m \in [2, n-1],\\
&\bar{t}_n^-(\bar{t}_n^-)' = \frac{\bar{t}_{m+1}^-}{\bar{t}_n^+}(\bar{t}_{m-1}^-)' + \bar{t}_n^+ \ .
\end{aligned}$$

于是该断言由 Hankel 行列式的 Desnanot–Jacobi 恒等式得出，在我们的记号下它取如下形式

$$\bar{t}_m^- t_m^+ = \bar{t}_{m+1}^- t_{m-1}^+ + (\bar{t}_m^+)^2.$$

我们看到，种子$\mu(\bar{\mathcal{T}}_n, \bar{Q}_n^T)$ 中与顶点 $(m, \pm)$， $m \in [1, n]$ 对应的簇变量，与 $(\mathcal{T}_n, Q_n^T)$ 中与相同顶点对应的簇变量一致。事实上，很容易验证，将 $\mu(\bar{Q}_n^T)$ 限制到由

顶点 $(m,\pm)$，$m \in [1,n]$ 组成的全子箭图上后，所得结果与 Q_n^T 一致，前提是将顶点 $(n,+)$ 视为冻结顶点。现在，我们可以援引 [11] 关于由种子 $(\mathcal{T}_n, Q_n^T)$ 定义在 $\mathcal{R}_n$ 上的簇结构 $\mathcal{C}_n^T$ 的结果，以确立 $\bar{\mathcal{C}}_n^T$ 所需的性质。

¯我们先讨论正则性。回顾一下，$M(\lambda)$ 的 Laurent 展开¯中的系数 h_i 是 $p(\lambda)$ 和 $\bar{q}(\lambda)$ 的系数的多项式，这可由 (4.15) 看出；此外，由于 $p(\lambda)$ 与 $\bar{q}(\lambda)$ 满足互素性的经典判据，$\bar{t}_n^+$ 在 $\bar{\mathcal{R}}_n$ 上不为零，参见例如 [8, 定理 8.39]。因此，构成¯我们序列 μ 的突变在 $\mathcal{R}_n$ 上给出正则函数。若在 μ 之后继续对其余顶点 $(1,+)\ldots,(n-1,+)$ 进行突变，则所得簇变量¯也在 $\mathcal{R}_n$ 上正则，因为它们是已知正则的结构 $\mathcal{C}_n^T$ 中簇变量经映射 ρ 拉回所得。正如 [7, 第 9], 节所解释的，这保证了 $\bar{\mathcal{C}}_n^T$ 的正则性。

接下来，我们将证明，如注2.9所示，$\bar{\mathcal{C}}_n^T$ 在基环 $\mathbb{C}[\bar{t}_{n+1}^-/\bar{t}_n^+, (\bar{t}_n^+)^{\pm 1}]$ 上是完备的。根据引理 5.3], [11, , h_i, $i \in [0,2n-1]$ 是 $\mathcal{C}_n^T$ 中的簇变量，因此 $\bar{h}_i$, $i \in [0,2n]$ 是 $\bar{\mathcal{C}}_n^T$ 中的簇变量。我们可以将关于 $j \in [1,n]$ 的方程 (4.15) 改写为

$$[\bar{q}_n,\ldots,\bar{q}_1] = [\bar{h}_0,\ldots,\bar{h}_{n-1}] \begin{bmatrix} 1 & p_{n-1} & p_{n-2} & \cdots & p_1 \\ 0 & 1 & p_{n-1} & p_{n-2} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & p_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{A.1}$$

而关于 $j \in [-n,0]$ 的方程可改写为

$$[\bar{q}_0, 0, \ldots, 0] = [p_0,\ldots,p_{n-1},1]\bar{H}_{n+1}^-. \tag{A.2}$$

后一个方程意味着

$$[p_0,\ldots,p_{n-1}] = -[\bar{h}_{n+1},\ldots,\bar{h}_{2n}]\left(\bar{H}_n^+\right)^{-1}$$

以及 $\bar{q}_0 = \bar{t}_{n+1}^-/\bar{t}_n^+$。由于 $\bar{H}_{n+1}^-$ 的元素是 $\bar{\mathcal{C}}_n^T$ 中的簇变量，且 $\det \bar{H}_n^+ = \bar{t}_n^+$ 是一个冻结变量，我们得出系数 $p_0,\ldots,p_{n-1}$ 属于相应的簇代数。根据 (A.1)，对 $\bar{q}_1,\ldots,\bar{q}_n$ 也可得出同样的结论。

为完成证明，我们需要证明 $\bar{\mathcal{C}}_n^T$ 与 $\{\cdot,\cdot\}^T$ 的相容性。再次地，我们将依赖 [11] 中的结果。由于根据 (2.13) 和 (2.15)，系数 h_i 和 $\bar{h}_i$ 关于 $\{\cdot,\cdot\}^T$ 满足相同的泊松关系，因此，由 h_i 和 h_i 分别构造的汉克尔行列式之间的¯泊松括号也具有相同的性质。对于 $\mathcal{R}_n$，这些结果已在 [11] 中作为证明 $\mathcal{C}_n^T$ 与 $\{\cdot,\cdot\}^T$ 相容性的一部分计算出来。现在我们将使用以下直接的观察。设 Q 是一个簇结构中的箭图，该簇结构与泊松括号 $\{\cdot,\cdot\}$ 相容。假设我们对 Q 中附属于冻结变量 $\tilde{}$ 的簇变量施加单项式变换。为了将 Q 调整为新的箭图 Q，使得保持可变变量不变并使用新的冻结变量的种子仍与 $\{\cdot,\cdot\}$ 相容，需要以某种方式改变 Q 中冻结顶点与可变顶点之间的箭头，从而使可变顶点处的所有 y-变量保持不变。我们将这一观察应用于 Q_{n+1}^T，其中附属于顶点 $(m,\pm)$ 的函数分别是 $\bar{t}_m^{\pm}$，而不是 $t_m^{\pm}$。随后我们冻结顶点 $(n,+)$，这会使冻结顶点 $(n+1,+)$ 脱离该箭图。涉及冻结顶点 $(n+1,-)$ 的唯一 y-变量与顶点

$(n,-)$ 相关联，并且等于

$$\frac{(\bar{t}_n^+)^2\bar{t}_{n-1}^-}{(\bar{t}_{n-1}^+)^2\bar{t}_{n+1}^-}=\frac{\bar{t}_n^+\bar{t}_{n-1}^-}{(\bar{t}_{n-1}^+)^2(\bar{t}_{n+1}^-/\bar{t}_n^+)}.$$

因此，若将冻结变量 $\bar{t}_{n+1}^-$ 替换为 $\bar{t}_{n+1}^-/\bar{t}_n^+$，则与 $\{\cdot,\cdot\}^T$ 的相容性要求会使我们恢复箭图 $\bar{Q}_n^T$。证明至此完成。□

References

[1] A. Belavin 和 V. Drinfeld, *Solutions of the classical Yang-Baxter equation for simple Lie algebras* **16** 1982 1 29 。《功能分析与应用》( )，–。[2] A. Berenstein 、 S. Fomin 和 A. Zelevinsky, *Cluster algebras. III. Upper bounds and double Bruhat cells* **126** 2005 1 52 。《杜克数学杂志》( )，–。[3] P. Cao 和 F. Li, *On some combinatorial properties of generalized cluster algebras*，《纯粹与应用代数杂志》225 (2021)，106650。[4] R. Casals、E. Gorsky、M. Gorsky、I. Le、L. Shen 和 J. Simental, *Cluster structures on braid varieties* **38** 2025 369 479 ，《美国数学会杂志》( )，–。[5] V. Chari 和 A. Pressley, *A guide to quantum groups*，剑桥大学出版社，1994。[6] L. Faybusovich 和 M. Gekhtman, *Hamiltonian structure for integrable lattices* **272** 2000 236 244 。《物理快报A辑》，( )，–。[7] C. Fraser, *Quasi-homomorphisms of cluster algebras*，《应用数学进展》81 (2016)，40–77。[8] P.A. Fuhrmann, *A Polynomial Approach to Linear Algebra*，Universitext，施普林格，纽约，1996。[9] M. Gekhtman、M. Shapiro 和 A. Vainshtein, *Cluster algebras and Poisson geometry*。《莫斯科数学杂志》3 (2003)，899–934。[10] M. Gekhtman、M. Shapiro 和 A. Vainshtein, *Cluster algebras and Poisson geometry*。数学调查与专著，167。美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，2010。[11] M. Gekhtman、M. Shapiro 和 A. Vainshtein, *Generalized Bäcklund–Darboux transformations for Coxeter–Toda flows from cluster algebra perspective* **206** (2011)，第2期，245–310。[12] M. Gekhtman、M. Shapiro 和 A. Vainshtein, *Cluster structures on simple complex Lie groups and Belavin–Drinfeld classification* **12** 2012 899 934 ，《莫斯科数学杂志》( )，–。[13] M. Gekhtman、M. Shapiro 和 A. Vainshtein, *Cremmer–Gervais cluster structure on SL_n* **111** 2014 9688 9695 。《美国国家科学院院刊》( )，–。[14] M. Gekhtman、M. Shapiro 和 A. Vainshtein, *Exotic cluster structures on SL_n: the Cremmer–Gervais case* **246** 2017 1165, 94 。《美国数学会回忆录》( )，第 pp. 期。[15] M. Gekhtman、M. Shapiro 和 A. Vainshtein, *Drinfeld double of GL_n and generalized cluster structures* **116** 2018 429 484 ，《伦敦数学学会会刊》( )，–。[16] M. Gekhtman、M. Shapiro 和 A. Vainshtein, *Generalized cluster structures related to the Drinfeld double of GL_n* **105** 2022 1601 1633 ，《伦敦数学学会杂志》( )，–。[17] M. Gekhtman、M. Shapiro 和 A. Vainshtein, *Periodic staircase matrices and generalized cluster structures* 2022 4181 4221 ，《国际数学研究论文集》( )，–。[18] M. Gekhtman、M. Shapiro 和 A. Vainshtein, *A plethora of cluster structures on GL_n*，《美国数学会回忆录》297 (2024)，第1486期，104页。[19] M. Gekhtman、M. Shapiro 和 A. Vainshtein, *A unified approach to exotic cluster structures on simple Lie groups* 2308 16701, 40 ，arXiv: 。页。[20] M. Gekhtman、M. Shapiro 和 A. Vainshtein, *Regular pullback of generalized cluster structures* 26 15 ，arXiv: xx.xxxx，页。[21] M. Gekhtman 和 D. Voloshyn, *Generalized cluster structures related to Poisson duals of SL_n* 2312 04859, 90 ，arXiv: 。页。[22] A. Reyman 和 M. Semenov-Tian-Shansky, *Integrable systems. A group-theoretical approach* 2003, 5 93972 262 8 。莫斯科–伊热夫斯克，ISBN - - -。[23] J. Scott, *Grassmannians and cluster algebras*，《伦敦数学学会会刊》92 (2006)，345–380。

关于 GL_n GLn 上的广义簇结构：通过双有理泊松映射 75[24] B. van der Waerden, *Algebra. Vol. I*。施普林格出版社，纽约，1991。[25] D. Voloshyn, *Starfish lemma via birational quasi-isomorphisms*, 《纯粹与应用代数杂志》229(2025)，108–127。[26] M. Yakimov, *Symplectic leaves of complex reductive Poisson-Lie groups*, 《杜克数学杂志》112(2002)，453–509。Department of Mathematics, University of Notre Dame, Notre Dame, IN 46556*Email address*: mgekhtma@nd.eduDepartment of Mathematics, Michigan State University, East Lansing, MI 48823*Email address*: mshapiro@math.msu.eduDepartment of Mathematics & Department of Computer Science, University of Haifa, Haifa, Mount Carmel 31905, Israel*Email address*: alek@cs.haifa.ac.il