arXiv:2603.12490v1 [math.AT] 12 Mar 2026

Lubin-Tate 变形环的维特滤过

Charles Rezk

Abstract. 本文探讨经典 p-典型 Witt 向量$\mathbb{W}_p$的一种推广：从几何角度看，它源于形式群变形的同源；从拓扑角度看，它源于 Morava E-理论中的幂运算理论。对于高度为 1 的形式群，我们有 $\mathbb{W}_E = \mathbb{W}_p$；但当高度为 ≥ 2时， $\mathbb{W}_E$ 则更为丰富。我们证明， $\mathbb{W}_p$ 自然地分裂自 $\mathbb{W}_E$。

$\mathbb{W}_E$ 的一项关键性质是同构 $\pi_0 E \approx \mathbb{W}_E(\pi_0 E/\mathfrak{m})$，即 Burklund、Schlank 和 Yuan 证明的“Morava$E$-理论的余自由性”。这一同构在 $\pi_0 E$上确定了一个自然的“维特滤过”。我们描述这一维特滤过如何在 p-进滤过与 $\pi_0 E/(p)$上的几何滤过之间进行插值。借此，我们给出余自由性的一种新证明。

1. Introduction

在 [LT66] 中，Lubin和Tate刻画了有限高度 $h \geq 1$的一维交换形式群的变形空间：给定完美域 κ上的这样一个形式群 Γ，其**泛变形** 定义在一个环 $\mathcal{O}$ 上，该环同构于幂级数环 $\mathbb{W}_p\kappa[\![u_1, \dots, u_{h-1}]\!]$。Morava观察到 [Mor85]，任何这样的泛变形都关联着一个复可定向上同调理论，现称为**Morava E-理论** 或**Lubin-Tate理论**，并具有性质 $\pi_* E \approx \mathcal{O}[\mu^{\pm}]$ 与 $|\mu| = 2$。Goerss、Hopkins和Miller [GH04] 证明，任何Morava E-理论的表示谱都容许一个本质上唯一的交换环结构，并且它关于形式群是函子性的。特别地， E 容许 Γ/κ的自同构群的作用。

E 上的这一交换环结构赋予它（及其上同调理论）额外的结构，即幂运算，其结构已在 [Str97], [Str98],[AHS04], [Rez09]中得到深入探讨。特别地，如 [Rez09], 所示，若 $R \in$CAlg$_E$(Sp$^{K(n)}$), 则 $\pi_0 R \in$ Alg$_{\mathbb{T}}$，其中后者表示某个单子 $\mathbb{T}$ 在范畴 CAlg$_{\mathcal{O}}$ （即（通常的）交换 $\mathcal{O}$-代数范畴）上的代数范畴。如 [Rez09, 4.23], 所指出的，遗忘函子 Alg$_{\mathbb{T}} \to$CAlg$_{\mathcal{O}}$既是单子性的 又是余单子性的。

本注记的目标是探讨这一余单子的底函子，我们将其记为$\mathbb{W}_E$: CAlg$_{\mathcal{O}} \to$ CAlg$_{\mathcal{O}}$ ，并称之为 **Lubin-Tate-Witt 向量**，或更通俗地称为 E**-典型 Witt 向量**，以表明它对 Morava E-理论选取的依赖性。这一名称的选取是为了反映它与经典的 p-典型 Witt 向量之间的联系。它在 [BSY22], 中被引入，并在其中记为 $\mathbb{W}_{\mathbb{T}}$。

1.1. 例子 （高度 1 处的 Lubin-Tate-Witt 向量）。设 Γ 是 κ 上的一个高度 1 形式群律， E 是其对应的 Morava E-理论谱。那么 $\mathcal{O} = \mathbb{W}_p\kappa$，且存在一个函子同构 $\mathbb{W}_E \approx \mathbb{W}_p$，其中 $\mathbb{W}_p$ 表示经典的 p-典型维特向量（限制在 CAlg$^{\mathbb{W}_p\kappa}$ 上）。此外， $\mathbb{W}_E$ 上的余单子结构恢复了 δ**-环** （配备 p- 导子的 $\mathcal{O}$- 代数）理论 [Joy85]。

E-典型维特向量的一个显著特点是以下结果。

1.2. **定理** （Lubin-Tate 环的余自由性 [BSY22，定理 3.4]）. 该 $\mathcal{O}$-代数结构映射 $\mathcal{O} \to \mathbb{W}_E(\kappa)$ 是一个同构。

Date: 2026年3月16日。

这项结果由 Burklund、Schlank 和 Yuan 于 2022年作为其“色彩Nullstellensatz”证明的一部分证明。作者也曾给出这一结果的证明（于 2019年宣布，但未发表），该证明将刊载于本文的姊妹论文中 [Rez26]。Akhil Mathew 最近运用动画 p-导子理论宣布了另一种证明。本文还将给出另一种余自由性的证明（§8），它不同于我们的第一个证明，但与 [BSY22]的证明思路相似。

“余自由性”对 Lubin-Tate 环和 Morava E-理论有着有趣的影响。E-典型维特向量函子带有一个由理想构成的典范下降滤过 $\mathbb{W}_E \supseteq \mathbb{I}_1 \supseteq \mathbb{I}_2 \supseteq \cdots$，使得 $\mathbb{W}_E \approx \lim \mathbb{W}_E/\mathbb{I}_d$ 且 $\bigcap \mathbb{I}_d = 0$。余自由性意味着 Lubin-Tate 环 $\mathcal{O}$ 继承了这一滤过，我们（沿用 [BSY22]）将其称为 $\mathcal{O}$ 的 **维特滤过**。我们强调，维特滤过关于形式群是 函子性的：特别是，它与 Aut(Γ/κ) 在 $\mathcal{O}$上的作用相容。

对于高度为 $h=1$ 的形式群，这不过是完美域上 p-典型维特向量的 p-进滤过：$\mathbb{I}_d = p^d\mathbb{W}_p\kappa$。然而，当 $h>1$ 时，$\mathcal{O}$ 上的维特滤过则更加微妙。

事实上，我们将证明如下结论（由（12.2）、（7.1）和（8.5），并利用余自由性可得）。

定理。 *Lubin-Tate* 环的维特滤过 $\{\mathbb{I}_d\}$ 满足

- $\mathbb{I}_d \cap \mathbb{W}_p\kappa = p^d\mathbb{W}_p\kappa$,
- $p\mathbb{I}_d = \mathbb{I}_{d+1} \cap p\mathcal{O}$,
- $\mathcal{O}/(p, \mathbb{I}_{d+1})$ 将 Γ/κ 的变形的泛例传递到一个特征为 p 的环，该环同构于 $\Gamma_{(p^d)}/H$，其中有限子群概形 $H \leq \Gamma_{(p^d)}$ 的秩为 p^d。

也就是说，维特滤过是一个 Aut(Γ/κ)-等变滤过，它在 $\mathcal{O}$ 上的 p-进滤过与一个显然的滤过之间进行插值；后者利用了 $\mathcal{O}/p$ 是 κ-代数这一事实来定义，因此带有 Γ 的平凡变形。然而，下面的问题仍未解决。

问题。 $\mathcal{O}$ 的维特滤过是否存在一种纯粹的几何刻画?

由此得出的一个有趣结论是，我们可以利用这些想法，为 Lubin-Tate 环的余自由性给出一种新的证明。这种证明在很大程度上独立于 Burklund、Schlank 和 Yuan[1]，给出的证明，而且与作者此前给出的证明也大不相同。我们将在 §8 中给出这一新证明。

在 [BSSW25, §2.5]，中，作者证明 p-典型维特向量函子性地构成 Lubin-Tate 环的一个直和项，即给出了阿贝尔群的一个 Aut(Γ/κ)-等变同构 $\mathcal{O} \approx \mathbb{W}_p\kappa \oplus \mathcal{O}'$。本文将他们的分裂提升到 E-典型维特向量（见下文的 (12.1)）。

定理。 存在关于 E 具有函子性的自然变换 $\mathbb{W}_p \xrightarrow{\beta_p} \mathbb{W}_E \xrightarrow{\sigma_p} \mathbb{W}_p$，满足：*(i)*$\beta_p$ 是环的自然映射；*(ii)* σ_p 是 $\mathbb{W}_p$-模的自然映射；*(iii)* $\sigma_p\beta_p$：$\mathbb{W}_p \to \mathbb{W}_p$ 是一个自同构，由乘以特异元 $\mathrm{AH}_p^h \in \mathbb{W}_p(\mathbb{Z}_{(p)})^\times$ 给出。

在 κ 处求值可恢复 $\mathcal{O}$ 的分裂，该分裂见于 [BSSW25]。

1.3. 注记。 复合映射 $\sigma_p\beta_p$: $\mathbb{W}_p\kappa \to \mathbb{W}_p\kappa$ 正是 [BSSW25，注记 2.5.8] 中的映射 f。我们能够回答其注记中隐含的问题： f 是乘以 $[(1-p)\cdots(1-p^{h-1})]^{-1}$(12.3)。

1.4. **论文结构**。 在 §2–§5 中，我们介绍 Lubin-Tate-Witt 向量及其基本性质，包括其幽灵分量。在 §6 中，我们证明对于完美 κ-代数A，幽灵分量汇合而给出一个映射 $\mathbb{W}_E(A)/p \to \lim \mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} \kappa$，并在 §8 中证明该映射是一个同构。在 §7 中，我们证明关于维特滤过之$\mathbb{W}_E$ 乘以 p 对完美 κ-代数之相互作用的主要结果，然后在 §8 中应用该结果，讨论特征 p 中维特滤过的像，并证明 Lubin-Tate 环的余自由性。

[1]尽管我们的证明会引用 [BSY22]，中的一些引理，但它完全避开了其证明中更为微妙的部分：即第 §3.3 节中的跨色归纳，以及在 §3.5 节中利用非加性 p-导子对该归纳的应用。除此之外，论证的思路是相近的：例如，我们的 (7.1)(2) 本质上就是 [BSY22, 3.45(1)]。

在 §9 中，我们回顾关于经典 Witt 向量的标准事实。我们在 §10–§12 中应用这些事实，以构造 $\mathbb{W}_p$ 从 $\mathbb{W}_E$ 的分裂：首先构造自然映射 $\mathbb{W}_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\beta} \mathbb{W}_E \xrightarrow{\sigma} \mathbb{W}_{\mathbb{Z}}$，然后证明它们在直和项 $\mathbb{W}_p$ 的 $\mathbb{W}_{\mathbb{Z}}$ 上限制为所需的分裂。

1.5. **约定**。本文主要涉及 1-范畴。因此，诸如“CAlg$_{\mathcal{O}}$”这样的记号指的是普通环 $\mathcal{O}$ 上的交换代数的 1-范畴，除非上下文另有说明。

给定一个固定的素数 p，对于 $m,\ h \geq 1$ 我们记作

$$N_m^h := \left|\left\{\text{subgroups of order } m \text{ in } (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^h\right\}\right|,$$

这些数在文中反复出现。

1.6. **致谢**。作者谨向 William Balderrama 和 Nat Stapleton 致谢，感谢他们就本文相关工作进行讨论。

2. Lubin-Tate-Witt vectors

固定一个定义在完美域 κ 上、高度为 $0 < h < \infty$ 的形式群 Γ。令 E 表示相应的 Morava E 理论谱，并记相应的 Lubin-Tate 环为 $\mathcal{O} = \pi_0 E$。

对于任意交换 $\mathcal{O}$ 代数 A，我们将在下文定义一个 $\mathcal{O}$ 代数 $\mathbb{W}_E(A)$，并将其称为 A 的 **Lubin-Tate-Witt 向量**（对应于与 E 相关联的形式群），或者更非正式地称为 A 的 **E-典型维特向量**环。

给定一个交换 $\mathcal{O}$ 代数 A，令 $\mathbb{W}_E(A)$ 表示满足以下条件的序列 $a = (a_m)$ 的集合，其中各项属于 $\prod_{m\geq 0} E^0 B\Sigma_m \otimes_{\mathcal{O}} A$：

- $a_0 = 1$，并且
- $a_{i+j}|_{\Sigma_i\times\Sigma_j} = a_i \boxtimes a_j$ 对所有 $i,\ j \geq 0$ 都成立。

这里，我们用 $a_{i+j}|_{\Sigma_i\times\Sigma_j}$ 表示 $a_{i+j} \in E^0 B\Sigma_{i+j} \otimes_{\mathcal{O}} A$ 在沿包含 $\Sigma_i \times \Sigma_j \subseteq \Sigma_{i+j}$ 限制所诱导的映射下的像，而 $a_i \boxtimes a_j \in E^0(B\Sigma_i \times B\Sigma_j) \otimes_{\mathcal{O}} A$ 则由 K¨unneth 映射 $(E^0 B\Sigma_i \otimes_{\mathcal{O}} A) \otimes_A (E^0 B\Sigma_j \otimes_{\mathcal{O}} A) \to E^0 B\Sigma_i \times B\Sigma_j \otimes_{\mathcal{O}} A$ 定义，该映射是一个同构。

我们在集合 $\mathbb{W}_E(A)$ 上定义两种运算，使得对于 $a,\ b \in \mathbb{W}_E(A)$：

- $(a+b)_m := \sum_{i+j=m} \mathrm{Tr}^{\Sigma_m}_{\Sigma_i\times\Sigma_j}(a_i \boxtimes b_j)$,
- $(ab)_m := a_m b_m$.

这里，我们用 Tr^G_H 表示与子群 $H \leq G$ 相关联的转移映射。我们还对所有 m，通过 $1_m := 1$ 定义 $1 \in \mathbb{W}_E(A)$；并对 $m > 0$，通过 $0_1 := 1$ 和 $0_m := 0$ 定义 $0 \in \mathbb{W}_E(A)$。

2.1.**命题**。上述结构使 $\mathbb{W}_E(A)$ 成为一个交换环 .

证明。首先，我们证明 $\mathbb{W}_E(A)$ 对这些运算封闭。对乘法封闭这一点源于 K¨unneth 映射是环同态。为证明对加法封闭，令 $S \approx \coprod_m B\Sigma_m$ 表示有限集的群形，其在不交并 $\amalg$ 下构成对称幺半结构。于是，对加法封闭可由转移的推拉公式应用于下列交换方块得到

$$\begin{array}{ccc} S\times S\times S\times S & \xrightarrow{\substack{(A,B,C,D)\\ \mapsto (A\amalg B, C\amalg D)}} & S\times S \\ {\scriptstyle \substack{(A,B,C,D)\\ \mapsto (A\amalg C, B\amalg D)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \amalg} \\ S\times S & \xrightarrow[\amalg]{} & S \end{array}$$

可看出这是 ∞-群胚的拉回。

乘法的单位性、结合性和交换性显而易见，而加法的这些性质则可利用转移的性质直接得到。分配律由推拉公式应用于拉回方形即可得出

$$\begin{array}{ccc} S \times S & \xrightarrow{(A,B)\mapsto A \amalg B} & S \\ {\scriptstyle (A,B)\mapsto (A,B,A\amalg B)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle A\mapsto (A,A)} \\ S \times S \times S & \xrightarrow[(A,B,C)\mapsto (A\amalg B, C)]{} & S \times S \end{array}$$

□

构造 $\mathbb{W}_E$ 定义了一个从 $\mathcal{O}$-代数到交换环的函子。事实上，它的取值属于 $\mathcal{O}$-代数。

给定 $c \in \mathcal{O} = E^0(\mathrm{pt})$，令 $P_m(c) \in E^0 B\Sigma_m$ 表示作用于 c上的幂运算的值。也就是说，给定 c，将其表示为谱的映射 $f\colon \mathbb{S} \to E$，我们令 $P_m(c)$ 为由复合映射表示的映射的同伦类

$$\Sigma^\infty_+ B\Sigma_m \approx \mathbb{S}^{\otimes m}_{h\Sigma_m} \xrightarrow{f^{\otimes m}_{h\Sigma_m}} E^{\otimes m}_{h\Sigma_m} \xrightarrow{\mu_m} E,$$

其中 μ_m 来自 E上的 $\mathbb{E}_\infty$-环结构。

2.2. **引理。** 运算 $P(c) := (P_m(c))$ 定义了一个环同态 $P\colon \mathcal{O} \to \mathbb{W}_E(\mathcal{O})$.

证明。 这直接源于幂运算的标准性质。特别地，P 取值于 $\mathbb{W}_E(\mathcal{O})$意味着

$$P_{i+j}(c)|_{\Sigma_i \times \Sigma_j} = c_i \boxtimes c_j, \qquad P_0(c) = 1,$$

而 P 是环同态则意味着

$$P_m(c+d) = \sum_{i+j=m} \mathrm{Tr}^{\Sigma_m}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}(c_i \boxtimes d_j), \qquad P_m(cd) = P_m(c)P_m(d), \qquad P_m(1) = 1.$$

□

因此，每个 $\mathbb{W}_E(A)$都可通过复合映射 $\mathcal{O} \to \mathbb{W}_E(\mathcal{O}) \to \mathbb{W}_E(A)$自然地成为一个 $\mathcal{O}$-代数，从而我们在交换 $\mathcal{O}$-代数的（普通）范畴上构造出了一个自函子 $\mathbb{W}_E\colon \mathsf{CAlg}_\mathcal{O} \to \mathsf{CAlg}_\mathcal{O}$。

2.3. 注记。 上述论证可以推广，从而表明，对于任意 $K(n)$-局部交换 E-代数R，幂运算给出一个 $\mathcal{O}$-代数映射 $P\colon \pi_0 R \to \mathbb{W}_E(\pi_0 R)$。

2.4. **乘法截面。** 我们注意到，求值映射 $a \mapsto a_1$ 定义了一个自然的 $\mathcal{O}$-代数同态 $\pi\colon \mathbb{W}_E(A) \to A$，并且 π具有一个自然的乘法截面 $[\,]\colon A \to \mathbb{W}_E(A)$，其定义为 $[a] := (a^m)$。

3. Representability of $\mathbb{W}_E$

接下来我们回顾一下，函子 $\mathbb{W}_E$ 是余表示的。记

$$T := \bigoplus_{m \geq 0} E_0^\vee B\Sigma_m,$$

其中 $E_0^\vee X := \pi_0\left[E \otimes \Sigma^\infty_+ X\right]_{K(n)}$。这是一个交换的 $\mathcal{O}$-代数：乘法由沿包含映射 $\Sigma_i \times \Sigma_j \leq \Sigma_{i+j}$ 的转移诱导。

3.1. **命题.** 函子 $\mathbb{W}_E\colon \mathrm{CAlg}_\mathcal{O} \to$ 集合 由 T 余表示。

证明. $E_0^\vee B\Sigma_m$ 是有限生成的自由 $\mathcal{O}$-模 [Str98，定理3.7], ，因此存在一个显然的双射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}}}(T, A) \approx \prod_m E^0 B\Sigma_m \otimes_{\mathcal{O}} A.$$

容易验证，作为其子集的 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{CAlg}_{\mathcal{O}}}(T, A)$ 与 $\mathbb{W}_E(A)$ 一致。 □

作为结 果，元素 $a = (a_m) \in \mathbb{W}_E(A)$ 由其分量 a_p 决定 $_d$.

3.2.**引理**。 环 T 是一个分次多项式环。特别地，它有一个齐次多项式基，含有次数为 m的 N_m^h个生成元。（ N_m^h如*§1.5*中所述。）

证明。 [Str98,§5]。 □

3.3. **推论**。 若 $a, b \in \mathbb{W}_E(A)$ 满足对所有 $d \le e$都有 $a_{p^d} = b_{p^d}$ ，则对所有$m < p^{e+1}$都有 $a_m = b_m$ 。

证明。 由 (3.2) 立即可得。 □

3.4. 注记。 另一种理解 E-典型 Witt 向量的方式是，存在环同构

$$\mathbb{W}_E(\pi_0 R) \approx \mathrm{Hom}_{\mathrm{CAlg}(h\mathrm{Sp})}(\mathbb{S}\{x\}, R),$$

在 $R \in$CAlg(Mod$_E$(Sp$^{K(n)}$)) 中自然成立，其中 $\mathbb{S}\{x\}$ 表示由一个生成元生成的自由交换环谱（并且它具有余交换余代数结构）。

4. Witt filtration

我们对广义 Witt 环的描述自然导出了一个理想滤过（如 [BSY22] 中所述），称为**维特滤过**。具体而言，对于 $d \ge 0$ ，定义

$$\mathbb{I}_d = \mathbb{I}_d(A) := \{\, a \in \mathbb{W}_E(A) \mid a_m = 0 \text{ if } p^d \nmid m \,\}.$$

也就是说，当 $a \in \mathbb{I}_d(A)$“支撑”在 $p^d\mathbb{Z}_{\ge 0}$ 上时。在 (3.3) 的基础上，我们也可以说， $a \in \mathbb{I}_d(A)$ 当且仅当对 $0 < m < p^d$ 有 $a_m = 0$ 。

4.1. **命题**。 子集 $\mathbb{I}_d(A) \subseteq \mathbb{W}_E(A)$ 是一个理想。我们有 $\mathbb{I}_0(A) = \mathbb{W}_E(A)$ 、 $\mathbb{I}_1(A) =$ 核$[\mathbb{W}_E(A) \xrightarrow{a \mapsto a_1} A]$，以及 $\mathbb{I}_d(A) \supseteq \mathbb{I}_{d+1}(A)$ 。显然的映射

$$\mathbb{W}_E(A) \xrightarrow{\sim} \lim_d \mathbb{W}_E(A)/\mathbb{I}_d(A)$$

是一个 $\mathcal{O}$-代数同构，并且 $\bigcap_d \mathbb{I}_d(A) = 0$。

证明。 利用（3.2）即可直接得到。 □

4.2. 注记。 维特滤过不具有乘法性： $\mathbb{I}_d(A)\,\mathbb{I}_e(A)$ 通常不包含于$\mathbb{I}_{d+e}(A)$ 中（除非高度 $h = 1$）。

4.3. **维特滤过的伴随分次对象**。

4.4. **命题** （[BSY22, 命题 3。27]）。 存在一个阿贝尔群同构

$$\upsilon_d \colon \mathbb{I}_d(A)/\mathbb{I}_{d+1}(A) \xrightarrow{\sim} A^{\oplus N_{p^d}^h},$$

对交换的 $\mathcal{O}$-代数而言是自然的。

证明。 根据 (3.2)，通过在表示对象 T 中次数为 p^d 的一组多项式生成元上取值，我们可以构造一个自然双射。定义域上的群结构由一个保持次数的余乘法 $T \to T \otimes_{\mathcal{O}} T$ 诱导。□

4.5. **命题** ([BSY22，第 3 条命题。29]). 对于完美的 κ-代数 A，存在一个自然的 A-模同构

$$\mathbb{I}_d(A)/\mathbb{I}_{d+1}(A) \xrightarrow{\sim} A^{\oplus N_{p^d}^h}.$$

证明。 回忆乘法截面 $c \mapsto [c]\colon A \to \mathbb{W}_E(A)$（§2.4）。在映射 (4.4) 下，我们有

$$\upsilon_d([c]a) = c^{p^d} a.$$

因此，当 A 是完美的时，通过在每个分量中复合 p^{-d} 次幂映射，我们得到模 $\varphi^{-d} \circ \nu_d$ 的一个同构。
□

4.6. **命题** ([BSY22, 命题 3。30]). 对于完美的 κ-代数 A，显然的环同态

$$\mathbb{W}_p(A) \otimes_{\mathbb{W}_p(\kappa)} \mathbb{W}_E(\kappa) \to \mathbb{W}_E(A)$$

诱导出同构 $\mathbb{W}_p(A) \otimes_{\mathbb{W}_p(\kappa)} \mathbb{W}_E(\kappa)/\mathbb{I}_d(\kappa) \xrightarrow{\sim} \mathbb{W}_E(A)/\mathbb{I}_d(A)$。

证明。 该环同态由完美环的 p-典型 Witt 向量的泛性质（§9.5）诱导。同构可通过归纳应用 (4.5) 得出。
□

5. Ghost components

对于任意 $m \geq 0$， $E^0 B\Sigma_m$ 中的 **转移理想** J_m^{Tr} 定义为以下各项像之和：

$$(\mathrm{Tr}_{\Sigma_i \times \Sigma_{m-i}}^{\Sigma_m})\colon \bigoplus_{0<i<m} E^0 B\Sigma_i \times B\Sigma_{m-i} \to E^0 B\Sigma_m$$

来自形如 $\Sigma_i \times \Sigma_{m-i} \leq \Sigma_m$ 的真 子群的转移的像。它实际上是一个理想，因为 Tr_H^G: $E^0 BH \to E^0 BG$ 是一个 $E^0 BG$-模映射（其中 $E^0 BH$ 通过限制映射成为 $E^0 BG$-模）。

5.1.**引理**。 若 $m \neq p^d$，则 $E^0 B\Sigma_m$ 中的 J_m^{Tr} 是单位理想。我们有 $J_{\mathrm{Tr}_1} = 0$，而对于 $d \geq 1$，$J_{\mathrm{Tr}\, p^d}$ 是转移映射 $\mathrm{Tr}^{\Sigma_{p^d}}{}_{(\Sigma_{p^{d-1}})^{\times p}}$ 的像。

证明。 如果 $m \neq p^d$，那么存在 $0 < i < m$，使得 $\Sigma_i \times \Sigma_{m-i}$ 包含 p-西罗子群 Σ_m。如果 $m = p^d$，那么 $\Sigma_i \times \Sigma_{m-i}$ 中对应于 $0 < i < m$ 的 p-西罗子群与 $(\Sigma_{p^{d-1}})^p$ 的子群共轭。□

Let

$$\mathcal{O}_d := E^0 B\Sigma_{p^d}/J_{p^d}^{\mathrm{Tr}}$$

将相应的商 $\mathcal{O}$-代数称为第 d**个斯特里克兰环**，并在 [Str97],[Str98] 中进行研究。我们回顾如下内容。

5.2.**命题** ([Str98，定理 1。1])。 环 $\mathcal{O}_d$ 是一个完备局部环。作为一个 $\mathcal{O}$-模，$\mathcal{O}_d$ 是有限生成自由模，其秩为 $N_{p^d}^h$。

对于每个 $d \geq 0$，显然的复合映射

$$\mathbb{W}_E(A) \to E^0 B\Sigma_{p^d} \otimes_{\mathcal{O}} A \to (E^0 B\Sigma_{p^d}/J_{p^d}^{\mathrm{Tr}}) \otimes_{\mathcal{O}} A \approx \mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} A$$

is 记作 gh_d，称为第 d**个幽灵分量**。它是一个环同态

$$\mathrm{gh}_d\colon \mathbb{W}_E(A) \to \mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} A.$$

5.3. 警告。 幽灵分量不是 $\mathcal{O}$-代数映射（除非 $d = 0$）。

5.4.**命题**。理想 $\mathbb{I}_{d+1}(A)$ 包含于 gh_d 的核中，因此 gh_d 可分解为一个环同态

$$\overline{\mathrm{gh}}_d\colon \mathbb{W}_E(A)/\mathbb{I}_{d+1}(A) \to \mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} A.$$

证明。 这直接源于幽灵分量 $\mathrm{gh}_d(a)$ 仅取决于 a_{p^d} 这一事实。 □

6. The ghost component tower for perfect κ-algebras

本节旨在证明，若 A 是一个完美的 κ-代数，那么幽灵分量 $\mathrm{gh}_d\colon \mathbb{W}_E(A) \to \mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} A$ 可以组装成一个环同态

$$\mathrm{gh}_\infty\colon \mathbb{W}_E(A)/p \to \varprojlim \mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} A.$$

gh_∞ 的目标是由环同态 $\rho_d\colon \mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} \kappa \to \mathcal{O}_{d-1} \otimes_{\mathcal{O}} \kappa$ 诱导的逆极限。这些 $\bar{\rho}_d$ 不是 κ-代数映射，而是满足 $\bar{\rho}_d(ca) = c^{1/p}\rho_d(a)$，其中 $c \in \kappa$。

6.1. 沿弗罗贝尼乌斯的基变换。 对于交换环 R，我们将 $\varphi\colon R \to R/p$ 记作由 $\varphi(x) = x^p \pmod p$ 定义的环同态。注意，当且仅当 φ 是同构时，R 才是完美的 $\mathbb{F}_p$- 代数。

我们有两个函子 $\mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$:

$$M^{(p)} := M \otimes_R {}^{\varphi}R/p,$$
$$M^{[p]} := \mathrm{Cok}\big[M^{\otimes p} \xrightarrow{N} (M^{\otimes p})^{\Sigma_p}\big].$$

这里，$M^{(p)}$ 被视为通过右侧因子作用的 R-模（因此实际上定义了一个函子 $\mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}^{R/p}$），而 $M^{[p]}$ 是 $(M^{\otimes p})^{\Sigma_p}$ 的商模。映射 $N = \sum_{\sigma\in\Sigma_p} \sigma$，其中对称群置换 $M^{\otimes p}$ 的因子。

给定 $x \in M$，记 $x^{(p)} := x \otimes 1 \in M_{(p)}$。映射 $(-)^{(p)}\colon M \to M^{(p)}$ 是一个阿贝尔群同态，满足 $(cx)^{(p)} = c^p x^{(p)}$（对 $c \in R$）。注意，若 R 是一个完美 $\mathbb{F}_p$-代数，则 $(-)^{(p)}$ 总是一个同构。

类似地，记 $x^{[p]} := [x^{\otimes p}] \in M^{[p]}$。函数 $(-)^{[p]}\colon M \to M^{[p]}$ 也满足 $(cx)^{[p]} = c^p x^{[p]}$，但一般而言不是同态。

6.2. 引理。 设 R 是一个 $\mathbb{Z}_{(p)}$-代数。那么映射 $(-)^{[p]}\colon M \to M^{[p]}$ 是阿贝尔群同态，并且对所有 $x \in M$，都有 $px^{[p]} = 0$。此外，它可扩张为 R-模的同态。

$$\gamma\colon M^{(p)} \to M^{[p]}$$

满足 $\gamma(x^{(p)}) = x^{[p]}$。

证明。对于 x，$y \in M$，我们有

$$N(x^{\otimes i} \otimes y^{\otimes p-i}) = i!\,(p-i)!\,\left[\text{symmetrization of } x^{\otimes i} \otimes y^{\otimes p-i}\right],$$

因此，对于 p-局部 R,

$$(x+y)^{\otimes p} \equiv x^{\otimes p} + y^{\otimes p} \mod \mathrm{Im}\, N,$$

所以 $(-)^{[p]}$是一个同态。同样，$N(x^{\otimes p}) = p!\, x^{\otimes p}$蕴含 $px^{\otimes p} \equiv 0$模 $\mathrm{Im}\ N$。于是映射 γ 定义为 $\gamma(x \otimes a) := a^p x^{[p]}$。□

6.3. 命题。 若 R是一个 $\mathbb{Z}_{(p)}$-代数且 M是一个平坦的 R-模，则 $\gamma\colon M_{(p)} \to M^{[p]}$是 R-模之间的一个同构。

证明。函子 $M \mapsto M^{(p)}$，$M^{[p]}$保滤过余极限，因此我们化归到有限生成自由模的情形。给定 M 的一组基 $e_1, \ldots, e_n$，一个直接的论证（利用 R是 p-局部的这一事实）表明，$e_1^{[p]}, \ldots, e_n^{[p]}$是 $M^{[p]}$作为自由 R/p-模的一组基。结论得证。□

下文中，我们只处理 p-局部环上的平坦模，因此会直接使用同构 $M^{(p)} \approx M^{[p]}$。

值得在此指出，$(-)^{(p)} = (-)^{(p)_R}\colon \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$ 是松弛对称幺半的，因此会将交换 R-代数映射为交换 R-代数。此外，其构造与基变换相容：对于环同态 $R \to S$，有 $(M \otimes_R S)^{(p)_S} \approx M^{(p)_R} \otimes_R S$。

6.4. 映射 ρ_d。 现在我们定义 $\mathcal{O}$-代数同态 $\rho_d\colon \mathcal{O}_d \to \mathcal{O}_{d-1}^{(p)}$。事实上，我们将构造 A-代数同态

$$\rho_d\colon \mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} A \to (\mathcal{O}_{d-1} \otimes_{\mathcal{O}} A)^{(p)} = \mathcal{O}_{d-1}^{(p)} \otimes_{\mathcal{O}} A$$

它们在 $\mathcal{O}$-代数 A 中是自然的，因此将其特化到 $A = \mathcal{O}$ 即可得到所需的映射。

构造 ρ_d。 考虑限制映射和转移映射

$$\mathrm{Res}\colon E^0 B\Sigma_{p^d} \otimes_{\mathcal{O}} A \rightleftarrows E^0 B\Sigma_{p^{d-1}}^p \otimes_{\mathcal{O}} A : \mathrm{Tr}\,.$$

由于这些 $E^0 B\Sigma_m$ 均为有限生成的自由 $\mathcal{O}$-模，因此它们是平坦的，并且满足 K¨unneth 同构。因此，Res 诱导出一个 A-代数映射

$$E^0 B\Sigma_{p^d} \otimes_{\mathcal{O}} A \to \left[E^0 B\Sigma_{p^{d-1}} \otimes_{\mathcal{O}} A\right]^{[p]},$$

因为 $\mathrm{Res}(a) \in (E^0(B\Sigma_{p^{d-1}} \otimes_{\mathcal{O}} A)^{\otimes p})^{\Sigma_p} \subseteq E^0(B\Sigma_{p^{d-1}} \otimes_{\mathcal{O}} A)^{\otimes p} \approx E^0 B\Sigma_{p^{d-1}}^p \otimes_{\mathcal{O}} A$。我声称该映射可下降到按转移理想取商后的对象，从而得到

$$E^0 B\Sigma_{p^d}/J_{p^d}^{\mathrm{Tr}} \otimes_{\mathcal{O}} A \to [E^0 B\Sigma_{p^{d-1}}/J_{p^{d-1}}^{\mathrm{Tr}} \otimes_{\mathcal{O}} A]^{[p]},$$

这就是所需的映射 ρ_d。

我们通过利用 Borel 等变上同调关于有限覆盖映射张成的函子性（即“双陪集公式”）来证明这一点。记 $X = \Sigma_{p^d}/\Sigma_{p^{d-1}}^p$，我们将其等同于函数集合 $f\colon\ p^d \to p$ 其所有纤维的大小均为 p^{d-1}。它分解为Σ_{p^d}-轨道如下

$$X \times X \approx \coprod_{\sigma\in\Sigma_p} X_\sigma \amalg \coprod_{\alpha} Y_\alpha.$$

此处 $X_\sigma = \{(f, \sigma f) \mid f \in X\} \subseteq X \times X$是一个同构于 X 的轨道，而其余每个轨道Y_α 的各向同性群共轭于形如 $H_\alpha = \Sigma_{p^{d-1}}^{i-1} \times (\Sigma_i \times \Sigma_{p^{d-1}-i}) \times \Sigma_{p^{d-1}}^{p-i}$ 的子群，其中 $0 < i \le p$。由此我们读出

$$\mathrm{Res}\,\mathrm{Tr}(x) = \sum_{\sigma\in\Sigma_p} \sigma(x) + \sum_{\alpha} y_\alpha \in E^0 B\Sigma_{p^{d-1}}^p \otimes_{\mathcal{O}} A,$$

其中 y_α 位于来自 H_α 的转移的像中，因而在 $(E^0 B\Sigma_{p^{d-1}}/J_{p^{d-1}}^{\mathrm{Tr}} \otimes_{\mathcal{O}} A)^{\otimes p}$ 中投影为 0。

6.5.**命题**。该图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{W}_E(A) & \xrightarrow{\mathrm{gh}_d} & \mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} A \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{gh}_{d-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_d} \\ \mathcal{O}_{d-1} \otimes_{\mathcal{O}} A & \xrightarrow[x\mapsto x^{(p)}]{} & (\mathcal{O}_{d-1} \otimes_{\mathcal{O}} A)^{(p)} \end{array}$$

交换。

证明。 由 ρ_d 的构造立即可得，因为对 $a \in \mathbb{W}_E(A)$，我们有 $\mathrm{Res}(a_{p^d}) = (a_{p^{d-1}})^{\otimes p}$。□

6.6. 映射 ρ_d。 当$\bar{A}$ 是完美 κ–代数时，底部的映射是同构。在此情形下，记 ρ_d 为如下映射的复合

$$\mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} A \xrightarrow{\rho_d} (\mathcal{O}_{d-1} \otimes_{\mathcal{O}} A)^{(p)} \xleftarrow{\approx} \mathcal{O}_{d-1} \otimes_{\mathcal{O}} A.$$

这同构于形如 $\rho_d \otimes \mathrm{id}_A$ 的映射，其中 $\rho_d\colon \mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} \kappa \to \mathcal{O}_{d-1} \otimes_{\mathcal{O}} \kappa$ 是到 $A = \kappa$ 的特化。注意， ρ_d 不是一个 κ-代数映射，而是满足 $\rho_d(cx) = c^{1/p}\rho_d(x)$，其中 $c \in \kappa$。

6.7.**推论**。 对于完美的 κ-代数 A，图表

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{W}_E(A) & \xrightarrow{\mathrm{gh}_d} & \mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} A & \xleftarrow{\approx} & (\mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} \kappa) \otimes_\kappa A \\ & \searrow^{\mathrm{gh}_{d-1}} & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\rho}_d \otimes \mathrm{id}} \\ & & \mathcal{O}_{d-1} \otimes_{\mathcal{O}} A & \xleftarrow{\approx} & (\mathcal{O}_{d-1} \otimes_{\mathcal{O}} \kappa) \otimes_\kappa A \end{array}$$

可交换。

我们将映射到极限的映射记为 $\mathrm{gh}_\infty\colon \mathbb{W}_E(A) \to \lim \mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} A$。由于目标的特征为$p$，该映射可分解为映射 $\mathbb{W}_E(A)/p \to \lim \mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} A$，我们也将其记为 gh_∞。

7. Multiplication by p in the Witt filtration

我们证明关于 $\mathbb{W}_E(A)$的维特滤过的主要结果。

7.1.**定理**。 设 A 是一个完美的 κ-代数。那么 $\mathbb{W}_E(A)$ 是 p-无挠的。此外，对于每个$d \geq 0$，我们有 $p\mathbb{I}_d(A) = \mathbb{I}_{d+1}(A) \cap p\mathbb{W}_E(A)$。

7.2. **推论.** 在相同假设下，对所有 $e \geq 0$，都有 $p^e\mathbb{I}_d(A) = \mathbb{I}_{d+e}(A) \cap p^e\mathbb{W}_E(A)$。

回顾一下表示函子 $\mathbb{W}_E$ 的 $\mathcal{O}$-代数 T。如前所述（§3），$T \approx \bigoplus T_m$，其中 $T_m = E_0^\wedge B\Sigma_m$。因此，在 $\mathbb{W}_E$ 中乘以 $[p]$，由一个保持分次的 $\mathcal{O}$-代数映射 $[p]\colon T \to T$ 表示。

我们目前只关心 $\mathbb{W}_E$ 对 $\kappa = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$-代数的限制。因此，我们记作$T_m = T_m \otimes_{\mathcal{O}} \kappa$ 和 $T = \bigoplus T_m$，并用 $[p]\colon T \to T$ 表示诱导映射。

7.3. **命题.** $[p]\colon T \to T$ 的像恰好是 p 次幂构成的子环 $T^p \subset T$。

我们将在下文证明此命题。首先，我们用它来证明定理 .

（*7.1*）的证明。给定一个元素 $a \in \mathbb{W}_E(A)$，我们也将其表示映射记为 $a\colon T \to A$。注意，a 表示 $0 \in \mathbb{W}_E(A)$，当且仅当对所有 $m > 0$，$a(T_m) = 0$。

首先证明 $\mathbb{W}_E(A)$ 是 p-挠自由的。若 $pa = 0$，即对 $m > 0$ 有 $(a \circ [p])(T_m) = 0$，则由 (7.3) 可得 $a((T_m)^p) = 0$。但是，由于 A 是完美的，且 $a(x)^p = a(x^p)$，因此对正分次中的所有 $x \in T$，都有 $a(x) = 0$。

接下来证明 $p\mathbb{I}_d(A) = \mathbb{I}_{d+1}(A) \cap p\mathbb{W}_E(A)$。回顾一下，当且仅当对满足 $p^d \nmid m$ 的情形，$a \in \mathbb{I}_d(A)$ 等价于 $a(T_m) = 0$。

由 (7.3) 可知，对所有 $m \geq 0$，都有 $[p](T_m) = (T_{m/p})^p$；当 m/p 不是整数时，我们将其记为 $T_{m/p} = 0$。因此，对任意 m，$(pa)(T_m) = 0$ 当且仅当 $a((T_{m/p})^p) = 0$；而这又（因为 A 是完美的）当且仅当 $a(T_{m/p}) = 0$。结论立即成立。□

7.4. 注记。 当高度为 $h = 1$ 时（例如，完美 $\mathbb{F}_p$-代数的经典 p-典型 Witt 向量），我们有 $\mathbb{I}_1(A) \subseteq p\mathbb{W}_E(A)$，因此对所有 d，都有 $p\mathbb{I}_d(A) = \mathbb{I}_{d+1}(A)$，从而 $\mathbb{I}_d(A) = p^d\mathbb{W}_E(A)$。

为证明该命题，我们考察 T 作为分次交换 Hopf 代数的结构。其乘法映射和余乘法映射分别由显然的映射 $B\Sigma_i \times B\Sigma_j \to B\Sigma_{i+j}$及其转移 $\Sigma_+^\infty B\Sigma_{i+j} \to \Sigma_+^\infty B\Sigma_i \otimes \Sigma_+^\infty B\Sigma_j$ 诱导。由于每个 $T_m = E_0^\wedge B\Sigma_m$ 都是有限生成自由 $\mathcal{O}$-模，我们得到一个对偶 Hopf 代数 $T^\vee = \bigoplus T_m^\vee = \bigoplus_m \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(T_m, \mathcal{O})$。

7.5. **命题**。 存在一个关于 $\mathcal{O}$ 的分次 *Hopf* 代数同构 $T \approx T^\vee$。

证明。 这是双伴性的直接推论，特别是 $\mathrm{Sp}^{K(n)}$ 的 1-半加性的直接推论。特别地，对于有限群 G，存在自然的 $K(n)$-局部等价 $\Sigma_+^\infty BG \approx \mathcal{F}(\Sigma_+^\infty BG, \mathbb{S}_{K(n)})$，它们互换限制映射与转移映射。我们所需的一切均可在 [Str00]中找到。□

证明 (7.3)。 由 (7.5) 可知， $T \approx T^\vee$ 是完美域 κ 上分次 Hopf 代数的一个同构（使用 κ-线性对偶）。我们还知道 T，从而 T，是具有齐次生成元的多项式环 (3.2)。

由于 T 与 $T^\vee$ 都是特征为 p 的完美域上的阿贝尔 Hopf 代数，我们可以把它们的“p 次幂自同态” $[p]$ 分解为 κ-代数同态的复合

$$\overline{T} \xrightarrow{V} \varphi^*\overline{T} \xrightarrow{F} \overline{T} \qquad \text{and} \qquad \overline{T}^\vee \xrightarrow{V} \varphi^*\overline{T}^\vee \xrightarrow{F} \overline{T}.$$

这里 φ^* 表示沿 p 次幂映射 $\varphi\colon \kappa \to \kappa$ 的基变换，而 F 是相对 p 次幂弗罗贝尼乌斯。此外，对偶互换 V 与 F。

由于 T 是多项式环， $F\colon \varphi^*T \twoheadrightarrow T$ 是单射，从而 $V = F^\vee\colon T^\vee \to \varphi^*T^\vee$ 是满射。于是同构 $T \approx T^\vee$ 蕴含 $V\colon T \to \varphi^*T$ 是满射，因此 $[p]\colon \overline{T} \to T$ 的像恰好是 F 的像，正如所需。□

8. Witt filtration of Lubin-Tate space and cofreeness

有两个值得关注的环同态 s_d、$t_d\colon \mathcal{O} \to \mathcal{O}_d$。它们都定义为以下复合

$$\mathcal{O} = E^0(\mathrm{pt}) \underset{P_{p^d}}{\overset{\pi^*}{\rightrightarrows}} E^0 B\Sigma_{p^d} \twoheadrightarrow E^0 B\Sigma_{p^d}/J_d^{\mathrm{Tr}} = \mathcal{O}_d$$

分别使用（对于 s_d）沿 $\pi\colon B\Sigma_{p^d} \to \mathrm{pt}$ 的限制，或（对于 t_d）幂运算 P_{p^d}。映射 s_d定义了 $\mathcal{O}_d$ 上“通常的” $\mathcal{O}$-代数结构（本文迄今均采用这种结构），而 t_d 等于 $\mathcal{O} \xrightarrow{P} \mathbb{W}_E(\mathcal{O}) \xrightarrow{\mathrm{gh}_d} \mathcal{O}_d$ 的复合。

8.1. **命题**。 映射 t_d 诱导满射 $\bar{t}_d\colon \mathcal{O}/p \to \mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} \kappa$。

证明。 这是 BSY22，命题 3.35]，的推论，因为 s_d 和 t_d 诱导满同态 $\mathcal{O}\widehat{\otimes}_{\mathbb{W}_p}\mathcal{O} \to \mathcal{O}_d$ [，参见 BSY22，命题 3.39]。□

因此我们有 $(\mathcal{O}/p)/I_{d+1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} \kappa$，其中定义 $I_{d+1} := \ker \bar{t}_d$。回顾 §6.6 中的映射 $\rho_d\colon \mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} \kappa \to \mathcal{O}_{d-1} \otimes_{\mathcal{O}} \kappa$。

8.2. **命题**。 映射 ρ_d 是满射，并且我们有 $\rho_d \circ t_d = t_{d-1}$。

证明。 幽灵分量的自然性意味着 t_d 等于以下各项的复合

$$\mathcal{O} \xrightarrow{P} \mathbb{W}_E(\mathcal{O}) \xrightarrow{\mathbb{W}_E(\pi)} \mathbb{W}_E(\kappa) \xrightarrow{\mathrm{gh}_d} \mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} \kappa.$$

于是恒等式 $\rho_d \circ t_d = t_{d-1}$ 由(6.7)直接得到。 ρ_d 的满射性由 t_d的满射性(8.1)得到。□

记

$$I_{d+1} := \ker t_d,$$

$\mathcal{O}/p$中的一个理想。作为(8.1)和(8.2)的推论，我们得到理想的降链

$$\mathcal{O} = I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots.$$

8.3. **Lubin-Tate空间在特征 p下的平凡商滤过**。 考虑一个特征为 p的阿廷局部环 A ，其剩余域 κ_A 是完美的。这意味着投影 $A \to \kappa_A$ 具有唯一的截面，因此我们可以典范地将 κ_A 等同于 A的一个子环。

回忆，一个**变形** （从 Γ/κ到 A）是数据$(G,\ i,\ f)$，其中 G是 A上的一个形式群，$i\colon \kappa \to \kappa_A$ 是一个环同态，而 $f\colon i^*\Gamma \xrightarrow{\sim} G_0$ 是 κ_A上的一个形式群同构，其中 G_0 是 G 到剩余域的基变换。

称 Γ 的变形 $(G,\ i,\ f)$ 属于平凡商滤过 $\leq d$，如果存在一个环同态 $i\colon \kappa \to \kappa_A \subseteq A$，以及一个关于 A 的形式群的同源 $g\colon i^*\Gamma \to G$

次数为 p^d，使得 $g_0 = f \circ \mathrm{Fr}^d$，其中 g_0 表示将 g 基变换到剩余域所得的对象，而 Fr^d 是相对的第 p^d 次幂弗罗贝尼乌斯同源。（这意味着 $\widetilde{i} = i \circ \varphi^{-d}$。）

8.4. 注记。 我们可以将其改述如下：(G, i, f) 属于平凡商滤过$\leq d$当且仅当存在环同态 j：$\kappa \to \kappa_A \subseteq A$以及 A 上次数为 p^d 的形式群同源 g：$j^*\Gamma \to G$。关键在于，在基变换到剩余域之后，我们有 $g_0 \circ h = f \circ \mathrm{Fr}^d$，其中 h：$(i\varphi^{-d})^*\Gamma \xrightarrow{\approx} j^*\Gamma$ 是定义在 $\kappa_A \subseteq A$ 上的形式群同构，因此我们可以用 $i\varphi^{-d}$ 替换 j，并用 $g \circ h$ 替换 g。

8.5. **命题**。 设 (G, i, f) 是 Γ 到这样一个环 A 的变形，且它由映射 $\varphi\colon \mathcal{O}/p \to A$ 分类。则下列条件等价。

(1) $\varphi(\overline{I_{d+1}}) = 0$。(2) (G, i, f) 属于平凡商滤过 $\leq d$。

证明。回顾 $\mathcal{O}_d$ 的泛性质：它带有一个同源的泛例g：$G' \to G$，其次数为 p^d，连接变形 (G', i', f')，与 (G, i, f)，使得 $g_0 = \mathrm{Fr}^d$，并且 (G', i', f') 和 (G, i, f) 分别由 s_d 和 t_d 分类（[Str97], [Str98], 另见 [Rez09, §12]）。由于 t_d 可分解为 $\mathcal{O} \twoheadrightarrow (\mathcal{O}/p)/I_{d+1} \approx \mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} \kappa$，结论显然成立。□

8.6. **命题**。 映射 t_d 组装起来给出一个环同构 $t\colon \mathcal{O}/p \xrightarrow{\sim} \lim \mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} \kappa$。

证明。 我们已将逆系统 $\{\mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} \kappa\}$ 识别为 $\{(\mathcal{O}/p)/I_{d+1}\}$。记 $\mathfrak{m} \subseteq \mathcal{O}/p \approx \kappa[\![\overline{u_1}, \dots, u_{h-1}]\!]$ 为极大理想。

环 $(\mathcal{O}/p)/I_{d+1} \approx \mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} \kappa$ 是阿廷的，并且作为 κ-模具有有限长度 (5.2)。因此，对于任意 d，都存在 k 使得 $\mathfrak{m}^k \subseteq I_{d+1}$。剩下要证明，对于任意 k，都存在 d 使得$I_{d+1} \subseteq \mathfrak{m}^k$。

因此，只需证明：对于 id_κ 的任意分解 $\kappa \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} \kappa$，其中 A 是一个阿廷局部环，对于任意 κ-代数映射 $\varphi\colon \mathcal{O}/p \to$，都存在 $d \geq 1$ 使得 $\varphi(I_{d+1}) = 0$。（也就是说，取 $A = (\mathcal{O}/p)/\mathfrak{m}^k$。）

回想一下，φ 分类了从 Γ/κ 到 A 的一个变形 $(G, \mathrm{id}\ f)$，其中 $f\colon \Gamma \xrightarrow{\approx} G_0$ 是 κ 上形式群的一个同构。根据关于 A、$p = 0$ 的假设，$\ker \pi \subseteq A$ 是一个幂零理想，因此由 [Dri76, App.]，中的论证，我们可以将同构 f 提升到 A，但需相差一个 p 的幂。也就是说，存在 $k \geq 0$ 以及形式群同源 $g\colon i^*\Gamma \to G$，定义在 A 上，使得 $g_0 = f_0 \circ p^k$（因此 g 的次数为 p^{kh}）。

由 (8.4) 可知，这意味着 $(G, \mathrm{id}\ f)$ 属于平凡商滤过 $\leq kh$，即 $\varphi(I_{kh+1}) = 0$，正如所需。□

8.7. **余自由性的证明**。

8.8. **命题**。 对于任意完美 κ-代数 A 和 $d \geq 0$，我们有一个短正合列

$$0 \to \mathbb{W}_E(A)/\mathbb{I}_d \xrightarrow{p} \mathbb{W}_E(A)/\mathbb{I}_{d+1} \xrightarrow{\mathrm{gh}_d} \mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} A \to 0.$$

证明。 由 (7.1) 可知，数列中的第一个映射是单射。因此，我们必须证明诱导映射$\varphi\colon \mathbb{W}_E(\kappa)/(p,\ \mathbb{I}_{d+1}) \to \mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} A$是一个同构。利用 (4.6)，我们将问题归结为 $A = \kappa$ 的情形。

当 $A = \kappa$ 时，复合映射 $\mathcal{O} \to \mathbb{W}_E(\kappa)/(p,\ \mathbb{I}_{d+1}) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} \kappa$ 是满射 (8.1)，因此φ是满射。我们还有 $\mathrm{length}_\kappa\, \mathbb{W}_E(\kappa)/\mathbb{I}_d = N_1^h + \cdots + N_{p^{d-1}}^h$ (4.5)，因此 $\mathrm{length}_\kappa\, \mathbb{W}_E(\kappa)/(p,\ \mathbb{I}_{d+1}) = N_{p^d}^h$。又因为 $\mathrm{length}_\kappa\, \mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} \kappa = \dim_\kappa \mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} \kappa = N_{p^d}^h$ (5.2)，映射 φ 也是单射。□

8.9.**推论**。 对于任意完美的 κ-代数 A，我们有一个短正合列

$$0 \to \mathbb{W}_E(A) \xrightarrow{p} \mathbb{W}_E(A) \xrightarrow{\mathrm{gh}_\infty} \lim \mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} A \to 0.$$

证明。 对（8.8）中的正合列取极限，并利用如下事实：对于任意 $\mathcal{O}$-代数 A，我们有 $\mathbb{W}_E(A) \xrightarrow{\sim} \lim \mathbb{W}_E(A)/\mathbb{I}_d$ 以及 $\lim^1 \mathbb{W}_E(A)/\mathbb{I}_d = 0$。 □

8.10. **引理**。 设 $f\colon\ M \to N$ 为诱导同构$M/p \xrightarrow{\sim} N/p$的阿贝尔群同态。若 $M \xrightarrow{\sim} \lim M/p^k$ 与 $\bigcap p^k M = 0$，且 N无 p-挠且 $\bigcap p^k N = 0$，则 f为同构。

证明。 直接可得。 □

现在我们可以推出 Lubin-Tate 环的余自由性。

证明(1.2)。 将引理 (8.10) 应用于映射 $\mathcal{O} \to \mathbb{W}_E(\kappa)$，并利用 (8.6) 与 (8.9)。 $\bigcap p^k \mathbb{W}_E(\kappa) = 0$ 这一假设即 (4.1)。□

8.11. **小高度情形下 Lubin-Tate 环的维特滤过**。 给定 $\mathcal{O} \approx \mathbb{W}_E(\kappa)$，我们将对应于 $\mathbb{I}_d(\kappa) \subseteq \mathbb{W}_E(\kappa)$ 的维特理想记为 $I_d \subseteq \mathcal{O}$。

8.12. 例子 （高度 1）。 当 $h = 1$ 时，我们有 $\mathcal{O} = \mathbb{W}_p(\kappa)$，在此情况下，维特滤过恰好是 p-进滤过： $I_d = p^d\mathcal{O}$。注意，对于所有 $d \geq 0$， $\mathcal{O}/(p,\ I_{d+1}) \approx \mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} \kappa \approx \kappa$。

当高度为 $h = 2$ 时，我们有 $\mathcal{O} \approx \mathbb{W}_p\kappa[\![a]\!]$，此外 $\mathcal{O}/(p,\ I_{d+1}) \approx \mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} \kappa \approx \kappa[\![a]\!]/(a^{n_d})$，其中 $n_d = N_{p^d}^2 = 1 + p + \cdots + p^{d-1}$（如 §1.5 中所述）。

8.13. **命题**。 固定 κ 上的一个高度为 2 的形式群，并令 $\mathcal{O} \approx \mathbb{W}_p\kappa[\![a]\!]$。则存在多项式 $f_d \in \mathbb{W}_p\kappa[a]$，对于 $d \geq 0$，使得

（1） $f_1 = a$，（2） f_d 是首一的、次数为 n_d 的多项式，（3） $f_d \equiv a^{n_d}$（模 p），（4） $O/I_d \approx \mathcal{O}/$（$p^d$，$p^{d-1}f_1$，…，$f_{d-1}$）对所有 $d \geq 0$ 成立。

证明。 由于 $\mathcal{O}/(p, I_{d+1}) \approx \kappa[a]/(a^{n_d})$，我们可以选取一个次数为 n_d、模 p 化简为 a^{n_d} 的首一多项式 $f_d \in I_{d+1}$。利用 (7.1) 可知， $\frac{I_{d+1}}{pI_d} = \frac{I_{d+1}}{I_{d+1}\cap p\mathcal{O}} = \frac{I_{d+1}+p\mathcal{O}}{p\mathcal{O}}$ ~~是一个由 f_d 的像生成的~~循环 $\mathcal{O}$-模。因此 $I_{d+1} = pI_d + (f_d)$。□

8.14. 例子 （高度 2 和 $p = 2$）。 稍加努力即可手算多项式 f_d。对于 [Rez08], 中讨论的特定例子，可以证明

$$\mathcal{O}/I_1 = \mathbb{Z}_2[\![a]\!]/(2, a),$$
$$\mathcal{O}/I_2 = \mathbb{Z}_2[\![a]\!]/(4, 2a, a^3 - 2),$$
$$\mathcal{O}/I_3 = \mathbb{Z}_2[\![a]\!]/(8, 4a, 2a^3 - 4, a^7 - 2a).$$

9. Classical Witt vectors

在接下来的几节中，我们将构造并计算 $\mathbb{W}_p$ 关于 $\mathbb{W}_E$ 的分裂。首先汇集一些关于经典 Witt 向量的事实（整数 $\mathbb{W}_{\mathbb{Z}}$ 和 p-典型 $\mathbb{W}_p$），其证明大多留给参考文献。我们的阐述方式略显非传统，旨在凸显其与 Lubin-Tate-Witt 向量的类比。不过，这并非全新内容，因为整数 Witt 向量理论包含在 λ-环[2],的理论之中，而 p-典型 Witt 向量理论也与 δ-环 [Joy85] 类似相关。

唯一值得注意的新颖特征，是对 Artin-Hasse 指数的高高度类比物的定义；它将在我们证明 $\mathbb{W}_E$的分裂时发挥主要作用。

下文中， RG 是有限群 G的复表示环。我们回顾一下， RG 总是有限生成自由阿贝尔群，并且该函子是对称幺半的，例如，$R(G \times H) \approx RG \otimes RH$。

[2]显然最早由 Cartier 于 1968 年左右观察到。

9.1. I **积分维特向量**。对于交换环 A，定义 $\mathbb{W}_{\mathbb{Z}}(A)$为子 t

$$\mathbb{W}_{\mathbb{Z}}(A) \subseteq \prod_{m\geq 0} R\Sigma_m \otimes A$$

由满足 $a_0 = 1$ 且 $\mathrm{Res}^{\Sigma_{i+j}}_{\Sigma_i\times\Sigma_j} a_{i+j} = a_i \otimes a_j$ 的 $a = (a_m)$ 组成。于是 $\mathbb{W}_{\mathbb{Z}}(A)$ 在

$$(a+b)_m = \sum_{i+j=m} \mathrm{Ind}^{\Sigma_m}_{\Sigma_i\times\Sigma_j}(a_i \otimes b_j), \qquad (ab)_m = a_m b_m.$$

则 $\mathbb{W}_{\mathbb{Z}}$ 由该环余表示

$$T_{\mathbb{Z}} := \bigoplus_{m\geq 0} R\Sigma_m^{\vee},$$

其中 $M^{\vee} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}}(M, \mathbb{Z})$，且乘法由沿 $\Sigma_i \times \Sigma_j \leq \Sigma_{i+j}$ 的限制所诱导。我们有 [Ati66，推论 1.3]一个环同构

$$\mathbb{Z}[s_m,\ m \geq 1] \xrightarrow{\sim} T_{\mathbb{Z}},$$

其中 s_m: $R\Sigma_m \to \mathbb{Z}$ 在表示上由 $V \mapsto \dim(V^{\Sigma_m})$ 给出。（注意 $s_0 = 1$。）

回忆一下，对称群表示的所有特征标都取整数值。令 $w_n \in R\Sigma_n^{\vee}$表示映射 $V \mapsto \chi(V,\ c_n)$，其中 $c_n \in \Sigma_n$ 是任意一个长度为 n 的循环。于是，单项式 $w_{n_1}\cdots w_{n_k} \in R\Sigma_n^{\vee}$, $n = \sum n_i$对应于 $V \mapsto \chi(V,\ g)$，其中 $g \in \Sigma_{n_1+\cdots+n_k}$是由长度为 n_1、.....、n_k 的不相交循环构成的任意乘积。公式 $s_m(V) = \frac{1}{m!}\sum_{g\in\Sigma_m} \chi(V,\ g)$ 给出了

$$\sum_{m\geq 0} s_m\, X^m = \exp\left[\sum_{n\geq 1} \frac{w_n}{n}\, X^n\right] = \prod_{k\geq 1} (1 - x_k\, X^k)^{-1} \in T_{\mathbb{Z}}[\![X]\!].$$

第二个等式给出了另一个多项式基 $\mathbb{Z}[x_k,\ k \geq 1] \approx T_{\mathbb{Z}}$，其元素与 w_ns 通过维特多项式 $w_n = \sum_{k|n} k x_k^{n/k}$ 相关。在元素 s_m 处求值，得到阿贝尔群的一个同构

$$s\colon \mathbb{W}_{\mathbb{Z}}(A) \xrightarrow{\sim} (1 + X\, A[\![X]\!])^{\times}, \qquad a \mapsto \sum_{m\geq 0} s_m(a_m)\, X^m,$$

而在.....处求值 w_n 给出一个环同态 gh_n: $\mathbb{W}_{\mathbb{Z}}(A) \to A$，即第 n 个**幽灵分量**.

9.2. p**-典型维特向量**。固定一个素数 p。定义有限群 G 的 p**-典型表示环** R_pG为 Res^G_P: $RG \to RP$ 的像，其中 $P \leq G$ 是任意一个 p-Sylow 子群。因此， R_pG 是 RG 的一个商，其中当在 p 次幂阶元素处求值时特征标相同的虚表示被视为相同。注意， R_pG 也是一个有限生成自由阿贝尔群；作为群范畴上的函子， R_p 是对称幺半的；并且诱导表示可映到 R_p中：也就是说，若 $H \leq G$，则存在映射 Ind^G_H: $R_pH \to R_pG$，它与诱导表示映射 Ind^G_H: $RH \to RG$在取商下相容。

对于交换环 A，定义 $\mathbb{W}_p(A)$为一个子集

$$\mathbb{W}_p(A) \subseteq \prod_{m\geq 0} R_p\Sigma_m \otimes A$$

与我们对 $\mathbb{W}_{\mathbb{Z}}(A)$的定义类似。然后， $\mathbb{W}_p$ 由环余表示

$$T_p := \bigoplus_{m\geq 0} R_p\Sigma_m^{\vee}.$$

注意， T_p 是 $T_{\mathbb{Z}}$的子环，而后者又是 $T_{\mathbb{Z}}$ 作为阿贝尔群的一个直和项。这个包含诱导出一个自然的环同态 $\mathbb{W}_{\mathbb{Z}}(A) \to \mathbb{W}_p(A)$。此外，我们有$w_{p^d}$， $x_{p^d} \in T_p$ 对于 $d \geq 0$，以及一个环同构

$$\mathbb{Z}[x_{p^d},\ d \geq 0] \xrightarrow{\sim} T_p.$$

这意味着 $\mathbb{W}_{\mathbb{Z}}(A) \to \mathbb{W}_p(A)$ 总是满射。

9.3. p-典型幽灵分量。 令 $\mathrm{gh}_{p^d}\colon \mathbb{W}_p(A) \to A$ 表示由在 $w_{p^d} \in T_p$ 处求值所诱导的环同态。

9.4。 **引理。** 对于每个 $d \geq 0$ 和环 A，我们都有如下环的交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{W}_p(A) & \xrightarrow{\mathrm{gh}_{p^d}} & A \\ {\scriptstyle \mathbb{W}_p(\pi)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathbb{W}_p(A/p) & \xrightarrow[\widetilde{\mathrm{gh}}_{p^d}]{} & A/p^{d+1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{W}_p(A/p) & \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{gh}}_{p^{d+1}}} & A/p^{d+2} \\ {\scriptstyle \mathbb{W}_p(\varphi)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathbb{W}_p(A/p) & \xrightarrow[\widetilde{\mathrm{gh}}_{p^d}]{} & A/p^{d+1} \end{array}$$

其中 $\varphi\colon\ A/p \to A/p$ 是 p 次幂映射，而 π 表示显然的商映射 $s.$

证明。 对于元素 $x = (x_{p^k})_{k\geq 0} \in \mathbb{W}_p(A)$，注意到 $\mathrm{gh}_{p^d}(x)$ 由维特多项式 $\mathrm{gh}_{p^d}(x) = \sum_{j=0}^{d} p^j x_{p^j}^{p^{d-j}}$ 给出。因此，若 $x = (x_{p^j})\ y = (y_{p^j}) \in \mathbb{W}_p(A)$ 满足 $x_{p^j} \equiv y_{p^j} \pmod{pA}$，则由初等论证可得

$$x_{p^j}^{p^{d-j}} \equiv y_{p^j}^{p^{d-j}} \pmod{p^{d-j+1}A}, \quad \text{whence} \quad \mathrm{gh}_{p^d}(x) \equiv \mathrm{gh}_{p^d}(y) \pmod{p^{d+1}A}.$$

因此，映射 $\widetilde{\mathrm{gh}}_{p^d}\colon \mathbb{W}_p(A/p) \to A/p^{d+1}$ 有定义，且使左侧方块交换；由于 $\mathbb{W}_p(\pi)$ 是满射，它是一个环同态。右侧方块交换可由对维特多项式进行初等计算得到。□

9.5. p-典型完满环的 Witt 向量。 映射 $\widetilde{\mathrm{gh}}_{p^d}\colon \mathbb{W}(A/p) \to A/p^{d+1}$ 可组装成一个环同态

$$\varprojlim\big(\mathbb{W}_p(A/p), \mathbb{W}_p(\varphi)\big) \to \varprojlim A/p^{d+1}.$$

当 A 是 p-完备的，且 $\kappa = A/p$ 是一个完美的 $\mathbb{F}_p$-代数时，我们得到一个环同态$\widetilde{\mathrm{gh}}_{p^\infty}\colon \mathbb{W}_p(\kappa) \to A$，它表明 $\mathbb{W}_p(\kappa)$ 是一个配备同构 $A/p \approx \kappa$ 的 p-完备环 A 的始对象示例。特别地，我们得到以下结论。

9.6. **推论.** 存在一个环同构 $\widetilde{\mathrm{gh}}_{p^\infty}\colon \mathbb{W}_p(\mathbb{F}_p) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p$ 定义为 $\widetilde{\mathrm{gh}}_{p^\infty}(a) = \lim_{d\to\infty} \mathrm{gh}_{p^d}(\widetilde{a})$，其中 $\widetilde{a} \in \mathbb{W}_p(\mathbb{Z}_p)$ 是 a 的任意提升。

9.7. **Witt 向量中的单位。**

9.8.**命题.** 我们有

$$\mathbb{W}_{\mathbb{Z}}(A)^\times = \{\, a \in \mathbb{W}_{\mathbb{Z}}(A) \mid \mathrm{gh}_m(a) \in A^\times \ \textit{for all}\ m \geq 1 \,\},$$
$$\mathbb{W}_p(A)^\times = \{\, a \in \mathbb{W}_p(A) \mid \mathrm{gh}_{p^d}(a) \in A^\times \ \textit{for all}\ d \geq 0 \,\}.$$

证明。 我们给出 $\mathbb{W}_{\mathbb{Z}}$ 的证明，因为 $\mathbb{W}_p$ 的证明可以用完全相同的方法得出。注意， $\subseteq$是自动成立的，因为幽灵分量是环同态。

在此证明中，我们自由使用这样一个事实： $\mathbb{W}_{\mathbb{Z}}$ 是其余代数为 λ-环的余单子。特别地， $T_{\mathbb{Z}}$ 是由一个生成元 x生成的自由 λ-环。考虑 i： $T_{\mathbb{Z}} \to T_{\mathbb{Z}}[w^{-1}]$，其中目标是通过形式化地求逆所有关于 $m \geq 1$的 w_m 而得到的环。根据[Wil82，第 1 条推论3]，， i 是 λ-环的态射；该推论断言，对于一个在 Adams 运算下闭合的 λ-环，将其一个乘法闭集求逆会得到一个 λ-环。

因此，给定 $a \in \mathbb{W}_{\mathbb{Z}}(A)$，其中 $\mathrm{gh}_m(a) \in A^\times$，并因而可由环映射 $a'\colon\ T_{\mathbb{Z}}[w^{-1}] \to A$表示，且满足 $a' \circ i = a$，我们得到环同态

$$\mathbb{Z}\{x\}[w^{-1}] \xrightarrow{\nabla} \mathbb{W}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}\{x\}[w^{-1}]) \xrightarrow{\mathbb{W}_{\mathbb{Z}}(a')} \mathbb{W}_{\mathbb{Z}}(A)$$

其中 ∇ 是定义 $T_{\mathbb{Z}}[w^{-1}]$上 λ-环结构的余代数结构映射。 x 在 $\mathbb{W}_{\mathbb{Z}}(a') \circ \nabla$ 下的像是 a，因此它可逆，因为它是可逆元素 x 的像。□

9.9. **高度 h Artin-Hasse 指数**。

9.10. **引理**。 设 G 是一个有限群， p 是一个素数，且 $h \geq 1$。则

$$\frac{\left|\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_p^h, G)\right|}{|G|} \in \mathbb{Z}_{(p)}.$$

证明。 记 $G_m = \{\, g \in G \mid g^m = 1 \,\}$ 和 $G_{p^\infty} = \bigcup G_{p^k}$。 当 $h = 1$ 时，结论由弗罗贝尼乌斯定理[3]得出，即 $|G_m|\,/m \in \mathbb{Z}$。 一般情形下，对 h 使用归纳法，并利用显然的恒等式

$$\frac{\left|\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_p^h, G)\right|}{|G|} = \sum_{g \in G_{p^\infty}} \frac{\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_p^{h-1}, \mathrm{Cent}_G(g))}{|G|} = \sum_{[g] \in G_{p^\infty}^{\mathrm{cl}}} \frac{\left|\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_p^{h-1}, \mathrm{Cent}_G(g))\right|}{|\mathrm{Cent}_G(g)|},$$

后一求和取遍 G_{p^∞} 中共轭类的代表元。 □

9.11. 注记。 *</style>*有些读者可能会发现，观察到 $\left|\mathrm{Hom}(-, G)\right| / |G|$ 是 BG的高度 h色谱基数，因此必然是一个 p-局部整数 [BM24, 定理 B]，会更容易理解。

固定一个素数 p。按照我们的惯例（§1.5），记

$$N_m^h := \left|\left\{\text{subgroups of order } m \text{ in } (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^h\right\}\right|,$$

使得 $N_m^h = 0$，除非 m 是一个 p次幂。注意到生成级数

$$N^h(T) := \sum_{d \geq 0} N_{p^d}^h\, T^d = \frac{1}{(1-T)(1-pT)\cdots(1-p^{h-1}T)} \in \mathbb{Z}[\![T]\!],$$

由此得到 $N_{p^d}^h \equiv 1$ （模 p）。

9.12. **引理**。 对于素数 p 和 $h \geq 1$，数列 $\{N_{p^d}^h\}_{d \geq 0}$ 在 p-进意义下收敛：有

$$N_{p^\infty}^h := \lim_{d \to \infty} N_{p^d}^h = \frac{1}{(1-p)(1-p^2)\cdots(1-p^{h-1})} \in \mathbb{Z}_p.$$

证明。 生成级数给出 $N_{p^\infty}^h = (1-T)\ N^h(T)\ \big|_{T=1}$。 □

以下定义了 p局部整数中的维特向量——**高度 h Artin-Hasse 指数** $\mathrm{AH}_{\mathbb{Z}}^h$ （素数为 p）。高度 1 的情形恰好就是经典阿廷-哈斯指数。

9.13. **引理**。 对于 $h \geq 1$，我们有如下恒等式

$$\mathrm{AH}_{\mathbb{Z}}^h := \sum_{m \geq 0} \frac{\left|\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_p^h, \Sigma_m)\right|}{m!} X^m = \exp\left[\ \sum_{d \geq 0} \frac{N_{p^d}^h}{p^d}\, X^{p^d}\ \right] \in (1 + X\,\mathbb{Z}_{(p)}[\![X]\!])^\times \approx \mathbb{W}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{(p)}).$$

特别是，当 m 不是一个 p 次幂时，$\mathrm{gh}_{p^d}(\mathrm{AH}_{\mathbb{Z}}^h) = N_{p^d}^h$，其中 $\mathrm{gh}_m(\mathrm{AH}_{\mathbb{Z}}^h) = 0 \quad r.$

[3]参见 [Spe17]，其中给出了一个近期的优雅证明。

证明。 该恒等式是 Wohlfahrt 公式的一个特例

$$\sum_{m\geq 0}\frac{|\mathrm{Hom}(G,\Sigma_m)|}{m!}X^m=\exp\Bigg[\sum_{H\leq G}\frac{X^{|G:H|}}{|G:H|}\Bigg],$$

最初由 [Woh77] 对来自有限 G 的同态证明，但显然对 $G=\mathbb{Z}_p^h$ 也适用（见下文 (11.5)）。系数是 p-局部整数这一点见 (9.10)。幽灵分量的识别由 (9.1) 中的讨论得出。□

我们用 $\mathrm{AH}_p^h\in\mathbb{W}_p(\mathbb{Z}_{(p)})$ 表示 $\mathrm{AH}_{\mathbb{Z}}^h$ 在投影 $\mathbb{W}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{(p)})\to\mathbb{W}_p(\mathbb{Z}_{(p)})$ 下的像。

9.14. **命题**。 对于所有 $h\geq 1$，元素 $\mathrm{AH}_p^h\in\mathbb{W}_p(\mathbb{Z}_{(p)})$ 都是单位。特别地，AH_p^1 是环 $\mathbb{W}_p(\mathbb{Z}_{(p)})$ 的单位元。此外，AH_p^h 在投影到 $\mathbb{W}_p(\mathbb{F}_p)=\mathbb{Z}_p$ 下的像为 $N_{p^\infty}^h=[(1-p)\cdots(1-p^{h-1})]^{-1}$。

证明。 由 (9.13) 可直接读出 $\mathrm{gh}_{p^d}(\mathrm{AH}_p^h)=N_{p^d\circ}^h$。由 (9.8) 可立即得知 AH_p^h是一个单位；再利用 (9.6) 和 (9.12)，我们计算它在 $\mathbb{W}_p(\mathbb{F}_p)=\mathbb{Z}_p$ 中的像。□

现在我们可以证明，在 p-局部环上，$\mathbb{W}_p$ 作为 $\mathbb{W}_{\mathbb{Z}}$-模是 $\mathbb{W}_{\mathbb{Z}}$ 的一个直和项。

9.15. **命题**。 限制在 $\mathbb{Z}_{(p)}$-代数上，投影 $\pi\colon\mathbb{W}_{\mathbb{Z}}\to\mathbb{W}_p$ 存在一个截面，记作 j。它是 $\mathbb{W}_{\mathbb{Z}}$-模的映射，并且对所有 $h\geq 1$，以下图表

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{W}_{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\mathrm{AH}_{\mathbb{Z}}^h\cdot} & \mathbb{W}_{\mathbb{Z}}\\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle j}\\ \mathbb{W}_p & \xrightarrow[\mathrm{AH}_p^h\cdot]{\approx} & \mathbb{W}_p\end{array}$$

可交换。特别地，$\mathbb{W}_p$ 是 $\mathbb{W}_{\mathbb{Z}}$ 的一个直和项，由幂等元$\mathrm{AH}_{\mathbb{Z}}^1$分裂出来。

证明。 以下我们默认所有环都是 p-局部化的，因此 $T_{\mathbb{Z}}$ 实际上是 $T_{\mathbb{Z}}\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$，等等。我们记 $\pi^*\colon T_p\to T_{\mathbb{Z}}$为表示 π 的包含，并记 $[\mathrm{AH}_{\mathbb{Z}}^h]\colon T_{\mathbb{Z}}\to T_{\mathbb{Z}}$ 和 $[\mathrm{AH}_p^h]\colon T_p\to T_p$ 为表示乘以 Artin-Hasse 元素的映射。回忆一下，$T_{\mathbb{Z}}$ 和 T_p 是无挠的，并且除去挠元后由维特多项式元素 w_n 生成；因此，要验证它们之间（或它们的多个副本的张量积之间）的两个环同态相等，只需在维特多项式元素上计算其取值即可。

任取一个由环同态给出的收缩 $r\colon T_{\mathbb{Z}}\to T_p$ of π^*，并定义 $j^*:=[\mathrm{AH}_{\mathbb{Z}}^1]\circ r$。对幽灵分量求值可得：(1) $j^*\circ\pi^*=\mathrm{id}^{T_p}$；(2) j^* 与 r 的选择无关；(3) j^* 诱导出一个 $j\colon\mathbb{W}_p\to\mathbb{W}_{\mathbb{Z}}$ of $\mathbb{W}_{\mathbb{Z}}$-模概形之间的映射；(4) 我们有恒等式$[\mathrm{AH}_p^h]\circ j^*=\pi^*\circ[\mathrm{AH}_{\mathbb{Z}}^h]$。□

10. The map $\beta\colon\mathbb{W}_{\mathbb{Z}}\to\mathbb{W}_E$

本节中，我们构造一个自然环映射 $\beta\colon\mathbb{W}_{\mathbb{Z}}\to\mathbb{W}_E$，并证明关于其对幽灵分量作用的以下结果。感谢 Nat Stapleton 指出如何在此处运用[CDM+24] 的构造。

10.1. **命题** **于**。 对于所有 $d\geq 0$ 且交换的 $\mathcal{O}$-代数 A，存在交换方块 s

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{W}_{\mathbb{Z}}(A) & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{W}_E(A)\\ {\scriptstyle\mathrm{gh}_{p^d}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\mathrm{gh}_d}\\ A & \xrightarrow[a\mapsto 1\otimes a]{} & \mathcal{O}_d\otimes_{\mathcal{O}}A\end{array}$$

我们用 $A(G)$ 表示有限群 G 的 Burnside 环。回想一下，有一个显然的“线性化”映射 $\ell\colon A(G)\to RG$ 到复表示环，它将 $\ell(S):=\mathbb{C}[S]$ 送入其中。

沿用 [CDM+24] 的说法，如果一个 Σ_m-集合能够通过等变嵌入°到某个集合 $S^{\times m}$ 中（带有显然的 Σ_m-作用），则称其为 **驯服的**。令 $A(m)\subseteq A(\Sigma_m)$ 表示由有限且传递的驯服 Σ_m-集合生成的 Burnside 环的子群。

10.2. **命题**。

(1) 子群 $A(m)\subseteq A(\Sigma_m)$ 是一个子环，并且恰好是有限驯服 Σ_m-集合的格罗滕迪克环。

(2) 将 ℓ 限制为映射 $\mathring{A}(m)\xrightarrow{\ell} R\Sigma_m$ 是环同构。

(3) 转移映射 $A(\Sigma_i)\otimes A(\Sigma_j)\to A(\Sigma_{i+j})$ 限制为映射 $A(i)\otimes A(j)\to A(i+j)$。

(4) 限制映射 $A(\Sigma_{i+j})\to A(\Sigma_i\times\Sigma_j)$ 限制为映射 $A(i+j)\to A(i)\otimes A(j)$。

证明。(1) 见 [CDM+24，命题 3.3]。(2) 是标准结果；参见 [CDM+24，§6] 及 (10.3)。(3) 见 [CDM+24，命题 3.5]。

陈述 (4) 是相对于 $A(i)\otimes A(j)\to A(\Sigma_i)\otimes A(\Sigma_j)\to A(\Sigma_{i+j})$ 而言的，其中第二个映射是外积。要证明这一点，只需注意，若 $X\subseteq S^{\times i}\times S^{\times j}$ 是传递的 $\Sigma_i\times\Sigma_j$-子集，则它具有如下形式：$X=X'\times X''$，其中 $X'\subseteq S^{\times i}$ 和 $X''\subseteq S^{\times j}$ 是不变子集。□

10.3. 注记。(10.2) 的陈述 (2) 意味着，作为自由阿贝尔群，$R\Sigma_m$ 有一组基，由 ρ_m 组成；这些表示是由形如 $\Sigma_{m_1}\times\cdots\times\Sigma_{m_r}$ 的子群的平凡表示诱导而来。见 Ati66，命题 1.1。

10.4. **推论**。环的同构 $A(m)\approx R\Sigma_m$（(10.2)*(2)*）与沿 $\Sigma_i\times\Sigma_j\to\Sigma_{i+j}$ 的限制和转移相容。

接下来回顾映射 $A(G)\to\pi^0\Sigma^\infty_+BG$，它从 Burnside 环映到 BG 的稳定上同伦。具体而言，它将一个 G-集合 X 映到复合映射 $\Sigma^\infty_+BG=\Sigma^\infty_+(*_{hG})\to\Sigma^\infty_+(X_{hG})\to\Sigma^\infty_+(*)=\mathbb{S}$，其中数列中的第一个映射是转移，第二个是投影。

设 E 是一个 Morava E-理论，并令 b_m 表示以下数列的复合映射

$$R\Sigma_m\xleftarrow{\sim}\mathring{A}(m)\rightarrowtail A(\Sigma_m)\to\pi^0\Sigma^\infty_+BG\to E^0BG,$$

其中最后一个映射由单位映射 $\mathbb{S}\to E$ 诱导。

10.5. **命题**。函数 $\beta(a):=\big((b_m\otimes\mathrm{id}_A)(a_m)\big)$ 定义了一个环同态 $\mathbb{W}_{\mathbb{Z}}(A)\to\mathbb{W}_E(A)$，它关于 $\mathcal{O}$-代数 A 是自然的。

证明。该陈述涉及函数 $b_m\otimes\mathrm{id}_A\colon R\Sigma_m\otimes A\to E^0B\Sigma_m\otimes_{\mathcal{O}}A$，它们显然对 $\mathcal{O}$-代数 A 自然。我们只需验证它们可下降为函数 $\mathbb{W}_{\mathbb{Z}}(A)\to\mathbb{W}_E(A)$，且是环同态；也就是说，它们与限制、转移和乘法相容。这由 (10.2) 立即可得。□

（*10.1*）的证明。这由环同态构成的交换图表的交换性立即可得

$$\begin{array}{ccc} R\Sigma_{p^d} & \xrightarrow{b_{p^d}} & E^0B\Sigma_{p^d} \\ {\scriptstyle w_{p^d}}\downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & E^0B\Sigma_{p^d}/J_d^{\mathrm{Tr}}=\mathcal{O}_d \end{array}$$

如上文（10.3）所述，$R\Sigma_m$ 是由从 $\Sigma_{m_1}\times\cdots\times\Sigma_{m_r}$ 诱导而来的表示 ρ_m 生成的自由阿贝尔群。因此，w_m 的核：$R\Sigma_m\to\mathbb{Z}$（即在长度为 m 的循环处对特征标求值）由从真子群诱导而来的 ρ_m 生成。由于 b_{p^d} 保持转移，它将 $\ker^{w_{p^d}}$ 映入转移理想 J_d^{Tr}。□

11. The map $\sigma\colon \mathbb{W}_E \to \mathbb{W}_{\mathbb{Z}}$

本节将介绍一个自然的阿贝尔群同态 $\sigma\colon\ \mathbb{W}_E \to \mathbb{W}_{\mathbb{Z}}$，并证明其对幽灵分量的作用具有如下结果。回顾一下，斯特里克兰环 $\mathcal{O}_d$ 是秩为$N^h_{p^d}$（5.2）的有限生成自由 $\mathcal{O}$-模

11.1. **命题**。 对于所有 $d \geq 0$ 和 $\mathcal{O}$-代数 A，存在交换方块 s

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{W}_E(A) & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{W}_{\mathbb{Z}}(A) \\ {\scriptstyle \mathrm{gh}_d}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{gh}_{p^d}} \\ \mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} A & \xrightarrow[\mathrm{tr}]{} & A \end{array}$$

其中 $\mathrm{tr}(x)$ 是由 x左乘所给出的 $\mathcal{O}$-线性迹。此外，当m 不是 p次幂时，我们有 $\mathrm{gh}_m \circ \sigma = 0$ 。

映射 σ 最初是在 [BSSW25, §2.5]中构造的。

令 $\mathrm{Tr}^e_{\sigma_m}\colon\ E^0 B\Sigma_m \to \mathcal{O}$ 表示沿 $\Sigma_m \to e$ 的 $K(n)$-局部转移（其定义得益于 $\mathrm{Sp}^{K(h)}$的 1-半加性）。回忆阿贝尔群之间的同构 $s\colon\ \mathbb{W}_{\mathbb{Z}}(A) \xrightarrow{\sim} (1 + X\,A[\![X]\!])^{\times}$ （9.1）。

11.2.**命题**。 存在一个自然的阿贝尔群同态

$$\sigma\colon \mathbb{W}_E(A) \to \mathbb{W}_{\mathbb{Z}}(A)$$

由以下公式刻画

$$s(\sigma(a)) = \sum_{m \geq 0} \mathrm{Tr}^e_{\Sigma_m}(a_m) X^m.$$

证明。 元素 $a \in \mathbb{W}_E(A)$ 满足 $a_0 = 1$，因此右侧属于常数项为 1 的级数。它是阿贝尔群同态这一点可由转移的函子性推出：

$$\mathrm{Tr}^e_{\Sigma_{i+j}} \mathrm{Tr}^{\Sigma_{i+j}}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}(a_i \otimes a_j) = \mathrm{Tr}^e_{\Sigma_i \times \Sigma_j}(a_i \otimes a_j) = \mathrm{Tr}^e_{\Sigma_i}(a_i)\,\mathrm{Tr}^e_{\Sigma_j}(a_j).$$

□

11.3. **标记的指数公式**。 称群 G 为**可容许的**，如果对于任意 $m \geq 1$，它只有有限多个指数为 m 的子群。就我们而言，需要考虑的可容许群只有 $G = \mathbb{Z}$ 和 $G = \mathbb{Z}_p^h$。

从可容许群 G 到环 R 的一个**标记** 是一个函数 f，它将有限的 G-集合 S 映到元素 $f(S) \in R$，并满足

(i) f是同构不变的：若 $S \approx T$作为 G-集合，则 $f(S) = f(T)$；

(ii) f是乘法的： $f(\varnothing) = 1$且 $f(S \amalg T) = f(S)f(T)$。

当 $\gamma\colon\ G \to \Sigma_m$是到对称群的同态时，我们滥用记号，用 $f(\gamma)$ 表示 f 在显然的 Σ_m-集合上的值。我们将需要以下关于标记的指数恒等式。

11.4.**命题**。 对于取值于无挠环 R的 G 上的任意标记 f，有

$$\sum_{m \geq 0} \frac{X^m}{m!} \sum_{\gamma\colon\ G \to \Sigma_m} f(\gamma) = \exp\left[\sum_{H \leq G} \frac{X^{[G:H]}}{[G:H]} f(G/H) \right],$$

其中右侧的和遍历所有有限指数子群。

证明。 我们可以用有限 G-集合的同构类来重写等式两边。也就是说，只需证明

$$\sum_{[S]} \frac{X^{|S|}}{|\mathrm{Aut}(S)|} f(S) = \prod_{\mathrm{tr.}\ [T]} \exp\left[\frac{X^{|T|}}{|\mathrm{Aut}(T)|} f(T)\right]$$

其中，求和遍历所有有限 G-集合的同构类，而乘积遍历所有传递有限 G-集合的同构类。注意到若 $S \approx T_1^{\amalg k_1} \amalg \cdots \amalg T_r^{\amalg k_r}$ 中的 T_j 是两两不同构的传递 G-集合，则 $\mathrm{Aut}(S) \approx \prod_{j=1}^r \mathrm{Aut}(T_j)^{k_j} \rtimes \Sigma_{k_j}$，由此可得该等式。□

11.5. 注记。 当 $f \equiv 1$ 时，这就特化为 Wohlfarht 恒等式。

11.6. **Hopkins-Kuhn-Ravenel 广义特征标理论**。 我们回顾 HKR 广义特征标映射 [HKR00], 的基本事实，并将其表述如下。

存在一个忠实平坦的 $p^{-1}\mathcal{O}$-代数 C，并且对每个同态 $\gamma\colon \mathbb{Z}_p^h \to G$，都有一个 $\mathcal{O}$-代数映射

$$\chi_G(\gamma)\colon E^0BG \to E^0BG \otimes_{\mathcal{O}} C.$$

映射 $\chi_G(\gamma)$ 仅取决于 γ 的共轭类，并由此得到一个C-代数同构

$$\chi_G\colon E^0BG \otimes_{\mathcal{O}} C \xrightarrow{\sim} \prod_{\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_p^h, G)_{\mathrm{conj}}} C,$$

其中乘积遍历同态的共轭类。

就我们的目的而言，将其表述为对任意 C-代数进行基变换会很有用。因此，我们将特征标理论视为在 C-代数 A 中自然给出如下形式的 A-代数同构

$$\chi_G\colon E^0BG \otimes_{\mathcal{O}} A \xrightarrow{\sim} \prod_{\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_p^h, G)_{\mathrm{conj}}} A,$$

并将 $\chi_G(\gamma)\colon E^0BG \otimes_{\mathcal{O}} A \to A$ 在 $\gamma\colon \mathbb{Z}_p^h \to G$ 处的分量记作

我们注意到与沿一般同态的转移相关联的“诱导特征标”公式（它们之所以存在，是因为 $K(n)$-局部范畴具有 1-半加性）。

11.7. **命题**。 设 $\varphi\colon H \to G$ 是有限群之间的一个同态，并记 $\mathrm{Tr}\varphi\colon E^0BH \otimes_{\mathcal{O}} A \to E^0BG \otimes_{\mathcal{O}} A$ 为相应的诱导转移。当 A 是一个 C-代数时，对于 $\gamma\colon \mathbb{Z}_p^h \to G$，有如下恒等式

$$\chi_G(\gamma) \circ \mathrm{Tr}_\varphi = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{\delta\colon \mathbb{Z}_p^h \to H \\ u \in G,\ \varphi\delta = u^{-1}\gamma u}} \chi_H(\delta).$$

这应当是众所周知的。例如，它可以从 [BM24]的主定理的一个特例中读出。事实上，我们只需要两个特例：(1) 当 φ 为单射时 [HKR00，定理 D]；(2) 当 G为平凡时 [Gan06，命题 7.9]。

11.8. **对称群的广义特征**。由于我们主要关注 $G = \Sigma_m$ 的情形，因此将 χ_m 写作 χ_{Σ_m}。注意，同态 $\gamma\colon \mathbb{Z}_p^h \to \Sigma_m$ 的共轭类与带有 $\mathbb{Z}_p^h$-作用的 S 阶有限集的同构类 m 一一对应。因此，在这种情况下，我们滥用记号，将 $\chi_m(S)$ 记作 $\chi_m(\gamma)$。特别地，指数为 p^d 的子群 $H \leq \mathbb{Z}_p^h$ 确定一个 $\mathbb{Z}_p^h$-集 $\mathbb{Z}_p^h/H$，从而确定一个同态 $\mathbb{Z}_p^h \to \Sigma_{p^d}$ 的共轭类，其关联的特征映射为 $\chi_{p^d}(\mathbb{Z}_p^h/H)$。

11.9. **命题**。设 A 是一个 C-代数。那么对于 $a \in \mathbb{W}_E(A)$，我们有

$$s(\sigma(a)) = \sum_{m\geq 0} \frac{X^m}{m!} \sum_{\gamma\colon \mathbb{Z}_p^h \to \Sigma_m} \chi_m(\gamma)(a_m) = \exp\left[\sum_{d\geq 0} \frac{X^{p^d}}{p^d} \sum_{\substack{H\leq \mathbb{Z}_p^h \\ [\mathbb{Z}_p^h : H]=p^d}} \chi_{p^d}(\mathbb{Z}_p^h/H)(a_{p^d})\right].$$

证明。第一个等式直接由诱导特征公式 (11.7) 得出。为证明第二个等式，注意到函数 $f(\gamma) := \chi_m(\gamma)(a_m)$ 在 $\mathbb{Z}_p^h$ 上定义了一个取值于 A的标记，因此指数恒等式 (11.4) 适用。□

11.10. **命题**。对于 C-代数 A，存在一个由 C-代数同态构成的交换方块 s

$$\begin{array}{ccc} E^0 B\Sigma_{p^d} \otimes_{\mathcal{O}} A & \longrightarrow & \mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} A \\ \downarrow{\scriptstyle \chi_{p^d}}\ \downarrow{\scriptstyle \approx} & & \downarrow{\scriptstyle \approx}\ \downarrow{\scriptstyle \overline{\chi}_{p^d}} \\ \prod_{\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_p^h, \Sigma_{p^d})^{\mathrm{conj}}} A & \longrightarrow & \prod_{\substack{H\leq \mathbb{Z}_p^h \\ [\mathbb{Z}_p^h :\ H]=p^d}} A \end{array}$$

其中底 部水平映射是显然的投影，而竖直映射是同构 .

证明。映射 χ_{p^d} 是特征映射，因此是一个同构。

若 $\gamma\colon \mathbb{Z}_p^h \to \Sigma_m$ 描述了 $\{1,\dots,m\}$上的非传递作用，则对某个$0 < i < m$， $\gamma(\mathbb{Z}_p^h) \leq \Sigma_i \times \Sigma_{m-i}$。因此，根据子群间的转移公式（11.7），我们看到，对于这样的 γ，$\chi_{p^d}(\gamma)$ 在转移理想 J_d^{Tr}上为零，从而映射 χ_{p^d} 存在。□

11.11.**引理**。对于 C-代数 A，有如下交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{W}_E(A) & \xrightarrow{\mathrm{gh}_d} & \mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} A & \xrightarrow[\approx]{\overline{\chi}_{p^d}} & \prod_{\substack{H\leq \mathbb{Z}_p^h \\ [\mathbb{Z}_p^h : H]=p^d}} A \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{tr}} & & \downarrow{\scriptstyle sum} \\ \mathbb{W}_{\mathbb{Z}}(A) & \xrightarrow[\mathrm{gh}_{p^d}]{} & A & = & A \end{array}$$

证明。令 $a \in \mathbb{W}_E(A)$。则有

$$\overline{\chi}_{p^d}(\mathrm{gh}_d(a)) = \sum_{\substack{H\leq \mathbb{Z}_p^h \\ [\mathbb{Z}_p^h : H]=p^d}} \chi_{p^d}(\mathbb{Z}_p^h/H)(a_{p^d}) = \mathrm{gh}_{p^d}(\sigma(a)),$$

其中 t 第一个等式是 (11.10)，而第二个等式可由 (11.9). □

现在我们可以证明本节的主要结果。

证明 (11.1)。根据 (11.11) 以及 $p^{-1}\mathcal{O} \to C$ 是忠实平坦的这一事实，对于 p-挠无 A 的情形，该结论显然成立。一般情形可通过归约到泛例（ $\mathbb{W}_E(\mathcal{O}\{x\})$ 的典范元素）得出。□

11.12. 注记。应用于 σ 的幽灵分量编码了“Hecke 算子”的作用。假设 A 是一个 $\mathbb{T}$-代数（例如，对于某个 $K(n)$-局部交换 E-代数， $A = \pi_0 R$ ），并记 $P\colon A \to \mathbb{W}_E(A) \subseteq \prod E^0 B\Sigma_m \otimes_{\mathcal{O}} A$ 为其总幂运算。那么

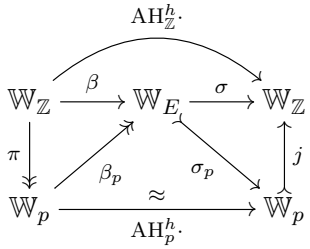
$$\mathrm{gh}_d(\sigma(P(a))) = p^d T(p^d)(a),$$

其中 $T(p^d)\colon A \to p^{-1}A$ 与 [Rez06, §1.12] 中的定义相同。 $\sigma(x) = \sum_{n\geq 0} \sigma_n(x)\, X^n$ 的分量 σ_n 是 Ganter 引入的对称幂运算 [Gan06]。

12. The splitting of $\mathbb{W}_E$

现在我们可以将 $\mathbb{W}_p$ 从 $\mathbb{W}_E$中分离出来。下文中，我们也用 $\mathbb{W}_p$ 和 $\mathbb{W}_{\mathbb{Z}}$ 表示这些函子在 $\mathcal{O}$-代数上的限制。

12.1. **定理**。 存在唯一的自然映射 $\beta_p\colon \mathbb{W}_p \to \mathbb{W}_E$ 和 $\sigma_p\colon \mathbb{W}_E \to \mathbb{W}_p$，使其构成如下交换方块



函子 $\mathrm{CAlg}_{\mathcal{O}} \to$Ab之间。此外， β_p 是环的自然映射，而 σ_p 是$\mathbb{W}_p$-模的自然映射。

证明。 对于每个函子 $W \in \{\mathbb{W}_{\mathbb{Z}}, \mathbb{W}_p, \mathbb{W}_E\}$，其幽灵分量集在取值于无挠 $\mathcal{O}$-代数时给出单射同态。由于每个 W 都由一个无挠 $\mathcal{O}$-代数余表示，因此，要证明它们之间自然映射的任一恒等式，只需证明它们在幽灵分量上的作用相同。

因此，由 (10.1) 和 (11.1) 可知 $\mathrm{gh}_{p^d}(\sigma\beta(a)) = N^h_{p^d}\, \mathrm{gh}_{p^d}(a)$，并且当 m 不是 p 次幂时，$\mathrm{gh}_m(\sigma\beta(a)) = 0$。因此，利用 (9.13)， $\sigma\beta(a) = \mathrm{AH}^h_{\mathbb{Z}} a$。

同样的思路表明，以下两个复合映射

$$\mathbb{W}_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{e\cdot} \mathbb{W}_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\beta} \mathbb{W}_E, \qquad \mathbb{W}_E \xrightarrow{\sigma} \mathbb{W}_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{e\cdot} \mathbb{W}_{\mathbb{Z}}$$

都等于 0，其中 $e = 1 - \mathrm{AH}^1_{\mathbb{Z}}$。 β_p 和 σ_p 的存在性由 (9.15) 蕴含的 $\mathrm{Im}\,\pi = e\mathbb{W}_{\mathbb{Z}}$ 和 $\mathrm{Ker}\ j = \mathrm{Ann}(e)$ 得出。这表明 $\sigma_p\beta_p(a) = \mathrm{AH}^h_p \cdot a$，因此 $\sigma_p\beta_p$ 是双射，因为 $\mathrm{AH}^h_p \in \mathbb{W}_p(\mathbb{Z}_{(p)})^{\times}$。□

12.2. **命题**。 $\mathbb{W}_E$ 的维特滤过限制到 $\mathbb{W}_p$ 的维特滤过上：即， $\mathbb{W}_p(A) \cap I_d(A)$ 是 $\mathbb{W}_p(A)$ 中的第 d 个 *Witt* 过滤理想。

证明。 β_p 和 σ_p 都保持相应的维特滤过，乘以 AH^h_p 对 $\mathbb{W}_p$ 的作用也是如此。结论由此得出。□

我们可以显式计算特征为 p 时 σ_p 和 β_p 的复合。

12.3. **命题**。 若 A 是特征为 p 的 $\mathcal{O}$-代数，则 $\sigma_p\beta_p\colon \mathbb{W}_p(A) \to \mathbb{W}_p(A)$ 是乘以单位 $N^h_{p^\infty} = [(1-p)\cdots(1-p^{h-1})]^{-1}$。

证明。 我们只需计算 AH^h_p 在以下复合下的像

$$\mathbb{W}_p(\mathbb{Z}_{(p)}) \to \mathbb{W}_p(\mathbb{F}_p) \to \mathbb{W}_p(A),$$

因此，该断言由（9.14）得出。 □

References

[AHS04] Matthew Ando、Michael J. Hopkins 和 Neil P. Strickland, *The sigma orientation is an H_∞ map*, 《美国数学杂志》126 (2004), 第 2 期, 247–334。[Ati66] M. F. Atiyah, *Power operations in K-theory*, 《牛津数学季刊》（第 2 辑）17 (1966), 165–193。[BSSW25] Tobias Barthel、Tomer M Schlank、Nathaniel Stapleton 和 Jared Weinstein, *On the rationalization of the K n -local sphere* 2025 2402 00960 ( ) ( ), 见 arXiv: 。

。[BM24] Shay Ben-Moshe, *Higher Semiadditivity in Transchromatic Homotopy Theory* (2024), 见 arXiv: 2411.00968。[BSY22] Robert Burklund、Tomer M. Schlank 和 Allen Yuan, *The chromatic Nullstellensatz* (2022年), 见 arXiv: 2207.09929。[CDM+24] Nathan Cornelius、Lewis Dominguez、David Mehrle、Lakshay Modi、Millie Rose 和 Nathaniel Stapleton, *On the image of the total power operation for Burside rings* (2024), 见 arXiv: 2405.06661。[Dri 76] V. G. Drinfel ′ *Coverings of p-adic symmetric domains* **10** 1976 2, d, , 《功能分析及其应用》（ ）, 第 – 期（俄文）。[Gan06] Nora Ganter, *Orbifold genera product formulas and power operations* **205** 2006 1, , 《数学进展》 ( ), 第 – 期。[GH04] P. G. Goerss 和 M. J. Hopkins, *Moduli spaces of commutative ring spectra*, 《结构化环谱》, 伦敦数学会讲义丛书, 第 315 卷, 剑桥: 剑桥大学出版社, 2004年, 第 151–200 页。[HKR00] Michael J. Hopkins、Nicholas J. Kuhn 和 DouglasC. Ravenel, *Generalized group characters and complex oriented cohomology theories* **13** 2000 3, 553 594 , 《美国数学会杂志》（ ）, 第 – 期（电子版）。[Joy85] Andr´e Joyal, *δ-anneaux et vecteurs de Witt*, 《加拿大科学院数学报告》7 (1985), 第 3 期, 177–182（法文）。[LT66] Jonathan Lubin 和 John Tate, *Formal moduli for one-parameter formal Lie groups*, 《法国数学会通报》94 (1966), 49–59。[Mor85] Jack Morava, *Noetherian localisations of categories of cobordism comodules*, 《数学年刊》（第 2 辑）121 (1985), 第 1 期, 1–39, DOI 10.2307/1971192。[Rez06] Charles Rezk, *The units of a ring spectrum and a logarithmic cohomology operation*, 《美国数学会杂志》19 (2006), 第 4 期, 969–1014（电子版）。[Rez08] , *Power operations for Morava E-theory of height 2 at the prime 2* (2008), 见 arXiv: 0812.1320(math.AT)。[Rez09] , *The congrugence criterion for power operations in Morava E-theory*, 《同调、同伦及其应用》11 (2009), 第 2 期, 327–379, 见 arXiv: 0902.2499。[Rez26] , *Cofreeness of the Lubin-Tate deformation ring* (2026), 预印本。[Spe17] David E. Speyer, *A counting proof of a theorem of Frobenius* **124** 2017 4, , 《美国数学月刊》 ( ), 第 – 期。[Str97] Neil P. Strickland, *Finite subgroups of formal groups*, 《纯粹与应用代数杂志》121 (1997), 第 2 期, 161–208。[Str98] N. P. Strickland, *Morava E-theory of symmetric groups*, 《拓扑学》37 (1998), 第 4 期, 757–779, 见 arXiv: math/9801125。[Str00] , *K(N)-local duality for finite groups and groupoids*, 《拓扑学》39 (2000), 第 4 期, 733–772。[Wil82] Clarence Wilkerson, *Lambda-rings, binomial domains, and vector bundles over* C*P*(∞), 《通信代数》10 (1982), 第 3 期, 311–328。[Woh77] K. Wohlfahrt, *Über einen Satz von Dey und die Modulgruppe*, 《数学档案》（巴塞尔）29 5, 455 1977 457 ( ), 第 – 期（德文）。

Department of Mathematics, University of Illinois Urbana-Champaign, Urbana, IL*Email address*: rezk@illinois.edu