arXiv:2603.12492v1 [math.AT] 12 Mar 2026

Lubin-Tate 变形环的余自由性

CHARLES REZK

ABSTRACT. 我们通过将 Matt Ando 和 Yifei Zhu 关于 H_∞-定向的早期结果推广到 Morava E-理论中幂运算的背景，给出 Lubin-Tate 变形环余自由性的一个证明。

1. INTRODUCTION

本注记旨在利用 Morava E-理论中幂运算的已知性质，给出所谓“Lubin-Tate 环的余自由性”的一个证明。

对于特征为 p 的完美域 κ 上任意高度有限为 h 的一维交换形式群 Γ/κ，Lubin 和 Tate [LT66] 将其泛变形 Γ^{univ} 确定为环 $\mathcal{O} \approx \mathbb{W}_p\kappa[\![u_1,\dots,u_{h-1}]\!]$ 上的一个形式群，即 **Lubin-Tate 环**。正如 Morava 所指出的 [Mor85],，该形式群对应于带有 $\pi_0 E = \mathcal{O}$ 的复周期广义上同调理论 E，称为**Morava E-理论**，Goerss-Hopkins-Miller [GH04]证明它由谱中的一个交换环所表示。

1.1. **H_∞-定向的 Morava E-理论**。回顾一下，∞-范畴中的遗忘函子 $\mathsf{CAlg}(\mathsf{Sp}) \to \mathsf{Sp}$ 是单子性的：该单子的底层函子是对称代数函子 $\mathrm{Sym}(X) \approx \bigoplus_{m\geq 0}(X^{\otimes m})_{\Sigma_m}$。这个单子下降为同伦范畴 $h\mathsf{Sp}$ 上的一个单子，因此对应于一个代数的 1-范畴 $\mathsf{H}_\infty(\mathsf{Sp})$，称为 **$\mathsf{H}_\infty$-环谱**范畴（见[BMMS86]）。显然存在遗忘函子

$$h\mathsf{CAlg}(\mathsf{Sp}) \to \mathsf{H}_\infty(\mathsf{Sp}) \rightarrowtail \mathsf{CAlg}(h\mathsf{Sp}),$$

但一般而言，这两个函子都远非等价。

尽管如此，我们或许仍想描述 $\mathsf{H}_\infty(\mathsf{Sp})$ 中两个交换环谱之间所有可能的映射。回顾一下，由于 E 是复定向的，沿 $\Sigma^{\infty-2}\mathbb{CP}^\infty \to MU$ 的限制会诱导一个双射

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{CAlg}(h\mathsf{Sp})}(MU, E) \xrightarrow{\sim} \{\, f \in \widetilde{E}^2\mathbb{CP}^\infty \mid f|_{\mathbb{CP}^1} = 1 \,\}$$

它将从 MU 出发的同伦意义下的环映射与泛变形 $\Gamma^{\mathrm{univ}}/\mathcal{O}$上的坐标对应起来（更准确地说，是与相差一个$\mathcal{O}^\times$倍的坐标对应）。

1.2. **定理** (Ando [和95]; Zhu [Zhu20])。沿 $\Sigma^{\infty-2}\mathbb{CP}^\infty \to MU$ 的限制和沿 $\mathcal{O} \to \kappa$ 的投影诱导一个双射

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{H}_\infty(\mathsf{Sp})}(MU, E) \xrightarrow{\sim} \{\, \overline{f} \in \kappa \otimes_{\mathcal{O}} \widetilde{E}^2\mathbb{CP}^\infty \mid \overline{f}|_{\mathbb{CP}^1} = 1 \,\}.$$

也就是说，形式群 Γ/κ 的每个坐标都唯一地提升为 $\Gamma^{\mathrm{univ}}/\mathcal{O}$上的一个坐标，而且该坐标还由唯一的 H_∞-映射 $MU \to E$ 实现。

此外，这些结果还精确刻画了 $\Gamma^{\mathrm{univ}}/\mathcal{O}$ 上的坐标中与 H_∞-复定向相对应的那些坐标：它们就是**Ando 坐标**，或者按照 [Zhu20]的术语，称为**范数相干坐标**。

存在类似的结果，通过配边谱 MSU 和$MU\langle 6\rangle$ [AHS04]刻画 H_∞-定向的 E。

Date: 2026年3月16日。

1.3. **Morava E-理论中的幂运算与 $\mathrm{H}\infty$-映射。** Ando 对（1.2）的原始证明是用幂运算的语言表述的。后续工作（包括 [Str97], [Str98], [AHS04], [Rez09]）推进了我们对 Morava E-理论中幂运算的理解。

我们所需要的内容可概括如下。

(1) 在 Lubin-Tate 环上的模所构成的 1-范畴 $\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}}$ 上存在一个单子 $\mathbb{T}$，它近似于 $\mathrm{Mod}_E(\mathrm{Sp}^{K(h)})$ 中的 π_0Sym，其意义是存在一个自然映射

$$\mathbb{T}(\pi_0 M) \to \pi_0 \operatorname{Sym}(M), \qquad M \in \mathrm{Mod}_E(\mathsf{Sp}_{K(h)}),$$

具有如下性质：若 M 是自由 E-模的一个 $K(h)$-局部化（即直和 $\bigoplus E$），则 $\mathbb{T}(\pi_0 M)^{\wedge}_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\sim} \pi_0 \operatorname{Sym}(M)$（在极大理想 $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}$处完备化）。

(2) 令 $\mathrm{Alg}_{\mathbb{T}}$ 表示单子 $\mathbb{T}$所对应的代数范畴。那么，$\pi_0\colon \mathsf{CAlg}_E(\mathrm{Sp}^{K(h)}) \to \mathsf{CAlg}_{\mathcal{O}}$可典范地提升为一个函子

$$\pi_0\colon \mathsf{CAlg}_E(\mathsf{Sp}_{K(h)}) \to \mathrm{Alg}_{\mathbb{T}}\,.$$

此外，这个函子显然可分解为

$$\mathsf{CAlg}_E(\mathsf{Sp}_{K(h)}) \to \mathsf{H}_\infty(\mathrm{Mod}_E(\mathsf{Sp}_{K(h)})) \to \mathrm{Alg}_{\mathbb{T}},$$

经由 $K(h)$-局部 E-模中的 $\mathrm{H}\infty$-环的 1-范畴。

(3) 由 (1) 和 (2) 可立即推出：若 $A \in \mathsf{H}\infty(\mathrm{Mod}_E(\mathrm{Sp}^{K(h)}))$ 满足其底层 E-模是自由模的 $K(h)$-局部化，则

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{H}_\infty(\mathrm{Mod}_E(\mathsf{Sp}_{K(h)}))}(A, B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}_{\mathbb{T}}}(\pi_0 A, \pi_0 B).$$

(4) 特别地，若 $A \in \mathsf{H}\infty(\mathsf{Sp})$ 满足其 $K(h)$-局部化的 E-同调 $E_*^\vee A$ 集中于偶数次，且 $E_0^\vee A$ 是自由 $\mathcal{O}$-模的 $\mathfrak{m}$-进完备化，则我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{H}_\infty(\mathsf{Sp})}(A, E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}_{\mathbb{T}}}(E_0^\vee A, \mathcal{O}).$$

1.4. **余自由性及其证明。** 因此，(1.2) 是以下结论的推论，而以下结论可被视为同一思想的纯代数表述。

1.5. **定理**（$\mathcal{O}$ 的余自由性）。对于任意对象 $R \in \mathsf{Alg}_{\mathbb{T}}$，映射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}_{\mathbb{T}}}(R, \mathcal{O}) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{CAlg}_\kappa}(R/\mathfrak{m}R, \kappa),$$

由遗忘函子 $\mathrm{Alg}_{\mathbb{T}} \to \mathsf{CAlg}_{\mathcal{O}}$ 得到，并沿 $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}$ 约化后，是一个双射。

该结果由 Burklund、Schlank 和 Yuan [BSY22，定理 3.4], 作为其证明“色度 Nullstellensatz 定理”的一部分得出。他们对余自由性的表述略为一般，利用了如下观察 [Lur18, 第 5] 节：Morava E-理论的构造可以扩展为函子 Γ/κ

$$\mathsf{E}\colon \mathsf{Perf}_\kappa \to \mathsf{CAlg}(\mathsf{Sp}_{K(h)})$$

从完美 κ-代数的范畴出发，从而 $\mathsf{E}(\kappa) = E$，并且 $\mathcal{O}(A) := \pi_0\mathsf{E}(A)$ 带有一个满同态 $\mathcal{O}(A) \to A$。

1.6. **定理 (** $\mathcal{O}(A)$ 的余自由性)。对于任意对象 $R \in \mathsf{Alg}_{\mathbb{T}}$，以及任意 $A \in Perf_\kappa$，

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}_{\mathbb{T}}}(R, \mathcal{O}(A)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathsf{CAlg}_\kappa}(R/\mathfrak{m}R, A)$$

由 *th* *e* 遗忘函子 $\mathrm{Alg}_{\mathbb{T}} \to \mathsf{CAlg}_{\mathcal{O}}$ 并沿 $\mathcal{O}(A) \to A$ 投影所得的是一个双射 .

这些结果的证明见 [BSY22]，依赖于此前关于幂运算和 $\mathsf{Alg}_{\mathbb{T}}$ 范畴的研究。它还用到了 Hahn [Hah]，关于幂运算的一些精细计算，以及一个跨色度归纳论证。

恰巧，我也在几年前找到了 (1.5) 的一个证明，并在一次会议上宣布了这一结果。[1] 不过，我当时一直没能抽空把证明写出来。这篇短文旨在公开这个证明。

这里给出的证明与 Burklund、Schlank 和 Yuan 的证明大不相同。可以将其概括如下：*Ando* 和 *Zhu* 对(1.5)的证明，基本上可以完全改写为在幂运算代数的框架下进行。也就是说，不仅(1.5)的表述可以完全使用范畴 $\mathrm{Alg}_{\mathbb{T}}$ 的性质给出，其证明也同样可以如此，并遵循 Ando 首先提出的思路。

我们注意到，Akhil Mathew 也给出了余自由性的证明。他的证明与这里给出的证明有某些对应之处，但也必不可少地运用了 animated p-导子的理论，即[BL22，附录 A]。另一个余自由性的证明见于 [Rez26]。

1.7。**证明思路**。在 Ando 的原始论文及 Zhu 对其所作的推广中（因此在本文中也是如此），一个重要作用由变形之间的加性幂运算与同源之间的联系发挥。

从 $\mathbb{T}$-代数到 $\mathcal{O}$-代数的遗忘函子分解为

$$\mathrm{Alg}_{\mathbb{T}} \to \mathrm{QCoh}^{\mathrm{Fr}}(\mathsf{Def}) \subset \mathrm{QCoh}(\mathsf{Def}) \to \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}\,.$$

范畴 QCoh(Def) 编码了有关加法 幂运算的信息。遗忘函子落在满足*Frobenius* 同余的对象所构成的满子范畴中。这个同余可以表述为：某个加法幂运算 Q 满足如下形式的恒等式

$$Q(x) = x^p + p\theta(x),$$

其中， θ 是一个非加法 p-导子。（本文将使用 Frobenius 同余的另一种等价表述，见 §3.11。）此外，当 S 的底层 $\mathcal{O}$-代数是 p-无挠时，我们有 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Alg}_{\mathbb{T}}}(R,\ S) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^{\mathrm{QCoh}(\mathsf{Def})}(R,\ S)$。

范畴 QCoh(Def) 可以完全用形式群 Γ/κ 来描述：这里称其为叠 Def 上的环的拟凝聚层 范畴，其中对象是变形及其之间的同源。见 §3。

对于余自由性的证明，最相关的结构是 p次 *Adams* 运算。特别地，我们将证明（§3.20），对于 $\mathrm{QCoh}^{\mathrm{Fr}}(\mathsf{Def})$ 中的每个对象 R，其底层 $\mathcal{O}$-代数R 都带有一个自然的环自同态 $\psi_{\mathsf{R}}\colon\ R \to R$，它是 p^h-次 Frobenius 的一个提升：

$$\psi_{\mathsf{R}}(x) \equiv x^{p^h} \mod \mathfrak{m}R.$$

特别地，这定义了 π_0 上的一个自然运算，作用于 $K(h)$-局部交换 E-代数，并推广了经典的作用于 p-完备复 K-理论上的 p 次 Adams 运算。

证明的结构如下。首先，我们可以将问题化约到如下情形： $R \in \mathrm{Alg}_{\mathbb{T}}$ 的底层$\mathcal{O}$-代数是一个多项式环，因为泛例（由一个生成元自由生成的 $\mathbb{T}$-代数）就是如此。由于 $\mathcal{O}$ 是 p-无挠的，我们可以完全在范畴 $\mathrm{QCoh}^{\mathrm{Fr}}(\mathsf{Def})$ 中进行论证。基于此，论证分为两步。

(1) 我们证明，任意 $\mathcal{O}$-代数同态 $\mu\colon\ R \to \mathcal{O}$ 都可以模 $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}$ 唯一地由一个与 Adams 运算相容的同态逼近，即满足 $\mu\psi_R = \psi_{\mathcal{O}}\mu$。(2) 我们证明，任意与 Adams 运算相容的 $\mathcal{O}$-代数映射 $\mu\colon\ R \to \mathcal{O}$ 实际上都是 QCoh(Def) 中的态射。

1.8. **与 H_∞-论证的比较**。这一两步论证与 Ando 和 Zhu 给出的论证完全平行。在他们的情形中，$R = E_0^{\wedge}MU$是一个多项式环的 $\mathfrak{m}$-进完备化。这个对象余表示函子 F，该函子将一个 $\mathcal{O}$-代数 A映到泛变形到 A的基变换 Γ_A^{univ}上的坐标（模单位）集合。 R中的幂运算

[1]于2019年10月在芝加哥大学举行的中西部拓扑学研讨会。

幂运算描述了相对于形式群同源的这类坐标：一个同源 $f\colon G \to G'$ 将 G 上的坐标 x 映为其范数 $y := \mathrm{Norm}_f(x)$，其中范数是相对于 f 而言的。详情见 [Zhu20]。

一个 $\mathbb{T}$-代数映射 $R \to \mathcal{O}$（因此也是一个 H_∞-映射 $MU \to E$）对应于 $\Gamma^{\mathrm{univ}}/\mathcal{O}$ 上的一个范数相容坐标，即对每个变形 G 自然选取一个坐标 x_G，使得

$$x_{G'} = \mathrm{Norm}_f(x_G) \quad \text{for every isogeny } f\colon G \to G'.$$

Ando 和 Zhu 分两步将 Γ/κ 上的坐标 x 提升为泛变形 $\Gamma^{\mathrm{univ}}/\mathcal{O}$ 上的范数相容坐标 x：(i) 构造一个提升 x，它是唯一满足与沿 p 次幂同源的范数相容这一性质的提升；然后 (ii) 证明任何这样的提升 x 都与沿任意同源的范数相容。

1.9. **本文结构**。在 §2 中，我们回顾一些标准思路，介绍如何用与给定弗罗贝尼乌斯提升相交换的环同态来逼近环同态。

在 §3 中，我们定义变形叠 Def 上环的拟凝聚层范畴 QCoh(Def)。这主要是对 Rez09]，中相关内容的总结，重点介绍本文所需的部分。借助这些内容，我们定义了主定理证明中用到的*Adams* 运算。

接下来的第 §4 节是论证的核心，我们将在其中把弗罗贝尼乌斯提升应用于 QCoh(Def)。余自由性 $\mathcal{O}$ (1.5) 的证明几乎是显而易见的，将在 §5 中给出。在该节中，我们还将利用 [BSY22] 中的一些额外事实，证明扩张 (1.6)。

2. Frobenius lifting

在定理的证明中，我们需要能够用与给定的“弗罗贝尼乌斯提升”相交换的环同态来逼近环同态（模一个同余）。这当然是一个非常著名的想法。本节将对我们要用到的这一版本作出严谨陈述并给出证明。

固定一个素数 p 和一个整数 $h \geq 1$。我们定义一个范畴 $\mathcal{C}_{p^h}$，其对象是“配备了 p^h-Frobenius 提升的环”。具体而言，对象是三元组 $(R,\ I_R,\ \psi_R)$，其中 R 是一个交换环，$I_R \subseteq R$ 是一个理想，使得 $p \in I_R$，而 $\psi_R\colon R \to R$ 是一个环自同态，使得

$$\psi_R(x) \equiv x^{p^h} \mod I_R \qquad \text{for all } x \in R.$$

$\mu\colon (R,\ I_R,\ \psi_R) \to (S,\ I_S,\ \psi_S)$ 中的一个态射是环同态 $\mu\colon R \to S$，满足 $\mu(I_R) \subseteq I_S$ 以及 $\mu\psi_R = \psi_S\mu$。

称 $\mathcal{C}_{p^h}$ 中的对象 $(R,\ I_R,\ \psi_R)$ 为**完备**的，如果 $R \xrightarrow{\sim} \lim_k R/I_R^k$；如果 ψ_R 是一个满足 $\psi_R(I_R) = I_R$ 的同构，则称其为**完美**的。

2.1. 注记。对于任意这样的对象 $(R,\ I_R,\ \psi_R)$，映射 ψ_R 是 p^h 次 Frobenius 在 R/I_R 上的提升。此外，如果该对象是完美的，那么 R/I_R 是一个完美环。

2.2. 注记。注意，对于 $\mathcal{C}_{p^h}$ 中的对象 $(R,\ I_R,\ \psi_R)$，映射 $\psi_R\colon R \to R$ 提供了范畴 $\mathcal{C}_{p^h}$ 中的一个自然自同态，因为 $x \in I_R$ 蕴含 $\psi_R(x) \in I_R$。此外，一个对象是完美的，当且仅当这个自同态是一个自同构。

下面给出一些准则，用以构造逼近给定环同态的唯一 $\mathcal{C}_{p^h}$ 态射。

2.3. **命题** (弗罗贝尼乌斯提升)**.** 设

$$\iota_R\colon (A, I_A, \psi_A) \to (R, I_R, \psi_R) \qquad \textit{and} \qquad \iota_S\colon (A, I_A, \psi_A) \to (S, I_S, \psi_S)$$

是 $\mathcal{C}_{p^h}$ 中的态射，并假设 $I_R = \iota_R(I_A)R$，且 (S, I_S, ψ_S) 是完备且完美的。假设 $\mu\colon R \to S$ 是一个环同态，满足 $\mu\iota_R = \iota_S$（即，μ 是一个 A-代数映射）。那么存在唯一的态射 $\widehat{\mu}\colon (R, I_R, \psi_R) \to (S, I_S, \psi_S)$，属于 $\mathcal{C}_{p^h}$，使得

$$\widehat{\mu}\iota_R = \iota_S \qquad \textit{and} \qquad \widehat{\mu} \equiv \mu \mod I_S.$$

证明。 设给定如陈述中的一个 μ。注意，由于 μ 是一个 A-代数映射， $\mu(I_R) = \mu(\iota_R(I_A)R) \subseteq I_S$，且 $I_R = \iota_R(I_A)R$。定义函数

$$\mu' := \psi_S^{-1}\mu\psi_R \colon R \to S.$$

显然

- μ' 是一个环同态,
- $\mu'\iota_R = \iota_S$，因为
$$\mu\psi_R\iota_R = \mu\iota_R\psi_A = \iota_S\psi_A = \psi_S\iota_S.$$
- $\mu'(I_R) \subseteq I_S$，因为 $\psi_R(I_R) \subseteq I_R$，且 $\psi_S^{-1}(I_S) = I_S$。
- $\mu'(x) \equiv \mu(x)$ 模 I_S 对所有 $x \in R$ 都成立，因为$\mu\psi_R(x) \equiv \mu(x^{p^h}) = \mu(x)^{p^h}$ 模 $\mu(I_R) \subseteq I_S$，且 $\psi_S\mu(x) \equiv \mu(x)^{p^h}$ 模 I_S，再结合 $\psi_S^{-1}(I_S) = I_S$ 这一事实。

我们将证明以下断言，它表明在保持理想的 A-代数映射上，“通过 ψ 共轭是一个压缩算子”。

断言。 设 $\mu_1, \mu_2 \colon R \to S$ 是环同态，满足

$$\mu_i\iota_R = \iota_S, \qquad \mu_i(I_R) \subseteq I_S, \qquad i = 1, 2.$$

若对某个 $r \geq 1$ 及所有 $x \in R$，有 $\mu_1(x) \equiv \mu_2(x) \bmod I_S^r$，则对所有 $x \in R$，有 $\mu_1'(x) \equiv \mu_2'(x) \bmod I_S^{r+1}$。

由该断言可知，由于 S 关于 I_S 是完备的，我们可以定义

$$\widehat{\mu}(x) := \lim_{r\to\infty} \psi_S^{-r}\mu\psi_R^r(x) = \lim_{r\to\infty} \mu^{(r)}(x),$$

其中 $\mu^{(r)} := (\mu^{(r-1)})'$。函数 $\widehat{\mu} \colon R \to S$ 显然满足

- $\widehat{\mu}\iota_R = \iota_S$,
- $\widehat{\mu}(I_R) \subseteq I_S$,
- $\widehat{\mu}\psi_R = \psi_S\widehat{\mu}$，因为 $\mu_{(r)}\psi_R \equiv \psi_S\mu_{(r)}$ 模 I_S^{r+1}，

对所有 $x \in R$, • $\widehat{\mu}(x) \equiv \mu(x)$ 模 I_S，

因此这就是所需的映射。唯一性显而易见：给定两个解 $\widehat{\mu}_1$，$\widehat{\mu}_2$ 属于 $\mathcal{C}_{p^h}$，它们模某个 I_S^r 时相等，且 $r \geq 1$，上述论证表明它们模 I_S^{r+1} 时相等，因此由 S 的完备性可知 $\widehat{\mu}_1 = \widehat{\mu}_2$。

断言的证明。 给定断言中的 μ_1，μ_2，令

$$\mu_2(x) = \mu_1(x) + \alpha(x), \qquad \psi_R(x) = x^{p^h} + \beta(x),$$

定义映射 $\alpha \colon R \to I_S^r$和 $\beta \colon R \to I_R$。注意， α是一个 A-模映射，因为对于任意$a \in A$ 和 $x \in R$，我们有

$$\alpha(\iota_R(a)x) = \mu_2(\iota_R(a)x) - \mu_1(\iota_R(a)x) = \iota_S(a)\mu_2(x) - \iota_S(a)\mu_1(x) = \iota_S(a)\alpha(x).$$

因此， $\alpha(I_R) = \alpha(\iota_R(I_A)R) \subseteq I_S\alpha(R) \subseteq I_S^{r+1}$，所以 $\alpha\beta(R) \subseteq I_S^{r+1}$。

对于 $x \in R$，我们有

$$\begin{aligned}
\mu_2\psi_R(x) &= \mu_2\big(x^{p^h} + \beta(x)\big) \\
&= \mu_2(x)^{p^h} + \mu_2\beta(x) \\
&= \big(\mu_1(x) + \alpha(x)\big)^{p^h} + \mu_1\beta(x) + \alpha\beta(x) \\
&= \mu_1(x)^{p^h} + \sum_{k=1}^{p^h-1}\binom{p^h}{k}\mu_1(x)^{p^h-k}\alpha(x)^k + \alpha(x)^{p^h} + \mu_1\beta(x) + \alpha\beta(x) \\
&= \mu_1\big(x^{p^h} + \beta(x)\big) + \sum_{k=1}^{p^h-1}\binom{p^h}{k}\mu_1(x)^{p^h-k}\alpha(x)^k + \alpha(x)^{p^h} + \alpha\beta(x) \\
&\in \mu_1\psi_R(x) + \sum_{k=1}^{p^h-1} pI_S^{rk} + I_S^{rp^h} + I_S^{r+1} \\
&\subseteq \mu_1\psi_R(x) + I_S^{r+1},
\end{aligned}$$

因为 $p \in I_S$ 和 $p^h > 1$。这就证明了该断言。 □

例如，我们立即得出以下众所周知的观察。

2.4. **推论**。 设 (S, I_S, ψ_S) 是 $\mathcal{C}_{p^h}$中的一个完全完美对象。那么对于每个 $a \in S/I_S$，都存在唯一的 $\widetilde{a} \in S$，使得 *(i)* $\widetilde{a} \equiv a$ 模 I_S，且 *(ii)* $\psi_S(\widetilde{a}) = \widetilde{a}^{p^h}$。

证明。 将定理应用于 $(A, I_A, \psi_A) = (\mathbb{Z}, p\mathbb{Z}$,恒等函子) 和 $(R, I_R, \psi_R) = (\mathbb{Z}[x], p\mathbb{Z}[x], x \mapsto x^{p^h})$，利用 μ: $\mathbb{Z}[x] \to S$ 使得 $\mu(x) = a'$，其中 $a' \in S$ 是 a的任意提升。□

3. Quasicoherent sheaves on deformations

本节第一部分的内容概述了 [Rez09, §11, §12], 中的结果，而这些结果本身在很大程度上依赖于 Strickland [Str97], [Str98]的工作。具体而言，我们介绍了一个范畴 QCoh(Def)，它由“变形叠”上的“拟凝聚层”构成；还介绍了其满子范畴 $\mathrm{QCoh}^{\mathrm{Fr}}$(Def)，其中的对象满足“Frobenius 同余”。 [Rez09] 中对此作出了解释（按其术语，QCoh(Def) 是 $\mathrm{Comod}_{\mathcal{L}}$ 中交换幺半群对象所成的范畴）。

我们固定一个 Γ 高度为 $1 \le h < \infty$、定义在特征为 p的完美域 κ 上的形式群。

Let $\widehat{\mathcal{R}}$ 表示交换环范畴的子范畴，其对象为特征为 p的完备局部环 A，其态射 f: $A \to B$ 为连续同态（即满足$f^{-1}\mathfrak{m}_A = \mathfrak{m}_B$）。

3.1. **变形** $\widehat{\ }$。 Γ/κ 到 $A \in \mathcal{R}$ 的一个**变形**是三元组 $\mathcal{G} =$（G, i, γ），由 f

（1）定义在 A上的形式群 G，（2）环同态 i: $\kappa \to A/\mathfrak{m}_A$，以及（3） $A/\mathfrak{m}_A$上形式群的同构 γ: $i^*\Gamma \xrightarrow{\approx} G_0$，其中 G_0 表示 G到 $A/\mathfrak{m}_A$的基变换。

$\widehat{\ }$对任意满足 $p = 0$ 的 $A \in \mathcal{R}$，我们将 φ: $A \to A$ 记为 p次幂映射。回想，对这种 A 上的任意形式群 G，我们有相对Frobenius映射

$$G \xrightarrow{\mathrm{Fr}^d} (\varphi^d)^*G, \qquad d \ge 0.$$

此外，如果 G 是一个高度为 h 的形式群的变形，那么 Fr^d 是次数为 p^{dh} 的同源 .

一个 **变形态射** $f\colon \mathcal{G}=(G,\ i,\ \gamma)\to\mathcal{G}'=(G',\ i',\ \gamma')$ 到 A 是形式群同态 $f\colon G\to G'$，满足 (i) $i'=i\varphi^d$，且 (ii) 形式群图表在 $A/\mathfrak{m}_A$ 上

$$\begin{array}{ccc} i^*\Gamma & \xrightarrow{\mathrm{Fr}^d} & (i')^*\Gamma \\ {\scriptstyle\gamma}\downarrow\approx & & \approx\downarrow{\scriptstyle\gamma'} \\ G_0 & \xrightarrow[f_0]{} & G_0' \end{array}$$

可交换。注意，这意味着 f 是一个次数为 p^d 的同源，并且我们称态射 f 的**高度** 为 d。

我们得到一个变形范畴 $\mathsf{Def}(A)$。注意到以下性质。

3.2. **命题**。对于 $\mathsf{Def}(A)$ 中的任意两个对象 $\mathcal{G}$、$\mathcal{G}'$ 以及 $d\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，至多存在一个高度为 d 的态射 $f\colon \mathcal{G}\to\mathcal{G}'$。

证明。若从变形到 A 的一个同态 f 满足 $f_0=0$，则 $f=0$。将此应用于变形之间映射的差 $f-f'$。□

特别地，$\mathsf{Def}(A)$ 中任意两个对象之间至多存在一个同构（它们恰好是高度为 0 的映射）。因此，我们可以构造商范畴 $\mathsf{Def}(A):=\mathsf{Def}(A)/\sim$，将同构对象视为相同对象；而 $\mathsf{Def}(A)\to\overline{\mathsf{Def}(A)}$ 是一个等价。

另请注意，给定一个变形 $\mathcal{G}=(G,i,\gamma)$以及一个秩为 p^d的有限子群概形 $H\leq G$，存在唯一的变形态射 $f\colon \mathcal{G}\to\mathcal{G}'$，使得 $H=\mathrm{Ker}\ f$，并且f 的高度为 d。

$\widehat{\ }$指派 $A\mapsto\overline{\mathsf{Def}(A)}$定义了一个函子 $\mathcal{R}\to\mathsf{Cat}$。

3.3.**命题.** 函子$\mathsf{Def}(A)$ 在同构意义下由一个“仿射分次范畴概形”表示（从而$\mathsf{Def}(A)$ 在等价意义下可被表示）。也就是说，存在对象

$$\mathcal{O}_d,\qquad d\geq 0,\qquad \mathcal{O}=\mathcal{O}_0,$$

以及态射

$$s_d,t_d\colon \mathcal{O}\to\mathcal{O}_d,\qquad \nabla_{d,e}\colon \mathcal{O}_{d+e}\to\mathcal{O}_d\,{}^{s_d}\!\otimes_{\mathcal{O}}{}^{t_d}\mathcal{O}_e,$$

$\widehat{\ }$于 $\mathcal{R}$ 中，使得

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{R}}}(\mathcal{O},A)=\mathrm{ob}\,\mathsf{Def}(A),\qquad \coprod_{d\geq 0}\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{R}}}(\mathcal{O}_d,A)=\mathrm{mor}\,\mathsf{Def}(A),$$

并且映射 s_d、t_d、$\nabla_{d,e}$ 分别表示“源”、“靶”以及“复合 fg，其中 f 的高度为 d，且 g 的高度为 e”。

此外，

- $\mathcal{O}$ 是 ***Lubin-Tate*** 环，用于分类变形的同构类，而
- $\mathcal{O}_d$ 是第 d 个 ***Strickland*** 环，用于分类变形中秩为 p^d 的子群。

这些是极大理想为 $\mathfrak{m}_d\subset\mathcal{O}_d$ 的完全局部环（记作 $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_0\subset\mathcal{O}$），其中$\mathcal{O}_d/\mathfrak{m}_d\approx\kappa$。映射 s_d 表明 $\mathcal{O}_d$ 是一个有限生成的自由 $\mathcal{O}$- 模。

3.4. 注记。鉴于 (3.2)，这种结构是超定的：事实上，映射 s_d 和 t_d 诱导出一个满同态 $\mathcal{O}\widehat{\otimes}_{\mathbb{W}_p}\mathcal{O}\to\mathcal{O}_d$ [BSY22，命题 3.39]，，而 $\nabla_{d,e}$ 是与它们相容的唯一映射。

3.5. 注记。存在典范同构 $\mathcal{O}_d\approx E^0B\Sigma_{p^d}/T^{\mathrm{Tr}d}$，其中 J_d^{Tr}是由形如 $\Sigma_i\times\Sigma_{p^d-i}$ 的子群的迁移所生成的理想，其中 $0<i<p^d$ [Str98]。

3.6. **平凡变形**。 称到 A 的变形 $\mathcal{G}=(G,i,\gamma)$为**平凡**，如果(i) $\mathbb{F}_p\subseteq A$，且(ii) $\gamma\colon\ i^*\Gamma\xrightarrow{\approx}G_0$ 提升为$\sim$$A$上形式群的一个（必然唯一的）同构 $\widetilde{\gamma}\colon\ \widetilde{i}^*\Gamma\xrightarrow{\approx}G$，其中 $i\colon\ \kappa\to A$ 是 $i\colon\ \kappa\to A$的（必然唯一的）提升。等价地，$\mathcal{G}$为平凡当且仅当它$\widetilde{\ }$同构于形如$(i^*\Gamma,i,$id$)$的变形。

注意，变形 $\mathcal{G}\in$ Def(A) 平凡，当且仅当其表示映射 $\chi_{\mathcal{G}}\colon\ \mathcal{O}\to A$ 在极大理想 $\mathfrak{m}$ 上为零。此外，Def(A) 中的态射 $f\colon\ \mathcal{G}\to\mathcal{G}'$ 是两个平凡变形之间的态射，当且仅当其表示映射 $\chi_f\colon\ \mathcal{O}_d\to A$ 在极大理想 $\mathfrak{m}_d$ 上为零。

3.7. **Frobenius 态射**。 称态射 $f\colon\ \mathcal{G}=(G,\ i,\ \gamma)\to\mathcal{G}'=(G',\ i',\ \gamma')$ 为一个 **高度**d **Frobenius**，如果 (i) $\mathbb{F}_p\subseteq A$，且 (ii) 形式群之间的同态 $f\colon\ G\to G'$（定义在 A 上）可分解为

$$G\xrightarrow{\mathrm{Fr}^d}(i\varphi^d)^*G\xrightarrow{\approx}G',$$

即，$\ker f\leq G$ 是次数为 p^d 的“典范子群”。等价地，若 f 同构于形如 $(G,\ i,\ \gamma)\to((\varphi^d)^*G,\ i\varphi^d,\ (\varphi^d)^*\gamma)$ 的态射，则 f 是一个高度为 d 的 Frobenius。

3.8.**命题**。 存在满环同态

$$\nu_d\colon\mathcal{O}_d\to\mathcal{O}/p$$

具有以下性质。

(1) 变形的高度 d 态射是高度 d *Frobenius*，当且仅当其表示映射 $\chi\colon\ \mathcal{O}_d\to A$ 经由 ν_d分解。

(2) $\nu_d s_d\colon\ \mathcal{O}\to\mathcal{O}/p$ 是商映射，而 $\nu_d t_d\colon\ \mathcal{O}\to\mathcal{O}/p$ 是 p^d 次幂映射。(3) 商映射可分解为 $\mathcal{O}_d\xrightarrow{\nu_d}\mathcal{O}/p\to\mathcal{O}/\mathfrak{m}=\kappa$。

证明。 ν_d 是高度 d Frobenius 泛例的表示映射。性质 (3) 成立，是因为平凡变形之间的任意态射都是 Frobenius。□

3.9. **拟凝聚层**。 在 Def 上，一个**拟凝聚环层** 是指由以下数据构成的 $\mathrm{R}=(R,\iota_R,\nabla_{R,d})$:

(1) 一个交换环 R，(2) 一个环同态 $\iota=\iota_R\colon\ \mathcal{O}\to R$，以及 (3) 环同态 $\nabla_{R,d}\colon\ R\to\mathcal{O}_d\,{}^s\!\otimes_{\mathcal{O}}{}^\iota R$，使得图表

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\nabla_{R,d}} & \mathcal{O}_d\,{}^s\!\otimes_{\mathcal{O}}{}^\iota R \\ {\scriptstyle\nabla_{R,d+e}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\nabla_{R,e}} \\ \mathcal{O}_{d+e}\,{}^s\!\otimes_{\mathcal{O}}{}^\iota R & \xrightarrow[\nabla_{d,e}\otimes\mathrm{id}]{} & \mathcal{O}_d\,{}^s\!\otimes_{\mathcal{O}}{}^t\mathcal{O}_e\,{}^s\!\otimes_{\mathcal{O}}{}^\iota R \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{O} & \xrightarrow{t_d} & \mathcal{O}_d \\ {\scriptstyle\iota_R}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\iota_R} \\ R & \xrightarrow[\nabla_{R,d}]{} & \mathcal{O}_d\,{}^s\!\otimes_{\mathcal{O}}{}^\iota R \end{array}$$

交换。

也就是说，拟凝聚层是双代数 $(\mathcal{O}_d,s_d,t_e,\nabla_{d,e})$ 上的“余模代数”。我们将显然的拟凝聚层范畴记作 QCoh(Def)，其中态射 $(R,\iota_R,\nabla_{R,d})\to(S,\iota_S,\nabla_{S,d})$ 是与所有结构相容的环映射。注意，QCoh(Def) 通过 $\otimes_{\mathcal{O}}$ 成为对称幺半范畴。

3.10. 例。 若 $B\in\mathsf{CAlg}_E(\mathsf{Sp}^{K(h)})$是 Morava E-理论上的 $K(h)$-局部代数，则 π_0B自然具有拟凝聚层的结构，其中$\nabla_{\pi_0B,\ d}$ 由一个幂运算给出：$\pi_0B\to\pi_0\mathsf{Map}(\Sigma^\infty_+B\Sigma_{p^d},\ B)\approx E^0B\Sigma_{p^d}\otimes_{\mathcal{O}}\pi_0B\to\mathcal{O}_d\otimes_{\mathcal{O}}\pi_0B$。正如 [Rez09], 所解释的，这一构造可分解为

$$\mathsf{CAlg}_E(\mathsf{Sp}_{K(h)})\xrightarrow{\pi_0}\mathrm{Alg}_{\mathbb{T}}\to\mathrm{QCoh}(\mathsf{Def}).$$

3.11. **Frobenius 同余**。 我们称 Def 上的拟凝聚环层$(R,\ \iota_R,\ \nabla_{R,\ d})$满足**Frobenius 同余**，如果以下图表

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\nabla_{R,d}} & \mathcal{O}_d \overset{s}{\otimes}_{\mathcal{O}} \overset{\iota}{R} \\ {\scriptstyle \varphi^d}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nu_d\otimes \mathrm{id}} \\ R/p & \xrightarrow[\approx]{} & \mathcal{O}/p \overset{s}{\otimes}_{\mathcal{O}} \overset{\iota}{R} \end{array}$$

对所有 $d \geq 0$均可交换，其中 $\varphi^d\colon\ R \to R/p$ 是通过取 p^d 次幂诱导的映射。当且仅当关于 $d = 1$的单个图表可交换时，Frobenius 同余成立。

3.12. 注记。 其思想是，对高度为 d 的 Frobenius 的泛例处的拟凝聚层 $(R,\ \iota_R,\ \nabla_{R,\ d})$ 进行“求值”，会产生一个映射 $R \xrightarrow{(\nu_d\otimes \text{恒等函子})\nabla_{R,}} \overset{d}{\longrightarrow} R/p$。Frobenius 同余断言，这个环映射也应当是一个 p^d 次幂映射。

3.13. 例。 数据 O $=(\mathcal{O},$ 恒等函子 $t_d)$ 定义了一个满足 Frobenius 同余的拟凝聚层，因为 $t_d\nu_d = \varphi^d$。这是 QCoh(Def) 上幺半结构的单位对象。

3.14. 例。 (3.10) 的构造总能给出一个满足 Frobenius 同余的拟凝聚层，即，我们有

$$\mathsf{CAlg}_E(\mathsf{Sp}_{K(h)}) \xrightarrow{\pi_0} \mathrm{Alg}_{\mathbb{T}} \to \mathrm{QCoh}^{\mathrm{Fr}}(\mathsf{Def}) \subseteq \mathrm{QCoh}(\mathsf{Def}).$$

3.15. p**次幂映射**。 每个形式群 G 都有一个 p 次幂自同态 $p\colon\ G \to G$，它与所有同态交换，因此可以看作形式群范畴上恒等函子的一个自同态。 p次幂通常不是变形的自同态。不过，它确实导出了一个自然变换

$$p\colon \mathrm{Id} \to \Sigma \quad \text{of functors} \quad \mathsf{Def} \to \mathsf{Def},$$

因此，对于每个拟凝聚层 $(R,\ \iota_R,\ \nabla_{R,\ d})$，都有一个自然的“Adams 运算” $\psi_R\colon\ R \to R$；对于满足 Frobenius 同余的拟凝聚层，该运算是 p^h 次幂 Frobenius 的提升。下面我们将对此进行描述。

首先注意到，由于 Γ/κ 是一个高度为 h的形式群，其 p次幂映射满足 $p = \sigma \cdot \mathrm{Fr}^h$，其中存在唯一的同构 $\sigma\colon\ (\varphi^h)^*\Gamma \xrightarrow{\simeq} \Gamma$，它是定义在 κ上的形式群同构。

对于任意变形 $\mathcal{G} = (G,\ i,\ \Gamma)$，$R$ 上的 p 次幂映射诱导出一个高度为 h 的变形态射

$$[p]\colon (G, i, \gamma) \to (G, i\varphi^h, \gamma \cdot i^*\sigma).$$

此外，任意变形态射都适合于一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} (G,i,\gamma) & \xrightarrow{[p]} & (G, i\varphi^h, \gamma\cdot i^*\sigma) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ (G',i',\gamma') & \xrightarrow[[p]]{} & (G', i'\varphi^h, \gamma'\cdot i^*\sigma) \end{array} \tag{3.16}$$

因为 $fp = pf$ 是形式群之间的映射。

因此，我们有一个函子 $\Sigma\colon \mathsf{Def} \to \mathsf{Def}$，它在对象上的定义为

$$\Sigma(G, i, \gamma) := (G, i\varphi^h, \gamma \cdot i^*\sigma),$$

以及一个自然变换 $[p]\colon \mathrm{Id} \to \Sigma$，其在对象上的定义由上面的映射 $[p]$ 给出。注意，函子 Σ 是一个等价。

3.17. 注记。 回想一下，Aut(Γ/κ)，即映射 $\Gamma \to \operatorname{Spec}\kappa$ 的自同构群（也就是说，覆盖域自同构的形式群同构），作用于变形空间，事实上也作用于范畴 Def。函子 Σ 恰好是此作用在 Aut(Γ/κ) 的一个元素处的取值，即由 $\sigma\colon (\varphi^h)^*\Gamma \to \Gamma$ 表示的元素。

3.18. 例。 回忆一下， Γ/κ 称为 **Honda形式群**，当且仅当 $\kappa \subseteq \mathbb{F}_{p^h}$ 和 $p = \mathrm{Fr}^h$，也就是说，当且仅当 σ 是恒等映射。因此，对于 Honda 形式群 $\Sigma\colon$ Def $\to$ Def 是恒等函子。

3.19. **命题**。

(1)存在同构

$$\psi_{\mathcal{O}_d}\colon \mathcal{O}_d \to \mathcal{O}_d, \qquad d \geq 0, \qquad (\psi_{\mathcal{O}_0} = \psi_{\mathcal{O}})$$

它们表示函子 Σ。

(2)存在一个同态

$$q\colon \mathcal{O}_h \to \mathcal{O}$$

$\widehat{}$属于 $\mathcal{R}$，它表示自然变换 $[p]$，也就是说，若 $\mathcal{G}$ 由$\chi\colon \mathcal{O} \to R$分类，则映射 $[p]\colon \mathcal{G} \to \Sigma\mathcal{G}$由 $\chi q\colon \mathcal{O}_h \to \mathcal{O}$分类。

(3)我们有 $qs_h =$ 恒等函子 和 $qt_h = \psi_{\mathcal{O}}$，并且图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{d+h} & \xrightarrow{\nabla_{d,h}} & \mathcal{O}_d \,{}^s\!\otimes_{\mathcal{O}}{}^t\mathcal{O}_h \\ {\scriptstyle \nabla_{h,d}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{\mathcal{O}_d}\otimes q} \\ \mathcal{O}_h \,{}^s\!\otimes_{\mathcal{O}}{}^t\mathcal{O}_d & \xrightarrow[q\otimes\mathrm{id}]{} & \mathcal{O}_d \end{array}$$

对所有 d均交换。

(4) 映射 $\psi_{\mathcal{O}_d}$ 满足 $\psi_{\mathcal{O}_d}(x) = x^{p^h}$ 模 $\mathfrak{m}_d$。

证明。 $\psi_{\mathcal{O}_d}$ 和 q 的存在性是显然的。(3)中的方形图表体现了 $[p]$ 是一个自然变换这一事实：沿方形图表行进的两种方式，对应于沿(3.16)行进的两种方式。鉴于(3.6)，要证明(4)，只需计算函子 Σ 对平凡变形的作用；在这种情况下，我们可以归约到这类变形的泛例，即 (Γ, 恒等函子,恒等函子) $\in$ Def(κ)。□

3.20. **Adams 运算** ψ_R。 给定拟凝聚层 (R, ι, $\nabla_{R,\,d}$)，我们定义映射$\psi_R\colon\ R \to R$ 为以下的复合

$$R \xrightarrow{\nabla_{R,h}} \mathcal{O}_h \,{}^s\!\otimes_{\mathcal{O}}{}^\iota R \xrightarrow{q\otimes\mathrm{id}} \mathcal{O} \,{}^s\!\otimes_{\mathcal{O}}{}^\iota R = R.$$

我们所需的关键性质如下。

3.21. **命题**。 设 $(R, \iota_R, \nabla_{R,d})$ 为 Def 上的拟凝聚层。

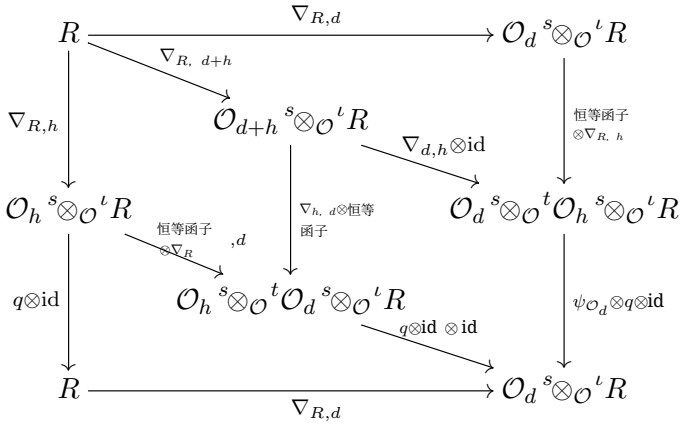
(1)我们有 $\psi_R\iota_R = \iota_R\psi_{\mathcal{O}}$。(2) 该图

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\nabla_{R,d}} & \mathcal{O}_d \,{}^s\!\otimes_{\mathcal{O}}{}^\iota R \\ {\scriptstyle \psi_R}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{\mathcal{O}_d}\otimes\psi_R} \\ R & \xrightarrow[\nabla_{R,d}]{} & \mathcal{O}_d \,{}^s\!\otimes_{\mathcal{O}}{}^\iota R \end{array}$$

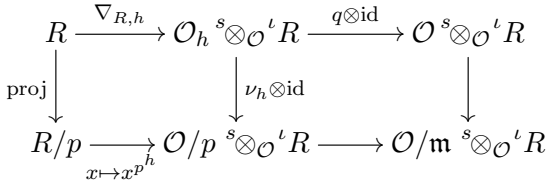
对所有 $d \geq 0$ 都交换。

(3) 若$(R, \iota, \nabla_{R,d})$ 满足 ***Frobenius*** 同余，则 $\psi_R(x) \equiv x^{p^h}$ 模 $\mathfrak{m}R$。

证明。利用 (3.19) 可立即得到恒等式 (1)。正方形 (2) 的周界为 f



由于 $(R,\ \iota_R,\ \nabla_{R,\ d})$ 是一个环层，因此上方和左侧的方格交换。下方的方格显然交换。右侧的方格由 (3.19)(3) 可知交换。为证明命题 (3)，考虑



左侧方块的交换性就是 Frobenius 同余，而右侧方块的交换性由 (3.8)(3) 立即可得。□

3.22. 例。 单位对象 $\mathsf{O} = (\mathcal{O},\ \mathrm{id}\ t_d)$ 上的 Adams 运算由 $(q\otimes\mathrm{id})t_d = \psi_{\mathcal{O}}$ 给出。也就是说，O 上的 Adams 运算与 (3.19) 中定义的结构映射 $\psi_{\mathcal{O}}$ 一致。特别地，它是一个同构。

3.23. 注记。 我们可以如下解释 (3.21)：给定一个拟凝聚层 $\mathsf{R} = (R,\ \iota_R,\ \nabla_{R,\ d})$，我们可以沿函子 Σ 进行基变换，从而定义一个新的拟凝聚层 $\Sigma^*\mathsf{R}$。它具有如下形式

$$\Sigma^*\mathsf{R} = (R, \iota_R\psi_{\mathcal{O}}, (\psi_{\mathcal{O}_d}\otimes\mathrm{id})\nabla_{R,d}).$$

自然变换 $[p]\colon \mathrm{Id} \to \Sigma$，诱导出拟凝聚层的映射 $\Sigma^*\mathsf{R} \to \mathsf{R}$，该映射由算子 ψ_R 实现。对于平凡变形，映射 $[p]$ 必然是高度为 h 的 Frobenius，因而当 R 满足 Frobenius 同余时，得到关于 ψ_R 的同余。

3.24. 注记。 由于任意 $B \in \mathsf{CAlg}_E(\mathrm{Sp}^{K(h)})$ 的 $\pi_0 B$ 都是一个 $\mathbb{T}$-代数，而 $\mathbb{T}$-代数都具有满足 Frobenius 同余的底层拟凝聚层，因此这一构造为任意 $K(h)$-局部交换 E-代数 B 提供了自然运算 $\psi\colon \pi_0 B \to \pi_0 B$。这一运算可视为 p次幂 **Adams 运算**；事实上，当 E 是经 p-完备化的复 K-理论时，它就特化为通常的 Adams 运算。

4. Frobenius lifts in quasicoherent sheaves

注意，对于完美域上高度为 h 的形式群 Γ/κ，Def 上的每个拟凝聚环层 $(R,\ \iota_R,\ \nabla_R)$ 都自然地给出 $\mathcal{C}_{p^h}$ 的一个对象 $(R,\ \mathfrak{m}_R,\ \psi_R)$，其中使用了上文定义的算子$\psi_R$。若 $(R,\ \iota_R,\ \nabla_R)$ 作为 $\mathcal{C}_{p^h}$ 的对象是 **完美** 的，我们就称它是**完备** 的；也就是说，若$R \xrightarrow{\sim} \lim_k R/\mathfrak{m}$。若它作为 $\mathcal{C}_{p^h}$ 的对象是完美的，我们就称它是 **完美** 的；也就是说，若 ψ_R 是一个同构，且 $\psi_R(\mathfrak{m}_R) = \mathfrak{m}_R$)。

4.1.例子。该 初始层 $\mathsf{O} = (\mathcal{O},\ \mathrm{id}\ t_d)$ 在 $\mathcal{C}_{p^h}$ 中给出 $(\mathcal{O},\ \mathfrak{m},\ \psi_{\mathcal{O}})$，它是完备且完美的 t.

另一个例子也很重要。

4.2.例。F

对于每个 $d \geq 0$，对象 $(\mathcal{O}_d, \mathfrak{m}_d, \psi_{\mathcal{O}_d})$ 是 $\mathcal{C}_{p^h}$ 的完全完美对象。

4.3. **定理**。 设 $(R, \iota_R, \nabla_{R,d})$ 与 $(S, \iota_S, \nabla_{S,d})$ 为 QCoh(Def) 中满足 *Frobenius* 同余的对象，并假设 $(S, \mathfrak{m}S, \psi_S)$ 作为 $\mathcal{C}_{p^h}$ 的对象是完全完美的。则对任意$\mathcal{O}$-代数映射 $\mu\colon R \to S$，存在唯一的拟凝聚层映射 $\widehat{\mu}\colon R \to S$，使得$\widehat{\mu} \equiv \mu$ 模 $\mathfrak{m}S$。

证明。 由于 $(S, \mathfrak{m}S, \psi_S)$ 是完全完美的， $\mathcal{C}_{p^h}$ 中的对象对 $\iota_R\colon (\mathcal{O}, \mathfrak{m}, \psi_{\mathcal{O}}) \to (R, \mathfrak{m}R, \psi_R)$ 与 $\iota_S\colon (\mathcal{O}, \mathfrak{m}, \psi_{\mathcal{O}}) \to (S, \mathfrak{m}S, \psi_S)$ 满足弗罗贝尼乌斯提升 (2.3) 的假设。因此存在唯一的 $\mathcal{O}$-代数映射 $\widehat{\mu}\colon R \to S$，使得

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\widehat{\mu}} & S \\ {\scriptstyle \psi_R}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi_S} \\ R & \xrightarrow[\widehat{\mu}]{} & S \end{array} \tag{4.4}$$

可交换，并且 $\widehat{\mu} \equiv \mu \bmod \mathfrak{m}S$。

接下来考虑下面这个可能不交换的图表

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\nabla_{R,d}} & \mathcal{O}_d \,{}^{s}\!\otimes_{\mathcal{O}}{}^{\iota_R} R \\ {\scriptstyle \mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\mu} \\ S & \xrightarrow[\nabla_{S,d}]{} & \mathcal{O}_d \,{}^{s}\!\otimes_{\mathcal{O}}{}^{\iota_S} S \end{array}$$

对于任意 $d \geq 0$。令 $\alpha = (\mathrm{id}_{\mathcal{O}_d} \otimes \mu)\nabla_{R,\ d}$ 和 $\beta = \nabla_{S,\ d}\mu$ 为方形两侧的两个复合映射 $R \to \mathcal{O}_d \,{}^{s}\!\otimes_{\mathcal{O}} S$。一旦我们能证明 $\alpha = \beta$，命题便得证。我们将通过再次应用弗罗贝尼乌斯提升来证明这一点。

首先注意到， α 和 β 都是 $\mathcal{O}$-代数映射，因为

$$\alpha\iota_R = (\mathrm{id}_{\mathcal{O}_d} \otimes \mu)\nabla_{R,d}\iota_R = (\mathrm{id}_{\mathcal{O}_d} \otimes \mu)(\mathrm{id}_{\mathcal{O}_d} \otimes \iota_{R,d})t_d = (\mathrm{id}_{\mathcal{O}_d} \otimes \iota_S)t_d = \nabla_{S,d}\iota_S = \nabla_{S,d}\mu\iota_R = \beta\iota_R.$$

接下来我断言

$$(\psi_{\mathcal{O}_d} \otimes \psi_S)\alpha = \alpha\psi_R, \qquad (\psi_{\mathcal{O}_d} \otimes \psi_S)\beta = \beta\psi_R.$$

在第一种情况下，

$$\begin{aligned} (\psi_{\mathcal{O}_d} \otimes \psi_S)\alpha &= (\psi_{\mathcal{O}_d} \otimes \psi_S)(\mathrm{id}_{\mathcal{O}_d} \otimes \mu)\nabla_{R,d} \\ &= (\mathrm{id}_{\mathcal{O}_d} \otimes \mu)(\psi_{\mathcal{O}_d} \otimes \psi_R)\nabla_{R,d} \\ &= (\mathrm{id}_{\mathcal{O}_d} \otimes \mu)\nabla_{R,d}\psi_R && \text{by (3.21)}, \\ &= \alpha\psi_R. \end{aligned}$$

在第二种情况下

$$\begin{aligned} (\psi_{\mathcal{O}_d} \otimes \psi_S)\beta &= (\psi_{\mathcal{O}_d} \otimes \psi_S)\nabla_{S,d}\mu \\ &= \nabla_{S,d}\psi_S\mu && \text{by (3.21)}, \\ &= \nabla_{S,d}\mu\psi_R && \text{by (4.4)}, \\ &= \beta\psi_R. \end{aligned}$$

考虑 关于理想 $\mathfrak{m}_{d,\ S} = \mathfrak{m}_d \,{}^{s}\!\otimes_{\mathcal{O}}{}^{\iota} S \subseteq \mathcal{O}_d \,{}^{s}\!\otimes_{\mathcal{O}}{}^{\iota} S$。由于 $s_d(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{m}_d$，因此 tha t

$$(\psi_{\mathcal{O}_d} \otimes \psi_S)(x) \equiv x^{p^h} \mod \mathfrak{m}_{d,S}.$$

考虑理想 $\mathfrak{m}_S = \mathcal{O}_d \,{}^{s}\!\otimes_{\mathcal{O}}{}^{\iota} \mathfrak{m}S \subseteq \mathcal{O}_d \,{}^{s}\!\otimes_{\mathcal{O}}{}^{\iota} S$。回顾一下， $s\colon\ \mathcal{O} \to \mathcal{O}_d$ 将 $\mathcal{O}_d$ 表示为一个有限生成的自由 $\mathcal{O}$-模。由于 S 关于 $\mathfrak{m}$完备，因此 $\mathcal{O}_d \,{}^{s}\!\otimes_{\mathcal{O}}{}^{\iota} S$ 关于 $\mathfrak{m}_S$完备。

由于 $s\colon\ \mathcal{O} \to \mathcal{O}_d$ 将 $\mathcal{O}_d$ 表示为有限生成的自由 $\mathcal{O}$-模（3.3），商环 $\mathcal{O}_d/s(\mathfrak{m})$ 是一个阿廷环。因此，对于某个整数 N，我们有 $s(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{m}_d \subseteq s(\mathfrak{m})^N$，从而$\mathfrak{m}_S \subseteq \mathfrak{m}_{d,\ S} \subseteq \mathfrak{m}_S^N$。由此可知，$\mathcal{O}_d \,{}^{s}\!\otimes_{\mathcal{O}}{}^{\iota} S$ 关于 $\mathfrak{m}_{S,\ d}$ 也是完备的。

因此， $\mathcal{C}_{p^h}$ 的对象 $\iota_R\colon (\mathcal{O},\ \mathfrak{m},\ \psi_O) \to (R,\ \mathfrak{m}R,\ \psi_R)$ 以及 $\nabla_{S,\ d}\iota_S\colon (\mathcal{O},\ \mathfrak{m}S,\ \psi_S) \to (\mathcal{O}_d \,{}^{s}\!\otimes_{\mathcal{O}}{}^{\iota} S,\ \mathfrak{m}_{d,\ S},\ \psi_{\mathcal{O}_d} \otimes \psi_S)$ 满足弗罗贝尼乌斯提升的假设（2.3），应用该结果可得 $\alpha = \beta$，正如所需。□

5. Proof of the Theorem

我们回顾一下 [Rez09]：存在遗忘函子

$$\mathrm{Alg}_{\mathbb{T}} \to \mathrm{QCoh}(\mathsf{Def}) \to \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}\,.$$

这些函子是单子性的且是余单子性的 [Rez09, 4.22], , 因此特别保持小极限和余极限。此外，$\mathrm{Alg}_{\mathbb{T}}$ 在 QCoh(Def) 中的像包含于全子范畴 $\mathrm{QCoh}^{\mathrm{Fr}}$(Def) 中，该子范畴由满足 Frobenius 同余的对象组成。

5.1. 注记。 </style}论文 [Rez09] 实际上给出了这些函子的全分次版本。这里我们只提取其中的零次部分。请注意，在该论文中，遗忘函子被描述为通过一个等价分解：$\mathrm{Alg}_{\Gamma} \approx$QCoh(Def)，其中 Alg_{Γ} 表示显式单子上的代数，而该单子映射到 $\mathbb{T}$，我们在这里将其称为 $\mathcal{Q}$。

5.2.**引理**。 映射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}_{\mathbb{T}}}(R, S) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{QCoh(Def)}}(R, S)$$

由遗忘函子 $\mathrm{Alg}_{\mathbb{T}} \to$QCoh(Def*) </style}*诱导，只要 S 的底层环是 p-无挠的，该映射就是一个双射。

证明。这一点在 [Rez09] 中是隐含的（但显然并未明确说明）。两个遗忘函子 $\mathrm{Alg}_{\mathbb{T}} \to \mathrm{CAlg}_{\mathcal{O}}$ 和 $\mathrm{QCoh(Def)} \to \mathrm{CAlg}_{\mathcal{O}}$ 都是单子性的，而诱导的单子映射 $\mathcal{Q} \to \mathbb{T}$ 在与 $\mathbb{Q}$ 作张量积后成为同构。参见 [Rez09，7.4，8.4]。（$\mathrm{QCoh(Def)} \to \mathrm{CAlg}_{\mathcal{O}}$ 是单子性的这一点可由 [Rez09，定理 B] 得出。□

$\mathrm{Alg}_{\mathbb{T}}$ 中的任意对象 R 都确定一个底层拟凝聚层 $(R,\ \iota_R,\ \nabla_{R,\ d})$，因而确定 $\mathcal{C}_{p^h}$ 中的一个底层对象 $(R,\ \mathfrak{m}R,\ \psi_R)$。

5.3。**定理**。 设 R 和 S 是 $\mathrm{Alg}_{\mathbb{T}}$ 中的对象，并假设

(1) S 的底层环是 p-无挠的，并且(2) $(S, \mathfrak{m}R, \psi_S)$

在 $\mathcal{C}_{p^h}$ 中是完备且完美的。

于是，遗忘函子 $\mathrm{Alg}_{\mathbb{T}} \to \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}$ 与投影 $\mathcal{O} \to \kappa$ 诱导出一个双射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}_{\mathbb{T}}}(R, S) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}}(R, S/\mathfrak{m}S).$$

证明。 固定 S，令 $\mathcal{X} \subseteq$Alg$_{\mathbb{T}}$ 为满足结论的 $\mathbb{T}$-代数 R 的集合。由于 $\mathrm{Alg}_{\mathbb{T}} \to$Alg$_{\mathcal{O}}$ 保余极限， $\mathcal{X}$ 在余极限下稳定。每个 $\mathbb{T}$-代数都是自由 $\mathbb{T}$-代数的余等化子，而自由 $\mathbb{T}$-代数是多项式环 [Str98, §5]。因此，我们可以将问题归约到 R 的底层 $\mathcal{O}$-代数为多项式环的情形。

在这种情况下，每个 $\mathcal{O}$-代数映射 $\mu\colon R \to S/\mathfrak{m}S$都可提升为一个 $\mathcal{O}$-代数映射 $\mu\colon R \to S$。由 (4.3)，存在唯一的态射 $\widehat{\mu}\colon R \to S$，使得 $\widehat{\mu} \equiv \mu$ 模 $\mathfrak{m}S$。由 (5.2)，这个$\widehat{\mu}$ 是 $\mathrm{Alg}_{\mathbb{T}}$ 中的唯一一个具有此性质的态射。□

证明 (1.5)。 由 (5.3) 立即可得，因为 $\mathbb{T}$-代数 $\pi_0 E = \mathcal{O}$ 是无挠、完备且完美的 (3.22)。

□

令 $E\colon \mathrm{Perf}_\kappa \to \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}^{K(h)})$ 表示文献[BSY22 第 2] 节所述 Morava E-理论的函子性扩张。我们将 $\mathcal{O}(A)$ 记作 $=\pi_0 E(A)$。

证明 (1.6)。只需证明 $\mathcal{O}(A)$ 是 p-无挠、完备且完美的。由[BSY22，定理 2.38]，可得

$$\pi_0 E(A) \approx \mathbb{W}_p A[\![u_1,\dots,u_{h-1}]\!], \qquad \mathfrak{m}\pi_0 E(A) = (p, u_1, \dots, u_{h-1}),$$

这表明 $\mathcal{O}(A)$ 是 p-无挠的，且关于 $\mathfrak{m}$ 完备，并且 $\mathcal{O}(A)/\mathfrak{m}\mathcal{O}(A) \approx A$。这也给出了环的一个同构

$$\left[\mathbb{W}_p(A) \otimes_{\mathbb{W}_p(\kappa)} \mathcal{O}\right]_p^\wedge \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(A).$$

剩下需要证明的是，Adams 运算 $\psi_{\mathcal{O}(A)}$ （由 $\pi_0 E(A)$ 上自然的 $\mathbb{T}$-代数结构诱导）是一个保持 $\mathfrak{m}\mathcal{O}(A)$ 的同构。这可由下面的断言直接得到。

断言。 $\psi_{\mathcal{O}(A)}$ 是 $\widetilde{\varphi}^h \otimes \psi_{\mathcal{O}}$ 的 p-完备化，其中 $\widetilde{\varphi}\colon \mathbb{W}_p(A) \to \mathbb{W}_p(A)$ 是 p次幂 Frobenius 的提升。

断言的证明。由自然性可知，在 $\mathcal{O}$-代数结构映射 $\mathcal{O} \to \mathcal{O}(A)$ 下， $\psi_{O(A)}$ 的作用与$\psi_{\mathcal{O}}$ 的作用相容。因此，只需计算复合 $\mathbb{W}_p A \to \mathcal{O}(A) \xrightarrow{\psi_{\mathcal{O}(A)}} \mathcal{O}(A)$。由 [BSY22，引理 3.27], ，存在一个等价

$$\mathbb{W}_{\mathbb{S}}(A) \otimes_{\mathbb{W}_{\mathbb{S}}(\kappa)} E \xrightarrow{\simeq} E$$

在 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}^{K(h)})$ 中，其中 $\mathbb{W}_{\mathbb{S}}(A)$ 表示球面 *Witt* 向量 [Lur18] [BSY22, §2.1]。球面 Witt 向量是 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}^p)_{\geq 0}$ 的一个对象，其底层谱是阿贝尔群 $\mathbb{W}_p A$ 的 Moore 谱，因此 $\pi_0 \mathbb{W}_{\mathbb{S}}(A) = \mathbb{W}_p(A)$。

我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_0 \mathbb{W}_{\mathbb{S}} A & \xrightarrow{P^{p^h}} & \pi_0 \underline{\mathrm{Map}}(\Sigma_+^\infty B\Sigma_{p^h}, \mathbb{W}_{\mathbb{S}} A) & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\pi_0 E(A) & \xrightarrow[P^{p^h}]{} & \pi_0 \underline{\mathrm{Map}}(\Sigma_+^\infty, B\Sigma_{p^h}, E(A)) & \longrightarrow \mathcal{O}_h \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(A) & \xrightarrow[\nu_h \otimes \mathrm{id}]{} \mathcal{O}(A)
\end{array}$$

其中 $P^m\colon \pi_0 R \to \pi_0 \underline{\mathrm{Map}}(\Sigma_+^\infty B\Sigma_m, R)$ 表示 m 次幂运算，是一个 $R \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp})$ 的幂运算，而其他映射都是环同态。Adams 运算 $\psi_{\mathcal{O}(A)}$ 是底行的复合。由于球面 Witt 向量是连通的，对于任意 m，我们有 $\pi_0 \mathrm{Map}(\Sigma_+^\infty B\Sigma_m, \mathbb{W}_{\mathbb{S}} A) = \pi_0 \mathbb{W}_{\mathbb{S}} A$ 且 $P^m(c) = c^m$。□ ——

References

[And95] Matthew Ando, *Isogenies of formal group laws and power operations in the cohomology theories E_n*, 《杜克数学杂志》**79** (1995)，第 2 期，423–485。[AHS04] Matthew Ando、Michael J. Hopkins 和 Neil P. Strickland, *The sigma orientation is an H_∞ map*, 《美国数学杂志》**126** (2004)，第 2 期，247–334。[BL22] Bhargav Bhatt 和 Jacob Lurie, *The prismatization of p-adic formal schemes* (2022)，可见于 arXiv:2201.06124。[BMMS86] R. R. Bruner、J. P. May、J. E. McClure 和 M. Steinberger, *H_∞ ring spectra and their applications*, 《数学讲义》，第 1176 卷，Springer-Verlag，柏林，1986。[BSY22] Robert Burklund、Tomer M. Schlank 和 Allen Yuan, *The chromatic Nullstellensatz* (2022)，可见于 arXiv:2207.09929。[GH04] P. G. Goerss 和 M. J. Hopkins, *Moduli spaces of commutative ring spectra*，载于《结构化环谱》，伦敦数学学会讲义丛书，第 315 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2004 年，第 151–200 页。[Hah] Jeremy Hahn, *Variations on a Nilpotence Theorem of Hopkins and Mahowald*。博士论文，哈佛大学，1978 年。[Lur18] Jacob Lurie, *Elliptic Cohomology II: Orientations* (2018)，可见于 http://www.math.harvard.edu/ ~lurie/。

[LT66] Jonathan Lubin 和 John Tate, *Formal moduli for one-parameter formal Lie groups*, 《法国数学会通报》**94** (1966), 49–59。[Mor85] Jack Morava, *Noetherian localisations of categories of cobordism comodules*, 《数学年刊》(第二辑)**121**(1985), 第 1 期, 1–39, DOI 10.2307/1971192。[Rez09] Charles Rezk, *The congrugence criterion for power operations in Morava E-theory*, 《同调、同伦与应用》**11** (2009), 第 2 期, 327–379, 可见于 arXiv:0902.2499。[Rez26] , *The Witt filtration of Lubin-Tate deformation rings* (2026), 预印本。[Str97] ~~Neil~~ P. Strickland, *Finite subgroups of formal groups*, 《纯粹与应用代数杂志》**121** (1997), 第 2 期, 161–208。[Str98] N. P. Strickland, *Morava E-theory of symmetric groups*, 《拓扑学》**37** (1998), 第 4 期, 757–779, 可见于 arXiv:math/9801125。[Zhu20] Yifei Zhu, *Norm coherence for descent of level structures on formal deformations*, 《纯粹与应用代数杂志》**224**(2020), 第 10 期, 106382, 35 页。

Department of Mathematics, University of Illinois Urbana-Champaign, Urbana, IL*Email address*: rezk@illinois.edu