arXiv:2603.12496v1 [math.AC] 12 Mar 2026

广义簇结构的正则拉回

米沙·盖克　　特曼、MICHAEL SHAPIRO 和阿列克·维因　　施泰因

Abstract. 我们研究两个问题：如何将拟仿射簇上的正则簇结构提升到环境仿射空间，以及如何定义仿射空间之间主导有理映射下正则簇结构的正则拉回。我们给出了相应对象（称为近簇结构）存在的充分条件，并研究其组合结构、相容泊松括号及相应的上簇代数。

1. Introduction

近年来，我们研究了单李群及其齐性空间上的簇结构，这些结构与（齐次）Belavin–Drinfeld 泊松–李括号相容，参见例如 [6] 及其中的参考文献。在致力于构造一般方法的过程中，我们在 [7] 遇到了以下两种情形：(i) 李群上的类簇结构，是泊松仿射空间到该李群的主导有理映射对一个相容的（广义）簇结构作拉回所得；(ii) 泊松仿射空间上的类簇结构，是对嵌入该仿射空间、作为拟仿射簇的李群上的相容（广义）簇结构作拉回所得。事实证明，这两种过程具有许多共同特征，而且我们认为，这种拉回机制的适用范围远不止 [7]中所考虑的特定例子。因此，我们在此给出正则拉回的一般构造。

为阐明这一思想，我们先从一个有代表性的特殊情形入手。设 $\Psi : \mathbb{A}^r \dashrightarrow \mathbb{A}^s$ 是一个主导有理映射，并假设 $\mathbb{A}^s$ 带有正则广义簇结构 $\mathcal{C}$，也就是说，每个簇中的每个簇变量都是 $\mathbb{A}^s$上的正则函数。固定 $\mathbb{A}^r$ 上的仿射坐标系 x_1、……、x_r，以及 $\mathbb{A}^s$上的仿射坐标系 y_1、……、y_s，那么每个簇变量 f_l 都可以改写为关于 x_1、……、x_r的有理函数，且在 $\mathbb{A}^r$上不正则。我们的目标是在 $\mathbb{A}^r$ 上构造一种正则广义簇结构的类似物，记作 $\mathcal{C}$。我们不再考察 $\Psi^* f_l$，而是将它们的分子作为簇变量；这些分子仍然是正则函数。此外，新的冻结簇变量取自 $\Psi^* f_l$的分母中的不可约因子。 $\mathcal{C}$ 中的交换关系由拉回 $\mathcal{C}$中的交换关系得到：将结果改写为具有公分母的形式，再取其分子。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 13F60.

Key words and phrases. 簇代数，拟仿射簇。

关键在于，所得广义交换关系的拉回可能不同于标准的广义簇关系。在这两种情形中，右端都是一个多项式，其单项式按线性顺序排列。在通常的广义簇关系中，最低次和最高次单项式互素；而在拉回关系中，这两个极端单项式不一定互素。尽管在这两种情形下，关系的变异都可以通过交换箭图的变异来编码，但由簇拉回产生的箭图突变规则可能复杂得多，详情见第 4 节。

第 2 节给出了簇拉回的构造。第 3 节提出了拉回定义良好的必要条件。第 4 节对变异规则作了组合描述。第 5 节讨论了 $\mathbb{A}^r$ 和 $\mathbb{A}^s$上的泊松括号的相容性。最后，第 6 节给出$\widehat{}$充分条件，以确保上簇代数的拉回 $\mathcal{A}$ 正则且完备，即$\mathcal{A} = \mathbb{C}[\mathbb{A}^r]$。

我们的研究部分得到了美国国家科学基金会研究基金 DMS #2100785（M. G.）和 DMS #2100791（M. S.），以及以色列科学基金会基金 #2848/25（A. V.）的资助。

2. General question

设 $G = \{g_i\}_{i\in I}$ 为 s维仿射空间 $\mathbb{A}^s$ 上的有限个互不相同的不可约多项式，坐标为 $y_1, \ldots, y_s$。每个 g_i 都定义一个不可约除子 $D_i = \{g_i = 0\}$。设 $V = \mathbb{A}^s \setminus D_V$满足 $D_V = \cup_{i\in I} D_i$，并令其为由集合 $\{D_i\}_{i\in I}$定义的拟仿射簇，因此， V上的任意正则函数f 都可以唯一地写成

$$f = \hat{f} \prod_{i\in I} g_i^{-\lambda_i(f)} \tag{2.1}$$

ˆ其中 $f \in \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_s]$是一个不能被任何 g_i和 λ_i整除的多项式（f） $\in \mathbb{Z}$,$i \in I$。注意，此处以及下文中，我们允许 λ_i（f）取负值。

此外，设 $r \geq s$，并设 Ψ: $\mathbb{A}^r \dashrightarrow \mathbb{A}^s$ 是从一个r维仿射空间 $\mathbb{A}^r$（坐标为 $x_1, \ldots, x_r$）到 $\mathbb{A}^s$ 的主导有理映射，满足以下条件：存在一族 $r-s$ 个不可约且代数独立的多项式 $\mathrm{H} = \{\mathrm{h}_j\}_{j\in J}$，它们属于 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_r]$，使得对于每个 y_m, $m \in [1, s]$，都可以将 y_m的拉回写成 $\Psi^* y_m = \mathrm{y}_m \prod_{j\in J} \mathrm{h}^{-\kappa_{j(y_m)\,j}}$，其中 $\mathrm{y}_m \in \mathbb{C}[x_1, \ldots .x_r]$不能被任何 h_j 整除，且 κ_j（y_m） $\in \mathbb{Z}$, $j \in J$；（某些情况下，可能对所有 $m \in [1, s]$，都有 $j \in J$, κ_j（y_m） $= 0$）。因此，对于任意多项式 $p \in \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_s]$，存在唯一的多项式 p $\in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_r]$，它不能被任何 h_j 整除，使得

$$\Psi^* p = \mathrm{p} \prod_{j\in J} \mathrm{h}_j^{-\kappa_j(p)} \tag{2.2}$$

其中 $\kappa_j(p) \in \mathbb{Z}$, $j \in J$。特别地，这样的 g_i 多项式记作 g_i, $i \in I$。多项式 $\{\mathrm{g}_i\}_{i\in I}$ 和 $\{\mathrm{h}_j\}_{j\in J}$ 称为特 distinguished 多项式。下文中，为方便起见，我们将特 distinguished 多项式族记作 $\{\mathrm{q}_k\}_{k\in K}$，其中 $K = I \cup J$，使得对于 $k \in I$，$\mathrm{q}_k = \mathrm{g}_k$；对于 $k \in J$，$\mathrm{q}_k = \mathrm{h}_k$。

假设 $\mathcal{C}$ 是 V上的正则（广义）簇结构，且 $F \cup G = \{f_l\}_{l=1}^s$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个初始簇，其中包括作为冻结变量的 $\{g_i\}_{i\in I}$（F 中也可能还有其他冻结变量）。由 (2.1)、(2.2) 可得

$f_l \in F$

$$\Psi^* f_l = \hat{\mathbf{f}}_l \prod_{k\in K} \mathbf{q}_k^{-\lambda_k(f_l)}. \tag{2.3}$$

这里，$\hat{\mathbf{f}}_l \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_r]$ 不能被任何 $\mathbf{q}_k$ 整除；$k \in I$ 的指数 $\lambda_k(f_l)$ 定义于 (2.1) 中，而 $k \in J$ 的指数 $\lambda_k(f_l) \in \mathbb{Z}$ 可通过上文定义的 $\lambda_i(f_l)$、$\hat{\kappa}_j(g_i)$ 和 $\kappa_j(f_l)$ 表示；不过，$\lambda_k(f_l)$ 的显式公式对于后续讨论并非必要。

我们的目标是直接研究函数 $\hat{\mathbf{f}}_l$ 在 $\mathcal{C}$ 的簇之间变换时的行为，而不追踪原函数 f_l 的行为。我们将证明，在某些温和限制条件下，给定 $\mathcal{C}$ 的初始种子 $\Sigma = (Q, F \cup G, \mathcal{P})$，便可定义种子 $\Psi^*\widehat{\Sigma} = (\Psi^*\widehat{Q}, \widehat{\mathbf{F}} \cup \mathbf{G} \cup \mathbf{H}\ \Psi^*\widehat{\mathcal{P}})$、箭图 $\Psi^*\widehat{Q}$ 的变异，以及 $\widehat{\mathbf{F}} = \{\hat{\mathbf{f}}_l\}$ 中近似簇变量的交换关系，从而在 $\mathbb{A}^r$ 上得到一个（广义）近簇结构 $\Psi^*\mathcal{C}$。当 $G = \varnothing$ 我们有时省略帽号记法，并将 $\Psi^*\Sigma = (\Psi^*Q, \mathbf{F} \cup \mathbf{H}\ \Psi^*\mathcal{P})$ 与 $\mathbf{F} = \{\mathbf{f}_l\}$ 一并讨论；当 Ψ 平凡，因而 $\mathbf{H} = \varnothing$ 时，我们有时省略 Ψ 和帽号记法，并讨论 $\Sigma = (Q, F \cup G, \mathcal{P})$。

我们从两个看起来相似的例子开始。

例 2.1. 假设 $s = 4$ 和 $I = \varnothing$，从而 $V = \mathbb{A}^4$ 具有坐标 y_1, y_2, y_3, y_4。通过初始簇 $\{f_1 = y_1, f_2 = y_2, f_3 = y_3, f_4 = y_1y_4 - y_2y_3\}$（其中冻结变量为 f_2, f_3, f_4），在 V 上定义簇结构 $\mathcal{C}$，并令其唯一的交换关系为 $f_1f_1' = f_2f_3 + f_4$，从而 $f_1' = y_4$。显然，$\mathcal{C}$ 只有两个不同的种子，并且是正则的。此外，考虑具有坐标 $x_1,\dots,x_5$ 的 $\mathbb{A}^5$ 以及映射 $\Psi\colon \mathbb{A}^5 \to \mathbb{A}^4$，该映射由 $\Psi^*y_1 = x_1/x_5$ 和 $\Psi^*y_i = x_i$（对 $i = 2, 3, 4$）给出。假设 $|J| = 1$，且唯一的特征多项式是 $\mathbf{h} = x_5$，从而对于 $i = 1, 2, 3$，有 $\mathbf{f}_i = x_i$，$\mathbf{f}_1' = x_4$，$\mathbf{f}_4 = x_1x_4 - x_2x_3x_5$，并且 $\lambda(f_1) = \lambda(f_4) = 1$，$\lambda(f_2) = \lambda(f_3) = \lambda(f_1') = 0$。因此，$f_1$ 的交换关系可以改写为 $(\mathbf{f}_1/\mathbf{h})\mathbf{f}_1' = \mathbf{f}_2\mathbf{f}_3 + \mathbf{f}_4/\mathbf{h}$，由此得到 $\mathbf{f}_1\mathbf{f}_1' = \mathbf{f}_2\mathbf{f}_3\mathbf{h} + \mathbf{f}_4$。后者是具有冻结变量 $\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4$ 和 $\mathbf{h}$ 的 $\mathbb{A}^5$ 上簇结构 $\Psi^*\mathcal{C}$ 的通常交换关系。

例2.2。在本例中，V 和 $\mathcal{C}$ 与例 2.1 中相同，映射 $\Psi\colon \mathbb{A}^5 \to \mathbb{A}^4$ 由 $\Psi^*y_2 = x_2/x_5$ 和 $\Psi^*y_i = x_i$（对于 $i = 1$、3、4）给出。唯一的特征多项式与 $\mathbf{h} = x_5$ 相同，因此对于 $i = 1$、2、3，有 $\mathbf{f}_i = x_i$、$\mathbf{f}_1' = x_4$、$\mathbf{f}_4 = x_1x_4x_5 - x_2x_3$，并且 $\lambda(f_2) = \lambda(f_4) = 1$，$\lambda(f_1) = \lambda(f_3) = \lambda(f_1') = 0$。因此，$f_1$ 的交换关系可改写为 $\mathbf{f}_1\mathbf{f}_1' = (\mathbf{f}_2/\mathbf{h})\mathbf{f}_3 + \mathbf{f}_4/\mathbf{h}$，这不会为 $\mathbf{f}_1$ 和 $\mathbf{f}_1'$ 产生任何簇型交换关系。

可以尝试考虑满足簇交换关系 $\mathbf{f}_1\bar{\mathbf{f}}_1' = \mathbf{f}_2\mathbf{f}_3 + \mathbf{f}_4$ 的 $\bar{\mathbf{f}}_1' = \mathbf{h}\mathbf{f}_1'$，以解决这个问题。然而，这种构造并非规范：也可以改为考虑满足簇交换关系 $\bar{\mathbf{f}}_1\mathbf{f}_1' = \mathbf{f}_2\mathbf{f}_3 + \mathbf{f}_4$ 的 $\mathbf{f}_1 = \mathbf{h}\mathbf{f}_1$。请注意，不仅相应的簇结构在 $\mathbb{A}^5$ 上不同，相应的上簇代数也不同。事实上，在第一种情况下，我们有

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{A}}_1 &= \mathbb{C}[x_1^{\pm1}, x_2, x_3, x_5, x_1x_4x_5 - x_2x_3] \cap \mathbb{C}[(x_4x_5)^{\pm1}, x_2, x_3, x_5, x_1x_4x_5 - x_2x_3]\\ &= \mathbb{C}[x_1^{\pm1}, x_2, x_3, x_5, x_4x_5] \cap \mathbb{C}[(x_4x_5)^{\pm1}, x_1, x_2, x_3, x_5]\\ &= \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_5, x_4x_5],\end{aligned}$$

因此 $x_4 \notin \overline{\mathcal{A}}_1$，而在第二种情况下，类似的计算可得

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{A}}_2 &= \mathbb{C}[(x_1x_5)^{\pm 1}, x_2, x_3, x_5, x_1x_4x_5 - x_2x_3] \cap \mathbb{C}[x_4^{\pm 1}, x_2, x_3, x_5, x_1x_4x_5 - x_2x_3] \\ &= \mathbb{C}[x_2, x_3, x_4, x_5, x_1x_5],\end{aligned}$$

因此 $\overline{\mathcal{A}}_1 \neq \overline{\mathcal{A}}_2$。

例2.2说明了一个一般性问题。根据定义， Σ中任意一对相邻种子Σ'的交换关系 $\mathcal{C}$为 $f_m^{\Sigma} f_m^{\Sigma'} = P^{\Sigma}{}_{,m}{}^{\Sigma'}$，其中$P^{\Sigma}{}_{,m}{}^{\Sigma'} \in \mathbb{C}[\{f_l^{\Sigma}\}_{l\neq m}, \{g_i^{\pm 1}\}_{i\in I}]$， f_m^{Σ}和 $f_m^{\Sigma'}$分别是 Σ和Σ'中的簇变量，而 $P^{\Sigma}{}_{,m}{}^{\Sigma'}$ 是相应交换关系的右侧。该关系给出

$$\frac{\hat{\mathbf{f}}_m^{\Sigma}\hat{\mathbf{f}}_m^{\Sigma'}}{\prod_{k\in K}\mathbf{q}_k^{\lambda_k(f_m^{\Sigma})+\lambda_k(f_m^{\Sigma'})}} = \frac{\tilde{\mathbf{P}}_m^{\Sigma,\Sigma'}}{\prod_{k\in K}\mathbf{q}_k^{\Lambda_k(P_m^{\Sigma,\Sigma'})}} \tag{2.4}$$

其中 $\tilde{\mathbf{P}}_m^{\Sigma}{}^{\Sigma'} \in \mathbb{C}\left[\{\hat{\mathbf{f}}_l^{\Sigma}\}_{l\neq m}, \{\mathbf{g}_i\}_{i\in I}, \{\mathbf{h}_j\}_{j\in J}\right]$ 不能被任何 $\mathbf{q}_k$ 整除。我们称 $\mathcal{C}$ 存在相干拉回，若对于任意种子 Σ 和任意可变指标 m，Laurent 单项式

$$M = \prod_{k\in K} \mathbf{q}_k^{\lambda_k(f_m^{\Sigma})+\lambda_k(f_m^{\Sigma'})-\Lambda_k(P_m^{\Sigma,\Sigma'})} \tag{2.5}$$

等于 1，且族 $\hat{\mathbf{F}}^{\Sigma} \cup \mathbf{G} \cup \mathbf{H}$ 在 $\mathbb{A}^r$ 上代数独立。

如下一例所示，相干性的概念相当微妙：可能对于某个种子 $M = 1$ 中的所有交换关系， Σ，而对于相邻种子 $M \neq 1$ 中的某个交换关系， Σ'。

例2.3。假设 $s = 3$ 和 $I = \varnothing$，因此 $V = \mathbb{A}^3$ 的坐标为y_1、 y_2、 y_3。通过初始簇 $\mathcal{C}$ V、 $\{f_1 = y_1, f_2 =$，定义 $y_1^2 + y_1y_2 - 1$ 上的簇结构 $f_3 = y_3f_2^2 - y_1 - y_2\}$，其中冻结变量为 f_3，交换关系为$f_1f_1' = 1 + f_2$ 和 $f_2f_2' = 1 + f_1f_3$，因此 $f_1' = y_1 + y_2$ 且 $f_2' = y_1y_3f_2 - 1$。由于 $\mathcal{C}$ 是一个带有一个冻结变量的秩 2 簇结构，它恰有六个不同的簇变量： f_1、 f_2、 f_3、 f_1'、 f_2'（如上所列），以及另一个变量 f_2''。该变量满足与初始簇在方向 1 上相邻的簇中的交换关系 $f_2f_2'' = f_1' + f_3$，因此 $f_2'' = y_3f_2$。由此可见， $\mathcal{C}$ 是 V 上的正则簇结构。

进一步，考虑坐标为 $x_1, \ldots, x_4$ 的 $\mathbb{A}^4$，以及由 $\Psi^* y_i = 1 + x_ix_4$ 给出的映射 Ψ: $\mathbb{A}^4 \to \mathbb{A}^3$，其中 $i = 1, 2$ 和 $\Psi^* y_3 = x_3x_4$。假设 $|J| = 1$，且唯一的特征多项式是 $\mathbf{h} = x_4$，因此 $\Psi^* f_i = \mathbf{f}_i$，其中 $i = 1, 2, 3$, $\Psi^* f_i' = \mathbf{f}_i'$，其中$i = 1, 2$，且 $\Psi^* f_2'' = \mathbf{f}_2''\mathbf{h}$。初始簇$\tilde{}$ $\tilde{}$中交换关系的右端分别为 $P_1 = 1 + f_2$ 和 $P_2 = 1 + f_1f_3$，因此 $\mathbf{P}_1 = 1 + \mathbf{f}_2$ 且 $\mathbf{P}_2 = 1 + \mathbf{f}_1\mathbf{f}_3$。于是，通过 (2.5) 定义的 M 等于 1。然而，在沿方向 1 与初始簇相邻的簇中，关于f_2的新交换关系的右端为 $P_2'' = f_1' + f_3$，因此 $\tilde{}\mathbf{P}_2'' = \mathbf{f}_1' + \mathbf{f}_3$,，由此 (2.5) 得出 $M = 1/\mathbf{h}$，故相容性遭到破坏。

本节最后一个例子展示了 $I \neq \varnothing$ 及其上的簇结构为广义簇结构的情形。这个例子对于研究与 R 矩阵泊松括号相容的 GL_n 上的（广义）簇结构十分重要。这类括号由 Belavin–Drinfeld 三元组对 $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma_1, \Gamma_2, \gamma)$ 分类，其中 Γ_1 和 Γ_2 是 A_{n-1} 根系中正单根集合的子集，而 γ 是幂零等距变换（详情见 [6] ）。在 [6] 中，我们研究了

Belavin–Drinfeld 三元组的一个子类，并称其为非周期，这类三元组在 GL_n 上导出普通簇结构。周期Belavin–Drinfeld三元组的首个实例在 [5, 第 6] 节中作为周期阶梯矩阵理论的一个应用进行了研究。它在 GL_6 上给出了一个广义簇结构。下面的例子将在 GL_3 中展示一种类似的构造。

例2.4。设 $V = GL_3$ 的坐标为 $X = (x_{ij})_{i,\ j=1}^{3}$ 由条件 $\det X \neq 0$ in $\mathrm{Mat}_3 = \mathbb{A}^9$ 给出，因此 $|I| = 1$。Belavin–Drinfeld 三元组对$\mathbf{\Gamma}^{\mathrm{r}}, \mathbf{\Gamma}^{\mathrm{c}}$ 为

$$\Gamma_1^{\mathrm{r}} = \{\alpha_1\},\ \Gamma_2^{\mathrm{r}} = \{\alpha_2\},\ \gamma^{\mathrm{r}}(\alpha_1) = \alpha_2; \qquad \Gamma_1^{\mathrm{c}} = \{\alpha_2\},\ \Gamma_2^{\mathrm{c}} = \{\alpha_1\},\ \gamma^{\mathrm{c}}(\alpha_2) = \alpha_1.$$

[6] 的构造产生周期矩阵

$$\begin{bmatrix}
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & x_{31} & x_{32} & x_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\dots & 0 & x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\dots & 0 & x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\dots & 0 & x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{21} & x_{22} & x_{23} & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{31} & x_{32} & x_{33} & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 & \dots \\
\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{11} & x_{12} & \dots \\
\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{21} & x_{22} & \dots \\
\dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{31} & x_{32} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{bmatrix}$$

相应的特征多项式为

$$\det \begin{bmatrix} x_{13} & 0 & tx_{11} & tx_{12} \\ x_{23} & x_{11} & x_{12} + tx_{21} & x_{13} + tx_{22} \\ x_{33} & x_{21} & x_{22} + tx_{31} & x_{23} + tx_{32} \\ 0 & x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = x_{13} \det X - tc(X) + t^2 x_{31} \det X,$$

而核（定义见 [5] ）是一个 5×5 矩阵

$$\Phi = \begin{bmatrix} x_{23} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 \\ x_{33} & x_{21} & x_{22} & x_{23} & 0 \\ 0 & x_{31} & x_{32} & x_{33} & 0 \\ 0 & 0 & x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}.$$

初始簇 $F_3 = \{f_l\}_{l=1}^{9}$ 由五个可变变量 $f_i = \det \Phi_{[i,5]}^{[i,5]}$ 、$i \in [1,5]$，以及四个冻结变量 $f_6 = x_{31}$、 $f_7 = x_{13}$、 $f_8 = \det X$、 $f_9 = c(X)$组成。初始箭图 Q_3 如图1a所示；每个变量 f_i、 $i \in [1,8]$都对应顶 i点。顶点1是特殊顶点，重数为2。顶点9是孤立顶点，在图1中未显示；相应的函数 f_9 只出现在顶点1处广义交换关系的中间系数中，该关系为 $f_1 f_1' = f_2^2 f_7 + f_9 f_2 f_5 + f_8^2 f_5^2 f_6$。请注意，后一交换关系中的中间系数不是 f_9，而是f_9/f_8，因此正确的写法是 $f_1 f_1' = f_2^2 f_7 + (f_9/f_8)$ $f_2 f_8 f_5 + f_8^2 f_5^2 f_6$。利用 [5, 定理3.2] ，结合标准的 Desnanot–Jacobi恒等式和简短的 Pl¨ucker 关系，可以证明由簇 F_3、箭图 Q_3和串 $(1, f_9/f_8, 1)$ 定义在 GL_3 上的广义簇结构 $\mathcal{GC}_3$是正则的。此外，用 Maple 直接检验可知，相应的 $\mathbb{C}[f_6, f_7, f_9, f_8^{\pm 1}]$ 上簇代数与 $\mathbb{C}[GL_3]$ 重合，因此 $\mathcal{GC}_3$ 是完备的。

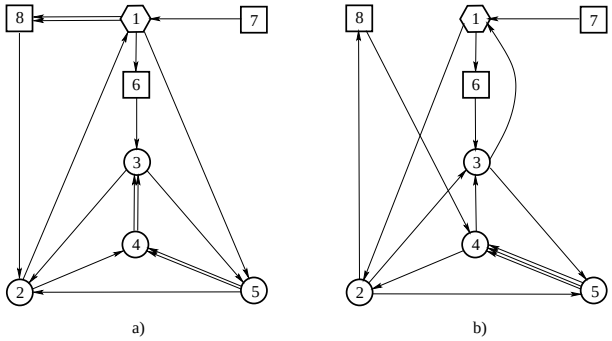

FIGURE 1. 箭图 Q_3：a）初始箭图；b）在 2 处变异后的箭图

我们的目标是将 $\mathcal{GC}_3$ 提升到整个 Mat_3, ，因此 $f_8 = \det X$ 成为唯一的特征多项式。对于初始簇 F_3 中的所有其他变量，有 $\hat{}\,\hat{}f_i = f_i$ 和 $f_i' = f_i'$，且交换关系以平凡的方式提升到 Mat_3。然而，在顶点2处进行变异并将 f_2 替换为 $f_2' = x_{13}x_{32}x_{33} + x_{22}x_{23}x_{33} - x_{12}x_{33}^2 - x_{23}^2x_{32}$ 后，我们得到图1b所示的箭图。函数 f_1 的新交换关系为 $f_1 f_1'' = (f_3)^2 + (f_9/f_8)f_3 f_2' + (f_2')^2 f_6 f_7$，因此 $\hat{}\ f_1'' = \hat{}f_1'' f_8$, 从而 f_1 的交换关系为

$$\hat{f}_1\hat{f}_1'' = (\hat{f}_3)^2 f_8 + \hat{f}_9\hat{f}_3\hat{f}_2' + (\hat{f}_2')^2\hat{f}_6\hat{f}_7 f_8.$$

注意，根据广义交换关系的定义，这个关系右侧的首项和末项并不互素。我们希望为 $\mathcal{GC}_3$ 中的所有簇恢复这类关系。

3. SUFFICIENT CONDITION FOR THE EXISTENCE OF A COHERENT PULLBACK

本节给出相干拉回存在的以下充分条件。回顾一下，若存在一个多项式$R(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ 在 W 上恒为零，则称函数族 $\{\varphi_m\}_{m=1}^p$ 在子簇 $W \subset \mathbb{A}^r$ 上代数相关；若不存在这样的多项式，则称其代数独立。

定理 3.1. 若对任意 $k \in K$，函数族 $(\hat{}\mathsf{F} \cup \mathsf{G} \cup \mathsf{H}) \setminus \{\mathsf{q}_k\}$ 在 $\{\mathsf{q}_k = 0\} \subset \mathbb{A}^r$上代数独立，则 V上具有初始簇 $F = \{f_l\}_{l=1}^s$的正则（广义）簇结构 $\mathcal{C}$存在相干拉回。

证明. 对于一对相邻种子 Σ, Σ' 以及 $\mathcal{C}$中的交换关系 $f_m^\Sigma f_m^{\Sigma'} = P^{\Sigma,}{}_m{}^{\Sigma'}$，将 $\tilde{}\mathsf{P}_m^{\Sigma\,\Sigma'}$, 在环 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_r]$ 中的求值写成类似于 (2.3) 的形式，即写成一个不能被任何 q_k 整除的多项式，再除以 $\prod_{k\in K}\mathsf{q}^{\lambda_k(\tilde{\mathsf{P}}^{\Sigma,}{}_m{}^{\Sigma'})\,k}$。显然，$\lambda_k(\tilde{}\mathsf{P}_m^{\Sigma\,\Sigma'}) \le 0$, 因为该求值是一个多项式。由 (2.4) 可立即推出

$$\lambda_k(\tilde{\mathsf{P}}_m^{\Sigma,\Sigma'}) = \lambda_k(f_m^\Sigma) + \lambda_k(f_m^{\Sigma'}) - \Lambda_k(P_m^{\Sigma,\Sigma'}) \tag{3.1}$$

使得由 (2.5) 给出的条件 $M = 1$ 对于 M 等价于 $\lambda_k(\tilde{}\mathsf{P}_m^{\Sigma\,\Sigma'}) = 0$ 对于所有$k \in K$。

引理 3.2. 假设对于某个 $k \in K$ 和某个种子 Σ，族 $(\hat{\mathbf{F}}^{\Sigma} \cup \mathbf{G} \cup \mathbf{H}) \setminus \{\mathbf{q}_k\}$ 在 $\{\mathbf{q}_k = 0\} \subset \mathbb{A}^r$ 上代数独立，且 Σ' 与 Σ 在方向 $m \in [1, s]$ 上相邻。那么 $\lambda_k(\tilde{\mathbf{P}}_m^{\Sigma\,\Sigma'}) = 0$。

证明。事实上，条件 $\lambda_k(\tilde{\mathbf{P}}_m^{\Sigma\,\Sigma'}) > 0$ 意味着 $\mathbf{P}_m^{\Sigma\,\Sigma'}$ 在 $\{\mathbf{q}_k = 0\}$ 上恒为零。注意，$\mathbf{P}_m^{\Sigma\,\Sigma'}$ 不能被 $\mathbf{q}_k$ 整除于环 $\mathbb{C}\left[\{\hat{\mathbf{f}}_l^{\prime}\}_{l \neq m}, \{\mathbf{h}_j\}_{j \in J}\right]$ 中。因此，多项式 $\mathbf{P}_m^{\Sigma\,\Sigma'}\big|_{\mathbf{q}_k = 0}$ 证明了族 $(\hat{\mathbf{F}}^{\Sigma} \cup \mathbf{H}) \setminus \{\mathbf{q}_k\}$ 在 $\{\mathbf{q}_k = 0\}$ 上代数依赖，矛盾。□

引理 3.3。假设对于某个种子 Σ，族 $(\hat{\mathbf{F}}^{\Sigma} \cup \mathbf{G} \cup \mathbf{H}) \setminus \{\mathbf{q}_k\}$ 在 $\{\mathbf{q}_k = 0\} \subset \mathbb{A}^r$ 上对所有 $k \in K$ 都代数独立。那么，对于任何与 Σ 变异等价的 Σ'，族 $(\hat{\mathbf{F}}^{\Sigma'} \cup \mathbf{G} \cup \mathbf{H}) \setminus \{\mathbf{q}_k\})$ 也满足同样性质。

证明。只需证明引理中的断言对一个与 Σ 相邻的种子 Σ' 成立。假设 Σ' 在方向 m 上与 Σ 相邻。由引理 3.2 可知，在引理的假设下，对所有 $k \in K$，$\lambda_k(\tilde{\mathbf{P}}_m^{\Sigma\,\Sigma'}) = 0$。因此，条件 (3.1) 保证 (2.4) 在 $M = 1$ 下成立，于是 $\hat{\mathbf{f}}_m^{\Sigma'} = \tilde{\mathbf{P}}_m^{\Sigma\,\Sigma'}/\hat{\mathbf{f}}_m^{\Sigma}$。因此，若族 $(\hat{\mathbf{F}}^{\Sigma'} \cup \mathbf{H}) \setminus \{\mathbf{q}_k\}$ 在 $\{\mathbf{q}_k = 0\}$ 上代数依赖，则族 $(\hat{\mathbf{F}}^{\Sigma} \cup \mathbf{H}) \setminus \{\mathbf{q}_k\}$ 在同一个子簇上也代数依赖，这与假设矛盾。□

尚需证明，定理的条件蕴含族 $\hat{\mathbf{F}}^{\Sigma} \cup \mathbf{G} \cup \mathbf{H}$ 在 $\mathbb{A}^r$ 上代数独立。事实上，反设结论不成立，并设 R 是一个能够证明这种代数依赖关系的不可约多项式。任取 $\mathbf{q}_k$，并写作 $R = \mathbf{q}_k R_1 + R_0$，其中 R_0 不能被 $\mathbf{q}_k$ 整除。由于 R 不可约，R_0 是一个在 $\{\mathbf{q}_k = 0\}$ 上恒等为零的非零多项式，矛盾。□

下面的例子表明，定理 3.1 的假设并非正则拉回存在的必要条件。

例 3.4. 假设 $s = 3$ 和 $I = \varnothing$，从而 $V = \mathbb{A}^3$，其坐标为y_1、y_2、y_3。通过初始簇 $\{f_1 = y_1$、$f_2 = y_1^2 + y_1 y_2 - y_3$、$f_3 = y_3\}$ 在 V 上定义一个秩为 1 的簇结构 $\mathcal{C}$，其冻结变量为 f_2、f_3，交换关系为 $f_1 f_1' = f_2 + f_3$。显然，$f_1' = y_1 + y_2$，因此 $\mathcal{C}$是 V上的正则簇结构。

进一步，考虑坐标为 x_1、.....、x_4的 $\mathbb{A}^4$，以及映射 Ψ: $\mathbb{A}^4 \to \mathbb{A}^3$，其定义为 $\Psi^* y_1 = x_1$，并且当 $i = 2$时，$\Psi^* y_i = x_i x_4$，3。假设 $|J| = 1$，且唯一的特征多项式是 $\mathbf{h} = x_4$，因此当 $i = 1$时，$\Psi^* f_i = \mathbf{f}_i$，2，$\Psi^* f_3 = \mathbf{f}_3 \mathbf{h}$，并且 $\Psi^* f_1' = \mathbf{f}_1'$。初始簇中交换关系的右侧为 $P = f_2 + f_3$，因此 $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{f}_2 + \mathbf{h}\mathbf{f}_3$。因此，$\tilde{\mathbf{P}}$ 在 $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4]$中的求值等于 $x_1^2 + x_1 x_2 x_4$，于是 $\mathcal{C}$ 到 $\mathbb{A}^4$ 的相干拉回存在。另一方面，族 $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ 在子簇$\{\mathbf{h} = x_4 = 0\}$ 上代数相关，因为 $\mathbf{f}_2\big|_{\mathbf{h}=0} = \mathbf{f}_1^2$。

4. Combinatorics of a coherent pullback

4.1. 种子的拉回。我们假设 V 上的广义簇结构$\mathcal{C}$由带重数的箭图 $Q = (Q, d_1, \ldots, d_n)$ 描述，其中 n 是可变顶点的数量，详情参见 [3, 4]；不失一般性，假设顶点 $1, \ldots, n$ 是可变的，而顶点 $n+1, \ldots, s$

是冻结的。回顾一下，带重数箭图在方向m 上的标准箭图突变定义作如下修改：若路径 $i \to m \to j$ 中的顶点 i 和j 都是可变的，则该路径会为变异后的箭图 Q' 贡献 d_m 条边 $i \to j$；若顶点 i 或 j 中恰有一个是冻结的，则该路径分别为 Q' 贡献 d_j 或 d_i 条边 $i \to j$。顶点处的重数保持不变。方向 m 上相邻的簇变量由广义交换关系 $f_m f'_m = P_m = \sum_{r=0}^{d_m} T_r$ 给出，其中

(4.1)
$$T_r = p_{mr} \prod_{1\le l\le n} f_l^{rb_{ml}} \prod_{n<l\le s} f_l^{\lfloor rb_{ml}/d_m\rfloor} \prod_{1\le l\le n} f_l^{(d_m-r)b_{lm}} \prod_{n<l\le s} f_l^{\lfloor (d_m-r)b_{lm}/d_m\rfloor};$$

这里， b_{ml} 表示从 m 到 l的箭头数量， b_{lm} 表示从 l到 m的箭头数量，而 p_{mr} 是满足条件 $p_{m0} = p_{md_m} = 1$ 并通过$p'_{mr} = p_{m,\ d_m-r}$进行变异的交换系数。顶点 m 处的 y变量 t_m 是

$$t_m = \prod_{1\le l\le s} f_l^{b_{ml}-b_{lm}},$$

参见 [3, 第 6 节1]。

我们通过两步过程定义箭图 Ψ^*Q 。首先，取箭图 Q 的一份副本，并为每个 $j \in J$ 添加一个新的冻结顶点（注意，对应于 $i \in I$ 的顶点已经存在于 Q中）。分配给顶点$k \in K$ 的变量是 $\mathfrak{q}_k$，而分配给其他顶点的变量是 $\hat{\mathfrak{f}}_l$，因此变量集合为 $\hat{\mathbf{F}} \cup \mathbf{G} \cup \mathbf{H}$。 Q 的可变顶点之间的所有箭头都保留在Ψ^*Q中。此外，对于任意 $k \in K$，差异

$$\delta_{km} = \sum_{l=1}^{n} d_m b_{lm} \lambda_k(f_l) + \sum_{\substack{l=n+1\\ l\ne k}}^{s} b_{lm}\lambda_k(f_l) - \sum_{l=1}^{n} d_m b_{ml}\lambda_k(f_l) - \sum_{\substack{l=n+1\\ l\ne k}}^{s} b_{ml}\lambda_k(f_l) \tag{4.2}$$

计算得出，并在 m 与 k之间添加 $|\delta_{km}|$ 箭头。若（4.2）中的 δ_{km} 为正，这些箭头从 m 指向 k；否则则从 k 指向 m。与往常一样，对于 $k \in I$，应删除新箭头与 m 和 k 之间已有箭头构成的长度为 2 的环。最后，字符串的拉回定义为 $\Psi^*(p_{mr})_{r=1}^{d_m} = (\hat{\mathfrak{p}}_{mr})_{r=1}^{d_m}$，因此 $\Psi^*\widehat{\Sigma} = (\Psi^*Q, \hat{\mathbf{F}} \cup \mathbf{G} \cup \mathbf{H}\ \Psi^*\widehat{\mathcal{P}})$ 是$\Sigma = (Q, F \cup G, \mathcal{P})$的拉回。下面的结论显然成立。

命题 4.1. 种子 $\Psi^*\Sigma$ 的 y-变量与种子 Σ的 y-变量的拉回一致。

上面定义的箭图 Ψ^*Q 足以充分描述簇结构的正则拉回，见第 4.3 节。对于广义簇结构的情形，我们将在下文第 4.4 节进一步修改 Ψ^*Q 的定义。

4.2. 相干拉回的变异。下文中我们假设，对 $\mathcal{C}$中的任意种子，(2.5)中定义的关于 M 的相干性条件 $M = 1$ 均成立。因此，

$$\Lambda_k(P_m) = \max_{0\le r\le d_m} \lambda_k(T_r), \quad k \in K, \tag{4.3}$$

并且关于$\hat{\mathbf{f}}_m$ 与$\hat{\mathbf{f}}'_m$ 的交换关系(2.4)为

$$\hat{\mathbf{f}}_m\hat{\mathbf{f}}'_m = \sum_{r=0}^{d_m} \hat{\mathbf{T}}_r \prod_{k\in K} \mathbf{q}_k^{\mu_{km}(r)} \tag{4.4}$$

其中 $\mu_{km}(r) = \Lambda_k(P_m) - \lambda_k(T_r)$；此处及下文中，我们不再明确提及相邻种子 Σ 和 Σ'。此外，由 (4.1) 可得，

$$\begin{aligned}\lambda_k(T_r) = \lambda_k(p_{mr}) + r\sum_{l=1}^{n} b_{ml}\lambda_k(f_l) + \sum_{l=n+1}^{s}\left\lfloor \frac{rb_{ml}}{d_m}\right\rfloor \lambda_k(f_l)\\ + (d_m - r)\sum_{l=1}^{n} b_{lm}\lambda_k(f_l) + \sum_{l=n+1}^{s}\left\lfloor \frac{(d_m-r)b_{lm}}{d_m}\right\rfloor \lambda_k(f_l), \quad k\in K, r\in[0,d_m].\end{aligned}$$

记 $\{a\} = a - \lfloor a\rfloor$ 为任意数 a，则可将后一表达式改写为$\lambda_k(T_r) = \chi_{km}(r)$ $+ \tau_{km}r + \sigma_{km}$，其中

$$\begin{aligned}\chi_{km}(r) =& \lambda_k(p_{mr}) - \sum_{l=n+1}^{s}\left(\left\{\frac{rb_{ml}}{d_m}\right\} + \left\{\frac{(d_m-r)b_{lm}}{d_m}\right\}\right)\lambda_k(f_l),\\ \tau_{km} =& \sum_{l=1}^{n}(b_{ml}-b_{lm})\lambda_k(f_l) + \sum_{l=n+1}^{s}\frac{b_{ml}-b_{lm}}{d_m}\lambda_k(f_l),\\ \sigma_{km} =& d_m\sum_{l=1}^{n} b_{lm}\lambda_k(f_l) + \sum_{l=n+1}^{s} b_{lm}\lambda_k(f_l).\end{aligned} \tag{4.5}$$

考虑到 $\chi_{km}(0) = \chi_{km}(d_m) = 0$，可得

$$\tau_{km} = \frac{\lambda_k(T_{d_m}) - \lambda_k(T_0)}{d_m}, \quad \sigma_{km} = \lambda_k(T_0),$$

最终得到

$$\mu_{km}(r) = -\chi_{km}(r) + r\frac{\mu_{km}(d_m) - \mu_{km}(0)}{d_m} + \mu_{km}(0). \tag{4.6}$$

注意，在 m 处变异后，有 $b'_{ml} = b_{lm}$ 和 $b'_{lm} = b_{ml}$，因此

$$\chi'_{km}(r) = \chi_{km}(d_m - r), \qquad \tau'_{km} = -\tau_{km}, \qquad \sigma'_{km} = d_m\tau_{km} + \sigma_{km}.$$

令 $\chi^{\Sigma}_{km}(r)$ 表示在任意种子Σ中针对顶点 m 写出的 $\chi_{km}(r)$ 的类似形式。

命题 4.2. 对于任意 Σ，根据连接Σ与初始种子的变异序列中在 m 处变异的次数奇偶性，要么 $\chi^{\Sigma}_{km}(r) = \chi_{km}(r)$，要么 $\chi^{\Sigma}_{km}(r) = \chi'_{km}(r)$。

证明。对于 $\chi_{km}(r)$ 表达式中的第一项，该陈述显然成立。下面证明第二项在 $i \neq m$ 处进行变异后不发生变化。首先，所有顶点 $l \in [n+1, s]$ 都是冻结的，因此 $\lambda_k(f_l)$ 在变异过程中不会发生变化。注意，b_{ml} 和 b_{lm} 中至少有一个为零。不失一般性，假设 $b_{lm} = 0$ 和 $b_{ml} \geq 0$。如果箭图中不存在路径 $l \to i \to m$ 或 $m \to i \to l$，则在 i 处的变异不会影响 b_{ml} 和 b_{lm}。否则，要么 $b'_{ml} = b_{ml} \pm d_m \geq 0$ 和 $b'_{lm} = 0$，要么 $b'_{ml} = 0$ 和 $b'_{lm} = d_m - b_{ml} > 0$。在第一种情况下，

$$\left\{\frac{rb'_{ml}}{d_m}\right\} = \left\{\frac{rb_{ml}}{d_m} \pm r\right\} = \left\{\frac{rb_{ml}}{d_m}\right\}, \quad \left\{\frac{(d_m-r)b'_{lm}}{d_m}\right\} = \left\{\frac{(d_m-r)b_{lm}}{d_m}\right\} = 0,$$

而在第二种情况下，

$$\left\{\frac{rb'_{ml}}{d_m}\right\} = 0, \quad \left\{\frac{(d_m - r)b'_{lm}}{d_m}\right\} = \left\{\frac{(d_m - r)(d_m - b_{ml})}{d_m}\right\} = \left\{\frac{rb_{ml}}{d_m}\right\},$$

因此，在这两种情况下，(4.5) 中 $\lambda_k(f_l)$ 处的系数均保持不变。 □

由 (4.6) 和命题 4.2 可知，$\mu_{km}(r)$ 的变化由 $\mu_{km}(0)$ 和 $\mu_{km}(d_m)$ 的变化决定。将 $\mu_{km}(0)$ 和 $\mu_{km}(d_m)$ 在 i 处变异后的值分别记为 $\mu^i_{km}(0)$ 和 $\mu^i_{km}(d_m)$。显然，若 i 与 m 之间没有箭头，则 $\mu^i_{km}(0) = \mu_{km}(0)$，且 $\mu^i_{km}(d_m) = \mu_{km}(d_m)$。否则，$\mu^i_{km}(0)$ 和 $\mu^i_{km}(d_m)$ 按如下方式得到。

命题 4.3。(i) 若 $b_{mi} > 0$，则

$$\mu^i_{km}(0) = \max_{0\le r\le d_m}\left\{\chi_{km}(r) - \frac{r}{d_m}\left(\mu_{km}(d_m) - \mu_{km}(0)\right) + rb_{mi}\mu_{ki}(0)\right\}, \tag{4.7}$$
$$\mu^i_{km}(d_m) - \mu^i_{km}(0) = \mu_{km}(d_m) - \mu_{km}(0) - d_m b_{mi}\mu_{ki}(0).$$

(ii) 若 $b_{im} > 0$，则

$$\mu^i_{km}(d_m) = \max_{0\le r\le d_m}\left\{\chi_{km}(d_m - r) - \frac{r}{d_m}\left(\mu_{km}(0) - \mu_{km}(d_m)\right) + rb_{im}\mu_{ki}(d_i)\right\}, \tag{4.8}$$
$$\mu^i_{km}(0) - \mu^i_{km}(d_m) = \mu_{km}(0) - \mu_{km}(d_m) - d_m b_{im}\mu_{ki}(d_i).$$

证明。(i) 回顾 $\Lambda_k(P_m) = \mu_{km}(0) + \lambda_k(T_0) = \mu_{km}(d_m) + \lambda_k(T_{d_m})$。将上面两个表达式等同起来，我们得到

$$\mu_{km}(0) + d_m b_{mi}\lambda_k(f_i) + \lambda^{\text{out}}_k = \mu_{km}(d_m) + \lambda^{\text{in}}_k \tag{4.9}$$

with

$$\lambda^{\text{out}}_k = d_m \sum_{\substack{l=1\\ l\ne i}}^{n} b_{ml}\lambda_k(f_l) + \sum_{l=n+1}^{s} b_{ml}\lambda_k(f_l),$$
$$\lambda^{\text{in}}_k = d_m \sum_{l=1}^{n} b_{lm}\lambda_k(f_l) + \sum_{l=n+1}^{s} b_{lm}\lambda_k(f_l).$$

类似地，在 i 处变异之后，我们有

$$\mu^i_{km}(0) + \lambda^{\text{out}}_k + d_m \sum_{l=1}^{n} b_{mi}d_i b_{il}\lambda_k(f_l) + \sum_{l=n+1}^{s} b_{mi}d_m b_{il}\lambda_k(f_l) = \mu^i_{km}(d_m) + \lambda^{\text{in}}_k + d_m b_{mi}\lambda_k(f'_i). \tag{4.10}$$

从 (4.9) 中减去 (4.10)，我们得到

$$\mu^i_{km}(d_m) - \mu^i_{km}(0) = \mu_{km}(d_m) - \mu_{km}(0) + d_m b_{mi}\left(d_i\sum_{l=1}^{n} b_{il}\lambda_k(f_l) + \sum_{l=n+1}^{s} b_{il}\lambda_k(f_l) - \lambda_k(f_i) - \lambda_k(f'_i)\right).$$

要得到 (4.7) 中的第二个关系，只需注意到方括号中的表达式等于 $-\mu_{ki}(0)$。

要得到 (4.7) 中的第一个关系，考虑到根据命题 4.2，$\chi^i_{km}(r) = \chi_{km}(r)$，我们将 (4.6) 写成 $\mu^i_{km}(r)$ 的形式，并使用条件

$$\min_{0\le r\le d_m} \mu^i_{km}(r) = 0,$$

这等价于 (4.3)。因此，

$$\mu^i_{km}(0) = \max_{0\le r\le d_m} \left\{ \chi_{km}(r) - \frac{r}{d_m}\left(\mu^i_{km}(d_m) - \mu^i_{km}(0)\right)\right\},$$

并且 (4.7) 中的第一个关系由第二个关系推出。

(ii) 证明是类似的，只是将 (4.6) 替换为

$$\mu_{km}(d_m - r) = -\chi_{km}(d_m - r) + \frac{r}{d_m}(\mu_{km}(0) - \mu_{km}(d_m)) + \mu_{km}(d_m).$$

□

4.3. 最简单的情形：$d_m = 1$。命题 4.3 中给出的突变规则在对所有 $m \in [1, n]$ 都有 $d_m = 1$ 时尤为简单，也就是说，当 $\mathcal{C}$ 是 V 上的正则簇结构时。在这种情形下，$\mu_{km}(0)$ 与 $\mu_{km}(1)$ 中至少有一个为零，$\widehat{\ }$并且 Ψ^*Q 的变异按照箭图$\widehat{\ }$变异的标准规则进行。对于 $r = s$ 与 $\Psi = \mathrm{Id}$，簇结构 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{C}$ 是拟同构的，见 [2]。

例 4.4. 设 V是 $\mathrm{Mat}_3 = \mathbb{A}^9$ 中的一个拟仿射子簇，其坐标为 $Y = (y_{ij})_{i,\ j=1}^3$ 由条件 $g = \det Y^{23}_{12} \neq 0$给出。初始簇 $F = \{f_l\}_{l=1}^9$由四个可变变量 $f_1 = y_{33}$, $f_2 = y_{32}$, $f_3 = y_{23}/g$, $f_4 = \det Y^{23}_{23}/g$和五个冻结变量 $f_5 = y_{13}$, $f_6 = \det Y$, $f_7 = \det Y^{12}_{23}$, $f_8 = y_{31}$, $f_9 = g$组成。初始箭图 Q 如图 2a) 所示。利用 [1, 定理 2.10]，容易验证在 V 上得到的簇结构 $\mathcal{C}$ 是正则的。

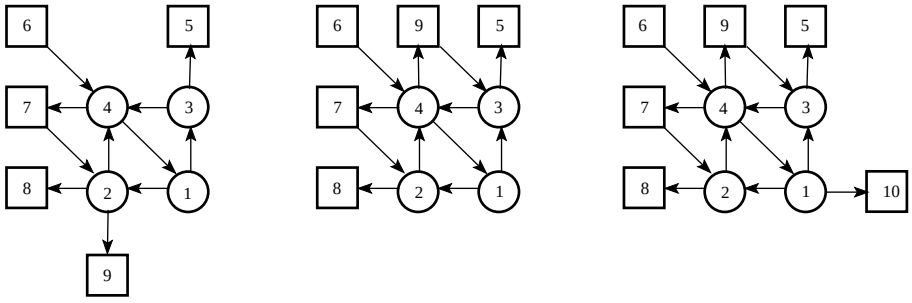

FIGURE 2. 箭图及其拉回：a) 初始箭图 Q；b) 箭图 $\widehat{\ }\ \widehat{\ }Q$；c) 箭图 Ψ^*Q

假设 g 是特征多项式。容易验证，定理 3.1 的条件得到满足，因此存在一个从 $\mathcal{C}$ 到 Mat_3的正则拉回，其中 $l \neq 3,4$ 对应 $\widehat{\ } f_l = f_l$、$\widehat{\ } f_3 = y_{23}$、$\widehat{\ } f_4 = Y^{23}_{23}$。此外，$\lambda_g(f_3) = \lambda_g(f_4) = 1$，且$\lambda_g(f_l) = 0$ 对应 $l \neq 3,4,9$，因此，通过 (4.2) 计算出的差异对于$m = 1$为零，对于 $m = 2,3$ 等于 -1，对于 $m = 4$等于 1。因此，添加了从 9 到 2、从 9 到 3 以及从 4 到 9 的箭头；其中第一个箭头抵消了

^原有的从 2 到 9 的箭头。相应的箭图 Q 如图 2b) 所示。这给出了两个簇结构之间拟同构的一个例子。

此外，考虑一个坐标为 $\mathbb{A}^{10}$ ($X =$)$(x_{ij})_{i,\ j=1}^{3}$ 的对象，以及一个映射 $z\ \Psi$: $\mathbb{A}^{10} \to \mathbb{A}^{9}$，由 $\Psi^{*}y_{ij} = x_{ij}$ 给出，其中 $(i, j) \neq (3, 3)$，且 $\Psi^{*}y_{33} = x_{33}/z$。假设 $|J| = 1$，并且唯一新的特征多项式是 $\mathsf{h} = z$。同样，容易验证定理 3.1 的条件得到满足，因此存在一个从$\widehat{\mathcal{C}}$到 $\mathbb{A}^{10}$的正则拉回。此外，对于 $l = 1$， $\lambda_{\mathsf{h}}(\hat{}f_{l}) = 1$，4，6，而在其他情况下，$\lambda_{\mathsf{h}}(\hat{}f_{l}) = 0$。因此，$m = 1$ 的差异等于 1，而对于 $m = 2$，3，4，差异为 0，故添加一条从 1 指向 10 的^箭头。相应的箭图 $\Psi^{*}Q$ 见图 2c)。注意，将从 1 指向 10 的箭头反向，并把附着于顶点 10 的 z 替换为 $1/z$ 后，得到的同一箭图就是格拉斯曼流形 Gr(3, 6) 上标准簇结构中对应于该坐标图的种子

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & zx_{13} & 0 & 0 & 1 \\ x_{21} & x_{22} & zx_{23} & 0 & -1 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & 1/z & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

^4.4. $d_m > 1$的情形。对于广义簇结构， $\Psi^{*}Q$ 的顶点与上述完全相同，可变重数为 1 的顶点处的箭头也完全相同。在重数较高的顶点处， $\mu_{km}(0)$ 和 $\mu_{km}(d_m)$ 可能同时不为零。在这种情况下，箭图 $\Psi^{*}Q$ 中有 $\mu_{km}(0)$ 个从 k 指向 m 的箭头，以及 $\mu_{km}(d_m)$ 个从 m 指向 k的箭头。(4.7) 和 (4.8) 中的第二个关系表明，两个相反方向上的箭头数量之差在变异下的变化方式，与广义簇结构所对应箭图的箭头数量完全相同，因此命题 4.1 仍然成立。然而，每个方向上的实际箭头数量取决于在 (4.7) 和 (4.8) 的第一个关系中使最大值取得的 r 的取值。

该情形取决于函数 $\chi_{km}(r)$，更准确地说，取决于点 $(r, \chi_{km}(r))$， $r \in [0, d_m]$ 的上凸包 C_{km} 。数值 $\mu_{km}(0)$ 和 $\mu_{km}(d_m)$ 是支撑直线与斜率为 $c - \tau_{km}$、 $c \in \mathbb{Z}$ 的 C_{km} 的交点在直线 $r = 0$ 和 $r = d_m$ 上的纵坐标。如果每条这种类型的支撑直线都经过 $(0, \chi_{km}(0))$ 或 $(d_m, \chi_{km}(d_m))$，那么，与普通簇结构的情形类似， $\mu_{km}(0)$ 和 $\mu_{km}(d_m)$ 中至少有一个为零，^且箭图 $\Psi^{*}Q$ 按照通常规则进行突变。

当存在如上所示斜率、但不经过 $(0, \chi_{km}(0))$ 或 $(d_m, \chi_{km}(d_m))$ 的 C_{km} 的支撑直线时，情形会变得更加复杂；在这种情况下， $\mu_{km}(0)$ 和 $\mu_{km}(d_m)$ 会同时不为零。这种情形中最简单的一种是恰好存在一条这样的直线，下一例将展示这一情形。

例4.5。我们想将例2.4中描述的 $\mathcal{GC}_3$ 上的广义簇结构提升到整个 Mat_3 上。唯一的广义顶点是顶点1；容易看出， $C = C_{81}$ 是顶点为 (0, 0)、(1, 1) 和 (2, 0) 的三角形，并且对于初始种子 (Q_3, F_3)， $\tau = \tau_{81} = 1$ 对应于经过 (2, 0)、斜率为 -1 的支撑线。此外，差异在^所有可变顶点处均消失，因此初始种子的箭图 Q_3 与图1a所示的Q_3 并无不同。经过 C 且斜率为整数、又不经过 (0, 0) 或 (2, 0) 的唯一支撑线是水平线，此时 $\mu_{81}(0) = \mu_{81}(2) = 1$。这正是对2进行变异后发生的情况，因此此时的箭图与图1b所示的不同：它有一条从1指向8的箭头，还有一条箭头

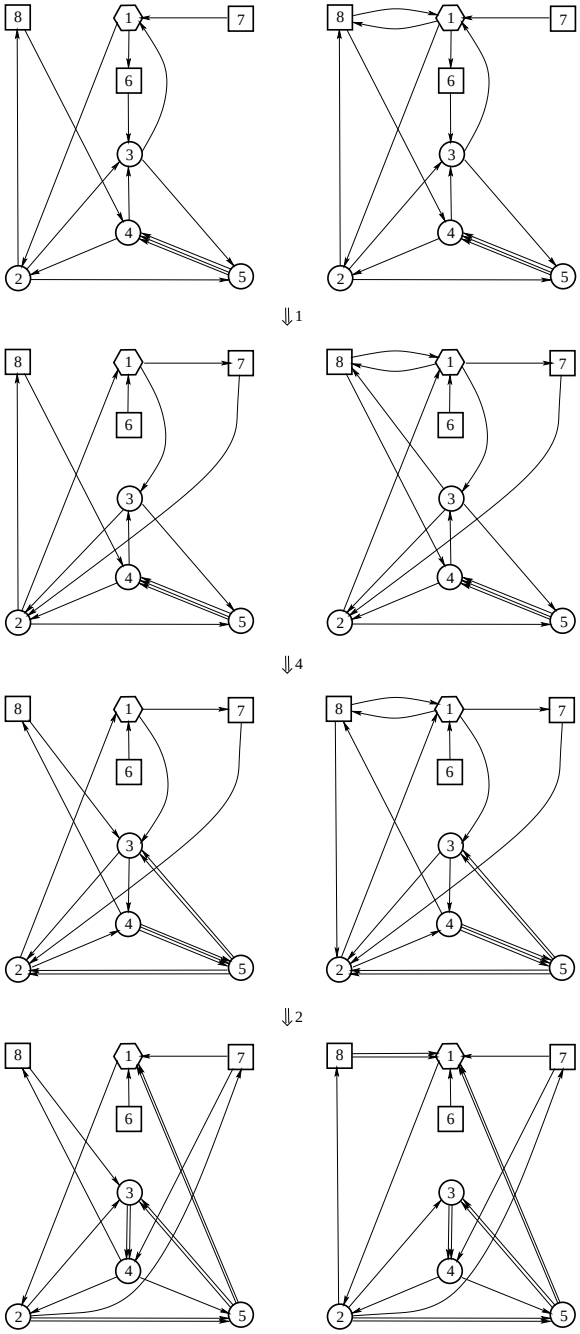

FIGURE 3. Q_3 （左侧）和 Q_3 （右侧）的变异

从8指向1，见图3右上角。现在我们继续依次在1、4和2处进行变异。相应的箭图显示在图3左侧。同一图的右侧展示了从图中所示的箭图得到的箭图

通过相同的变异序列到达右上角。请注意两组箭图之间的以下差异。第一次变异后，右侧的箭图保留箭头 $8 \to 1$ 和 $1 \to 8$ （因为 τ 仍等于 0），由于路径 $3 \to 1 \to 8$，添加了箭头$3 \to 8$；由于路径 $8 \to 1 \to 2$，箭头 $2 \to 8$ 消失。第二次变异后，右侧的箭图仍保留箭头 $8 \to 1$ 和 $1 \to 8$，由于路径 $8 \to 4 \to 2$，添加了箭头 $8 \to 2$；由于路径 $8 \to 1 \to 3$，箭头 $3 \to 8$ 消失。第三次变异后，右侧的箭图多出一条箭头 $2 \to 8$，它是通过反转 $8 \to 2$得到的；此外，由于路径 $8 \to 2 \to 1$，还多出两条箭头 $8 \to 1$ （注意，此时$\tau = -1$，且经过 (0, 0) 的支撑线穿过 C）。每一步中，都可以按照上述规则，由左侧相应的箭图得到右侧的箭图。例如，对于最后一行的箭图，$\lambda_8(f_1) = \lambda_8(f_2) = 1$，且当 $l \neq 1$为 2 时，$\lambda_8(f_l) = 0$，因此顶点 5 处的差异为 0，而顶点 2 和 3 处的差异为 1。因此，右侧的箭图中添加了箭头 $2 \to 8$，并取消了箭头 $8 \to 3$。此外，顶点 4 处的差异为 -1，因此右侧箭图中取消了箭头 $4 \to 8$。最后，顶点 1 处的差异为 -2，因此添加了两条箭头 $8 \to 1$。

注4.6. 当由（4.5）中的第二个方程定义的 τ_{km} 为整数，并且除高度为 h 的水平支撑线外，所有具有整数斜率的支撑直线都经过 (0, 0) 或 $(d_m, 0)$ 时，这种情况可概括如下：

(i) 根据 m 与 i之间箭头的方向，通过（4.7）或（4.8）中的第二个公式计算 $\Delta_{km} = \mu_{km}(0) - \mu_{km}(d_m)$ 的新值；

(ii) 如果 $\Delta_{km} = 0$，则从 m 向 k 画 h 个箭头，并从 k 向 m画 h 个箭头；如果 $\Delta_{km} > 0$，则从 k 向 m画 Δ_{km} 个箭头；如果 $\Delta_{km} < 0$，则从 m 向 k画 $|\Delta_{km}|$ 个箭头。

例如，当 $\lambda_k(p_{mr}) = 1$ 对于 $r \in [1, d_m - 1]$ 而 $\lambda_k(f_l) = 0$ 对于 $l \in [n + 1, s]$，从而 $h = 1$时，就会出现这种情况。

下一个例子展示了从 $\mathbb{A}^s$ 到 $\mathbb{A}^r$进行正则拉回时可能出现的各种情形。

例 4.7。假设 $\mathcal{C}$中的一个广义交换关系写作 $ff' = f_1^d + \sum_{r=1}^{d-1} p_r f_1^{d-r} f_2^r + f_2^d f_3$，其中 f_1、f_2 是可变的，而 f_3 是冻结的。

(i) 进一步假设存在一个特征多项式 h，并且 $\lambda_{\mathrm{h}}(p_r) =$1、$r \in [1, d-1]$、$\lambda_{\mathrm{h}}(f_1) = \lambda_{\mathrm{h}}(f_2) = 0$、$\lambda_{\mathrm{h}}(f_3) = 1$。那么，通过 (4.5) 中的第一个关系计算得到的 $\chi_{\mathrm{h}}(r)$ 可由 $\chi_{\mathrm{h}}(r) = 1 - r/d$ 给出，其中 $r > 0$、$\chi_{\mathrm{h}}(0) = 0$；而通过 (4.5) 中的第二个关系计算得到的 τ_{h} 等于 $1/d$。相应的、关于 $d = 6$ 的上凸包 C_{h} 显示于图 4a) 中。斜率为 $c - 1/6$、$c \in \mathbb{Z}$ 的支撑直线要么经过 $A = (0, 0)$，要么经过 $B = (6, 0)$，因此两个顶点之间的箭头方向相同：要么是 $6c + 1$、$c \geq 0$，从与 h 对应的冻结顶点 k 出发的箭头；要么是 $-6c - 1$、$c < 0$，指向 k的箭头。

(ii) 现在假设 $\lambda_{\mathrm{h}}(f_3) = -2$，其余所有取值均与前面的例子相同。于是，对于 $r \in [1, d - 1]$,$\chi_{\mathrm{h}}(0) = \chi_{\mathrm{h}}(6) = 0$，有 $\chi_{\mathrm{h}}(r) = 1 + (2r \bmod d)/d$，且 $\tau_{\mathrm{h}} = -2/d$。$d = 6$ 的对应上凸包 C_{h} 如图 4b) 所示。有两条斜率为 $c + 1/3$,$c \in \mathbb{Z}$ 的支撑直线，它们不经过 A 或 B：一条是 $c = 0$ 对应的直线，经过 $(1, 4/3)$ 和 $(2, 5/3)$；另一条是 $c = -1$ 对应的直线，经过 $(5, 5/3)$。第一条直线经过 (0, 1) 和 (6, 3)，因此从 k 发出三个箭头

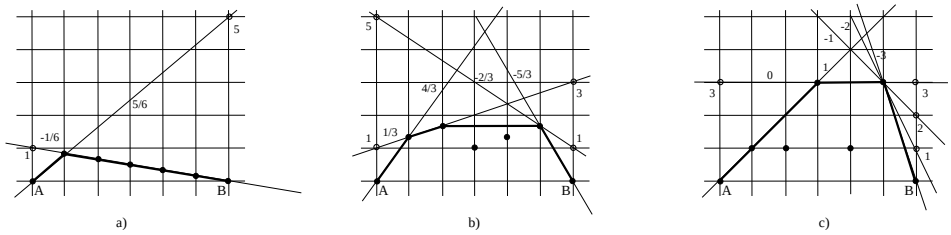

FIGURE 4. 上凸包 C_{h} 和支撑直线

并有一个箭头指向 k；第二条直线经过 (0, 5) 和 (6, 1)，因此有五个箭头指向 k，并有一个箭头从 k 发出。对于 $c>0$，有 $6c+2$ 个箭头从 k 发出；对于 $c<-1$，有 $-6c+2$ 个箭头指向 k。

(iii) 现在假设 $d=6$, $\lambda_{\mathrm{h}}(p_r)=1$, $r=1$、2、4、 $\lambda_{tth}(p_r)=3$, $r=3$、5、$\lambda_{\mathrm{h}}(f_l)=0$, $l\in[1,3]$。那么 $\chi_{\mathrm{h}}(r)=\lambda_{\mathrm{h}}p_r$, $r\in[1,5]$, $\chi_{\mathrm{h}}(0)=\chi_{\mathrm{h}}(6)=0$, $\tau_{\mathrm{h}}=0$。相应的上凸包 C_{h} 如图 4c) 所示。有三条斜率为 $c\in\mathbb{Z}$ 且不经过 A 或 B的支撑直线：对于 $c=0$，经过 (3, 3) 和 (5, 3) 的直线；对于 $c=-1$ 和 $c=-2$，经过 (5, 3) 的直线。第一条直线经过 (0, 3) 和 (6, 3)，因此两个方向各有三个箭头；第二条直线经过 (0, 8) 和 (6, 2)，因此有八个箭头指向 k，并有两个箭头来自 k；第三条直线经过 (0, 13) 和 (6, 1)，因此有十三个箭头指向 k，并有一个箭头来自 k。对于 $c>0$，有 $6c$ 个箭头来自 k；对于 $c<-2$，有 $-6c$ 个箭头指向 k。

注 4.8. 第 3 节和第 4 节的结果在并非所有 q_k 都被指定的情形下仍然成立，也就是说，式 (2.3) 中的乘积取遍子集$K'\subset K$，且 $\hat{\mathsf{f}}_l$ 是拟仿射簇 $U\subset\mathbb{A}^r$ 上的正则函数，该簇由 q_k, $k\in K\setminus K'$非零所定义。在这种情形下，$\mathcal{C}$ 的相干拉回是 U上的近簇结构。注意，按照第 4.1 节所述进行操作，我们可以保证在初始种子 $\Psi^*\widehat{\Sigma}$ 中，所有 $\hat{\mathsf{f}}_l$ 在整个外围空间$\mathbb{A}^r$上都是正则的；然而，交换系数并非如此，因此，经过广义突变后，近簇结构的变量不一定在 $\mathbb{A}^r$ 上正则。

5. COMPATIBLE PULLBACK OF A COMPATIBLE POISSON BRACKET

回顾一下，若对同一簇中的 f_l 和 f_m，泊松括号 $\{\cdot,\cdot\}$ 满足 $\{f_l,f_m\}=\omega_{lm}f_lf_m$，则称其与广义簇结构 $\mathcal{C}$ 相容。设 f_l, $l\in[n+1,s]$ 是 $\mathcal{C}$ 的冻结变量，并记

$$p^*_{mr}=p_{mr}^{d_m}\prod_{n<l\le s}f_l^{-d_m\{rb_{ml}/d_m\}-d_m\{(d_m-r)b_{lm}/d_m\}},$$

其中 p_{mr} 是参与(4.1)的交换系数。下面给出涉及 p^*_{mr} 与 y-变量 t_m 的相容性充分条件，见 [3, 命题2.5]。

命题 5.1. 若对于 $m\in[1,n]$, p^*_{mr}均为 $\{\cdot,\cdot\}$、$\{f_m,t_m\}=\omega_mf_mt_m$、$\omega_m\neq0$的卡西米尔元，且对于 $l\neq m$, $\{f_l,t_m\}=0$为 $l\in[1,s]$、$m\in[1,n]$的卡西米尔元，则 $\{\cdot,\cdot\}$与 $\mathcal{C}$ 相容。

假设 $\mathbb{A}^s$ 配备了一个泊松括号 $\{\cdot,\cdot\}$，并满足命题 5.1 的条件$\widehat{}$，且存在 $\mathcal{C}$的一个相干拉回 $\mathcal{C}$。设 $\mathbb{A}^r$ 上有一个泊松括号 $\{\cdot,\cdot\}_{\mathrm{p}}$，使映射 Ψ: $(\mathbb{A}^r, \{\cdot,\cdot\}_{\mathrm{p}}) \to (\mathbb{A}^s, \{\cdot,\cdot\})$ 为泊松映射。此外，令 $\tilde{\mathbf{t}}_m$ 表示箭图 Ψ^*Q中顶点 m 处的 y变量。

定理 5.2. 若所有 $\mathbf{p}^*_{mr}$ 都是 $\{\cdot,\cdot\}_{\mathrm{p}}$, $\{\mathbf{h}_j, \tilde{\mathbf{t}}_m\}_{\mathrm{p}} = 0$ 的卡西米尔元，对所有 $j \in J$和 $m \in [1,n]$均成立，且集合 $\mathbf{F} \cup \mathbf{H}$ 构成 $\{\cdot,\cdot\}_{\mathrm{p}}$的对数正则基，则括号$\{\cdot,\cdot\}_{\mathrm{p}}$ 与 $\mathcal{C}$相容。

证明. 我们断言，定理的条件蕴含命题 5.1 的条件。事实上，

$$\{\mathbf{f}_l, \tilde{\mathbf{t}}_m\}_{\mathrm{p}} = \{\Psi^* f_l \prod_{j\in J} \mathbf{h}_j^{\lambda_j(f_l)}, \tilde{\mathbf{t}}_m\}_{\mathrm{p}}$$
$$= \left\{\prod_{j\in J} \mathbf{h}_j^{\lambda_j(f_l)}, \tilde{\mathbf{t}}_m\right\}_{\mathrm{p}} \Psi^* f_l + \{\Psi^* f_l, \tilde{\mathbf{t}}_m\}_{\mathrm{p}} \prod_{j\in J} \mathbf{h}_j^{\lambda_j(f_l)}.$$

根据定理的条件，上式第一项为零。此外，由命题 4.1，$\tilde{\mathbf{t}}_m = \Psi^* t_m$，因此 $\{\Psi^* f_l, \tilde{\mathbf{t}}_m\}_{\mathrm{p}} = \Psi^*\{f_l, t_m\}$，故上式第二项在 $l \neq m$ 时为零，而在 $l = m$时等于 $\omega_m \mathbf{f}_m \tilde{\mathbf{t}}_m$，这正是命题 5.1 所要求的。□

6. Regular pullback of the upper cluster algebra

假设存在（广义）簇结$\widehat{}$构 $\mathcal{C}$ 在 V 上到 $\mathbb{A}^s$的相干拉回。可以将上簇代数$\overline{\mathcal{A}}$ 的正则拉回 $\mathcal{A}$ 定义为：在冻结变量的多项式基环上、由近簇变量构成的 Laurent 多项式环对所有$\widehat{}$几乎簇所取的交。$\mathcal{A}$ 与 $\overline{\mathcal{A}}$ 在非常温和的条件下的关系由下述陈述给出。

定理 6.1. 假设 $\mathcal{C}$ 的任意种子都是互素的，则 $\overline{\mathcal{A}}$ 是$\mathcal{A}$ 关于由 $G = \{g_i\}_{i\in I}$生成的乘法集合的局部化。

证明。记 $R = \mathbb{C}[\{g_i^{-1}\}_{i\in I}]$。为证明 $\widehat{\mathcal{A}}$ 的局部化包含于$\overline{\mathcal{A}}$，只需验证对任意 $z \in R$ 与任意 $h \in \mathcal{A}$都有 $zh \in \overline{\mathcal{A}}$。由定义，在$\widehat{}$ $\mathcal{C}$的任意种子中，h 可写为近簇变量的 Laurent 多项式，而这些近簇变量又是 $\mathcal{C}$ 相应种子的簇变量乘以 G中的一个 Laurent 单项式。由此可得 $h \in \overline{\mathcal{A}}$。关于 zh 的断言源于如下事实：R 是 $\overline{\mathcal{A}}$的基环的一个子环。

为证明反向包含，考虑任意一个 $p \in \overline{\mathcal{A}}$。它可以写成 $\mathbb{C}$的初始种子 Σ 中的 Laurent 多项式。因此，$\mathcal{C}$ 的初始种子 Σ 中相应的$\widehat{}$ $\widehat{}$Laurent 多项式与 p 相差 G中的一个 Laurent 单项式。由此可知，存在一个单项式 M 属于 G，使得 Mp 是 Σ中的 Laurent$\widehat{}$多项式。类似地，对于任意相邻种子 Σ_m，存在一个单项式$\widetilde{}$ M_m，使得 $M_m p$ 是 Σ_m中的 Laurent 多项式。因此，对于 $M = M\prod_m M_m$，$\widetilde{}$ $\widehat{}$ $\widetilde{}Mp$ 同时是 Σ 和所有 Σ_m中的 Laurent 多项式。最后需要注意，若 P、$Q \in \mathbb{C}[\{f_l\}_{l=1}^s, \{g_i^{-1}\}_{i\in I}]$ 互素，则由 (2.4) 定义的相应 $\tilde{P}$、$\tilde{Q}\widehat{}$也互素，因此 $\mathcal{C}$ 的任意种子都互素，故由 Σ 定义的上$\widehat{}$ $\widehat{}$界与整个 $\mathcal{A}$相同，见 [1, 定理 1.5]。□

以下更严格的条件保证，将 V 上一个完备的（广义）簇结构正则拉回到$\mathbb{A}^s$ 后，所得结构仍然完备。

定理 6.2. 假设存在一个正则完备广义簇结构 $\mathcal{C}$ 在 V 上的种子 $\Sigma = (Q, F \cup G)$，使得对于每个 $i \in I$，每个 y_m, $m \in [1, s]$, 都能在 $D_i = \{g_i = 0\}$的一般点处写成关于 $F \cup G \setminus \{g_i\}$ 的有理表达式。那么

(i) 存在一个从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathbb{A}^s$的相干拉回 $\mathcal{C}$；(ii) y_m 的有理表达式是 Laurent 多项式，且其分母中不含 F 中的冻结变量；(iii) 若这些有理表达式的分母中还不含中的变量 G，则 $\mathcal{C}$ 是完备的。

证明。(i) 只需验证定理 3.1 的条件成立。事实上，由于族 $F \cup G \setminus \{g_i\}$ 的大小等于 D_i的维数，任何代数依赖都会使得无法在 D_i的一般点处恢复 y_m。

(ii) 由于 $\mathcal{C}$ 是完备的，每个 y_m 都可以写成 $\mathcal{C}$ 的任意种子 Σ 中的 Laurent 多项式，其系数是 F 中冻结变量的多项式和 G 中的 Laurent 多项式。将此表达式改写为相应的种子 Σ 中的 Laurent 多项式时，其系数是 F 中冻结变量的多项式，并除以 G 中的一个单项式 L。

(iii) 假设在某个种子 Σ 中，$L = 1$ 成立。我们声称，对于任意种子 Σ'，同样的结论也成立。显然，只需证明在 相邻种子 Σ 中的 Laurent 表示具有此性质即可；该种子是通过用 f' 替换一个近似簇变量 $f = f_l$ 得到的。设 R 和 R' 分别为 $\widehat{\Sigma}$ 和 $\widehat{\Sigma}'$ 中变量所构成的多项式环。假设 $y = QM/f^k$，其中 $k \in \mathbb{Z}$, $Q \in R$ 不能被任何单项式整除，且 M 是 Σ 的近似簇变量 的 Laurent 单项式，其中不包括 f，并且分母中不含冻结变量。此外，设 $y = Q'M'$，其中 $Q' \in R'$ 不能被任何单项式整除，且 M' 是 Σ' 中变量的 Laurent 单项式。回忆一下，f 和 f' 满足交换关系 $ff' = P$，其中 $P \in R \cap R'$。设 m 为满足 $\tilde{Q} = (f')^m Q|_{f=P/f'} \in R'$ 的最小非负整数，则 $\tilde{Q}(f')^{k-m}M = Q'M'P^k$ 是 R' 中的恒等式。由于 Σ' 中的变量代数独立，只有当 $\tilde{Q} = Q'P^k$ 且 $M' = (f')^{k-m}M$ 时，该恒等式才可能成立。因此，M' 仍然满足分母中不含冻结变量这一性质。

因此，每个 y_m 都可以在 F 中的任意近似簇 Σ'处写成关于冻结变量的 多项式环上的 Laurent 多项式，从而 $\mathcal{A}$ 是完备的。□

例6.3。考虑例4.5中描述的广义近似簇结构 $\mathcal{GC}_3$。使用 Maple 直接检查可知，定理 6.2 的条件均得到满足，因此 $\mathcal{GC}_3$ 是完备的。

References

[1] A. Berenstein、S. Fomin与A. Zelevinsky, *Cluster algebras. III. Upper bounds and double*。杜克数学杂志（），–。[2] C. Fraser, *Quasi-homomorphisms of cluster algebras*, 应用数学进展81 (2016), 40–77. [3] M. Gekhtman、M. Shapiro与A. Vainshtein, *Bruhat cells* **126** 2005 1 52 *Unipotent double of SL_n and generalized cluster structures* **116** 2018 429 484，伦敦数学会会报（），–。

[4] M. Gekhtman、M. Shapiro与A. Vainshtein, *Generalized cluster structures related to the Drinfeld double of GL_n* **105** 2022 1601 1633 , 伦敦数学会会刊 （） , –。[5] M. Gekhtman、M. Shapiro与A. Vainshtein, *Poisson, staircase matrices and generalized cluster structures* 2022 4181 4221 , 国际数学研究通知 （） , –。[6] M. Gekhtman、M. Shapiro与A. Vainshtein, *A plethora of cluster structures on GL_n*, 美国数学学会回忆录297（2024）, 第1486号, 104页。[7] M. Gekhtman、M. Shapiro与A. Vainshtein, *Generalized cluster structure on GL_n via birational Poisson maps* 2026 , 。

Department of Mathematics, University of Notre Dame, Notre Dame, IN 46556
Email address: mgekhtma@nd.edu

Department of Mathematics, Michigan State University, East Lansing, MI 48823
Email address: mshapiro@math.msu.edu

Department of Mathematics & Department of Computer Science, University of Haifa, Haifa, Mount Carmel 31905, Israel*Email address*: alek@cs.haifa.ac.il