arXiv:2603.12532v1 [econ.TH] 13 Mar 2026

# 自我确认机制

Zhiming Feng* Qingmin Liu†

2026年3月16日

**摘要**

本文研究一类机制设计环境：设计者事先并不知道代理人私人信息的分布，而是从机制本身所诱导的代理人行为中学习。我们形式化了自我证实机制这一概念及其一种精炼，用以刻画如下思想：一个均衡机制在给定设计者信念时是最优的，且该信念与机制所产生的信息相一致。我们建立了虚拟揭示原理，表明任何激励相容机制都可以表示为一个带有筛选后的类型报告的直接机制，而这些报告保留了原机制的信息内容。将该框架应用于垄断问题，我们证明，在均衡精炼条件下，占优策略自我证实机制恰好是具有局部收益最大化价格的标价机制。

*zf2295@columbia.edu，经济系，哥伦比亚大学。
†ql2177@columbia.edu，经济系，哥伦比亚大学。

# 目录

**1 引言 1**

**2 基础知识 7**

2.1 数学符号 .82.2 机制诱导博弈 .82.3 机制生成的数据与推断 .9

**3 虚拟 揭示原理 11**

3.1 直接机制 .113.2 虚构直接机制 .123.3 虚拟揭示原理.143.3.1 强形式 .143.3.2 弱形式 .15

**4 自我确认机制 16**

4.1 定义 .164.2 真理粒度精炼 .17

**5 应用：垄断 19**

**6 结论 21**

**A 虚拟揭示原理的证明 21**

A.1 核与 Blackwell 信息性序 .21A.2 定理 2 的证明 .23A.3 定理 3 的证明 .24

**B 精炼的证明 28**

B.1 引理2的证明.29B.2 推论1的证明 .32B.3 推论2的证明 .32

**C 定理 4 的证明 33**

**参考文献 42**

# 1 引言

机制和制度并不总是纯粹规范设计的产物。相反，它们源于复杂的策略性互动。机制的运行通过其中经济主体的反馈生成数据，而这种反馈可能触发重新设计与修改。在这些力量作用下，一些机制并不稳定；另一些则持续存在，或陷入看似次优的状态。我们构建了一个关于数据生成机制及其驱动重新设计的内生力量的模型，其中机制本身作为一种均衡得以持续存在。

一种非常自然的环境是：这类力量出现于代理人与设计者都不知道潜在不确定性分布的情形，从而为学习和再优化留下空间。例如，卖方可能向估值属于私人信息的买方出售商品，而卖方与买方自身都对估值的先验分布缺乏精确了解。类似地，在政治制度的设计中——例如投票规则、立法程序或其他汇集公众意见的机制——公民偏好的分布可能不为政治设计者所知，公民自身也仅有不完全的理解。在此类情形中，代理人一方的不确定性虽令人棘手，但往往并非致命，至少在理论上如此：通过聚焦于占优策略或事后激励相容机制，可以使代理人的行为独立于对他人类型分布的信念。相比之下，设计者一方的不确定性——关于代理人私人信息或偏好的分布——不可避免，并起着核心作用。[1]

计算机科学和经济理论文献中的一种自然应对方式是无先验机制设计。[2] 这类文献不采用详细的概率假设，而是寻求在一类环境中均能表现良好的机制，通常依据保守的最坏情形准则或相关变体进行评估；例如参见 Chassang（2013）和 Carroll（2019年）。其预测往往取决于外生模糊集的设定方式。尤其是，通过机制运行所揭示的信息

[1]我们的主张涉及一个更为基本的问题：当代理人不知道彼此类型的分布时，他们如何在机制中互动，以及设计者如何评价此类机制。相比之下，Chung与Ely（2007）采取了不同视角，追问收益最大化拍卖者究竟是否以及何时有理由首先施加占优策略激励相容；另见Bergemann与Morris（2005年）对事后激励相容的相关讨论。这些论文是稳健机制设计文献中一条目标不同于本文的独立脉络的先驱。[2]开启这一环境分析的一项奠基性洞见源自Wilson（1987）。

通常被视为无关因素。相比之下，学习和实验，尤其是在面对此类不确定性时，在实践中十分普遍。这一观察促使我们开展当前的研究议程。

在这一背景下，学习的一种自然方法是对机制设计进行动态建模，使设计者能够随着时间推断代理人的类型或偏好的分布。事实上，越来越多的文献——尤其是计算机科学领域的研究——探讨设计者如何从观察到的行为中学习这类分布。对于这些动态问题，可行机制和博弈形式的具体假设至关重要（例如，参见 Nekipelov、Syrgkanis 和 Tardos（2015）、Morgenstern 和 Roughgarden（2016）以及 Kanoria 和 Nazerzadeh（2021））。我们提出一种新的简化形式方法。我们不将学习明确建模为动态或统计过程，而是将机制设计视为一个不动点问题：机制在运行过程中产生信息，而这些信息反过来又会限制均衡中可能出现的机制。

为了解其直观含义，假设设计者实施一种将代理人报告的消息映射为结果的机制。代理人根据各自的策略作出最优响应，发送相应的消息。随后，设计者观察这些响应所产生的消息经验分布（可以将这一经验分布理解为：针对一个平稳的代理人群体反复实施该机制所诱导出的长期分布）。这一经验分布并非任意，它既反映了代理人真实但未被观察到的类型分布，也反映了机制本身的结构。改变潜在分布或机制，通常都会改变消息分布。通过观察这一经验分布，设计者能够获知有关潜在类型分布的信息，而她无法直接观察这一分布。关键问题在于，这些信息是否会激励设计者修改机制。如果不会——也就是说，设计者根据代理人响应所揭示的信息，认为继续使用同一机制是最优的——那么该机制就可以视为处于均衡状态。从这个意义上说，我们关注的是均衡机制：相对于其自身产生的信息而言保持稳定的机制。因此，我们关心的不是哪些机制“最优”，而是哪些机制会作为一种均衡现象持续存在。

虽然这一想法很自然，但将其形式化需要澄清若干概念问题

并对适当的公设采取立场。

第一个问题涉及设计者从运行一个机制中了解到什么。固定一个将所报告的消息剖面映射为结果的机制，并固定一个将类型映射为消息的代理人策略剖面。这些对象连同类型上的先验分布，会诱导出消息剖面上的一个分布（我们假定该分布在经验上可观测，并抽象掉抽样噪声等统计问题）。当设计者观察到这一分布，并且作为均衡公设的一部分知道代理人的策略时，她只能推断出类型的真实分布位于一组在给定该机制与这些策略下观测上不可区分的分布之中。这一集合恰好刻画了设计者所学到的信息。在没有进一步假设的情况下，不可能作出额外的推断。因此，可以自然地依据机制所诱导集合的信息量来比较各个机制。

第二个概念性问题涉及机制的全集。机制与代理人的策略的定义方式与标准机制设计范式中相同。然而，与经典框架不同的是，这里的消息还充当信息来源，设计者据此对代理人的类型的分布作出推断。这一区别有一个直接含义：标准的揭示原理已不再足以还原所有相关机制。采用如实报告策略的直接机制会揭示类型的真实分布，因而无法刻画那些有意汇集信息的机制——例如，具有退化消息空间的机制，或旨在隐瞒信息的策略。

当然，读者或许会问，我们为什么要关注这类间接机制。我们不难想象这样的实际情形：某种类型的买方明知自己肯定无法获得商品，便选择不参与销售机制。在这种情况下，直接机制——在标准机制设计理论中，通常被视为用于还原所有机制的分析工具——并不总能作为获取信息的实用工具。相反，标价等间接机制在实践中得到广泛应用，而这些机制并不能完全揭示代理人的信息。因此，自然会有人问，这类机制为何能够持续存在，原因又是什么。

撇开现实世界中的考量，一个自然而然的理论问题随之而来。尽管一旦信息和推断变得重要，限制只考虑直接机制显然会损失一般性，但这是否仍不会损失最优性?

具体而言，假设直接机制能够实现完全信息揭示，设计者能否仅凭自身偏好，像真实分布已知时那样，直接实施通常的最优直接机制？这些问题需要仔细讨论。第一个问题提得并不恰当。我们研究的并非传统意义上的最优机制，因为若不明确设计者信息方面的假设，最优性便无从界定。相反，我们研究的是能够对从代理人回应中获知的信息作出反应，并在给定这些信息时保持稳定的均衡机制。正如标准的具有多重均衡的非合作博弈中那样，我们不能简单地选择对某个特定参与者——此处为设计者——最有利的均衡。对于第二个问题，答案是有条件的肯定。真实揭示下的最优直接机制可以成为一种均衡（稍后定义），但它只是可能存在的多个均衡之一。

从这一视角来看，在经典的买方—卖方问题中，一个自然且具有现实意义的问题是：固定价格机制——即只揭示底层类型分布的一个分位数的机制——是否属于均衡机制？如果是，哪些价格会作为均衡出现？这是一个界定明确且具有显著现实意义的问题。更广泛地说，可能的机制有很多。哪些机制能够作为均衡机制出现，又该如何刻画它们？要回答这些问题，需要一种不仅保留结果映射、还保留信息内容的揭示原理。

第三个问题涉及如何定义均衡。既然机制内生生成的信息是由一组与消息经验分布相一致的类型分布所刻画，那么，对设计者而言，偏离该机制并从中获利意味着什么？一种自然的做法是借鉴稳健设计的思路，针对这组类型分布采用最大最小准则或基于遗憾的准则。此类方法确实可以在我们的框架中加以构建；然而，将最坏情形准则与内生学习的信息及均衡推理相结合，需要从概念上加以论证，尽管这在操作层面并无困难。我们则采用贝叶斯方法。我们认为，如果某个机制在该集合中的某种信念下对设计者而言是最优的，那么它就是一个均衡。这对应于自我确认均衡的概念：至少存在一种与观察到的行为相容的信念，足以维持该机制。

第四个，也是更实质性的问题是，均衡概念可能过于宽松，

因为在这些机制下，许多类型分布在观察上等价，因此各种各样的机制都可能自我确认。自然，均衡方法让我们能够遵循博弈论中的经典传统，引入均衡精炼。如果一种机制即使在少量关于真实分布的外生信息被揭示时仍保持自我确认，我们就称之为稳健自我确认。这种信息泄漏，或“一丝真相”，被建模为以真实分布下较小的概率揭示某个集合上的分布。因此，这里的“稳健性”一词采用其经典含义——相对于“扰动”的稳定性——而非近年来在稳健机制设计中的用法。因此，稳健均衡所要考察的是：即使泄露出最少量的真实信息，机制是否仍能保持稳定。

明确了这些问题后，我们的框架的适用范围与局限性现在应当更加清晰。我们通过两类结果对此加以论证。第一个结果是一个新的揭示原理，我们称之为虚拟揭示原理。我们证明，任何激励相容机制都等价于一种虚拟直接机制：在该机制中，代理人报告类型，但这些报告会经过有意的过滤，以加入噪声。有趣的是，Blackwell 信息退化并不一定是这种过滤器的定义性特征。这一构造使我们能够在统一框架下表示所有机制——无论是直接机制还是间接机制——同时保留结果映射和信息内容。

第二个结果将该框架应用于经典的垄断问题。我们刻画了占优策略稳健自我确认机制，并表明它们恰好是固定价格机制，其中价格是收益的局部最大值点。这一经济学结论十分明确：它揭示了哪些次优机制能够持续存在。当买方分布满足虚拟价值单调条件时，局部最大值点是唯一的，此时稳健自我确认机制与 Myerson 最优机制相一致。从这个意义上说，一旦认真对待信息反馈，Myerson 机制就会成为唯一的均衡机制。

均衡机制出现在这样的环境中：设计者对基础不确定性的分布存在不确定性。其他经典情境也可能自然地使机制成为均衡结果，尽管其根本原因有所不同。Myerson（1983）研究了知情机制设计问题，其中机制可能揭示设计者的私人信息。Holmström 和 Myerson（1983）表明，知情代理人可以集体推翻激励相容的机制，并制定能够抵御此类联盟偏离的持久决策规则。

每篇论文都引发了大量文献，但由于篇幅限制，我们不在此尝试进行综述。Vartiainen（2013）研究了无承诺机制设计。他的洞见是将机制分解为一个信息处理装置和一个实施装置：前者将消息映射为公共信号，后者根据该信号决定结果。由于卖方无法承诺实施方式，她可能会重新设计机制；只有当某一机制不被卖方在任一信号所诱导的后验分布下会选择的机制事后支配时，该机制才是可信的。与我们的情境不同，他的框架明确刻画了在先验分布已知的情况下，根据实现的信号更新信念。

沿着稳健机制设计的思路，Kambhampati（2025）提出了适当稳健性的概念：通过迭代应用最坏情形算子——或采用词典序极小化程序——来细化判据，从而得到更精确的预测。相较之下，Börgers、Li 和 Wang（2025）分析了在各种类型下均非支配的机制。这类机制无信念，可以视为对过于保守的最大最小准则的一种放宽。他们的框架没有纳入均衡考量或内生推断，而这两者是我们方法的核心。根据对偶性，在适当的拓扑假设下，一个由某种信念所证成的自我证实机制，相对于与该信念相关联的信念集合是非支配的。除了信念的内生性之外，这种对偶的非支配概念不同于Börgers、Li 和 Wang（2025）提出的概念。

在博弈论情境中，自我确认均衡关注的是参与者关于他人策略的猜测，这些猜测不会被观察结果所否定，参见例如 Fudenberg 和 Levine（1993）、Rubinstein 和 Wolinsky（1994），以及 Dekel、Fudenberg 和 Levine（2004）。我们的情境有所不同：设计者对机制的选择决定了消息的经验分布，而这又塑造了她对类型的信念。尽管如此，其基本思想与此密切相关，这也促使我们使用“自我证实机制”这一术语。从观察到的结果中学习，并利用由此获得的信息以固定点的方式定义解概念，这一思想令人联想到 Liu（2020）提出的稳定性概念。

本文其余部分安排如下。第 2节介绍一般的机制设计环境。第2.3节将机制生成的信息形式化，并定义与观察到的行为相一致的可行先验集合。第3.2

节和第 3.3 节介绍虚构直接机制，并确立虚拟揭示原理，表明任何激励相容机制都可以用一种既保留分配又保留信息内容的方式来表示。第4.1 节定义自我确认机制并研究其基本性质。第 4.2 节介绍“一丝真相”这一细化概念，以及稳健自我确认的概念。第 5节将该框架应用于单卖家—单买家问题，并刻画稳健自我确认机制。所有省略的证明和其他技术性结果汇集于附录。

## 2 基础知识

考虑一个有限的代理人集合 $N = \{1、2、\ldots\ldots、n\}$。每个代理人 $i \in N$都有一个私人类型 $\theta^i \in \Theta^i$，类型空间为 $\Theta = \prod_{i\in N} \Theta^i$。类型剖面记作 $\theta = (\theta^1, \theta^2、\ldots\ldots、\theta^n) \in \Theta$。令 $O$表示结果集合。

每个代理人 $i \in N$都有一个收益函数 $u^i : O \times \Theta \to \mathbb{R}$。机制设计者被建模为参与者 0，其收益函数为 $u^0 : O \times \Theta \to \mathbb{R}$。这些收益函数按照标准的期望效用方式扩展到 $O \times \Theta$上的概率测度；略微滥用记号，我们仍用 $u^i$ 和$u^0$表示扩展后的函数。

**注 1.** 在许多实际应用中，设计者的收益并不直接取决于代理人的类型。在收益确实取决于这些类型的情形下，设计者原则上可以根据实现收益对这些类型进行推断。部分文献通过假设收益不会被即时观察到，来抽象掉这种推断。为了便于理解其在应用中的含义，读者只需假设 $u^0$ 不取决于 $\Theta$。

一个**机制** $\mathcal{M} = (M, \omega)$由一个消息空间 $M = \prod_{i\in N} M^i$组成，其中 $M^i$是代理人 $i$ 可用的消息集合，以及一个结果函数 $\omega : M \to \Delta(O)$，它为每个消息剖面 $m = (m^1, m^2, \ldots, m^n)$分配一个关于结果的概率测度。

**注 2** （拓扑与可测性）。 我们假设所有集合都是标准博雷尔空间。尽管该表述对于类型空间和消息空间是一般性的，但某些结果会区分两种情况。第一种情况下，对于每个 $i$， $\Theta^i$ 和 $M^i$ 都是

不可数标准 Borel 空间。第二种情况下，对于每个 $i$， $\Theta^i$ 和 $M^i$ 都是有限的。

## 2.1 数学符号

对于任意随机映射 $g\colon Y \to \Delta(Z)$ 和任意概率测度 $\mu \in \Delta(Y)$，我们将 $g_\mu \in \Delta(Z)$ 定义为相对于 $\mu$ 的 $g$ **平均值**，即

$$g_\mu(E) := \int_Y g(y)(E)\,\mu(dy) \tag{2.1}$$

对于任意可测集 $E \subseteq Z$。

对于任意两个随机映射 $h\colon X \to \Delta(Y)$ 和 $g\colon Y \to \Delta(Z)$，我们将它们的**复合映射** $g \circ h\colon X \to \Delta(Z)$ 定义为

$$(g \circ h)(x) := g_{h(x)} \tag{2.2}$$

对于所有 $x \in X$。等价地，利用（2.1），

$$(g \circ h)(x)(E) = \int_Y g(y)(E)\,h(x)(dy) \tag{2.3}$$

对于所有 $x \in X$ 和可测集 $E \subseteq Z$。

对于函数集合 $h^i\colon X^i \to \Delta(Y^i)$、$i = 1$、……、$n$，定义它们的联合函数

$$h(x) := (h^1(x^1), \ldots, h^n(x^n)), \tag{2.4}$$

对于所有 $x = (x^1$、……、$x^n) \in X = \prod_{i\in N} X^i$。因此，$h$ 可以视为一个从 $X$ 到 $\Delta(Y) = \Delta(\prod_{i\in N} Y^i) \supseteq \prod_{i\in N} \Delta(Y^i)$ 的函数。

## 2.2 机制诱导博弈

机制 $\mathcal{M}$ 和收益函数组合 $u = (u^1$、……、$u^n)$ 在 $n$ 个代理人之间诱导出一个博弈（$\mathcal{M}$ $u$）。代理人 $i$ 在此博弈中的**策略** 是一个函数 $\sigma^i\colon \Theta^i \to \Delta(M^i)$。

如同机制设计的标准解释，每个代理人 $i \in N$ 根据 $\sigma^i$发送一条消息 $m^i \in M^i$，发送过程可能是随机的。实现的消息组合$m = (m^1$，……，$m^n) \in M$经结果函数 $\omega$映射为一个概率测度

在结果上的，$\omega(m) \in \Delta(O)$。

按照（2.4）中的联合函数记法，策略组合 $\sigma = (\sigma^1, \ldots, \sigma^n)$ 可视为一个随机映射 $\sigma: \Theta \to \Delta(M)$。因此，$\sigma$ 与结果函数 $\omega: M \to \Delta(O)$ 的复合是一个随机映射 $\omega \circ \sigma: \Theta \to \Delta(O)$，它将每个类型剖面映射为结果上的一个概率测度。

稍微滥用一下记法，我们用 $u^i(\omega \circ \sigma, \theta)$ 代替 $u^i((\omega \circ \sigma)(\theta), \theta)$。如果策略组合 $\sigma = (\sigma^1, \ldots, \sigma^n)$ 是诱导博弈的**事后均衡**，则

$$u^i(\omega \circ \sigma, \theta) \geq u^i(\omega \circ (\tilde{\sigma}^i, \sigma^{-i}), \theta)$$

对于所有 $i \in N$、$\theta \in \Theta$ 和 $\tilde{\sigma}^i$，均有：$\Theta^i \to \Delta(M^i)$。

如果 $\sigma^i$ 是诱导博弈中代理人 $i$ 的**占优策略**，或者说“始终最优响应”，则

$$u^i(\omega \circ (\sigma^i, \tilde{\sigma}^{-i}), \theta) \geq u^i(\omega \circ \tilde{\sigma}, \theta)$$

对于所有 $\theta \in \Theta$ 以及所有策略组合 $\tilde{\sigma} = (\tilde{\sigma}^1, \ldots, \tilde{\sigma}^n)$。

如果对于每个 $i \in N$，$\sigma^i$ 都是占优策略，那么策略组合 $\sigma = (\sigma^1, \ldots, \sigma^n)$就是诱导博弈的**占优策略均衡** 。

**定义 1**。 我们称机制-策略对$(M\ \sigma)$ 为增广机制。如果$\sigma$ 构成由机制 $M$ 诱导的博弈的（事后或占优策略）均衡，则增广机制是（事后或占优策略）激励相容的。

## 2.3 机制生成的数据与推断

给定任意概率测度 $\pi \in \Delta(\Theta)$ 以及任意策略组合 $\sigma$，由 $\pi$ 和 $\sigma$ 在消息空间 $M$ 上诱导的概率测度 $\sigma_\pi$，按照（2.1）中的记号表示。

假设自然按照先验分布 $\pi_0 \in \Delta(\Theta)$ 选择代理人的类型，我们将其称为**真实先验**。我们假设没有人——尤其是设计者——能够观察到$\pi_0$。相反，他们观察到由策略组合 $\sigma$ 和先验分布 $\pi_0$ 所诱导的消息剖面**经验分布** ，即 $\sigma_{\pi_0} \in \Delta(M)$。注意，$\sigma_{\pi_0}$ 是 $\pi_0$的$\sigma$-信息模糊化。

基本前提是，设计者知道代理人的策略组合 $\sigma$ ，并观察消息 $\sigma_{\pi_0}$的经验分布，进而试图推断 $\pi_0$。然而，给定 $\sigma$，可能存在多个 $\pi \in \Delta(\Theta)$使得 $\sigma_\pi = \sigma_{\pi_0}$；它们都与真实先验分布 $\pi_0$在观测上不可区分。

我们将 $\Pi^{\mathcal{M}}(\sigma, \sigma_{\pi_0}) \subseteq \Delta(\Theta)$ 记为这类概率测度的集合，并称之为**可行先验**。形式上，

$$\Pi^{\mathcal{M}}(\sigma, \sigma_{\pi_0}) := \{\pi \in \Delta(\Theta) : \sigma_\pi = \sigma_{\pi_0}\}. \tag{2.5}$$

它是 $\Delta(\Theta)$ 的一个凸子集。等价地，$\Pi^{\mathcal{M}}(\sigma, \sigma_{\pi_0})$ 包含所有满足$\sigma_{\pi_0}$ 是 $\pi$的 $\sigma$-信息模糊化的 $\pi \in \Delta(\Theta)$。

**备注3**。 关于为何假设设计者能够观察消息的经验分布，自然会产生一些疑问。正如引言中所解释的，我们可以将这个问题理解为：设计者面对多代代理人，而这些代理人的类型是从某个共同分布中抽取的。此外，还有另一种解释。当代理人被理解为一个总体时——例如，当垄断问题中的买方被理解为由估值未知的买方构成的连续体时——观察机制在单次运行中的运作，确实会揭示经验分布。这些归根结底都是建模决策；在不同假设下也可以发展出其他理论。例如，设计者可能只观察消息分布的某些统计量，或尝试直接根据单个消息组合进行推断。观察消息的经验分布提供了一个自然的基准。

**例1.** 若$\mathcal{M}$ 是一个直接机制，且 $\sigma$ 是一个如实报告策略组合，则$\sigma_\pi = \pi$ 对任意 $\pi \in \Delta(\Theta)$。 因此，对于任意真实先验分布 $\pi_0 \in \Delta(\Theta)$，$\Pi^{\mathcal{M}}(\sigma, \sigma_{\pi_0}) = \{\pi_0\}$ 。该机制完全揭示真实先验分布，并产生最大量的信息。

**例2.** 对于任意机制$\mathcal{M}$，假设要么 $M = \{m^*\}$是单点集，要么代理人采用混同策略组合 $\sigma \equiv 1_{m^*}$，其中 $m^* \in M$ 和 $1_{m^*}$ 表示 $m^*$上的狄拉克测度。则对任意 $\pi \in \Delta(\Theta)$，有 $\sigma_\pi = 1_{m^*} \in \Delta(M)$。 因此，对任意真实先验 $\pi_0 \in \Delta(\Theta)$，有 $\Pi^{\mathcal{M}}(\sigma, \sigma_{\pi_0}) = \Delta(\Theta)$。也就是说，该机制产生的信息量最小。

如上所示，我们可以通过两个增广机制所诱导的可行先验集合来比较它们。这自然引出如下定义。

**定义 2**。考虑两个随机映射 $g: X \to \Delta(Y)$ 和 $h: X \to \Delta(Z)$。如果对于每个$\mu_0 \in \Delta(X)$，我们都有 $g$ 比 $h$核信息性更强，记作 $g \gtrsim h$，则称 $g$ 比 $h$核信息性更强，

$$\{\mu \in \Delta(X) : g_\mu = g_{\mu_0}\} \subseteq \{\mu \in \Delta(X) : h_\mu = h_{\mu_0}\}. \tag{2.6}$$

如果 $g$ 和 $h$ 满足 $g \gtrsim h$ 和 $h \gtrsim g$，则称二者<style id='3'>核等价，记作 $g \sim h$。

**注 4**。“核”这一术语反映了以下事实：$g$ 和 $h$ 可以被视为作用于测度上的线性算子，而可行先验与所诱导线性算子的核（零空间）密切相关。当上下文能够明确所指的信息性序时，我们省略“核”这一限定词。该序与 Blackwell信息性序之间的关系将在 A.1 节中讨论：如果 $g$ 比 $h$Blackwell更富信息，那么 $g \gtrsim h$；然而，反之未必成立。因此，定义 2 中的核信息性弱于 Blackwell信息性。

# 3 虚拟揭示原理

## 3.1 直接机制

直接机制 $\mathcal{D} = (\Theta, \delta)$ 是一种特殊的机制，其中消息空间 $M$与类型空间 $\Theta$一致，结果函数 $\delta: \Theta \to \Delta(O)$ 将报告类型映射为结果。对于每个代理人 $i$，直接机制中的如实报告策略是恒等映射 $\tau^i: \theta^i \mapsto \theta^i$。如实报告策略组合是联合函数 $\tau = (\tau^1, \ldots, \tau^n)$。

在上下文明确时，我们称直接机制 $\mathcal{D} = (\Theta, \delta)$ 是（事后或占优策略）**激励相容**的，如果如实报告策略组合构成诱导博弈的（事后或占优策略）均衡，而不明确提及通过如实报告策略对直接机制进行增广。

由于经典揭示原理，激励相容直接机制常被分析者用作一种技术工具，以便在不失一般性的情况下涵盖所有激励相容增广机制。也就是说，给定任意激励相容

增广机制（$M, \omega, \sigma$），存在一个结果函数为 $\delta := \omega \circ \sigma$ 的激励相容直接机制。

然而，在我们的设定中，如例1所示，设计者可以识别真实先验 $\pi_0$，其依据是采用如实报告策略的直接机制所生成的消息经验分布。相比之下，如例2所示，设计者无法从汇聚策略所生成的经验分布中推断出关于真实先验的任何信息。显然，还存在其他增广机制，就其所诱导的可行先验而言，介于这两个极端之间，如（2.5）所定义。因此，对经典揭示原理的简单应用会失效。为了建立适用于我们这一设定——具有不可观测先验和可观测经验消息分布——的揭示原理，我们必须定义一类经过修正、能够保留信息内容的直接机制。

## 3.2 虚构直接机制

为了刻画任意增广机制的信息内容，如（2.5）所定义，我们为$\mathcal{D} = (\Theta, \delta)$配备一个随机映射组 $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)$，其中每个

$$\varphi^i : \Theta^i \to \Delta(\Theta^i).$$

按照（2.4）中的惯例，联合函数 $\varphi$：$\Theta \to \Delta(\Theta)$ 是一个随机映射。其含义是：若 $\theta$ 是直接机制中的报告类型剖面，则并非完美地观察到 $\theta$，设计者观察到的是从概率测度 $\varphi(\theta) \in \Delta(\Theta)$ 中抽取的信号。因此 $\varphi$ 是对完全揭示报告 $\tau$的信息模糊化。

真实先验 $\pi_0$、如实报告策略 $\tau$ 以及扰动报告的随机映射 $\varphi$ 共同决定了 $\Theta$（即直接机制中的消息空间）上的经验分布。我们将该经验分布记为 $\varphi_{\pi_0} \in \Delta(\Theta)$，其定义使得对任意可测集 $E \subseteq \Theta$,

$$\varphi_{\pi_0}(E) := \int_{\Theta} \varphi(\theta)(E)\, \pi_0(d\theta). \tag{3.1}$$

在如实报告策略下运行直接机制$\mathcal{D}$，并由 $\varphi$ 增广后，设计者无法将其与真实先验 $\pi_0$ 区分的先验集合为

$$\Pi^{\mathcal{D}}(\varphi, \varphi_{\pi_0}) := \{\pi \in \Delta(\Theta) : \varphi_\pi = \varphi_{\pi_0}\}. \tag{3.2}$$

在寻求新的揭示原理时，核心问题在于，是否可以通过 (3.2) 恢复增广机制 2.5) 所诱导的可行先验，其中增广机制为 $(\mathcal{M}\ \sigma)$，且真实先验未知；也就是说，

$$\Pi^{\mathcal{D}}(\varphi, \varphi_{\pi_0}) = \Pi^{\mathcal{M}}(\sigma, \sigma_{\pi_0})\ for\ all\ \pi_0 \in \Delta(\Theta). \tag{3.3}$$

采用定义2的术语，(3.3) 等价于说 $\varphi$和 $\sigma$ 核等价，即 $\varphi \sim \sigma$。

并非所有随机映射 $\varphi: \Theta \to \Delta(\Theta)$ 都能胜任。

**定义 3**。考虑一个直接机制 $D = (\Theta, \delta)$ 以及一组随机映射 $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)$，其中对每个 $i$，$\varphi^i: \Theta^i \to \Delta(\Theta^i)$。我们称 $\varphi$ 是 $D$ 的过滤器，如果 $\varphi$ 比 $\delta$ 布莱克威尔更富信息。如果 $\varphi$ 是 $D$ 的过滤器，我们称$(D\ \varphi)$ 为一个虚拟直接机制。

**注 5**。虚构直接机制并非特殊机制，而是纯粹的技术工具，旨在通过分配和信息来刻画所有可能极其复杂的增广机制$(\mathcal{M}\ \sigma)$ 。当然，也可以作另一种解读：第三方运行一个标准直接机制，但只向设计者披露经过过滤的信息。或者，设计者运行直接机制，并承诺通过 $\varphi$. 观察报告类型。这种解读有助于理解虚构直接机制的动机，但我们应强调，设计者观察不到确切的报告类型（与例1不同），因此它在本文中仅是一种技术工具。

由于 $(\mathcal{M}\ \sigma)$ 中的消息所揭示的信息多于结果（结果函数定义在消息空间上），因此，在捕捉 $\varphi$ 信息的虚拟直接机制中，过滤器应至少与直接机制 $\delta$ 中的过滤器一样具有信息量$\mathcal{D}$。信息量的一个自然基准概念是 Blackwell 序。这促使我们在定义 3 中对过滤器提出这一要求。正如我们很快将看到的，这是正确的限制，但也可能过于严格。因此，我们引入一种较弱的信息量概念，以及相应的过滤器和虚拟直接机制的弱形式。

**定义 4**。考虑一个直接机制 $D = (\Theta, \delta)$ 以及一个随机映射组 $\varphi = (\varphi^1、\ldots\ldots、\varphi^n)$，其中每个 $\varphi^i: \Theta^i \to \Delta(\Theta^i)$。如果存在 $f = (f^1、\ldots\ldots、f^n)$，其中每个 $f^i$ 都是 $\Theta^i$ 上的随机映射，使得 $\varphi$ 是 $D$ 的一个弱过滤器，我们称之为.....

[3] $f^i$ 的定义域是 $\Theta^i$，而其陪域不受限制。

使得

(i) $\varphi \sim f$;

(ii) $f$ 比 $\delta$更富信息（布莱克威尔意义上）。

如果 $\varphi$ 是$D$的弱过滤器，我们称（$D$ $\varphi$）为弱虚拟直接机制。

比较定义3 和定义4可知，弱过滤器 $\varphi$ 是**过滤器**，当且仅当中间映射 $f$ 在（i）–（ii）中可以取为 $\varphi$。

## 3.3 虚拟揭示原理

增广机制（$\mathcal{M}$ $\sigma$）与虚拟直接机制等价，当且仅当它们实现相同的分配并生成相同的信息。

**定义 5.** 如果一个增广机制$(M\ \sigma)$ 与一个（弱）虚拟直接机制$(D\ \varphi)$ 满足

**(i)** $\omega \circ \sigma = \delta$;

**(ii)** $\sigma \sim \varphi$。

如果$(M\ \sigma)$ 和$(D\ \varphi)$ 等价，我们就称$(D\ \varphi)$ 由增广机制$(M\ \sigma)$实现，并称$(D\ \varphi)$（弱）虚拟直接机制表示$(M\ \sigma)$ 。

第一个条件意味着激励相容性在等价类内得以保持。根据（2.6）和（3.3），上述第二个条件意味着，无论真实的先验分布是什么，过滤器 $\varphi$ 都会生成一个虚拟观测，其诱导出的可行先验集合与 $\sigma$ 生成的经验分布所诱导出的集合相同。

虽然虚拟直接机制本身不是增广机制，但总能由某个增广机制实现。然而，反过来一般并不成立。这种不对称性促使我们区分所谓“虚拟揭示原理”的强形式和弱形式。

### 3.3.1 强形式

我们在两种情形下证明虚拟机制与增广机制等价：（i）类型空间和消息空间是连续的；（ii）确定性机制。

**定理 1.** 每个虚拟直接机制 $(D\ \varphi)$ 都存在一个与之等价的增广机制 $(M\ \sigma)$。反过来，如果对于每个 $i \in N$ 类型空间 $\Theta^i$ 和消息空间 $M^i$ 都是不可数标准 *Borel* 空间，那么每个增广机制$(M\ \sigma)$ 都存在一个与之等价的虚拟直接机制$(D\ \varphi)$。

证明。 对于任意虚拟直接机制（$\mathcal{D}\ \varphi$），由于 $\varphi$ 比 $\delta$更具 Blackwell 信息性，因此存在一个可测映射 $g:\ \Theta \to \Delta(O)$，使得 $\delta = g \circ \varphi$。考虑由以下方式定义的增广机制（$\mathcal{M}\ \sigma$）：$\omega :=g,\ \ M^i :=\Theta^i$，以及对每个$i \in N,\ \ \sigma^i :=\varphi^i$。于是，$\delta = \omega \circ \sigma$ 且 $\sigma \sim \varphi$。因此，（$\mathcal{M}\ \sigma$）与（$\mathcal{D}\ \varphi$）等价。

反之，固定任意增广机制（$\mathcal{M}\ \sigma$）。考虑一个直接机制$\mathcal{D}$，其结果函数为 $\delta := \omega \circ \sigma$。我们寻求一个过滤器 $\varphi:\ \Theta \to \Delta(\Theta)$，使得 $\varphi \sim \sigma$，且 $\varphi$ 比 $\delta$更具 Blackwell 信息性。由于对每个 $i$而言，类型空间 $\Theta^i$ 和消息空间 $M^i$ 都是不可数标准 Borel 空间，因此它们是 Borel 同构的。于是，不失一般性地，我们可以将 $M^i$ 与 $\Theta^i$ 视为相同，并将代理人 $i$的策略写为 $\sigma^i:\ \Theta^i \to \Delta(\Theta^i)$。定义 $\varphi :=\sigma$。根据构造，$\varphi \sim \sigma$，从而$\delta = \omega \circ \sigma = \omega \circ \varphi$. 因此，$\varphi$ 比 $\delta$更具 Blackwell 信息性。因此，（$\mathcal{D}\ \varphi$）是一个与（$\mathcal{M}\ \sigma$）等价的虚拟直接机制。

□

在许多应用中，我们关注确定性机制和策略。我们将博雷尔可测函数 $g: X \to Y$ 视为随机映射 $x \mapsto 1_{g(x)}$。

**定义 6.** 增广机制 $(M\ \sigma)$，其中 $M\ =(M, \omega)$，若 $\omega:\ M \to O$ 且 $\sigma$ 是纯策略组合，则称其为确定性的。虚拟直接机制 $(D\ \varphi)$，其中 $D\ =(\Theta, \delta)$，若 $\delta:\ \Theta \to O$ 且 $\varphi:\ \Theta \to \Theta$，则称其为确定性的。

**定理 2.** 每个确定性虚拟直接机制 $(D\ \varphi)$ 均可由一个确定性增广机制 $(M\ \sigma)$实现。反之，每个确定性增广机制 $(M\ \sigma)$ 均可由一个确定性虚拟直接机制$(D\ \varphi)$表示。

### 3.3.2 弱形式

在有限情形下，我们只能满足于用弱虚拟机制来表示。

**定理 3**。 每个弱虚拟直接机制 $(D\ \varphi)$ 都可由一个增广机制 $(M\ \sigma)$实现。反之，如果 $\Theta$ 和 $M$ 均为有限集，那么每个增广机制 $(M\ \sigma)$ 都可由一个弱虚拟直接机制 $(D\ \varphi)$ 表示。

**备注 6。** 定理 3 中的揭示原理弱形式 $|\Theta| < |M|$ 无法进一步加强。存在一些满足 $|\Theta| < |M|$ 的例子，其中增广间接机制无法由（强）虚拟直接机制表示，尽管它可以表示为弱虚拟直接机制。

# 4 自我确认机制

## 4.1 定义

给定一个机制 $\mathcal{M} = (M, \omega)$、一个策略组合 $\sigma$ 以及类型组合上的概率测度 $\pi \in \Delta(\Theta)$，我们将设计者的预期收益记为

$$V^0(\mathcal{M}, \sigma, \pi) = \int_\Theta u^0((\omega \circ \sigma)(\theta), \theta)\, \pi(d\theta). \tag{4.1}$$

类似地，给定一个直接机制 $\mathcal{D} = (\Theta, \delta)$、代理人的如实报告策略组合以及概率测度 $\pi \in \Delta(\Theta)$，设计者的预期收益为

$$V^0(\mathcal{D}, \pi) = \int_\Theta u^0(\delta(\theta), \theta)\, \pi(d\theta). \tag{4.2}$$

**定义 7。** 如果存在 $\pi \in \Pi^{\mathcal{M}}(\sigma, \sigma_{\pi_0})$，使得激励相容的增广机制 $(M\ \sigma)$ 是 $\pi_0$-自我确认的

$$V^0(\mathcal{M}, \sigma, \pi) \geq V^0(\mathcal{M}', \sigma', \pi) \tag{4.3}$$

对于所有激励相容的增广机制 $(M', \sigma')$均成立。

**备注 7。** 自我证实机制不直接依赖于真实先验 $\pi_0$，而是依赖于经验分布 $\sigma_{\pi_0}$；为简化记号，我们将 $\pi_0$ 引入定义中。此外，信息生成机制的理念为替代性解概念提供了诸多可能性，例如要求（$\mathcal{M}\ \sigma$）求解

$$\sup_{(\mathcal{M}, \sigma)} \inf_{\pi \in \Pi^{\mathcal{M}}(\sigma, \sigma_{\pi_0})} V^0(\mathcal{M}', \sigma', \pi). \tag{4.4}$$

这种替代性概念根据与机制在经验上相符的信念，评估该机制的最坏情况表现。尽管这一概念本身颇具吸引力，但我们

在本文中转而采用均衡方法。

类似地，可以定义自我确认的虚拟直接机制。

**定义8**。 若存在 $\pi \in \Pi^{\mathcal{D}}(\varphi, \varphi_{\pi_0})$，使得激励相容的虚拟直接机制 $(D\ \varphi)$ 是 $\pi_0$-自我确认 的，则

$$V^0(\mathcal{D}, \pi) \geq V^0(\mathcal{D}', \pi) \tag{4.5}$$

对于所有激励相容的直接机制 $D'$。如果$(D\ \varphi)$ 对于某个过滤器 $\varphi$是 $\pi_0$-自我确认的，那么我们称 $D$ 是 $\pi_0$-自我确认的。

虚拟直接机制自我确认的下述单调性可由定义立即得出8:

**引理1**。 假设$(D\ \varphi)$ 和$(D\ \tilde{\varphi})$ 是两个满足$\tilde{\varphi} \succsim \varphi$的虚拟直接机制。那么对于任意 $\pi_0 \in \Delta(\Theta)$，如果$(D\ \tilde{\varphi})$ 是 $\pi_0$-自我确认的，则$(D\ \varphi)$ 是 $\pi_0$-自我确认的。

## 4.2 真理粒度精炼

机制的均衡方法开启了沿着经典博弈论思路进行精炼的可能性。尽管不同机制的消息空间和均衡策略可能存在显著差异，但对设计者而言，最终重要的是诱导分配和所揭示的信息，而虚拟直接机制正是对它们的刻画。我们考虑的扰动纯粹涉及信息和信念:分配保持不变。我们将讨论范围限定在连续的类型空间和消息空间内，以确保虚拟揭示原理的强形式成立。

我们利用的思路是我们称为“真值粒度细化”的方法：对机制施加扰动，使其在边际上更具信息性，即在一小部分类型上揭示真实先验分布，其中“小”是根据真实先验分布来衡量的。我们将其解释为外生信息泄露或获取的反映，而非策略选择的结果。因此，这种扰动会产生一族更小的可行先验集合。根据虚拟揭示原理，可以对规范虚拟直接机制的过滤器施加这种扰动。不过，我们必须确保扰动后的过滤器本身定义良好，这样得到的虚拟直接机制也才能定义良好。

为便于阐述，我们仅考虑独立类型分布，无论是真实先验分布还是可行先验；也就是说，$\pi_0 = (\pi_0^1, \ldots\ldots, \pi_0^n) \in \prod_{i\in N} \Delta(\Theta^i)$，对于任意虚拟直接机制（$\mathcal{D}$ $\varphi$），

$$\Pi^{\mathcal{D}}(\varphi, \varphi_{\pi_0}) = \left\{\pi = (\pi^1, \ldots, \pi^n) \in \prod\nolimits_{i\in N} \Delta(\Theta^i) : \varphi_\pi = \varphi_{\pi_0}\right\}.$$

该表述和分析可以推广到一般相关分布，但这样做会引入大量额外符号。

对于任意 $i \in N$，给定集合 $A^i \subseteq \Theta^i$，

$$\{\pi^i \in \Delta(\Theta^i) : \pi^i|_{A^i} = \pi_0^i|_{A^i}\}$$

是 $\Theta^i$ 上满足在 $A^i$ 上与 $\pi_0^i$ 一致的先验分布集合。现在

$$\Pi^{\mathcal{D}}(\varphi, \varphi_{\pi_0}) \cap \left\{\pi \in \prod\nolimits_{j\in N} \Delta(\Theta^j) : \pi^i|_{A^i} = \pi_0^i|_{A^i}, i \in N\right\} \tag{4.6}$$

对于任意 $i$，选择满足在 $\pi_0^i$ 上与 $A^i$ 一致的可行先验。下文的结果证实，对式（4.6）中可行先验的直观细化确实可以通过细化过滤器来实现。

**引理2。** 对于任意乘积集合 $\prod_{i\in N} A^i = A \subseteq \Theta$，存在一个过滤器 $\varphi^A$： $\Theta \to \Delta(\Theta)$，属于 $D$，使得

$$\Pi^{\mathcal{D}}(\varphi^A, \varphi^A_{\pi_0}) = \Pi^{\mathcal{D}}(\varphi, \varphi_{\pi_0}) \cap \left\{\pi \in \prod\nolimits_{j\in N} \Delta(\Theta^j) : \pi^i|_{A^i} = \pi_0^i|_{A^i}, i \in N\right\} \tag{4.7}$$

现在我们可以定义一般扰动：

**定义 9.** 对于 $\varepsilon > 0$，我们称过滤器 $\varphi^\varepsilon$ 揭示 $\varepsilon$-真值关于 $\varphi$ 在 $\pi_0$ 下成立，如果存在 $A = \prod_{i\in N} A^i \subseteq \Theta$，使得对于所有满足 $\pi_0^i(A^i) < \varepsilon$ 的 $i \in N$

$$\Pi^{\mathcal{D}}(\varphi^\varepsilon, \varphi^\varepsilon_{\pi_0}) = \Pi^{\mathcal{D}}(\varphi, \varphi_{\pi_0}) \cap \left\{\pi \in \prod\nolimits_{j\in N} \Delta(\Theta^j) : \pi^i|_{A^i} = \pi_0^i|_{A^i}, i \in N\right\}.$$

**定义 10.** 如果存在 $\varepsilon > 0$，使得对于每个过滤器 $\varphi^\varepsilon$，只要它在 $\pi_0$ 下揭示了关于 $\varphi$ 的 $\varepsilon$- 真值，$(D\ \varphi)$ 对每个过滤器都满足 $\pi_0$- 自我确认，则称虚构直接机制 $(D\ \varphi)$ 是稳健 $\pi_0$-自我确认。如果存在一个过滤器 $\varphi$，使得$(D\ \varphi)$ 是稳健的 $\pi_0$-自我确认机制，则为简便起见，我们称 $D$ 是稳健的 $\pi_0$-自我确认机制。

这一概念要求不仅 $(\mathcal{D}\ \varphi)$ 是 $\pi_0$-自我确认的，而且所有邻近的虚构直接机制也都是 $\pi_0$-自我确认的。稳健自我确认的单调性源于自我确认的单调性，后者由以下推论形式化表述。

**推论1.** 假设$(D\ \varphi)$ 与$(D\ \tilde{\varphi})$ 是虚构直接机制，且满足 $\tilde{\varphi} \gtrsim \varphi$。那么，若$(D\ \tilde{\varphi})$ 是稳健 $\pi_0$-自我确认的，则$(D\ \varphi)$ 是稳健 $\pi_0$-自我确认的。

以下结果是推论1的一个蕴含结果，它提供了一个判据，用以验证直接机制是否稳健自我确认：我们只需关注信息量最少的滤波器。

**推论2.** 考虑直接机制$D = (\Theta, \delta)$，并假设存在过滤器 $\varphi$使得 $\varphi \sim \delta$。那么，$D$是稳健 $\pi_0$-自我确认的，当且仅当$(D\ \varphi)$ 是稳健$\pi_0$-自我确认的。[4]

# 5 应用：垄断

在本节中，我们应用揭示原理以及稳健自我确认机制这一解概念。考虑一位垄断卖方，其向买方（$n = 1$）出售一件商品，该买方对该商品的私人价值为 $\theta \in \Theta = [0, 1]$。若买方获得该商品并最终支付 $p$，则其事后收益为 $\theta - p$；若其未获得该物品并最终支付 $p$，则其收益为 $-p$。结果空间为 $O = \{0,1\} \times \mathbb{R}_+$。

在直接机制中，结果函数为 $\delta: \Theta \to \Delta(O) = \Delta(\{0, 1\} \times \mathbb{R}_+)$。任何激励相容且个体理性的机制都可以通过随机化标价来实现。[5] 形式上，具有确定性价格 $p$ 的标价机制的结果函数为

$$\delta^p(\theta) := \begin{cases} 1_{(1,p)}, & \text{if } \theta \geq p, \\ 1_{(0,0)}, & \text{if } \theta < p, \end{cases}$$

[4]如果 $n = 1$，则可以保证存在这样的过滤器。对于 $n > 1$，$\varphi = (\varphi^1, ..., \varphi^n)$ 是一个联合函数，而 $\delta$ 则不一定是。[5]请注意，我们将转移支付限制为非负，且最低类型的价值为零，因此这一陈述成立。

其中， $1_{(1,p)}$ 和 $1_{(0,0)}$ 是狄拉克测度。这里假设平局处理有利于交易。因此， $\delta^p_{\pi_0}$ （真实先验下的经验观察）由下式给出

$$\delta^p_{\pi_0} = \pi_0([p,1])1_{(1,p)} + (1-\pi_0([p,1]))1_{(0,0)}.$$

这意味着卖方观察到买方类型大于或等于$p$的概率。我们将$\mathcal{D}^p = (\Theta, \delta^p)$记作代表报价为 $p$的机制的直接机制。

随机价格为 $\tilde{p} \in \Delta([0,1])$的机制具有结果函数 $\delta^{\tilde{p}}$：$\Theta \to \Delta(O)$，使得对于任意 $\theta \in \Theta$ 以及任意可测的 $E \subseteq O$,

$$\delta^{\tilde{p}}(\theta)(E) := \int_0^1 \delta^p(\theta)(E)\tilde{p}(dp).$$

我们将$\mathcal{D}^{\tilde{p}} = (\Theta, \delta^{\tilde{p}})$记作代表随机报价为 $\tilde{p}$的机制的直接机制。

以下结果刻画了在 $\pi_0$满足某些正则条件时，稳健自我确认机制的集合。

**定理4**。 假设真实先验分布 $\pi_0$ 是无原子的，并且存在一个在 $[0,1]$上具有全支撑的解析分布函数。那么，机制$D^{\tilde{p}} = (\Theta, \delta^{\tilde{p}})$稳健自我确认，当且仅当满足以下两个条件：

(i) 所有价格带来的收益都相同，即，如果 $p_1, p_2 \in$ 支撑 $\tilde{p}$，那么 $p_1\pi_0([p_1,1]) = p_2\pi_0([p_2,1])$。

(ii) 所有价格都是收益函数的局部极大值点，即，如果 $p \in$ 支撑$\tilde{p}$，那么$p$ 是 $\theta\pi_0([\theta,1])$的局部极大值点。

尽管证明相当复杂，涉及识别所有扰动筛选器并检查其诱导的可行先验集合，但这一刻画形式化了一种简单的直觉，至少在一个方向上是如此。如果标价并非局部最优，那么即使只在该价格附近揭示少量信息，也能让设计者通过偏离而获利。相比之下，局部最优价格对信息扰动具有稳定性。解析性排除了小区间内存在无穷多个局部极大值点的可能；否则，这些点会使扰动论证失效。

因此，稳健自我确认解释了次优机制何时以及为何能够持续存在。在经济学家和计算机科学家通常研究的特殊情形中，

科学家稳健自我确认机制的范围会进一步缩小 .

**推论 3.** 假设真实先验分布 $\pi_0$ 是无原子的，并且存在一个在 $[0,1]$ 上具有全支撑的解析分布函数。如果虚拟价值函数还是非递减的，那么，当且仅当 $\pi_0$ 为设计者所知时，该机制是最优机制，该机制才是稳健的 $\pi_0$自我确认机制。

# 6 结论

本文将机制设计构建为一个不动点问题，在这一问题中，设计者必须从机制自身产生的信息中学习。我们提出了虚拟揭示原理，证明任何激励相容机制都可以表示为一个直接机制，并配以一个过滤器，通过对报告进行模糊处理来保留其信息内容。借助这一框架，我们能够刻画出这样的均衡机制：它们在其产生的经验数据下仍然是最优的。

为减轻自我确认信念过于宽松的问题，我们引入了一丝真相精炼，要求即使真实分布在一个测度很小的集合上被揭示，机制仍保持稳定。在单买家情境中，这一精炼排除了并非局部收益最大化的价格，因为否则局部信息会激励偏离。这一结果为迈尔森机制提供了内生性论证。未来研究可以将这一逻辑拓展到多代理环境、垄断者拥有私人信息的情形，或明确刻画达到这些均衡所需动态实验的模型。

# A 虚构揭示原理的证明

## A.1 核与 Blackwell 信息量排序

在本节中，我们证明备注 4中的以下论断，并在下文加以概述。

**引理 3。** 如果 $g$ 比 $h$ 布莱克威尔更富信息，那么 $g \gtrsim h$；但反过来并不成立。

证明。 设 $g\colon X \to \Delta(Y)$ 和 $h\colon X \to \Delta(Z)$ 是随机映射，且 $g$布莱克威尔更富信息于 $h$。根据定义，存在一个随机映射

$b\colon Y \to \Delta(Z)$，使得 $h = b\circ\ g$，也就是说，对于每个 $x \in X$ 和每个可测集$E \subseteq Z$，

$$h(x)(E) = \int_Y b(y)(E)\, g(x)(dy).$$

对于任意先验分布 $\mu \in \Delta(X)$，对任意可测的 $E \subseteq Z$，我们有：

$$\begin{aligned} h_\mu(E) &= \int_X h(x)(E)\, \mu(dx) \\ &= \int_X \left( \int_Y b(y)(E)\, g(x)(dy) \right) \mu(dx) \\ &= \int_Y b(y)(E)\, g_\mu(dy), \end{aligned}$$

其中，最后一个等式由富比尼定理得出。因此，

$$h_\mu = b \circ g_\mu.$$

固定 $\mu_0 \in \Delta(X)$，并假设 $\mu \in \Delta(X)$ 满足 $g_\mu = g_{\mu_0}.$，则

$$h_\mu = b \circ g_\mu = b \circ g_{\mu_0} = h_{\mu_0}.$$

因此，$\{\mu \in \Delta(X)\colon\ g_\mu = g_{\mu_0}\} \subseteq \{\mu \in \Delta(X)\colon\ h_\mu = h_{\mu_0}\}$。由此 $g \succsim h$。

为了说明逆命题不成立，我们构造一个例子，其中 $g \succ h$，但 $g$ 并非比 $h$ 布莱克威尔更富信息。为此，令 $X = \{x_1,\ x_2,\ x_3\}$、$Y = \{y_1,\ y_2,\ y_3\}$ 和 $Z = \{z_1,\ z_2,\ z_3\}$。我们可以用列随机矩阵表示随机映射 $g\colon\ X \to \Delta(Y)$ 和 $h\colon\ X \to \Delta(Z)$：

$$G = (g(y \mid x))_{y\in Y,\, x\in X}, \qquad H = (h(z \mid x))_{z\in Z,\, x\in X}.$$

具体而言，考虑

$$G = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

我们主张 即 $g \succsim h$。为说明这一点，注意到由于 $G$ 可逆，对于任意 $\mu_0 \in \Delta(X)$ ，

我们有

$$\{\mu \in \Delta(X) : G\mu = G\mu_0\} = \{\mu_0\}.$$

因此 $\{\mu \in \Delta(X) : G\mu = G\mu_0\} \subseteq \{\mu \in \Delta(X) : H\mu = H\mu_0\}$, 所以 $g \gtrsim h$。

接下来，我们断言 $g \succ h$。为看出这一点，考虑

$$\mu_0 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \qquad \bar{\mu} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Then

$$H\mu_0 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = H\bar{\mu},$$

but

$$G\mu_0 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \neq G\bar{\mu} = \begin{pmatrix} 9/20 \\ 9/20 \\ 1/10 \end{pmatrix}.$$

因此 $h \not\gtrsim g$，从而 $g \succ h$。

最后，我们证明 $g$ 并不比 $h$布莱克威尔更富信息。反设 $g$ 比 $h$布莱克威尔更富信息。则将存在随机矩阵 $S$ 使得 $H = SG$。由于 $G$ 可逆，必然有 $S = HG^{-1}$，并且

$$HG^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 17 & -3 & 7 \\ -3 & 17 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

该矩阵含有负元素，因此不是随机的，矛盾。 □

## A.2 定理的证明2

证明。 我们先证明较为容易的方向。对于任意确定性虚拟（$\mathcal{D}$ $\varphi$），令$M := \Theta$, $\sigma := \varphi$，以及 $\omega = \delta$。由此得到的增广机制（$\mathcal{M}$ $\sigma$）是确定性的。此外，根据构造，$\sigma \sim \varphi$，且 $\delta \circ \varphi = \omega \circ \sigma = \delta$。

反过来，对于任意确定性的（$\mathcal{M}$ $\sigma$），令 $\delta := \omega \circ \sigma$。由于 $\sigma$ 是一个纯策略组合，对于任意 $i$, $\sigma^i$ 将 $\Theta^i$ 划分为 $\{(\sigma^i)^{-1}(\sigma^i(\theta^i)) : \theta^i \in \Theta^i\}$。对于任意 $i$，存在

存在一个博雷尔可测函数[6] $\varphi^i$： $\Theta^i \to \Theta^i$ 使得

$$\varphi^i(\theta^i) \in (\sigma^i)^{-1}(\sigma^i(\theta^i)) \text{ and } \varphi^i(\theta^i) = \varphi^i(\tilde{\theta}^i) \text{ iff } \sigma^i(\theta^i) = \sigma^i(\tilde{\theta}^i). \tag{A.1}$$

根据（A.1），$\sigma(\varphi(\theta)) = \sigma(\theta)$ 对于任意 $\theta \in \Theta$。因此，$\delta(\varphi(\theta)) = \omega(\sigma(\varphi(\theta)))$ $= \delta(\theta)$。因此，$\varphi$ 比 $\delta$更富信息（布莱克威尔意义上）。

为了证明 $(\mathcal{M}\ \sigma)$ 可由 $(\mathcal{D}\ \varphi)$ 表示，尚需验证 $\varphi \sim \sigma$。我们将确定性过滤器 $\varphi$视为随机映射 $\theta \mapsto 1_{\varphi(\theta)}$，并将 $\sigma$ 视为随机映射 $\theta \mapsto 1_{\sigma(\theta)}$。因此，

$$\varphi_\pi = \varphi_{\pi_0} \text{ iff } \pi(\varphi^{-1}(\cdot)) = \pi_0(\varphi^{-1}(\cdot)) \in \Delta(\Theta);$$
$$\sigma_\pi = \sigma_{\pi_0} \text{ iff } \pi(\sigma^{-1}(\cdot)) = \pi_0(\sigma^{-1}(\cdot)) \in \Delta(M).$$

根据 (A.1)，$\varphi$ 与 $\sigma$ 彼此可测，因此它们生成相同的 $\sigma$-代数。因此，$\varphi_\pi = \varphi_{\pi_0}$ 当且仅当 $\sigma_\pi = \sigma_{\pi_0}$。也就是说，$\varphi \sim \sigma$。 □

## A.3 定理3的证明

证明。我们先证明较容易的方向。对于任意弱虚拟直接机制 (D $\varphi$)，根据定义 3，存在 $f = (f^1, ..., f^n)$，其中 $f^i$: $\Theta^i \to \Delta(M_f^i)$，使得$f \sim \varphi$ 且 $f$ 比 $\delta$布莱克威尔更富信息。因此，存在 $g : M_f \to \Delta(O)$，其中 $M_f = \prod_{i=1}^{n} M_f^i$，使得 $\delta = g \circ f$。定义 (M $\sigma$) $= (M, \omega, \sigma)$ 为 $(M_f, g, f)$。根据构造，$\sigma \sim f \sim \varphi$ 且 $\omega \circ \sigma = g \circ f = \delta$。因此，(M $\sigma$) 与 (D $\varphi$) 等价。

现在我们证明反向结论。对于任意增广机制（$\mathcal{M}\ \sigma$），考虑一个满足 $\delta = \omega \circ \sigma$ 的直接机制 $\mathcal{D}$。还需证明存在 $\varphi$ 和 $f$，使得 $\varphi \sim \sigma$ 且 $\varphi \sim f$，并且 $f$ 比 $\delta$ 布莱克威尔更富信息。

固定 $i \in N$，我们记作 $M^i = \{m_1^i, ..., m_{|M^i|}^i\}$和 $\Theta^i = \{\theta_1^i, ..., \theta_{|\Theta^i|}^i\}$。任意 $\pi^i \in \Delta(\Theta^i)$ 都可以理解为一个（列）概率向量，而任意 $\sigma^i : \Theta^i \to \Delta(M^i)$ 都可以写成一个 $|M^i| \times |\Theta^i|$ 列随机矩阵 $\Sigma^i$，其第 $j$ 行、第 $k$ 列的元素为

$$\Sigma_{jk}^i = \sigma^i(\theta_k^i)(m_j^i).$$

[6]由于 $\sigma^i$ 是标准 Borel 空间之间的 Borel 可测函数，因此存在一个定义在其值域上的 Borel 可测右逆 $r^i$（参见 Kechris（1995），定理18.1）。于是，$\varphi^i := r^i \circ \sigma^i$ 就是所需的选择子，并且是 Borel 可测的。

同样，任意 $\varphi^i\colon \Theta^i \to \Delta(\Theta^i)$ 都可以写成一个 $|\Theta^i| \times |\Theta^i|$ 列随机矩阵$\Phi^i$，其第 $j$ 行、第 $k$ 列的元素为

$$\Phi^i_{jk} = \varphi^i(\theta^i_k)(\theta^i_j).$$

我们将 $\Sigma^i$ 和 $\Phi^i$ 的核（或零空间）写作

$$\ker \Sigma^i := \{x \in \mathbb{R}^{|\Theta^i|} : \Sigma^i x = 0\},$$
$$\ker \Phi^i := \{x \in \mathbb{R}^{|\Theta^i|} : \Phi^i x = 0\}.$$

下面的引理给出了 $\varphi^i \sim \sigma^i$ 的等价刻画。

**引理 4**。对于任意 $i$，$\varphi^i \sim \sigma^i$ 当且仅当 $\ker\ \Sigma^i = \ker\ \Phi^i$。

证明。为说明“如果”方向，注意到若 $\ker \Sigma^i = \ker\ \Phi^i$，则对于任意 $\pi^i$，$\pi^i_0 \in \Delta(\Theta^i)$，我们有如下结果

$$\Sigma^i\pi^i = \Sigma^i\pi^i_0 \iff \pi^i - \pi^i_0 \in \ker \Sigma^i \iff \pi^i - \pi^i_0 \in \ker \Phi^i \iff \Phi^i\pi^i = \Phi^i\pi^i_0.$$

因此 $\varphi^i \sim \sigma^i$。

现在我们证明“仅当”方向。对于任意非零向量 $x := (x_1, \ldots, x_{|\Theta^i|})^\top \in \ker \Sigma^i$，令

$$J^+(x) := \{j \in \{1, \ldots, |\Theta^i|\} : x_j > 0\},$$
$$J^-(x) := \{j \in \{1, \ldots, |\Theta^i|\} : x_j < 0\}.$$

由于 $\Sigma^i$ 是列随机矩阵，因此有 $\mathbf{1}^\top\Sigma^i = \mathbf{1}^\top$，其中 $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)^\top$。因此，对于任意 $x \in \ker \Sigma^i$，

$$0 = \mathbf{1}^\top\Sigma^i x = \mathbf{1}^\top x = \sum_{j=1}^{|\Theta^i|} x_j.$$

由此可得，若 $x \neq 0$，则 $J^+(x) \neq \emptyset$ 且 $J^-(x) \neq \emptyset$。此外，

$$\sum_{j \in J^+(x)} x_j + \sum_{j \in J^-(x)} x_j = 0. \tag{A.2}$$

现在定义 $\pi^i, \pi_0^i \in \Delta(\Theta^i)$ 如下：

$$\pi_j^i := \begin{cases} \dfrac{x_j}{\sum_{k\in J^+(x)} x_k}, & \text{if } j \in J^+(x), \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \qquad \pi_{0,j}^i := \begin{cases} \dfrac{-x_j}{-\sum_{k\in J^-(x)} x_k}, & \text{if } j \in J^-(x), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{A.3}$$

该构造是良定义的。由于 $x_j > 0$ 对每个 $j \in J^+(x)$ 以及 $x_j < 0$ 对每个$j \in J^-(x)$， $\pi^i$ 与 $\pi_0^i$ 均为概率向量。此外，由（A.2）和（A.3），

$$\pi^i - \pi_0^i = \frac{x}{\sum_{k\in J^+(x)} x_k}.$$

由于 $x \in \ker\ \Sigma^i$，从而有 $\pi^i - \pi_0^i \in \ker \Sigma^i$，因此

$$\Sigma^i \pi^i = \Sigma^i \pi_0^i. \tag{A.4}$$

若 $\varphi^i \sim \sigma^i$，则（A.4）蕴含 $\Phi^i \pi^i = \Phi^i \pi_0^i$. 因此， $\pi^i - \pi_0^i \in \ker\ \Phi^i$。由于 $\pi^i - \pi_0^i$是 $x$的非零标量倍，我们得出 $x \in \ker \Phi^i$。从而，$\ker \Sigma^i \subseteq \ker\ \Phi^i$。将 $\Sigma^i$ 与 $\Phi^i$ 的角色对调并重复同一论证，可得$\ker\ \Phi^i \subseteq \ker \Sigma^i$。因此，

$$\ker \Sigma^i = \ker \Phi^i.$$

“仅当”方向的证明已经完成。 □

为了完成定理 3的证明，需要考虑几种情况。

**情况 1：** $|M^i| \le |\Theta^i|$。在这种情况下，不失一般性，可将 $M^i$ 视为 $\Theta^i$ 的子集。定义过滤器 $\varphi^i : \Theta^i \to \Delta(\Theta^i)$如下：对于所有 $\theta^i \in \Theta^i$，

$$\varphi^i(\theta^i)(\tilde{\theta}^i) := \begin{cases} \sigma^i(\theta^i)(\tilde{\theta}^i), & \text{if } \tilde{\theta}^i \in M^i, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{A.5}$$

根据定义，$\ker\ \Phi^i = \ker \Sigma^i$，这意味着 $\varphi^i \sim \sigma^i$。

**情况 2：** $|M^i| > |\Theta^i| =$秩 $\Sigma^i$. 在这种情况下，根据秩-零化度定理，$\dim(\ker\ \Sigma^i) = 0$。因此，根据引理 4， $\varphi^i \sim \sigma^i$要求 $\dim(\ker \Phi^i) = 0$，例如可以通过以下方式满足：

完全揭示过滤器：

$$\Phi^i_{jk} = I_{|\Theta^i|} := \begin{cases} 1, & \text{if } j = k, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{A.6}$$

**情形 3：** $|M^i| > |\Theta^i| >$秩 $\Sigma^i$. 设秩为 $\Sigma^i = x < |\Theta^i|$，并写作

$$\Sigma^i = (r_1, \ldots, r_{|M^i|})^\top,$$

其中 $r_j$ 是 $\Sigma^i$的第 $j$行。考虑对 $\Sigma^i$ 进行变换，将 $\Sigma^i$ 中 $x$个极大线性无关行移至前 $x$ 行：

$$\tilde{\Sigma}^i = \left(\tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_x, \ldots, \tilde{r}_{|M^i|}\right)^\top,$$

其中 $\left\{\tilde{r}_1、\ldots\ldots、\ \tilde{r}_{|M^i|}\right\} = \{r_1、\ldots\ldots、\ r_{|M^i|}\}$，且$\{\tilde{r}_1、\ldots\ldots、\ \tilde{r}_x\}$是$\{r_1、\ldots\ldots、\ r_{|M^i|}\}$的极大线性无关组。根据定义，对于任意 $\mu^i \in \Delta(\Theta^i)$，有

$$\{\nu^i \in \Delta(\Theta^i) : \Sigma^i \nu^i = \Sigma^i \mu^i\} = \{\nu^i \in \Delta(\Theta^i) : (\tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_x)^\top \nu^i = (\tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_x)^\top \mu^i\}. \tag{A.7}$$

定义 $\Phi^i$ 如下：

$$\Phi^i = \left(\tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_{|\Theta^i|-1}, (\tilde{r}_{|\Theta^i|} + \ldots + \tilde{r}_{|M^i|})\right)^\top, \tag{A.8}$$

˜即，保持 $|\Theta^i| - 1$ 的前几行 $\Sigma^i$ 不变，并将其余$\downarrow|M^i| - |\Theta^i| + 1$行相加，构成 $b$ 的第 $\Phi^i$行。由于 $\Sigma^i$是 $|M^i| \times |\Theta^i|$列随机矩阵， $\Phi^i$ 由（A.8）给出的矩阵是 $|\Theta^i| \times |\Theta^i|$ 列随机矩阵。由于$x \leq |\Theta^i| - 1$，$\{\tilde{r}_1、\ldots\ldots、\ \tilde{r}_x\} \subseteq \left\{\tilde{r}_1、\ldots\ldots、\ \tilde{r}_{|\Theta^i|-1}\right\}$。因此，

$$\{\nu^i \in \Delta(\Theta^i) : \Phi^i \nu^i = \Phi^i \mu^i\} = \{\nu^i \in \Delta(\Theta^i) : (\tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_x)^\top \nu^i = (\tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_x)^\top \mu^i\}. \tag{A.9}$$

由（A.7）和（A.9）可得 $\varphi^i \sim \sigma^i$，根据引理4，这等价于$\ker \Phi^i = \ker \Sigma^i$。

总而言之，这三种情形中的每一种都保证存在 $\varphi^i$，使得 $\varphi^i \sim \sigma^i$；等价地，$\ker\ \Phi^i = \ker\ \Sigma^i$。给定 $\sigma = (\sigma^1、\ \ldots\ldots、\ \sigma^n)$ 及相应构造的 $\varphi = (\varphi^1、\ \ldots\ldots、\ \varphi^n)$，考虑列随机矩阵 $\Sigma$和 $\Phi$，使得其

第 $j$ 行、第 $k$ 列的元素为

$$\Sigma_{jk} = \sigma(\theta_k)(m_j); \Phi_{jk} = \varphi(\theta_k)(\theta_j),$$

即由策略组合和过滤器组合所诱导的矩阵。注意，由于策略与过滤器相互独立，

$$\Sigma = \otimes_{i=1}^{n} \Sigma^i; \Phi = \otimes_{i=1}^{n} \Phi^i, \tag{A.10}$$

其中“$\otimes$”表示克罗内克积。由于对于任意 $i$，$\ker\ \Sigma^i = \ker\ \Phi^i$，存在矩阵$G^i$ 和 $H^i$ 使得

$$\Sigma^i = G^i \Phi^i; \Phi^i = H^i \Sigma^i. \tag{A.11}$$

将（A.10）与（A.11）相结合，并利用克罗内克积的性质，

$$\Sigma = (\otimes_{i=1}^{n} G^i)\Phi; \Phi = (\otimes_{i=1}^{n} H^i)\Sigma, \tag{A.12}$$

这进一步意味着 $\ker \Sigma = \ker\ \Phi$。注意，由于 $i$ 的任意性，引理 4可以表述为：$\varphi \sim \sigma$ 当且仅当 $\ker\ \Sigma = \ker \Phi$。因此，（A.12）直接意味着所构造的 $\varphi$ 满足 $\varphi \sim \sigma$。

最后，令 $f :=\sigma$ 在定义 3 中，则 $\varphi \sim f$ 并且根据 $\delta = \omega \circ \sigma = \omega \circ f$。因此，$f$ 比 $\delta$更具布莱克威尔信息性。

□

# B 细化的证明

由于代理人的类型分布相互独立，因此我们有

$$\left\{\pi \in \prod_{i\in N} \Delta(\Theta^i) : \sigma_\pi = \sigma_{\pi_0}\right\} = \prod_{i\in N} \left\{\pi^i \in \Delta(\Theta^i) : \sigma^i_{\pi^i} = \sigma^i_{\pi^i_0}\right\},$$
$$\left\{\pi \in \prod_{i\in N} \Delta(\Theta^i) : \varphi_\pi = \varphi_{\pi_0}\right\} = \prod_{i\in N} \left\{\pi^i \in \Delta(\Theta^i) : \varphi^i_{\pi^i} = \varphi^i_{\pi^i_0}\right\}.$$

因此，以下结论成立：

**引理 5。** 考虑任意策略组合 $\sigma = (\sigma^i)_{i\in N}$ 以及任意过滤器 $\varphi = (\varphi^i)_{i\in N}$。如果代理人的类型的先验分布相互独立，那么 $\sigma \sim \varphi$ 当且仅当 $\sigma^i \sim \varphi^i$对所有 $i \in N$均成立。

## 引理2的证明

证明策略如下。首先，对于任意 $\prod_{i\in N} A^i = A \subseteq \Theta$ 和任意虚拟直接机制 $(\mathcal{D}\ \varphi)$，我们构造一个增广机制 $(\mathcal{M}\ \sigma)$，使得

$$\begin{aligned} M^i &= \Theta^i \times \Theta^i, \\ \sigma^i &: \Theta^i \to \Delta(\Theta^i \times \Theta^i), \\ \left\{\pi^i \in \Delta(\Theta^i) : \sigma^i_{\pi^i} = \sigma^i_{\pi^i_0}\right\} &= \Pi^{\mathcal{D}}\left(\varphi^i, \varphi^i_{\pi^i_0}\right) \cap \left\{\pi^i \in \Delta(\Theta^i) : \pi^i|_{A^i} = \pi^i_0|_{A^i}\right\}. \end{aligned} \tag{B.1}$$

注意，在此我们的目的与结果函数无关。接下来，我们对增广机制应用虚拟显示原理的强形式，以证明存在一个过滤器为 $\varphi^A = (\varphi^{A^1}, \ldots\ldots, \varphi^{A^n}) \sim \sigma$ 的虚拟直接机制，即

$$\Pi^{\mathcal{D}}(\varphi^A, \varphi^A_{\pi_0}) = \left\{\pi \in \prod\nolimits_{i\in N} \Delta(\Theta^i) : \sigma_\pi = \sigma_{\pi_0}\right\}, \tag{B.2}$$

其中 $\varphi^{A^i}:\ \Theta^i \to \Delta(\Theta^i)$ 并且，根据引理 5，$\varphi^{A^i} \sim \sigma^i$。

根据引理 5 和（B.1），

$$\begin{aligned} \left\{\pi \in \prod_{i\in N} \Delta(\Theta^i) : \sigma_\pi = \sigma_{\pi_0}\right\} &= \prod_{i\in N} \left(\Pi^{\mathcal{D}}(\varphi^i, \varphi^i_{\pi^i_0}) \cap \left\{\pi^i \in \Delta(\Theta^i) : \pi^i|_{A^i} = \pi^i_0|_{A^i}\right\}\right) \\ &= \Pi^{\mathcal{D}}(\varphi, \varphi_{\pi_0}) \cap \left\{\pi \in \prod\nolimits_{i\in N} \Delta(\Theta^i) : \pi^i|_{A^i} = \pi^i_0|_{A^i},\ i \in N\right\}. \end{aligned} \tag{B.3}$$

于是，由（4.7）和（B.2）及（B.3）可得。因此，为了证明引理2，只需构造 $\sigma^i$，使其满足（B.1）。

证明。我们分两步进行。

**步骤 1：** 给定 $\prod_{i\in N} A^i = A \subseteq \Theta$ 和一个虚拟直接机制 $(\mathcal{D}\ \varphi)$，对于任意 $i$，我们固定某个 $\theta^i \in \Theta^i \backslash A^i$，并定义 $\sigma^i:\ \Theta^i \to \Delta(\Theta^i \times \Theta^i)$ 为

$$\sigma^i(\theta^i) := \begin{cases} 1_{\bar{\theta}^i} \otimes 1_{\theta^i}, & \text{if } \theta^i \in A^i, \\ \varphi^i(\theta^i) \otimes 1_{\bar{\theta}^i}, & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{B.4}$$

其中，$1_{\theta^i}$ 和 $1_{\bar{\theta}^i}$ 是狄拉克测度，$\otimes$ 表示由乘积测度诱导的测度。令 $\sigma(\theta) = (\sigma^i(\theta^i))_{i\in I}$。

我们现在着手证明（B.1）对 $\sigma^i$ 成立，其由（B.4）构造。

**步骤 2：** 我们证明 (⊇) 的“B.1”方向。

对任意 $\pi^i \in \Delta(\Theta^i)$ 属于（B.1）的右端，即 $\varphi^i_{\pi^i} = \varphi^i_{\pi^i_0}$ 与 $\pi^i|_{A^i} = \pi^i_0|_{A^i}$，并且对任意可测的 $E^i \subseteq \Theta^i \times \Theta^i$，由（B.4）可得

$$\begin{aligned}\sigma^i_{\pi^i}(E^i) &= \int_{\Theta^i} \sigma^i(\theta^i)(E^i)\,\pi^i(d\theta^i) \\ &= \int_{A^i} \sigma^i(\theta^i)(E^i)\,\pi^i(d\theta^i) + \int_{\Theta^i\setminus A^i} \sigma^i(\theta^i)(E^i)\,\pi^i(d\theta^i) \\ &= \pi^i(E^i_1) + \int_{\Theta^i\setminus A^i} \varphi^i(\theta^i)(E^i_2)\,\pi^i(d\theta^i),\end{aligned} \tag{B.5}$$

其中

$$E^i_1 = \{\theta^i \in A^i : (\bar\theta^i, \theta^i) \in E^i\},$$
$$E^i_2 = \{\theta^i \in \Theta^i : (\theta^i, \bar\theta^i) \in E^i\}.$$

由 $E^i_1$ 是 $A^i$ 和 $\pi^i|_{A^i} = \pi^i_0|_{A^i}$ 的可测子集可知

$$\pi^i(E^i_1) = \pi^i_0(E^i_1). \tag{B.6}$$

此外，由于 $E^i_2$ 是 $\Theta^i$ 的可测子集，由 $\varphi^i_{\pi^i} = \varphi^i_{\pi^i_0}$ 和 $\pi^i|_{A^i} = \pi^i_0|_{A^i}$ 可得

$$\int_{\Theta^i} \varphi^i(\theta^i)(E^i_2)\,\pi^i(d\theta^i) = \int_{\Theta^i} \varphi^i(\theta^i)(E^i_2)\,\pi^i_0(d\theta^i),$$
$$\int_{A^i} \varphi^i(\theta^i)(E^i_2)\,\pi^i(d\theta^i) = \int_{A^i} \varphi^i(\theta^i)(E^i_2)\,\pi^i_0(d\theta^i).$$

因此，

$$\int_{\Theta^i\setminus A^i} \varphi^i(\theta^i)(E^i_2)\,\pi^i(d\theta^i) = \int_{\Theta^i\setminus A^i} \varphi^i(\theta^i)(E^i_2)\,\pi^i_0(d\theta^i). \tag{B.7}$$

因此，由 (B.5)、(B.6) 和 (B.7)，

$$\sigma^i_{\pi^i}(E^i) = \pi^i_0(E^i_1) + \int_{\Theta^i\setminus A^i} \varphi^i(\theta^i)(E^i_2)\,\pi^i_0(d\theta^i) = \sigma^i_{\pi^i_0}(E^i),$$

这意味着 $\sigma^i_{\pi^i} = \sigma^i_{\pi^i_0}$。因此，$\pi^i$ 属于式（B.1）的左侧。

**步骤 3：** 现在我们证明（⊆）中的“B.1”方向。

¯任取满足 $\sigma^i_{\pi^i} = \sigma^i_{\pi^i_0}$ 的 $\pi^i$。对于任意可测的 $F^i \subseteq A^i \not\ni \theta^i$，我们有

$$\{\theta^i \in A^i : (\bar{\theta}^i, \theta^i) \in \{\bar{\theta}^i\} \times F^i\} = F^i,$$
$$\{\theta^i \in \Theta^i : (\theta^i, \bar{\theta}^i) \in \{\bar{\theta}^i\} \times F^i\} = \emptyset.$$

因此，由（B.4），

$$\pi^i(F^i) = \sigma^i_{\pi^i}(\{\bar{\theta}^i\} \times F^i) = \sigma^i_{\pi^i_0}(\{\bar{\theta}^i\} \times F^i) = \pi^i_0(F^i).$$

因此，$\pi^i|_{A^i} = \pi^i_0|_{A^i}$。

对于任意可测的 $\tilde{F}^i \subseteq \Theta^i$，我们有

$$\{\theta^i \in A^i : (\bar{\theta}^i, \theta^i) \in \tilde{F}^i \times \{\bar{\theta}^i\}\} = \emptyset,$$
$$\{\theta^i \in \Theta^i : (\theta^i, \bar{\theta}^i) \in \tilde{F}^i \times \{\bar{\theta}^i\}\} = \tilde{F}^i.$$

因此，

$$\begin{aligned}
\sigma^i_{\pi^i}(\tilde{F}^i \times \{\bar{\theta}^i\}) &= \int_{\Theta^i} \sigma^i(\theta^i)(\tilde{F}^i \times \{\bar{\theta}^i\})\, \pi^i(d\theta^i) \\
&= \int_{\Theta^i \setminus A^i} \sigma^i(\theta^i)(\tilde{F}^i \times \{\bar{\theta}^i\})\, \pi^i(d\theta^i) + \int_{A^i} \sigma^i(\theta^i)(\tilde{F}^i \times \{\bar{\theta}^i\})\, \pi^i(d\theta^i) \\
&= \int_{\Theta^i \setminus A^i} \varphi^i(\theta^i)(\tilde{F}^i)\, \pi^i(d\theta^i).
\end{aligned}$$

同理，

$$\sigma^i_{\pi^i_0}(\tilde{F}^i \times \{\bar{\theta}^i\}) = \int_{\Theta^i \setminus A^i} \varphi^i(\theta^i)(\tilde{F}^i)\, \pi^i_0(d\theta^i).$$

由于 $\sigma^i_{\pi^i}(\tilde{F}^i \times \{\bar{\theta}^i\}) = \sigma^i_{\pi^i_0}(\tilde{F}^i \times \{\bar{\theta}^i\})$，上面的两个公式表明

$$\int_{\Theta^i \setminus A^i} \varphi^i(\theta^i)(\tilde{F}^i)\, \pi^i(d\theta^i) = \int_{\Theta^i \setminus A^i} \varphi^i(\theta^i)(\tilde{F}^i)\, \pi^i_0(d\theta^i).$$

由于 $\pi^i|_{A^i} = \pi^i_0|_{A^i}$，我们有

$$\int_{A^i} \varphi^i(\theta^i)(\tilde{F}^i)\, \pi^i(d\theta^i) = \int_{A^i} \varphi^i(\theta^i)(\tilde{F}^i)\, \pi^i_0(d\theta^i).$$

因此，

$$\int_{\Theta^i} \varphi^i(\theta^i)(\tilde{F}^i)\,\pi^i(d\theta^i) = \int_{\Theta^i} \varphi^i(\theta^i)(\tilde{F}^i)\,\pi_0^i(d\theta^i).$$

因此，$\varphi^i_{\pi^i} = \varphi^i_{\pi_0^i}$。因此，$\pi^i$ 属于（B.1）的右侧。 □

## 推论1的证明

证明。若 $\varphi^\varepsilon$ 在 $\pi_0$下揭示关于 $\varphi$ 的真值 $\varepsilon$，则存在 $A = \prod_{i\in N} \Delta(\Theta^i) \subseteq \Theta$，使得对所有 $i \in N$，$\pi_0^i(A^i) < \varepsilon$，并且

$$\Pi^{\mathcal{D}}(\varphi^\varepsilon, \varphi^\varepsilon_{\pi_0}) = \Pi^{\mathcal{D}}(\varphi, \varphi_{\pi_0}) \cap \left\{\pi \in \prod\nolimits_{j\in N} \Delta(\Theta^j) : \pi^i|_{A^i} = \pi_0^i|_{A^i}, i \in N\right\}.$$

根据假设，$\tilde{\varphi} \gtrsim \varphi$，因此 $\Pi^{\mathcal{D}}(\varphi, \varphi_{\pi_0}) \supseteq \Pi^{\mathcal{D}}(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_{\pi_0})$。我们有

$$\Pi^{\mathcal{D}}(\varphi^\varepsilon, \varphi^\varepsilon_{\pi_0}) \supseteq \Pi^{\mathcal{D}}(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_{\pi_0}) \cap \left\{\pi \in \prod\nolimits_{j\in N} \Delta(\Theta^j) : \pi^i|_{A^i} = \pi_0^i|_{A^i}, i \in N\right\}. \tag{B.8}$$

根据引理 2，存在一个虚拟直接机制 $(\mathcal{D}\ \tilde{\varphi}^A)$ 使得

$$\Pi^{\mathcal{D}}(\tilde{\varphi}^A, \tilde{\varphi}^A_{\pi_0}) = \Pi^{\mathcal{D}}(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_{\pi_0}) \cap \left\{\pi \in \prod\nolimits_{j\in N} \Delta(\Theta^j) : \pi^i|_{A^i} = \pi_0^i|_{A^i}, i \in N\right\}. \tag{B.9}$$

由（B.8）和（B.9）可得 $\Pi^{\mathcal{D}}(\tilde{\varphi}^A, \tilde{\varphi}^A_{\pi_0}) \subseteq \Pi^{\mathcal{D}}(\varphi^\varepsilon, \varphi^\varepsilon_{\pi_0})$。

由于 $\tilde{\varphi}^A$ 在 $\pi_0$ 下揭示了关于 $\tilde{\varphi}$ 的 $\varepsilon$-真值，且根据假设，(D $\tilde{\varphi}$)是稳健$\pi_0$-自我确认的，因此(D $\tilde{\varphi}^A$)是 $\pi_0$-自我确认的。由 $\tilde{\varphi}^A \gtrsim \varphi^\varepsilon$和引理1可得，(D $\varphi^\varepsilon$)是 $\pi_0$-自我确认的。因此，(D $\varphi$)是稳健 $\pi_0$-自我确认的。

□

## B.3 推论证明2

证明。“如果”方向可由稳健自我确认直接机制的定义得出。

为证明“仅当”方向，注意到$\mathcal{D}$ 是稳健的 $\pi_0$-自我确认的，这意味着存在 $\varphi^{\mathcal{D}} \gtrsim \delta$ 使得 $(\mathcal{D}\ \varphi^{\mathcal{D}})$ 是稳健的 $\pi_0$-自我确认的。因此，若存在过滤器 $\varphi$ 使得 $\varphi \sim \delta$，则 $\varphi^{\mathcal{D}} \gtrsim \varphi$。因此，由推论 1，$(\mathcal{D}\ \varphi)$ 是稳健的 $\pi_0$-自我确认的。

当 $n = 1$时，直接机制 $\mathcal{D} = (\Theta, \delta)$ 与如实报告

策略可视为一种特殊的增广机制。根据虚拟显示原理的强形式，它可以表示为一个虚拟直接机制（$\mathcal{D}\ \varphi$），其中 $\varphi \sim \delta$。

□

# 定理4的证明

证明。**步骤 1：**我们先从以下断言开始

$$\{\pi \in \Delta(\Theta) : \delta_{\pi}^{\tilde{p}} = \delta_{\pi_0}^{\tilde{p}}\} = \Big\{\pi \in \Delta(\Theta) : \pi([p,1]) = \pi_0([p,1]) \text{ for } \tilde{p}\text{-a.e. } p\Big\}. \tag{C.1}$$

首先，根据富比尼定理，对于任意 $\pi \in \Delta(\Theta)$，可测的 $E \subseteq O$，

$$\begin{aligned}
\delta_{\pi}^{\tilde{p}}(E) &= \int_0^1 \delta^{\tilde{p}}(\theta)(E)\,\pi(d\theta) \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \delta^{p}(\theta)(E)\,\tilde{p}(dp)\,\pi(d\theta) \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \delta^{p}(\theta)(E)\,\pi(d\theta)\,\tilde{p}(dp) \\
&= \int_0^1 \delta_{\pi}^{p}(E)\,\tilde{p}(dp).
\end{aligned}$$

为证明（C.1），我们先证明以下引理。

**引理 6.** $\forall p \in [0,1]$,

$$\{\pi \in \Delta(\Theta) : \delta_{\pi}^{p} = \delta_{\pi_0}^{p}\} = \{\pi \in \Delta(\Theta) : \pi([p,1]) = \pi_0([p,1])\},$$

其中，$\delta^p$ 是报价为 $p$ 时的结果函数。

证明。 回想一下

$$\delta^{p}(\theta) := \begin{cases} 1_{(1,p)}, & \text{if } \theta \geq p, \\ 1_{(0,0)}, & \text{if } \theta < p. \end{cases}$$

因此，

$$\delta_{\pi}^{p} = \pi([p,1])1_{(1,p)} + (1 - \pi([p,1]))1_{(0,0)}.$$

因此，如果 $\pi([p,1]) = \pi_0([p,1])$，那么 $\delta_{\pi}^{p} = \delta_{\pi_0}^{p}$. 反之，如果 $\delta_{\pi}^{p} = \delta_{\pi_0}^{p}$，考虑

结果 $(1,\ p) \in O$。我们有 $\pi([p,1]) = \delta_\pi^p(\{(1,\ p)\}) = \delta_{\pi_0}^p(\{(1,\ p)\}) = \pi_0([p,1])$。

□

为证明（$\supseteq$）的"C.1"方向，假设 $\pi \in \Delta(\Theta)$ 满足 $\pi([p,1]) = \pi_0([p,1])$ $\tilde{p}$-几乎处处成立，则由引理 6可知，$\delta_\pi^p = \delta_{\pi_0}^p$，$\tilde{p}$-几乎处处成立。因此，

$$\delta_\pi^{\tilde{p}}(E) = \int_0^1 \delta_\pi^p(E)\,\tilde{p}(dp) = \int_0^1 \delta_{\pi_0}^p(E)\,\tilde{p}(dp) = \delta_{\pi_0}^{\tilde{p}}(E).$$

为证明（$\subseteq$）的"C.1"方向，对任意可测的 $B \subseteq [0,1]$,

$$\begin{aligned}
\int_B \pi([p,1])\,\tilde{p}(dp) &= \int_0^1 \pi([p,1])\,1_p(B)\,\tilde{p}(dp) \\
&= \int_0^1 \pi([p,1])\,1_{(1,p)}(\{1\}\times B)\,\tilde{p}(dp) \\
&= \int_0^1 \Big(\pi([p,1])\,1_{(1,p)}(\{1\}\times B) + (1-\pi([p,1]))\,1_{(0,0)}(\{1\}\times B)\Big)\,\tilde{p}(dp) \\
&= \int_0^1 \delta_\pi^p(\{1\}\times B)\,\tilde{p}(dp).
\end{aligned} \tag{C.2}$$

同理，

$$\int_B \pi_0([p,1])\,\tilde{p}(dp) = \int_0^1 \delta_{\pi_0}^p(\{1\}\times B)\,\tilde{p}(dp). \tag{C.3}$$

由于 $\delta_\pi^{\tilde{p}} = \delta_{\pi_0}^{\tilde{p}}$，(C.2) 和 (C.3) 意味着 $\int_B \pi([p,1])\,\tilde{p}(dp) = \int_B \pi_0([p,1])\,\tilde{p}(dp)$ 对任意可测的 $B \subseteq [0,1]$ 成立，因此 $\pi([p,1]) = \pi_0([p,1])$，$\tilde{p}$-几乎处处成立。

此外，以下引理说明了当 $\pi([p,1]) \neq \pi_0([p,1])$ 时会发生什么：

**引理 7.** 考虑 $\pi_0$ 无原子。对于任意 $\pi$ 属于(C.1)右侧的 $p \in$ 支撑 $\tilde{p}$,

$$\pi([p,1]) \geq \pi_0([p,1]).$$

证明。 如果 $\tilde{p}(\{p\}) > 0$，则该结论成立；特别地，当$\tilde{p}(\{p\}) > 0$时，$\pi([p,1]) = \pi_0([p,1])$。

若 $\tilde{p}(\{p\}) = 0$，则存在 $\{p^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq$ 支撑 $\tilde{p}$ 使得

$$p^n \to p \text{ and } \pi([p^n,1]) = \pi_0([p^n,1]), \forall n.$$

若 $p^n < p$ 对所有充分大的 $n$ 都成立（必要时取一个子序列），则 $\pi([p^n,1]) \to \pi([p,1])$ 且 $\pi_0([p^n,1]) \to \pi_0([p,1])$，因此 $\pi([p,1]) = \pi_0([p,1])$。若 $p^n > p$ 对所有充分大的 $n$ 都成立（必要时取一个子序列），则 $\pi([p^n,1]) \to \pi((p,\ 1])$ 且 $\pi_0([p^n,1]) \to \pi_0([p,1])$。因此，$\pi([p,1]) \geq \pi((p,\ 1]) = \pi_0((p,\ 1]) = \pi_0([p,1])$，因为 $\pi_0$ 是无原子的。 □

**步骤 2：** 我们先证明"仅当"方向的 (i) 部分。给定 $\pi_0 \in \Delta(\Theta)$，我们要证明：若存在 $p_1, p_2 \in$ 支撑 $\tilde{p}$，使得 $p_1 \cdot \pi_0([p_1,1]) \neq p_2 \cdot \pi_0([p_2,1])$，那么 $\mathcal{D}^{\tilde{p}}$不是稳健自我确认的；这等价于对任意过滤器 $\varphi^{\tilde{p}} \sim \delta^{\tilde{p}}$，$(\mathcal{D}^{\tilde{p}}, \varphi^{\tilde{p}})$ 都不是稳健自我确认的，即

$$\Pi^{\mathcal{D}^{\tilde{p}}}(\varphi^{\tilde{p}}, \varphi^{\tilde{p}}_{\pi_0}) = \{\pi \in \Delta(\Theta) : \delta^{\tilde{p}}_{\pi} = \delta^{\tilde{p}}_{\pi_0}\}.$$

不失一般性，假设 $p_1 \cdot \pi_0([p_1,1]) < p_2 \cdot \pi_0([p_2,1])$。由于 $\pi_0$ 是无原子的，因此存在 $\alpha > 0$，使得对于任意 $p_1' \in (p_1 - \alpha, p_1 + \alpha)$，我们都有

$$p_1' \pi_0([p_1',1]) < p_2 \pi_0([p_2,1]). \tag{C.4}$$

此外，由于 $p_1 \in$ 支撑 $\tilde{p}$,

$$\tilde{p}((p_1 - \alpha, p_1 + \alpha)) > 0. \tag{C.5}$$

因此，对于任意 $\pi \in \Pi^{\mathcal{D}^p}(\varphi^{\tilde{p}},\ \varphi^{\tilde{p}}_{\pi_0})$,

$$\begin{aligned} V^0(\mathcal{D}^{\tilde{p}}, \pi) &= \int_0^1 p\pi([p,1])\tilde{p}(dp) \\ &= \int_0^1 p\pi_0([p,1])\tilde{p}(dp) \\ &< \max_{p \in \operatorname{supp}\tilde{p}} p\pi_0([p,1]), \end{aligned}$$

其中，严格不等式由（C.4）和（C.5）得出，且最大化是定义良好的，因为 支撑 $\tilde{p}$ 是紧的，并且映射 $p \mapsto p \cdot \pi_0$（$[p,1]$）是连续的，因为 $\pi_0$ 是无原子的。

令 $p^* \in \arg\max_{p \in \operatorname{supp}\tilde{p}} p \cdot \pi_0([p,1])$。由引理 7，对任意 $\pi \in \Pi^{\mathcal{D}^p}(\varphi^{\tilde{p}},\ \varphi^{\tilde{p}}_{\pi_0})$,

$$\pi([p^*,1]) \geq \pi_0([p^*,1]).$$

因此，

$$V^0(\mathcal{D}^{\tilde{p}}, \pi) < p^* \pi_0([p^*, 1]) \leq p^* \pi([p^*, 1]) = V(\mathcal{D}^{p^*}, \pi).$$

因此，$(\mathcal{D}^{\tilde{p}},\ \varphi^{\tilde{p}})$ 并非自我确认，因此也并非稳健自我确认 .

**步骤 3：** 接下来证明“仅当”方向的第 (ii) 部分。我们要证明，若定理 4 中的第一个条件对 $\tilde{p}$成立，但存在 $p_* \in$ 支撑$\tilde{p}$使得 $p_*$不是 $p\pi_0([p, 1])$的局部最大值点，那么 $(\mathcal{D}^{\tilde{p}},\ \varphi^{\tilde{p}})$ 仍然不是稳健自我确认。

如果 $p_*$ 不是 $p\pi_0([p, 1])$ 的局部最大值点，那么对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\beta > 0$使得 $\pi_0([p_* - \beta, p_*)) < \varepsilon$，$\pi_0((p_*,\ p_* + \beta]) < \varepsilon$，并且以下情况至少有一种成立：

1. 对所有 $p \in [p_* - \beta, p_*,\quad p\pi_0([p, 1]) > p_*\pi_0([p_*, 1])$，或者

2. $p \cdot \pi_0([p, 1]) > p_*\pi_0([p_*, 1])$ 对所有 $p \in (p_*,\ p_* + \beta]$.

若情况 1成立，令 $A = [p_* - \beta, p_*)$ 并由引理 2，存在一个过滤器 $\varphi^A$ 使得

$$\Pi^{\mathcal{D}^{\tilde{p}}}(\varphi^A, \varphi^A_{\pi_0}) = \Pi^{\mathcal{D}^{\tilde{p}}}(\varphi^{\tilde{p}}, \varphi^{\tilde{p}}_{\pi_0}) \cap \{\pi \in \Delta(\Theta) : \pi|_A = \pi_0|_A\}.$$

˜根据定理 4的第一个条件，对于任意 $\pi \in \Pi^{\mathcal{D}^p}(\varphi^A,\ \varphi^A_{\pi_0})$ 和 $p \in [p_* - \beta, p_*)$，有 $\pi([p, p_*)) = \pi_0([p, p_*))$ 并且

$$V^0(\mathcal{D}^{\tilde{p}}, \pi) = V^0(\mathcal{D}^{\tilde{p}}, \pi_0) = V^0(\mathcal{D}^{p_*}, \pi_0) < V^0(\mathcal{D}^p, \pi_0) \leq V^0(\mathcal{D}^p, \pi),$$

其中，第一个等式由式（C.1）得出，第二个等式由定理 4的第一个条件得出，第一个不等式由假设得出，第二个不等式则由以下论证得出：

$$\begin{aligned} \pi([p, 1]) &= \pi([p, p_*)) + \pi([p_*, 1]) \\ &\geq \pi_0([p, p_*)) + \pi_0([p_*, 1]) \\ &= \pi_0([p, 1]). \end{aligned}$$

因此，$(\mathcal{D}^{\tilde{p}},\ \varphi^{\tilde{p}})$ 不是稳健自我确认的。情况 2 是对称的。

**步骤 4：** 我们将证明“如果”方向。若 $\tilde{p}$ 满足定理4中的两个条件，那么对于任意 $p \in$ 支撑$\tilde{p}$，都存在 $\varepsilon_p > 0$ 使得

$$0 < \theta\pi_0([\theta, 1]) \leq p\pi_0([p, 1]),\ \text{for all}\ \theta \in (p - \varepsilon_p, p + \varepsilon_p), \tag{C.6}$$

其中不等式“$> 0$”成立，是因为 $\pi_0$ 具有全支撑。令 $p := \min \operatorname{supp} \tilde{p}$ and$\bar{p} := \max \operatorname{supp} \tilde{p}$。则 $0 < p \leq \bar{p} < 1$。

**步骤 4.1：** 假设对所有 $p \in [p, \bar{p}]$，均有

$$p\pi_0([p,1]) \leq V^0(\mathcal{D}^{\tilde{p}}, \pi_0) = \underline{p}\pi_0([\underline{p},1]) = \bar{p} \cdot \pi_0([\bar{p},1]), \tag{C.7}$$

其中，最后两个等式由定理 4 的第一条条件得出。[7]

Let

$$\varepsilon^* := \frac{1}{2} \min \left\{ \pi_0([\underline{p} - \varepsilon_{\underline{p}},\ \underline{p} - \varepsilon_{\underline{p}}/2]),\ \pi_0([\bar{p},\ \bar{p} + \varepsilon_{\bar{p}}]),\ \underline{p}\,\pi_0([\underline{p},1]),\ \pi_0([0,\ \underline{p}\,\pi_0([\underline{p},1])]) \right\}. \tag{C.8}$$

容易验证 $\varepsilon^* > 0$。不失一般性，可以令 $\varepsilon_{\bar{p}}$ 和$\varepsilon_p$ 满足 (C.6) 以及以下条件：

$$0 < \underbrace{\underline{p}\,\pi_0([\underline{p},1])}_{\theta_1} < \underbrace{\underline{p} - \varepsilon_{\underline{p}}}_{\theta_2} < \underbrace{\underline{p} - \varepsilon_{\underline{p}}/2}_{\theta_3} < \underbrace{\bar{p}}_{\theta_4} < \underbrace{\bar{p} + \varepsilon_{\bar{p}}}_{\theta_5} < 1.$$

考虑任意 $\varphi^{\tilde{p},\,\varepsilon^*}$，它揭示了关于 $\varphi^{\tilde{p}}$ 的 $\varepsilon^*$-真值；也就是说，存在 $A \subseteq \Theta$，使得 $\pi_0(A) < \varepsilon^*$ 满足

$$\Pi^{\mathcal{D}^{\tilde{p}}}(\varphi^{\tilde{p},\varepsilon^*}, \varphi^{\tilde{p},\varepsilon^*}_{\pi_0}) = \Pi^{\mathcal{D}^{\tilde{p}}}(\varphi^{\tilde{p}}, \varphi^{\tilde{p}}_{\pi_0}) \cap \{\pi \in \Delta(\Theta) : \pi|_A = \pi_0|_A\}.$$

令 $\pi_{\varepsilon^*} \in \Pi^{\mathcal{D}^p}(\varphi^{\tilde{p},\,\varepsilon^*},\ \varphi^{\tilde{p},\,\varepsilon^*}_{\pi_0})$ 满足以下条件：

1. $\pi_{\varepsilon^*}$ 在 $A$ 和 $[\theta_3, \theta_4]$ 上与 $\pi_0$ 一致：

$$\pi_{\varepsilon^*}|_{A \cup [\theta_3,\theta_4]} = \pi_0|_{A \cup [\theta_3,\theta_4]}.$$

2. 除了在 $A$ 上，$\pi_{\varepsilon^*}$ 在 $(\theta_1, \theta_3)$ 和 $(\theta_5, 1]$ 上为零：

$$\pi_{\varepsilon^*}|_{(\theta_1,\theta_3) \cup (\theta_5,1] \setminus A} = 0.$$

3. $\pi_{\varepsilon^*}$ 在 $(\theta_4, \theta_5]$ 上赋予的测度至少与 $\pi_0$ 一样大：

$$\pi_{\varepsilon^*}(E) \geq \pi_0(E) \text{ for all } E \subseteq (\theta_4, \theta_5].$$

[7] 值得一提的是（C.7）涵盖了 $p = \bar{p}$ 的情况。

4. $\pi_{\varepsilon^*}$ 与 $\pi_0$ 分别在 $[0,\theta_3]$ 和 $[\theta_4,1]$上具有相同的总测度:

$$\pi_{\varepsilon^*}([0,\theta_3]) = \pi_0([0,\theta_3]),$$
$$\pi_{\varepsilon^*}([\theta_4,1]) = \pi_0([\theta_4,1]).$$

我们考虑几种情况。

- $p \in [0,\theta_1]$:

$$p\pi_{\varepsilon^*}([p,1]) \le p \le \theta_1 = \underline{p}\pi_0([\underline{p},1]) = V^0(\mathcal{D}^{\tilde{p}},\pi_0) = V^0(\mathcal{D}^{\tilde{p}},\pi_{\varepsilon^*}),$$

其中倒数第二个等号由定理4 中的第一个条件得出，最后一个等号由（C.1）得出。

- $p \in (\theta_1,\ \theta_2]$:

$$\begin{aligned}
p\,\pi_{\varepsilon^*}([p,1]) &\le \theta_2\,\pi_{\varepsilon^*}((\theta_1,1]) \\
&= \theta_2\Big[\,\pi_{\varepsilon^*}\Big((\theta_1,\theta_3)\Big) \;+\; \pi_{\varepsilon^*}([\theta_3,1])\Big] \\
&= \theta_2\Big[\,\pi_{\varepsilon^*}\Big(A\cap(\theta_1,\theta_3)\Big) \;+\; \pi_{\varepsilon^*}([\theta_3,1])\Big] \\
&\le \theta_2[\,\varepsilon^* \;+\; \pi_0([\theta_3,1])] \\
&\le \theta_2[\,\pi_0([\theta_2,\theta_3]) \;+\; \pi_0([\theta_3,1])] \\
&= \theta_2\,\pi_0\Big([\theta_2,1]\Big) \\
&= (\underline{p}-\varepsilon_{\underline{p}})\,\pi_0\Big([\underline{p}-\varepsilon_{\underline{p}},1]\Big) \\
&\le V^0(\mathcal{D}^{\tilde{p}},\pi_{\varepsilon^*}).
\end{aligned}$$

- $p \in (\theta_2,\ \theta_3)$：由（C.6）得出,

$$p\pi_{\varepsilon^*}([p,1]) \le p\cdot\pi_0([p,1]) \le V^0(\mathcal{D}^{\tilde{p}},\pi_{\varepsilon^*}).$$

- $p \in [\theta_3,\theta_4]$: 由（C.6）和（C.7），

$$p\pi_{\varepsilon^*}([p,1]) = p\pi_0([p,1]) \le V^0(\mathcal{D}^{\tilde{p}},\pi_{\varepsilon^*}).$$

- $p \in (\theta_4, \theta_5]$: 由（C.6），

$$\begin{aligned} p\,\pi_{\varepsilon^*}([p,1]) &= p\Big[\pi_{\varepsilon^*}([\theta_4,1]) - \pi_{\varepsilon^*}([\theta_4,p))\Big] \\ &\le p\Big[\pi_0([\theta_4,1]) - \pi_0([\theta_4,p))\Big] \\ &\le p\,\pi_0([p,1]) \\ &\le V^0(\mathcal{D}^{\tilde{p}}, \pi_{\varepsilon^*}). \end{aligned}$$

- $p \in (\theta_5, 1]$: 由（C.8），

$$p\,\pi_{\varepsilon^*}([p,1]) \le \pi_{\varepsilon^*}([\theta_5,1]) \le \pi_{\varepsilon^*}(A) \le \varepsilon^* \le \underline{p}\,\pi_0([\underline{p},1]) = V^0(\mathcal{D}^{\tilde{p}}, \pi_{\varepsilon^*}).$$

因此，$(\mathcal{D}^{\tilde{p}}, \varphi^{\tilde{p},\,\varepsilon^*})$ 对于任何 $\varphi^{\tilde{p},\,\varepsilon^*}$ 揭示 $\varepsilon^*$关于 $\varphi^{\tilde{p}}$的真值，都满足自我确认，这意味着（$\mathcal{D}^{\tilde{p}}$，$\varphi^{\tilde{p}}$）对于任何满足定理 $\tilde{p}$ 中的两个条件以及（4和（C.7）的，都满足稳健自我确认。

**步骤 4.2：** 假设（C.7）不成立。那么根据假设，存在一个子区 $[x,y] \subseteq [p,\bar{p}]$ 使得

$$p\pi_0([p,1]) \le V^0(\mathcal{D}^{\tilde{p}}, \pi_0) \tag{C.9}$$

对于所有 $p \in [x,y]$。此外，由于 $\pi_0$ 是无原子的，我们可以将该区间取为极大区间，使得没有其他子区间 $[p,\bar{p}] \supseteq [x',y'] \supsetneq [\underline{x},y]$ 满足这一性质。同样，由于 $\pi_0$ 是无原子的，因此

$$x\pi_0([x,1]) = y\pi_0([y,1]) = V^0(\mathcal{D}^{\tilde{p}}, \pi_0).$$

由于 $p\pi_0([p,1])$ 是解析的，这样的区间只能有有限多个。令$\mathcal{I} = \{[x^k,y^k]\}_{k=1}^m$ 表示所有此类区间的集合；根据定义，这些区间两两不相交。根据定义，supp $\tilde{p} \subseteq \bigcup_{k=1}^m [x^k,y^k]$。对于 $k \in \{1, \ldots, m\}$，如果 supp $\tilde{p} \cap [x^k,y^k]$ 非空，则定义

$$\begin{aligned} \underline{p}_k &:= \min \operatorname{supp} \tilde{p} \cap [x^k,y^k], \\ \bar{p}_k &:= \max \operatorname{supp} \tilde{p} \cap [x^k,y^k], \end{aligned}$$

稍微滥用一下记号，我们将这个集合记为$\mathcal{J} = \{[\underline{p}_k,\bar{p}_k]\}_{k=1}^l$。根据定义，

支撑 $\tilde{p} \subseteq \bigcup_{k=1}^{l}[\underline{p}_k, \bar{p}_k]$ 以及

$$0 < \underline{p} = \underline{p}_1 \leq \bar{p}_1 < \underline{p}_2 \leq \bar{p}_2 < ... < \underline{p}_l \leq \bar{p}_l = \bar{p} < 1.$$

以下论证将针对下列每个区间 $[0, \bar{p}_1]$、$[\bar{p}_1, \bar{p}_2]$..... $[\bar{p}_{l-1}, 1]$重复进行

对于任意 $j \in \{1, ....., l\}$，令$\varepsilon_{\underline{p}_j}$、$\varepsilon_{\bar{p}_j} > 0$同时满足（C.6）和

$$\underline{p}\pi_0([\underline{p}, 1]) < \underline{p}_1 - \varepsilon_{\underline{p}_1} < \bar{p}_1 + \varepsilon_{\bar{p}_1} < \underline{p}_2 - \varepsilon_{\underline{p}_2} < \bar{p}_2 + \varepsilon_{\bar{p}_2} < \cdots < \underline{p}_l - \varepsilon_{\underline{p}_l} < \bar{p}_l + \varepsilon_{\bar{p}_l} < 1. \quad \text{(C.10)}$$

Let

$$\varepsilon^{**} = \frac{1}{2}\min\left\{\min_{j=1,...,l}\pi_0([\underline{p}_j - \varepsilon_{\underline{p}_j}, \underline{p}_j - \tfrac{\varepsilon_{\underline{p}_j}}{2}]),\ \min_{j=1,...,l}\pi_0([\bar{p}_j, \bar{p}_j + \varepsilon_{\bar{p}_j}]),\ \underline{p}\,\pi_0([\underline{p}, 1]),\ \pi_0([0, \underline{p}\,\pi_0([\underline{p}, 1])])\right\}. \quad \text{(C.11)}$$

考虑任意 $\varphi^{\tilde{p}}$、$\varepsilon^{**}$，其揭示了关于 $\varphi^{\tilde{p}}$的 $\varepsilon^{**}$-真值，即存在 $A \subseteq \Theta$，使得$\pi_0$（$A$）$< \varepsilon^{**}$ 满足

$$\Pi^{\mathcal{D}^{\tilde{p}}}(\varphi^{\tilde{p},\varepsilon^{**}}, \varphi^{\tilde{p},\varepsilon^{**}}_{\pi_0}) = \Pi^{\mathcal{D}^{\tilde{p}}}(\varphi^{\tilde{p}}, \varphi^{\tilde{p}}_{\pi_0}) \cap \{\pi \in \Delta(\Theta) : \pi|_A = \pi_0|_A\}.$$

令 $\pi_{\varepsilon^{**}} \in \Pi^{\mathcal{D}^p}$（$\varphi^{\tilde{p}}$、$\varepsilon^{**}$、$\varphi^{\tilde{p}}$、$\varepsilon^{**}_{\pi_0}$）满足以下条件：

1. $\pi_{\varepsilon^{**}}$ 在 $A$ 和 $\bigcup_{j=1}^{l}[\underline{p}_j - \frac{\varepsilon_{\underline{p}_j}}{2}, \bar{p}_j]$上与 $\pi_0$ 一致：

$$\pi_{\varepsilon^*}\Big|_{A \bigcup \cup_{j=1}^{l}[\underline{p}_j - \frac{\varepsilon_{\underline{p}_j}}{2}, \bar{p}_j]} = \pi_0\Big|_{A \bigcup \cup_{j=1}^{l}[\underline{p}_j - \frac{\varepsilon_{\underline{p}_j}}{2}, \bar{p}_j]}.$$

2. $\pi_{\varepsilon^{**}}$ 在 $\bigcup_{j=1}^{l+1}[\bar{p}_{j-1} + \varepsilon_{\bar{p}_{j-1}}, \underline{p}_j - \frac{\varepsilon_{\underline{p}_j}}{2}$ 上为零，除非在 $A$上：

$$\pi_{\varepsilon^{**}}\Big|_{\cup_{j=1}^{l+1}[\bar{p}_{j-1} + \varepsilon_{\bar{p}_{j-1}}, \underline{p}_j - \frac{\varepsilon_{\underline{p}_j}}{2})\setminus A} = 0,$$

其中 $\bar{p}_0 + \varepsilon_{\bar{p}_0}$ 应理解为 $p\pi_0([p, 1])$，$p_{l+1} - \frac{\varepsilon_{\underline{p}_{l+1}}}{2}$ 应理解为 1，且每个 $[\bar{p}_{j-1} + \varepsilon_{\bar{p}_{j-1}}, \underline{p}_j - \frac{\varepsilon_{\underline{p}_j}}{2})$ 均由（C.10）定义良好。

3. 对于任意 $j \in \{1, ..., l\}$ $\pi_{\varepsilon^{**}}$，在 $(\bar{p}_j, \bar{p}_j + \varepsilon_{\bar{p}_j})$ 上的测度至少与 $\pi_0$ 一样大：

$$\pi_{\varepsilon^{**}}(E) \geq \pi_0(E) \text{ for all } E \subseteq (\bar{p}_j, \bar{p}_j + \varepsilon_{\bar{p}_j}), \forall j \in \{1, ..., l\}.$$

**4.** 对于任意 $j \in \{1, ..., l-1\}$，$\pi_{\varepsilon^{**}}$ 与 $\pi_0$ 在 $[0, \underline{p}_1], [\bar{p}_l, 1]$ 上具有相同的总测度，并且：

$$\begin{aligned}
&\pi_{\varepsilon^{**}}([0, \underline{p}_1]) = \pi_0([0, \underline{p}_1]), \\
&\pi_{\varepsilon^{**}}([\bar{p}_l, 1]) = \pi_0([\bar{p}_l, 1]), \\
&\pi_{\varepsilon^{**}}([\bar{p}_j, \underline{p}_{j+1}] = \pi_0([\bar{p}_j, \underline{p}_{j+1}], \forall j \in \{1, ..., l-1\}.
\end{aligned}$$

我们讨论几种情况。

- $p \in [0, \underline{p}\cdot\ \pi_0\ ([\underline{p}, 1])\ ]$:

  $$p\pi_{\varepsilon^{**}}([p, 1]) \leq p \leq \underline{p}\pi_0([\underline{p}, 1]) = V^0(\mathcal{D}^{\tilde{p}}, \pi_0) = V^0(\mathcal{D}^{\tilde{p}}, \pi_{\varepsilon^{**}}),$$

  其中倒数第二个等号由定理 4 中的第一个条件得出，最后一个等号则由（C.1）得出。

- 对于任意 $j \in \{1, ..., l\}$ $p \in (\bar{p}_{j-1} + \varepsilon_{\bar{p}_{j-1}},\ \underline{p}_j - \varepsilon_{\underline{p}_j}]$:

  $$\begin{aligned}
  p\,\pi_{\varepsilon^{**}}([p, 1]) \;&\leq\; (\underline{p}_j - \varepsilon_{\underline{p}_j})\,\pi_{\varepsilon^{**}}((\bar{p}_{j-1} + \varepsilon_{\bar{p}_{j-1}}, 1]) \\
  &=\; (\underline{p}_j - \varepsilon_{\underline{p}_j})\left[\pi_{\varepsilon^{**}}\Big((\bar{p}_{j-1} + \varepsilon_{\bar{p}_{j-1}}, \underline{p}_j - \frac{\varepsilon_{\underline{p}_j}}{2})\Big) \;+\; \pi_{\varepsilon^{**}}([\underline{p}_j - \frac{\varepsilon_{\underline{p}_j}}{2}, 1])\right] \\
  &=\; (\underline{p}_j - \varepsilon_{\underline{p}_j})\left[\pi_{\varepsilon^{**}}\Big(A \cap (\bar{p}_{j-1} + \varepsilon_{\bar{p}_{j-1}}, \underline{p}_j - \frac{\varepsilon_{\underline{p}_j}}{2})\Big) \;+\; \pi_{\varepsilon^{**}}([\underline{p}_j - \frac{\varepsilon_{\underline{p}_j}}{2}, 1])\right] \\
  &\leq\; (\underline{p}_j - \varepsilon_{\underline{p}_j})\left[\varepsilon^{**} \;+\; \pi_0([\underline{p}_j - \frac{\varepsilon_{\underline{p}_j}}{2}, 1])\right] \\
  &\leq\; (\underline{p}_j - \varepsilon_{\underline{p}_j})\left[\pi_0([\underline{p}_j - \varepsilon_{\underline{p}_j}, \underline{p}_j - \frac{\varepsilon_{\underline{p}_j}}{2}]) \;+\; \pi_0([\underline{p}_j - \frac{\varepsilon_{\underline{p}_j}}{2}, 1])\right] \\
  &=\; (\underline{p}_j - \varepsilon_{\underline{p}_j})\,\pi_0\Big([\underline{p}_j - \varepsilon_{\underline{p}_j}, 1]\Big) \\
  &\leq\; V^0(\mathcal{D}^{\tilde{p}}, \pi_{\varepsilon^{**}}),
  \end{aligned}$$

  由（C.6）和（C.11）。

- For any $j \in \{1, ..., l\}, p \in (\underline{p}_j - \varepsilon_{\underline{p}_j}, \underline{p}_j - \frac{\varepsilon_{\underline{p}_j}}{2}]$: by (C.6),

$$p \cdot \pi_{\varepsilon^{**}}([p,1]) \leq p \cdot \pi_0([p,1]) \leq V^0(\mathcal{D}^{\tilde{p}}, \pi_{\varepsilon^{**}}).$$

- 对于任意 $j \in \{1, ..., l\}$ $p \in [\underline{p}_j - \frac{\varepsilon_{\underline{p}_j}}{2}, \bar{p}_j]$: 由（C.6）和（C.9），

$$p \cdot \pi_{\varepsilon^{**}}([p,1]) = p \cdot \pi_0([p,1]) \leq V^0(\mathcal{D}^{\tilde{p}}, \pi_{\varepsilon^{**}}).$$

- 对于任意 $j \in \{1, ..., l\}$ $p \in (\bar{p}_j, \bar{p}_j + \varepsilon_{\bar{p}_j}]$: 根据（C.6），

$$\begin{aligned} p\,\pi_{\varepsilon^{**}}([p,1]) &= p\Big[\pi_{\varepsilon^{**}}([\bar{p}_j,1]) - \pi_{\varepsilon^{**}}([\bar{p}_j,p))\Big] \\ &\leq p\Big[\pi_0([\bar{p}_j,1]) - \pi_0([\bar{p}_j,p))\Big] \\ &\leq p\,\pi_0([p,1]), \\ &\leq V^0(\mathcal{D}^{\tilde{p}}, \pi_{\varepsilon^{**}}). \end{aligned}$$

- $p \in (\bar{p}_l + \varepsilon_{\bar{p}_l}, 1]$: 根据（C.11），

$$p \cdot \pi_{\varepsilon^{**}}([p,1]) \leq \varepsilon^{**} \leq V^0(\mathcal{D}^{\tilde{p}}, \pi_{\varepsilon^{**}}).$$

因此，对于任意能够揭示关于 $\varphi^{\tilde{p}}$ 的真值信息的 $\varphi^{\tilde{p},\,\varepsilon^{**}}$，$(\mathcal{D}^{\tilde{p}}, \varphi^{\tilde{p},\varepsilon^{**}})$ 都是自我确认的。

总之，如果 $\tilde{p}$ 满足定理 4中的两个条件，那么 $(\mathcal{D}^{\tilde{p}}, \varphi^{\tilde{p}})$ 是稳健自我确认的，这等价于 $\tilde{p}$ 是稳健自我确认的。 □

# 参考文献

Bergemann, Dirk 和 Stephen Morris（2005）。“稳健机制设计”。载于：*Econometrica*，第 1771–1813 页。Börgers, Tilman、Jiangtao Li 和 Kexin Wang（2025）。“未被支配的机制”。手稿，2025年7月。Carroll, Gabriel（2019）。“机制设计与契约中的稳健性”。载于：《经济学年度评论》11.1，第 139–166 页。Chassang, Sylvain（2013）。“校准激励契约”。载于：*Econometrica* 81.5，第 1935–1971 页。

Chung, Kim-Sau 和 Jeffrey C Ely（2007）。“占优策略机制的基础”。载于：经济研究评论74.2，第 447–476 页。Dekel, Eddie、Drew Fudenberg 和 David K. Levine（2004）。“学习参与贝叶斯博弈”。载于：博弈与经济行为46.2，第 282–303 页。Fudenberg, Drew 和 David K. Levine（1993）。“自我确认均衡”。载于：*Econometrica*，第 523–545 页。Holmström, Bengt 和 Roger Myerson（1983）。“不完全信息下高效且持久的决策规则”。载于：$Econometrica$，第 1799–1819 页。Kambhampati, Ashwin（2025）。“适当稳健性与垄断筛选的效率”。手稿，2025年4月。Kanoria, Yash 和 Hamid Nazerzadeh（2021）。“重复拍卖中保留价格的激励相容学习”。载于：运筹学69.2，第 509–524 页。Kechris, Alexander S（1995）。“经典描述集合论”。载于：数学研究生教材156。Liu, Qingmin（2020）。“双边市场中的稳定性与贝叶斯一致性”。载于：美国经济评论110.8，第 2625–2666 页。Morgenstern, Jamie 和 Tim Roughgarden（2016）。“简单拍卖的学习”。载于：*JMLR*研讨会与会议论文集。第 49 卷，第 1–21 页。Myerson, Roger（1983）。“知情委托人的机制设计”。载于：*Econometrica*51.6，第 1767–1797 页。Nekipelov, Denis、Vasilis Syrgkanis 和 Éva Tardos（2015）。“学习型智能体的计量经济学”。载于：第*16*届*ACM*计算与经济学会议论文集（*EC ’15*）。美国纽约州纽约市：计算机协会，第 1–18 页。Rubinstein, Ariel 和 Asher Wolinsky（1994）。“可理性化的猜测均衡：介于纳什均衡与可理性化性之间”。载于：博弈与经济行为6.2，第 299–311 页。Vartiainen, Hannu（2013）。“无承诺的拍卖设计”。载于：欧洲经济学会期刊11.2，第 316–342 页。Wilson, Robert（1987）。“交易过程的博弈论分析”。载于：经济理论进展，第 33–70 页。