arXiv:2603.12542v1 [math.NT] 13 Mar 2026

混合特征下单腿 Beilinson–Drinfeld格拉斯曼簇上的导出几何Satake等价

Katsuyuki Bando*

2026年3月16日

摘要

Fargues–Scholze 为 Fargues–Fontaine曲线上的几何朗兰兹纲领建立了一个框架。特别地，他们证明了该曲线上闭Cartier除子模空间上的几何 Satake 等价。我们证明了这一等价的单腿导出版本。具体而言，我们证明，局部Hecke叠上的 ´étale层的导出范畴等价于移位并经（−1）Tate扭转李代数的对称代数上的 L群等变完美复形范畴。

1 引言

几何 Satake 等价是一个对称幺半等价，它建立了约化群 G的 Hecke叠上的反常层范畴与 G的对偶群的有限维代数表示范畴之间的等价。由于它是几何范畴与表示论范畴之间的等价，因此在几何表示论中十分重要，尤其是在几何朗兰兹纲领中。具体而言，对于一个剩余域 k 代数闭的离散赋值域 F，以及定义在 $\mathcal{O}_F$上的约化群 G，我们可以定义 Hecke叠 $\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\,\mathrm{Spec}\,k}$，它是 $G(F)$ 关于 $G(\mathcal{O}_F)$ 的双商的几何化，并且存在如下形式的等价

$$\mathrm{Perv}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spec}\,k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\simeq \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G},\overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

*Katsuyuki Bando，京都大学数理解析研究所，日本京都，kbando@kurims.kyoto-u.ac.jp

当 F 具有等特征时，这一点在 [MV07] 中得到了证明；当 F 为混合特征时，则在 [Zhu17a]中得到了证明。

这些等价的导出版称为“导出几何Satake等价”，分别由 [BF08] 在不等特征下证明，由 [Ban24] 在混合特征下证明：

$$D^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spec}\,k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\simeq \mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{g}}[-2])\text{-}\mathrm{mod}^{\mathrm{perf}}(D(\mathrm{Rep}(\widehat{G},\overline{\mathbb{Q}}_\ell))).$$

这里我们将 $\mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{g}}[-2])$ 视为形式微分分次代数，右侧则是 G 的表示的导出范畴中 $\mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{g}}[-2])$-模对象 M 所成的范畴，其中 M 是 $\mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{g}}[-2])$ 上的完美复形。

导出几何Satake等价有一个因子化版本，其中我们使用光滑射影曲线 X 上的 Hecke 叠，而不是点上的 Hecke 叠。该等价由 [CR24] 证明。对于局部域 F 上的几何局部 Langlands 纲领，可以使用 Fargues–Fontaine曲线代替代数曲线 X，如 [FS21] 中所示。在这种情形下，我们使用一个 Hecke 叠，记作$\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\ (\mathrm{Div}^1)^I}$，其定义见 [FS21, Definition VI.1.6]。在 [FS21，第六章],中，他们证明了关于 $(\mathrm{Div}^1)^I$ 的（非导出）几何 Satake 等价：

$$\mathrm{Perv}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,(\mathrm{Div}^1)^I},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\simeq \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}((\widehat{G}\rtimes W_F)^I,\overline{\mathbb{Q}}_\ell),$$

其中， W_F是 F的 Weil 群，而半直积 $G\rtimes W_F$源自通常的代数 W_F作用 G，并由圆分作用扭曲（参见 §2.3）。特别是，当$|I|=1$时，它们具有

$$\mathrm{Perv}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Div}^1},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\simeq \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G}\rtimes W_F,\overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

本文证明了这一结果的导出版本：

定理 1.1. 设 G 是 F上的约化群。存在一个等价

$$\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Div}^1},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\simeq \mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{g}}(-1)[-2]))\text{-}\mathrm{mod}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(\widehat{G}\rtimes W_F,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)) \tag{1.1}$$

稳定幺半 ∞范畴，其中 $G\rtimes W_F$通过伴随作用作用于 $\widehat{\mathfrak{g}}$，符号 (-1) 表示(-1)-*Tate* 扭曲，而我们将$\mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{g}}(-1)[-2]))$视为形式微分分次代数。此外，它与 *[FS21, §VI]*中的（非导出）几何 *Satake* 等价相容。

我们首先证明 $\mathrm{Spd}\,C$ 上的导出几何Satake等价：

定理 1.2. 设 G 是 F 上的一个约化群。存在一个等价

$$\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\simeq \mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{g}}[-2]))\text{-}\mathrm{mod}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(\widehat{G},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)) \tag{1.2}$$

稳定幺半 ∞-范畴。

实质上，这一定理已在 [Ban24], 中通过 [FS21, COROLLARYVI.6.7]得到证明: 在 [Ban24], 中，我们引入了一个称为"Fargues–Fontaine 曲面"的空间，它由等特征和混合特征的 Fargues–Fontaine 曲线结合而成。借助这一曲面，我们构造了等特征 Hecke 层 $\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{eq}},\ \mathbb{Q}_\ell)$ 上的导出 Satake 范畴与 Witt 向量 Hecke 层 $\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{Witt}},\ \mathbb{Q}_\ell)$ 上的导出 Satake 范畴之间的等价。根据 [FS21, COROLLARY VI.6.7], , 后一个范畴也等价于 $\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\ \mathrm{Spd}\,C},\overline{\ }\mathbb{Q}_\ell)$。因此，通过复合这些等价以及 [BF08] 中证明的等特征导出 Satake 等价，即可证明定理 1.2。

然而，在本文中，我们给出定理 1.2 的另一种证明，其论证方式更接近 [BF08], , 同时仍使用上述导出 Satake 范畴之间的等价（特别是仍依赖 Fargues–Fontaine 曲面的思想）。此方法使我们能够证明等价 (1.2) 是 W_F-等变的。关于这种 W_F-等变性, [BZSV24, §6.7], 的最后一段概述了一个类似结果，其中他们解释了 Bezrukavnikov–Finkelberg 在 $\mathbb{F}_q$ 上的导出 Satake 等价的 Frobenius-等变性。他们通过验证 [BF08]中各个函子的 Frobenius-等变性，采用与 [BF08] 平行的方式建立了这一结果。然而，我们的策略有所不同: 我们细化了 [BF08]中 §6.5 之前的论证，并避开了 [BF08]中 §6.5 和 §6.6 的论证。更具体地说，在 [BF08], 中，他们构造了一个上同调函子（在 [BF08]中记作 H^* ）

$$R\Gamma\colon \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to \mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}\text{-}\mathrm{mod}$$

以及一个 Kostant 函子

$$\kappa\colon \mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{g}}[-2])\text{-}\mathrm{mod}^{\mathrm{perf}}(\mathrm{Rep}(\widehat{G},\overline{\mathbb{Q}}_\ell))\to \mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}\text{-}\mathrm{mod}.$$

随后，他们证明这两个函子在半单元素的全子范畴上都是全忠实的，并且在那里具有相同的本质像。这定义了全忠实函子

$$\widetilde{S}_{qc}\colon \mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{g}}[-2])\text{-}\mathrm{mod}^{fr}(\mathrm{Rep}(\widehat{G},\overline{\mathbb{Q}}_\ell))\to \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell),$$

其中，$\mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{g}}[-2])\text{-}\mathrm{mod}^{fr}(\mathrm{Rep}(\widehat{G,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}))$ 是半单对象构成的全子范畴，包含于 $\mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{g}}[-2])\text{-}\mathrm{mod}^{\mathrm{perf}}(\mathrm{Rep}(\widehat{G},\mathbb{Q}_\ell))$ 中。他们在 [BF08, §6.5,6.6] 中给出了若干论证。

以将其扩展为所需等价。然而，我们利用源范畴由半单元素在扩张下生成这一事实，证明上述两个函子在整个范畴上都是全忠实的。我们还可以证明它们是幺半的、 W_F-等变的，并且具有相同的本质像。因此，我们可以直接得到所需的等价 (1.2)，它是幺半且 W_F-等变的。我们还证明了它与（非导出的）几何 Satake 等价之间的关系，而 [Ban24] 中并未讨论这一点。

一旦我们证明了 (1.2) 的 W_F-等变性，定理 1.1 便可通过“取 (1.2) 两边的 W_F-不变量”来证明。更确切地说，设 E/F 为一个有限伽罗瓦扩张，使得 G 在 E 上非分歧，我们证明 W_F/I_E-等变等价

$$\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,\check{E}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\simeq \mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{g}}[-2]))\text{-}\mathrm{mod}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(\widehat{G}\times I_E,\overline{\mathbb{Q}}_\ell))$$

并对两边“取 W_F/I_E-不变量”，从而得到 (1.1)。

作为定理 1.1 的一个应用，我们计划与 Teruhisa Koshikawa 一起，加强 Fargues–Fontaine曲线上 G-丛的栈 Bun_G 上 lisse $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-层范畴的谱作用。

论文安排

我们简要说明本文的组织结构。在 §2 中，我们引入一些记号与预备知识。在 §3 中，我们计算 $\mathrm{Spd}\,C$ 上 Hecke叠的上同调及其上的 W_F-作用，并归结到等特征情形。我们需要这一上同调来定义函子 $R\Gamma$。在 §4 中，我们证明 Spd C 上的导出 Satake 等价。在 §5 中，我们证明 Spd $\check{E}$ 上带有 W_F/I_E-等变性的导出 Satake 等价。这立即蕴含 §6 中 Div^1，上的导出 Satake 等价。

致谢

作者谨向 Teruhisa Koshikawa 和 Naoki Imai 致以谢意，感谢他们提出的有益讨论和意见。本研究得到日本学术振兴会科研费项目（编号：25KJ0189）的资助。

2 记号与预备知识

2.1 基本记号

设 p 是一个素数， F 是 $\mathbb{Q}_p$ 的一个有限扩张。记 $\mathcal{O}_F$ 为 F 的整数环， k_F 为其阶为 q 的剩余域。设 $k = k_F$ 为 k_F 的一个代数闭包。记 $C := F$ 为 F 的代数闭包的完备化，记 F 为 F 在 C 中的最大非分歧扩张的完备化。用 W_F 表示 F 的 Weil 群，用 I_F 表示 F 的惯性群。

设 ℓ 是一个不等于 p 的素数。设 Λ 为以下之一：被 ℓ 的某个幂湮灭的环、 $\mathbb{Q}_\ell$ 的有限扩张 L 、其整数环 $\mathcal{O}_L$，或 $\mathbb{Q}_\ell$。我们通常考虑 $\Lambda = \mathbb{Q}_\ell$ 的情形。对于微分分次代数 R，记 R-mod 为左微分分次 R-模的稳定 ∞-范畴。记 R-$\mathsf{mod}^{\mathrm{perf}} \subset R$-$\mathsf{mod}$ 为完美 R-复形的稳定全子范畴。令 $\mathsf{Vect}_{\mathbb{Q}_\ell} := \mathbb{Q}_\ell$-$\mathsf{mod}$，且 $\mathsf{Vect}^{\mathrm{perf}}_{\mathbb{Q}_\ell} := \mathbb{Q}_\ell$-$\mathsf{mod}^{\mathrm{perf}}$。令 $\mathsf{Vect}^{\heartsuit}$ 表示 $\mathbb{Q}_\ell$-向量空间的阿贝尔范畴，令 $\mathsf{Vect}^{\heartsuit}_{\mathrm{f.d.}}$ 表示有限维 $\mathbb{Q}_\ell$-向量空间的阿贝尔范畴。

对于 $\mathbb{Q}_\ell$ 上的代数栈 X，记 $\mathsf{QCoh}(X, \mathbb{Q}_\ell)$、$\mathsf{Perf}(X, \mathbb{Q}_\ell)$ 和 $\mathsf{Coh}(X, \mathbb{Q}_\ell)$ 分别表示 X 上拟凝聚、完美和凝聚复形的稳定 ∞-范畴。

令 G 为定义在 F上的连通约化群。令 T为 G中的一个（不一定分裂的）极大环面。对于概形 S上的任意环面 T'，我们将 $\mathbb{X}^*(T') = \mathrm{Hom}_S(T', \mathbb{G}_{m,S})$（分别将 $\mathbb{X}_*(T') = \mathrm{Hom}_S(\mathbb{G}_{m,S}, T')$ ）记为其特征（分别为余特征）格。固定一个包含 T_F 的 G_F 的博雷尔子群，令 $\mathbb{X}^+_*(T_F)$表示支配余特征的子集。令 $W = N_{G_F}(T_F)/T_F$表示 G的魏尔群。

在全文中，我们固定一个 F 上的有限伽罗瓦扩张 E ，使得 G 在 E上非分歧。

2.2 表示范畴

对于定义在 $\mathrm{Spec}\,\Lambda$ 上的群概形 H ，以及带有一个 Γ-作用的局部概形群 Γ ，其中该作用在 H 上可因子化为经由 Γ的有限商的作用，令 $\mathsf{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(H \rtimes \Gamma, \Lambda)$表示 $H \rtimes \Gamma$ 在有限生成射影 Λ-模上的表示所构成的正合范畴；这些表示在 H 上是代数的，在 Γ上是连续的。当 Λ 为一个域时，我们也将 $\mathsf{Rep}^{\mathrm{f.d.}}$ 记作 $\mathsf{Rep}^{\mathrm{f.p.}}$。我们记

$$\mathrm{Rep}(H \rtimes \Gamma, \Lambda) := \mathrm{Ind}(\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(H \rtimes \Gamma, \Lambda))$$

对于其归纳完备化。

我们定义

$$\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(I_E,\Lambda)$$

如下：当 Λ 是挠环时，令

$$\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(I_E,\Lambda):=\mathcal{D}^b(\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(I_E,\Lambda)).$$

设 L 是 $\mathbb{Q}_\ell$的有限扩张。我们定义

$$\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(I_E,\mathcal{O}_L):=\varprojlim_n \mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(I_E,\mathcal{O}_L/\ell^n),$$

$$\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(I_E,L)=\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(I_E,\mathcal{O}_L)[1/\ell],$$

其中 $(-)[1/\ell]$表示通过在 Hom 空间中求逆 ℓ而得到的 ∞-范畴。我们还将 $\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(I_E,\mathbb{Q}_\ell)$ 定义为 $\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(\overline{I}_E,L)$ 的余极限。

令 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{sm}}(I_E,\Lambda)$ 表示在 Λ-模上的光滑 I_E-表示范畴。我们需要以下基本结果。

引理 2.1。假设 Λ 是挠环。典范函子

$$\mathcal{D}^b(\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(I_E,\Lambda))\to\mathcal{D}(\mathrm{Rep}^{\mathrm{sm}}(I_E,\Lambda)),$$

诱导 由 $\mathcal{D}^b(-)$ 的泛性质，参见 *[BCKW25，推论 7.4。12]*, 是全忠实的。

此外，对象 $A\in\mathcal{D}(\mathrm{Rep}^{\mathrm{sm}}(I_E,\Lambda))$ 属于 $\mathcal{D}^b(\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(I_E,\Lambda))$ 的本质像，当且仅当它在遗忘函子下的像

$$\mathcal{D}(\mathrm{Rep}^{\mathrm{sm}}(I_E,\Lambda))\to\Lambda\text{-mod}$$

是一个完美的 Λ-复形。

证明。对于第一个陈述，只需证明：对 $A\in\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(I_E,\Lambda)$ 中的任意对象以及任意满射 $B\to A$ in $\mathrm{Rep}^{\mathrm{sm}}(I_E,\Lambda)$，存在一个对象 $A'\in\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(I_E,\Lambda)$ 和一个态射 $X'\to Y$，使得复合 $A'\to B\to A$ 是一个满射，且其核属于 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(I_E,\Lambda)$。选取 A 作为 I_E-表示的一个生成元系，并将其提升到 B。根据 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{sm}}(I_E,\Lambda)$ 的定义，这使我们能够得到某个开子群 $U\subset I_E$ 对应的同态 $A':=\Lambda[I_E/U]^{\oplus n}\to B$ 。根据构造，复合 $A'\to B\to A$ 是满射；其核属于 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(I_E,\Lambda)$，因为该范畴对取核封闭。

对于最后一个结论，假设 $A\in\mathcal{D}(\mathrm{Rep}^{\mathrm{sm}}(I_E,\ \Lambda))$ 在遗忘函子下的像是一个完美 Λ-复形。由于 A的所有上同调都是 Λ上的有限生成模，根据上述分解方法，我们得到一个 I_E-表示复形，它与 A 拟同构，且具有如下形式

$$\cdots\to\Lambda[I_E/U_1]^{\oplus n_1}\to\Lambda[I_E/U_0]^{\oplus n_0}\to 0\to 0\to\cdots,$$

其中 $U_i \subset I_E$ 是一个开子群。由于 A 是一个完美的 Λ-复形，在 A的上同调消失的足够低度上，该复形的微分的核是 Λ 上的有限投射模。因此，该复形与 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(I_E, \Lambda)$ 中对象构成的有限复形拟同构。这就得到了所需结论。

□

对于有限扩张 L over $\mathbb{Q}_\ell$，函子

$$\varprojlim_n(\mathcal{O}_L/\ell^n\text{-mod}) \to \mathcal{O}_L\text{-mod}, \quad (A_n)_n \mapsto R\varprojlim_n A_n \tag{2.1}$$

取导出极限的函子是全忠实函子，其本质像是 ℓ-进导出完备对象的子范畴（即满足 $M \cong R\lim\leftarrow$的对象 $(M \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_L/\ell^n)$ ）。此外，根据 [Sta18, 引理 09AW], ，源范畴的全子范畴 $\lim\leftarrow(\overset{n}{\mathcal{O}_L/\ell^n}\text{-mod}^{\mathrm{perf}})_n$映至完美 $\mathcal{O}_L$-复形的全子范畴。

推论 2.2。设 L 是 $\mathbb{Q}_\ell$上的有限扩张。典范函子

$$\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(I_E, \mathcal{O}_L) := \varprojlim_n \mathcal{D}^b(\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(I_E, \mathcal{O}_L/\ell^n)) \to \varprojlim_n \mathcal{D}(\mathrm{Rep}^{\mathrm{sm}}(I_E, \mathcal{O}_L/\ell^n))$$

是全忠实的。

此外，对象 $A \in \lim_{\leftarrow} \mathcal{D}$(表示范畴$^{\mathrm{sm}}(I_E, \mathcal{O}_L/\ell^n))$ 属于$_n\mathcal{D}$表示范畴$^{\mathrm{perf}}(I_E, \mathcal{O}_L)$ 的本质像，当且仅当其在遗忘函子下的像

$$\varprojlim_n \mathcal{D}(\mathrm{Rep}^{\mathrm{sm}}(I_E, \mathcal{O}_L/\ell^n)) \to \varprojlim_n(\mathcal{O}_L/\ell^n\text{-mod}) \xrightarrow{(2.1)} \mathcal{O}_L\text{-mod}$$

是一个完美 $\mathcal{O}_L$-复形。

证明。这由引理 2.1 以及紧接在本推论之前的那段文字可得。 □

由于 L-模$^{\mathrm{perf}} = \mathcal{O}_L$-模^{perf} 与 $\mathbb{Q}_\ell$-模$^{\mathrm{perf}} = \lim_{\rightarrow} L$-模^{perf} 成立，存在一个$_L$典范遗忘函子

$$\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(I_E, \Lambda) \to \Lambda\text{-mod}^{\mathrm{perf}}$$

对一般的 Λ。

Put

$$\mathcal{D}\mathrm{Rep}(I_E, \mathcal{O}_L) := \mathrm{Ind}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(I_E, \mathcal{O}_L)).$$

W_F 在 I_E 上的共轭作用诱导了 W_F （视为离散群）在 $\mathcal{D}$表示范畴$^{\mathrm{perf}}(I_E, \Lambda)$ 和 $\mathcal{D}$表示范畴(I_E, Λ)上的作用。由于该

作用限制到 I_E 后自然同构于平凡作用，我们得到 W_F/I_E在$\mathcal{D}$表示范畴$^{\mathrm{perf}}(I_E,\ \Lambda)$和 $\mathcal{D}$ 表示范畴$(I_E,\ \Lambda)$上的作用。我们定义

$$\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(W_F,\Lambda) := \mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(I_E,\Lambda)^{W_F/I_E},$$
$$\mathcal{D}\mathrm{Rep}(W_F,\Lambda) := \mathcal{D}\mathrm{Rep}(I_E,\Lambda)^{W_F/I_E},$$

其中 $(-)^{W_F/I_E}$表示取 W_F/I_E-不变量的运算，例如可参见 [AG15, (A.2)]。对于带有 W_F/I_E-作用的 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，范畴 $\mathcal{C}^{W_F/I_E}$是一个余单纯范畴的全局化，其第 i 项为 $\prod_{(W_F/I_E)_i}\mathcal{C}$。当 $\Lambda=\mathcal{O}_L, L$ 或 $\mathbb{Q}_\ell$ 时，$\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(W_F,\Lambda)$ 上存在典范的 t- 结构，其心为 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(I_E,\Lambda)^{W_F/I_E}=\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(W_F,\Lambda)$。

对于正合范畴 $\mathcal{E}$，令 $\mathcal{D}^b(\mathcal{E})$ 表示其有界导出范畴，参见 [BCKW25, §7.4]。对于格罗滕迪克阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$，令 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 表示其在 [Lur16, §1.3.5] 中定义的导出范畴。

设 H 是 Λ 上的代数群。令

$$\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(H,\Lambda) := \mathcal{D}^b(\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(H,\Lambda)),$$
$$\mathcal{D}\mathrm{Rep}(H,\Lambda) := \mathrm{Ind}(\mathcal{D}^b(\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(H,\Lambda))).$$

如果 H 是一个约化群，则存在一个典范等价

$$\mathcal{D}\mathrm{Rep}(H,\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq \mathcal{D}(\mathrm{Ind}(\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(H,\overline{\mathbb{Q}}_\ell))), \tag{2.2}$$

这由 [Kra15，定理 4.9] 得出。注意，他们只证明了右侧等价于单射对象复形的同伦范畴 $K(\mathrm{Inj})$，但后者等价于导出范畴，因为当 H 是约化群时，$\mathrm{Rep}(H,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 的全局维数有限。

我们还定义

$$\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(H\times I_E,\Lambda) := \mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(H,\Lambda)\otimes_{\Lambda\text{-}\mathrm{mod}^{\mathrm{perf}}}\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(I_E,\Lambda),$$
$$\mathcal{D}\mathrm{Rep}(H\times I_E,\Lambda) := \mathcal{D}\mathrm{Rep}(H,\Lambda)\otimes_{\Lambda\text{-}\mathrm{mod}}\mathcal{D}\mathrm{Rep}(I_E,\Lambda).$$

当 H 具有 W_F/I_E-作用时，我们在 $\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(H\times I_E,\Lambda)$ 和$\mathcal{D}\mathrm{Rep}(H\times I_E,\Lambda)$ 上有一个 W_F/I_E-作用，并令

$$\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(H\rtimes W_F,\Lambda) := \mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(H\times I_E,\Lambda)^{W_F/I_E},$$
$$\mathcal{D}\mathrm{Rep}(H\rtimes W_F,\Lambda) := \mathcal{D}\mathrm{Rep}(H\times I_E,\Lambda)^{W_F/I_E}.$$

若 H 是约化的，则任意对象 $V\in$ 表示范畴$^{\mathrm{f.p.}}(H\times I_E,\overline{\mathbb{Q}_\ell})$具有如下形式

$$\bigoplus_{i=1}^{n} V_i\boxtimes W_i,$$

其中 n 是一个非负整数， V_i 是一个不可约 H-表示，且 W_i 是一个I_E-表示。因此，存在一个典范函子

$$\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(H\times I_E,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(H\times I_E,\overline{\mathbb{Q}}_\ell),\quad \bigoplus_{i=1}^{n}V_i\boxtimes W_i\mapsto\bigoplus_{i=1}^{n}V_i\boxtimes W_i.$$

Since $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(H\rtimes W_F,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)=\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(H\times I_E,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{W_F/I_E}$成立，我们还得到一个函子

$$\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(H\rtimes W_F,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(H\rtimes W_F,\overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

对于稳定对称幺半 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，我们用 $\mathrm{Alg}(\mathcal{C})$ 表示 $\mathcal{C}$ 中结合代数对象构成的范畴，用 $\mathrm{CAlg}(\mathcal{C})$ 表示 $\mathcal{C}$ 中交换代数对象构成的范畴。对于稳定幺半 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，以及结合代数对象$A\in\mathrm{Alg}(\mathcal{C})$，我们用 A-$\mathrm{mod}(\mathcal{C})$ 表示 $\mathcal{C}$ 中左 A-模对象构成的 ∞-范畴。对于$H'=H$， $H\times I_E$或 $H\rtimes W_F$，以及 $A\in\mathrm{Alg}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(H',\overline{\mathbb{Q}}_\ell))$，我们记

$$A\text{-}\mathrm{mod}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(H',\overline{\mathbb{Q}}_\ell)))$$

表示 A-$\mathrm{mod}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(H',\overline{\mathbb{Q}}_\ell))$ 的全子范畴，其中对象在遗忘函子下的像

$$A\text{-}\mathrm{mod}(\mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell})=A\text{-}\mathrm{mod}$$

在 A 上是完美的。令

$$A\text{-}\mathrm{mod}^{fr}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(H',\overline{\mathbb{Q}}_\ell))$$

表示.....的本质像

$$fr\colon\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(H',\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to A\text{-}\mathrm{mod}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(H',\overline{\mathbb{Q}}_\ell)),V\mapsto A\otimes V.$$

2.3 对偶群及其 Weil 作用

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$我们用 G_Λ 表示_G 在 Λ 上的对偶群，并设 $G:=G_{\mathbb{Q}_\ell}$。令 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 表示 G的$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$李代数。类似地定义 T、 $\mathfrak{t}$ 等。令

$$\mathrm{act}^{\mathrm{alg}}_{\widehat{G}}\colon W_F\to\mathrm{Aut}(\widehat{G}_\Lambda)$$

用钉扎自同构表示通常的作用。我们按如下方式扭曲此作用，$\widehat{\ }$参见 [Zhu15]中 Richarz–Zhu 的附录：令 $2\rho\in\mathbb{X}_*(T_\Lambda)$ 表示$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ G_Λ 与 ρ_{ad}的正余根之和：$\mathbb{G}_{m,\Lambda}\to T_\Lambda/Z(G_\Lambda)\subset(G_\Lambda)_{\mathrm{ad}}$ 表示唯一的

同态，使得 $2\rho_{\mathrm{ad}}$ 等于复合 $\mathbb{G}_{m,\,\Lambda} \xrightarrow{2\rho} \widehat{T}_\Lambda \to \widehat{T}_\Lambda/Z(\widehat{G}_\Lambda)$。我们定义

$$\chi\colon W_F \xrightarrow{\mathrm{cycl}} \mathrm{Aut}(\mu_{\ell^\infty}(\overline{F})) \cong \mathbb{Z}_\ell^\times \to \Lambda^\times \xrightarrow{\rho_{\mathrm{ad}}} (\widehat{G}_\Lambda)_{\mathrm{ad}}(\Lambda),$$

其中 cycl 表示圆分作用。由此通过内自同构诱导出 $\mathrm{Ad}_\chi\colon W_F \to \mathrm{Aut}(\widehat{G}_\Lambda)$。令

$$\mathrm{act}_{\widehat{G}}^{\mathrm{geom}} := \mathrm{act}_{\widehat{G}}^{\mathrm{alg}} \circ \mathrm{Ad}_\chi\colon W_F \to \mathrm{Aut}(\widehat{G}_\Lambda). \tag{2.3}$$

注意，由于经由 Ad_χ 的作用在 T_Λ上是平凡的，我们有

$$(\mathrm{act}_{\widehat{G}}^{\mathrm{geom}}(w))|_{\widehat{T}_\Lambda} = (\mathrm{act}_{\widehat{G}}^{\mathrm{alg}}(w))|_{\widehat{T}_\Lambda} = \mathrm{act}_{\widehat{T}}^{\mathrm{geom}}(w) = \mathrm{act}_{\widehat{T}}^{\mathrm{alg}}(w)$$

对任意 $w \in W_F$。

令 $\mathrm{act}_{\widehat{\mathfrak{g}}}^{\mathrm{geom}}(-)$ 表示由 $\mathrm{act}_{\widehat{G}}^{\mathrm{geom}}(-)$ 的导数给出的 W_F-作用在 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 上。对于 $w \in W_F$，令

$$\mathrm{act}_{\widehat{\mathfrak{g}}^*}^{\mathrm{geom}}(w) := (\mathrm{act}_{\widehat{\mathfrak{g}}}^{\mathrm{geom}}(w^{-1}))^*\colon \widehat{\mathfrak{g}}^* \to \widehat{\mathfrak{g}}^*.$$

2.4 钻石与 v-堆栈的记号

关于钻石和 v-堆栈的记号主要基于 [Sch17]。对于特征为 p的完美域 k'，我们用 $\mathrm{Perf}_{k'}$ 表示其上的完美空间范畴。本文讨论 v-堆栈时，均在 Perf_{k_F}上进行。

对于一个小 v-叠 X，令 $\mathrm{Frob}_X\colon X \to X$ 表示 X 的绝对弗罗贝尼乌斯，其定义为：对于任意 $S \in \mathrm{Perf}_{k_F}$，诱导映射 $X(S) \to X(S)$ 由与 S 的绝对弗罗贝尼乌斯作前复合给出。

对于一个小 v-叠 X，记 $D_{\text{ét}}(X,\ \Lambda)$ 为 X 上 ´étale 层的导出范畴，并令 $\mathcal{D}_{\text{ét}}(X,\ \Lambda)$ 表示其 ∞-范畴增强。这些对象定义如下：当 Λ 是一个挠环时，定义见 [Sch17，定义 1.7] 和 [Sch17，引理 17.1]；当 Λ 是整数环时，通过取极限得到它们，具体如 [Sch17，定义 26.1] 所述；当 Λ 是 $\mathbb{Q}_\ell$ 的有限扩张时，通过对 ℓ 求逆定义；对于 $\Lambda = \mathbb{Q}_\ell$，则将它们定义为其余极限。六函子可以对 $\mathcal{D}_{\text{ét}}$'s 朴素地定义。

—

类似地，我们定义局部常值复形的全子范畴 $\mathcal{D}_{\mathrm{lc}}(X, \Lambda) \subset \mathcal{D}_{\text{ét}}(X, \Lambda)$，以及其同伦范畴 $D_{\mathrm{lc}}(X, \Lambda)$，如 [FS21] 中 Λ 为挠环时， Propo-sition IV.7.3 之前的段落所述；对于一般的 Λ，则如上所述。我们还定义 X 上局部系统的范畴 $\mathrm{LS}(X, \Lambda)$，它是 $\mathcal{D}_{\mathrm{lc}}(X, \Lambda)$ 的全子范畴，由集中在 0 次的复形组成。

注记 2.3。当 Λ 含有 $\mathbb{Q}_\ell$ 时，我们对 $\mathcal{D}_{\text{ét}}$ 和 $\mathcal{D}_{\text{lc}}$ 的定义可能并非“正确”的定义。例如，$\mathcal{D}_{\text{lc}}([\mathrm{Spd}\ k/W_F], \mathbb{Q}_\ell)$ 并不等价于 $\mathcal{D}$表示范畴$^{\mathrm{perf}}(W_F, \mathbb{Q}_\ell)$）。与 $^{\mathrm{f.d.}}$ 表示范畴$(W_F, \mathbb{Q}_\ell)$ 中某个对象对应的局部系统，甚至不属于 $\mathcal{D}_{\text{ét}}([\mathrm{Spd}\ k/\overline{W_F}], \mathbb{Q}_\ell)$。不过，这并非严重问题，因为我们只在有限的情形下使用 $\mathcal{D}_{\text{ét}}$ 和 $\mathcal{D}_{\text{lc}}$。

我们稍后需要以下引理：

引理 2.4. 存在一个典范等价

$$\mathcal{D}_{\text{lc}}([\mathrm{Spd}\, k/I_E], \Lambda) \simeq \mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(I_E, \Lambda). \tag{2.4}$$

证明。我们可以假设 Λ 是一个挠环。首先，$\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(I_E, \Lambda)$ 等价于导出范畴 $\mathcal{D}(\mathrm{Rep}^{\mathrm{sm}}(I_E, \Lambda))$ 的全子范畴，该子范畴由那些经遗忘函子映射后为完美复形的对象组成。这可由与 [FS21, Theorem V.1.1]，相同的论证得出；注意，限制在有界复形时，其中的 pro-p 假设并非必要。现在，引理由引理 2.1 得出。

□

引理 2.5. 设 X 是一个小 v-堆栈。设 $q\colon \mathrm{Spd}\, \breve{E} = [\mathrm{Spd}\ C/I_E] \to [\mathrm{Spd}\ k/I_E]$ 为由投影 $\mathrm{Spd}\, C \to \mathrm{Spd}\ k$诱导的映射。那么拉回函子

$$(\mathrm{id}_X \times q)^*\colon \mathcal{D}_{\text{ét}}(X \times [\mathrm{Spd}\, k/I_E], \Lambda) \to \mathcal{D}_{\text{ét}}(X \times \mathrm{Spd}\, \breve{E}, \Lambda)$$

是全忠实的。

证明。我们可以假设 Λ 是一个挠环。那么证明与 [FS21, 命题 IV.7.1] 的证明完全相同。

□

引理 2.6. 典范拉回函子

$$\mathcal{D}_{\text{lc}}([\mathrm{Spd}\, k/I_E], \Lambda) \to \mathcal{D}_{\text{lc}}([\mathrm{Spd}\, C/I_E], \Lambda)$$

是一个等价。

证明。我们可以假设 Λ 是一个挠环。由引理 2.5，它是全忠实的，并且根据与 [FS21，命题 IV.7.1]最后一部分的证明相同的论证，它是一个等价。

□

引理 2.7. 典范拉回函子

$$\mathcal{D}_{\text{lc}}([\mathrm{Spd}\, k/I_E], \Lambda) \to \mathcal{D}_{\text{lc}}([\mathrm{Spd}\, \mathcal{O}_C/I_E], \Lambda)$$

是一个等价。

证明。 我们可以假设 Λ 是一个挠环。我们首先证明如下引理:

引理 2.8. 设 Y为一个小 v-叠，使得 $Y \times \operatorname{Spd} k((u))$ 是一个空间钻石。则拉回函子

$$\mathcal{D}_{\mathrm{consta}}(Y, \Lambda) \to \mathcal{D}_{\text{ét}}(Y \times \operatorname{Spd} \mathcal{O}_C, \Lambda),$$

其中 $\mathcal{D}_{\mathrm{consta}}(Y, \Lambda) \subset \mathcal{D}_{\text{ét}}(Y, \Lambda)$ 是常值层的全子范畴，是全忠实的。

证明. 设 $p\colon \operatorname{Spd} \mathcal{O}_C \times Y \to Y$表示投影， $i\colon Y = \operatorname{Spd} k \times Y \to \operatorname{Spd} \mathcal{O}_C \times Y$表示闭浸入。由 [FS21，定理 IV.5.3] 应用于 $X = \operatorname{Spd} C$与 $S = Y \times \operatorname{Spd} k((u))$，我们可以证明

$$Rp_* A \cong i^* A$$

对于 $A \in D_{\text{ét}}(\operatorname{Spd} \mathcal{O}_C \times Y)$，其到 $D_{\text{ét}}(\operatorname{Spd} C \times Y)$ 的限制是一个外张量积，参见 [FS21，注记 V.4.3]中的论证。因此，$\operatorname{Spd} \mathcal{O}_C \times Y$上常值复形的上同调同构于 Y上的上同调。这就证明了该引理。

□

将此引理应用于 $Y = I_E^n$，可知拉回函子

$$\mathcal{D}_{\mathrm{consta}}(I_E^n, \Lambda) \to \mathcal{D}_{\text{ét}}(I_E^n \times \operatorname{Spd} \mathcal{O}_C, \Lambda)$$

是全忠实的。现在，结论由与 [FS21，命题 IV.7.1] 的证明相同的论证得出。

□

因此，我们得到

$$\mathcal{D}_{\mathrm{lc}}(\operatorname{Spd} \breve{E}, \Lambda) \simeq \mathcal{D}_{\mathrm{lc}}([\operatorname{Spd} \mathcal{O}_C / I_E], \Lambda) \simeq \mathcal{D}_{\mathrm{lc}}([\operatorname{Spd} k / I_E], \Lambda) \simeq \mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(I_E, \Lambda). \quad (2.5)$$

推论 2.9。 设 L 是 $\mathbb{Q}_\ell$的有限扩张。当 $\Lambda = \mathcal{O}_L$、 L或 $\mathbb{Q}_\ell$时，在 $\mathcal{D}$表示范畴^{perf}（I_E, Λ） 上存在一个典范的 t-结构，使得遗忘函子

$$\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(I_E, \Lambda) \to \Lambda\text{-mod}^{\mathrm{perf}}$$

是 t-正合的。其心是范畴 表示范畴$^{\mathrm{f.g.}}(I_E, \Lambda)$ ， 由连续的 I_E-表示构成，作用于有限生成的 Λ-模上。

证明。 假设 $\Lambda = \mathcal{O}_L$。由于 $\mathcal{D}$表示范畴$^{\mathrm{perf}}(I_E, \mathcal{O}_L/\ell^n) \simeq \mathcal{D}_{\mathrm{lc}}(\mathrm{Spd}\ \breve{E}, \mathcal{O}_L/\ell^n)$ 成立，它等价于一个余单纯范畴的全局化，其 i项为

$$\mathcal{C}'_{i,n} := \mathcal{D}_{\mathrm{lc}}(\mathrm{Spd}\, C \times I_E^i, \mathcal{O}_L/\ell^n).$$

由于 $\mathrm{Spd}C \times I_E^i$ 严格全不连通，$\mathcal{C}_{i,\ n}$ 等价于

$$\mathcal{C}_{i,n} := \mathcal{D}_{\mathrm{top,lc}}(I_E^i, \mathcal{O}_L/\ell^n).$$

其中 $\mathcal{D}_{\mathrm{top},\ \mathrm{lc}}(I_E^i,\ \mathcal{O}_L/\ell^n)$ 是拓扑空间 I_E^i 上的 $\mathcal{O}_L/\ell^n$-模层的导出范畴。因此， $\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(I_E,\ \mathcal{O}_L) \simeq \mathcal{D}_{\mathrm{lc}}(\mathrm{Spd}\ \breve{E},\ \mathcal{O}_L)$ 等价于一个余单纯范畴的全局化，其第 i 项为

$$\mathcal{C}_i := \varprojlim_n \mathcal{D}_{\mathrm{top,lc}}(I_E^i, \mathcal{O}_L/\ell^n).$$

$\mathcal{C}_0 \overset{(2.1)}{\simeq} \mathcal{O}_L\text{-}\mathrm{mod}^{\mathrm{perf}}$ 上的标准 t-结构定义了 $\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(I_E,\ \Lambda)$ 上的 t-结构，其心是由以下两个范畴组成的图表的极限：

$$\mathcal{C}_0^\heartsuit \rightrightarrows \mathcal{C}_1^\heartsuit. \tag{2.6}$$

左侧

$$\mathcal{C}_0^\heartsuit = (\varprojlim_n \mathcal{D}_{\mathrm{lc}}(*, \mathcal{O}_L/\ell^n))^\heartsuit \simeq (\varprojlim_n (\mathcal{O}_L/\ell^n\text{-}\mathrm{mod}^{\mathrm{perf}}))^\heartsuit \overset{(2.1)}{\simeq} (\mathcal{O}_L\text{-}\mathrm{mod}^{\mathrm{perf}})^\heartsuit$$

等价于有限生成 $\mathcal{O}_L$-模的范畴。对于 $\mathcal{C}_0^\heartsuit$ 中对应于有限生成 $\mathcal{O}_L$-模 M 的对象，其在 $\mathcal{C}_1^\heartsuit$ 中的像的自态射同构于

$$\varprojlim_n \mathrm{Map}_{\mathrm{cont}}(I_E, \mathrm{End}_{\mathcal{O}_L/\ell^n}(M/\ell^n M)) = \mathrm{Map}_{\mathrm{cont}}(I_E, \mathrm{End}_{\mathcal{O}_L}(M)),$$

其中 $\mathrm{Map}_{\mathrm{cont}}(-,\ -)$ 是连续映射的集合。展开定义可知，(2.6) 的极限等价于 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.g.}}(I_E,\ \Lambda)$。

假设 $\Lambda = L$。 L 的 t 结构由 $\mathcal{O}_L$ 的相应结构诱导，其心为 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.g.}}(I_E, \mathcal{O}_L)[1/\ell]$。它等于 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(I_E, \mathcal{O}_L)[1/\ell]$；由于剖分群 I_E 在一个 L-向量空间上的作用保留其中的一个 $\mathcal{O}_L$-格，我们有 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(I_E, L) = \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(I_E, \mathcal{O}_L)[1/\ell]$。

假设 $\Lambda = \mathbb{Q}_\ell$。 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ 的 t-结构由 L 的相应结构诱导，其心为 $\varinjlim$ 表示范畴$^{\mathrm{f.p.}}(I_E,\ L)$。由于 I_E 在 $\mathbb{Q}_\ell$ 上的任意表示在野惯性群的某个开L子群上都是平凡的，且 I_E 与该子群的商在拓扑上有限生成，因此我们有

$$\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(I_E, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \varinjlim_L \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(I_E, L).$$

□

2.5 几何 Satake 的记号与预备知识

2.5.1 Hecke叠

对于 $S \in \mathrm{Perf}_{k_F}$，令 X_S 表示 S上的 Fargues–Fontaine曲线，参见 [FS21,Definition II.1.15]。令 $\mathrm{Div}^1_{k_F} := \mathrm{Div}^1_{X,\, k_F}$ 表示 X_S 的度为 1 的闭Cartier除子的模空间，定义见 [FS21, Definition II.1.19]。置 $\mathrm{Div}^1 := \mathrm{Div}^1_{k_F} \times_{\mathrm{Spd}\, k_F} \mathrm{Spd}\, k$。根据定义，我们有

$$\mathrm{Div}^1_{k_F} = [\mathrm{Spd}\, F/\mathrm{Frob}^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{Spd}\, F}], \qquad \mathrm{Div}^1 = [\mathrm{Spd}\, \breve{F}/\varphi^{\mathbb{Z}}],$$

w此处 $\varphi = \mathrm{Frob}_{\mathrm{Spd}\, F} \times_{\mathrm{Spd}\, k_F} \mathrm{Spd}\ k$。我们也考虑 $\mathrm{Div}^1_{k_F}$ 和 Div^1 的变体 :

$$\mathrm{Div}^1_{\mathcal{Y},k_F} := \mathrm{Spd}\, \mathcal{O}_F, \qquad \mathrm{Div}^1_{\mathcal{Y}} := \mathrm{Spd}\, \mathcal{O}_{\breve{F}},$$
$$\mathrm{Div}^1_{Y,k_F} := \mathrm{Spd}\, F, \qquad \mathrm{Div}^1_{Y} := \mathrm{Spd}\, \breve{F}.$$

在 [FS21 的 §VI], 中，他们如下定义局部Hecke叠：设 $S = \mathrm{Spd}(R,\ R^+) \in \mathrm{Perf}_{k_F}$ 为仿射型完美胚空间，且映射 $S \to \mathrm{Div}^1_{k_F}$ 对应于 X_S 中度为 1 的仿射型除子 D。令 $B^+_{\mathrm{Div}^1_{k_F}}(S)$ 表示 $\mathcal{O}_{X_S}$ 沿 $\mathcal{I}$ 完备化的整体截面，其中 $\mathcal{I}$ 是对应于 D 的理想层，并令 $B_{\mathrm{Div}^1_{k_F}}(S) = B^+_{\mathrm{Div}^1_{k_F}}(S)\left[\frac{1}{\mathcal{I}}\right]$。此外，我们定义函子

–

$$L^+_{\mathrm{Div}^1_{k_F}} G \colon \mathrm{Perf}_{k_F} \to \mathrm{Sets}, \qquad L_{\mathrm{Div}^1_{k_F}} G \colon \mathrm{Perf}_{k_F} \to \mathrm{Sets},$$

将带有如上所述映射 $S \to \mathrm{Div}^1_{k_F}$ 的此类 $S = \mathrm{Spd}(R,\ R^+)$ 分别映至 $G(B^+_{\mathrm{Div}^1_{k_F}}(S))$ 和 $G(B_{\mathrm{Div}^1_{k_F}}(S))$。对于来自小 v- 叠 S 的态射 $S \to \mathrm{Div}^1_{k_F}$，我们记

$$L^+_S G := L^+_{S/\mathrm{Div}^1_{k_F}} G := L^+_{\mathrm{Div}^1_{k_F}} G \times_{\mathrm{Div}^1_{k_F}} S, \quad L_S G := L_{S/\mathrm{Div}^1_{k_F}} G := L_{\mathrm{Div}^1} G \times_{\mathrm{Div}^1_{k_F}} S.$$

接着我们定义商 ´étale 栈

$$\mathrm{Gr}_{G,\, S} \coloneqq \mathrm{Gr}_{G,S/\mathrm{Div}^1_{k_F}} := [L_S G/L^+_S G], \quad \mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,S} := \mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,S/\mathrm{Div}^1_{k_F}} := [L^+_S G \backslash L_S G/L^+_S G].$$

我们将 $\mathrm{Gr}_{G,\, S}$ 称为定义在 S 上的 Beilinson–Drinfeld仿射Grassmannian，将 $\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\, S}$ 称为定义在 S 上的局部Hecke叠。对于定义在 $\mathcal{O}_F$ 上的约化群 G'，以及小型 v-栈 $S \to \mathrm{Div}^1_{\mathcal{Y},\, k_F}$，我们也可以类似地定义 $L^+_{S/\mathrm{Div}^1_{\mathcal{Y},\, k_F}} G'$，$L_{S/\mathrm{Div}^1_{\mathcal{Y},\, k_F}} G'$、$\mathrm{Gr}_{G',\, S/\mathrm{Div}^1_{\mathcal{Y},\, k_F}}$ 和 $\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G',\, S/\mathrm{Div}^1_{\mathcal{Y},\, k_F}}$。

2.5.2 舒伯特簇

假设 G 是分裂的。对于 $\mu \in \mathbb{X}_*(T)$，我们有一个点

$$[\mu]\colon S \to L_S\mathbb{G}_m \xrightarrow{L\mu} L_S T \subset L_S G \to \mathrm{Gr}_{G,S}, \tag{2.7}$$

其中，第一个映射对应于由映射 $S \to \mathrm{Div}^1_{(-),\, k_F}$ ($(-) = \mathcal{Y}$ 或 X) 确定的 Fargues–Fontaine 曲线之理想层的一个局部生成元 ξ，而最后一个映射是自然投影。此映射的 $L^+_S G$-轨道不依赖于 ξ 的选取，我们将其记作 $\mathrm{Gr}_{G,\, S,\, \mu}$。假设 μ 是支配的。令

$$\mathrm{Gr}_{G,S,\leq\mu} = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{X}_*^+(T)\lambda \leq \mu} \mathrm{Gr}_{G,S,\lambda},$$

$$\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,S,\mu} = [L^+_S G \backslash \mathrm{Gr}_{G,S,\mu}], \quad \mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,S,\leq\mu} = [L^+_S G \backslash \mathrm{Gr}_{G,S,\leq\mu}].$$

那么，$\mathrm{Gr}_{G,S,\leq\mu} \to S$ 是真、可由空间钻石表示且具有有限超越度的。进一步，映射 $\mathrm{Gr}_{G,S,\leq\mu} \to \mathrm{Gr}_{G,S}$ 是一个闭子函子，$\mathrm{Gr}_{G,S,\mu} \to \mathrm{Gr}_{G,S,\leq\mu}$ 是一个开子函子，而 $\mathrm{Gr}_{G,S,\mu}$ ($\mu \in \mathbb{X}_*^+(T)$) 定义了 $\mathrm{Gr}_{G,S}$ 的一个分层，见 [FS21, §VI.2]。子函子 $\mathrm{Gr}_{G,S,\leq\mu}$（或 $\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,S,\leq\mu}$）称为舒伯特簇，而 $\mathrm{Gr}_{G,S,\mu}$（或 $\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,S,\mu}$）称为舒伯特胞腔。

假设 G 不一定是分裂的，但 $S \to \mathrm{Div}^1$ 经由自然映射 $\mathrm{Spd}\, \breve{E} \to \mathrm{Div}^1$ 分解。存在一个定义在 $\mathbb{Z}$ 上的分裂约化群 G^{spl}，以及一个同构 $G^{\mathrm{spl}}_{\breve{E}} \cong G_{\breve{E}}$。此同构可扩张为定义在 $R^\sharp$ 上的同构，并且对任意定义在 S 上的仿射型完美胚空间 $\mathrm{Spa}(R,\, R^+)$，它都可提升至 $B^+_{dR}(R)$。这诱导出一个同构 $L_S G \cong L_S G^{\mathrm{spl}}$ 和 $L^+_S G \cong L^+_S G^{\mathrm{spl}}$。因此，有

$$\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,S} \cong \mathcal{H}\mathrm{ck}_{G^{\mathrm{spl}},S}. \tag{2.8}$$

对于每个 $\mu \in \mathbb{X}_*^+(T_F) = \mathbb{X}_*^+(T_{\text{分裂}\, F})$，我们将 $\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\, \mathrm{Spd}\, C,\, \leq\mu}$ 记作 $\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G^{\mathrm{spl}},\, \mathrm{Spd}\, C,\, \leq\mu}$ 的原像；它不依赖于分裂模型的选择。

2.5.3 ULA层与 Satake 范畴

设 S 为Div^1上的小 v-叠。我们定义 $\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\, S}$上ULA复形的 ∞-范畴，但仅限于 S 满足下文所述条件或$S = \mathrm{Div}^1$的情形。对于其他情形，我们不予定义，因为本文并不需要。

首先，假设 $S \to \mathrm{Div}^1$ 可经由自然映射 $\mathrm{Spd}\, \breve{E} \to \mathrm{Div}^1$分解。当 Λ 是一个挠环时，$\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,S}$ 上的普遍局部无环性定义见 [FS21,Definition VI.6.1]。也就是说，我们称对象 $A \in D_{\text{ét}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,S}, \Lambda)$ 为普遍

局部无环（ULA），若其拉回到 $\mathrm{Gr}_{G,S}$ 后，相对于 S 是 ULA（即普遍局部无环），其含义见 [FS21，定义 IV.2.1]。我们记作

$$\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,S},\Lambda)\subset\mathcal{D}_{\text{ét}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,S},\Lambda)$$

对于 ULA 对象的全子范畴。类似地，我们记

$$\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,S},\Lambda)\subset\mathcal{D}_{\text{ét}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,S},\Lambda)$$

对于普遍局部无环且平坦的 perverse 对象的全子范畴，参见[FS21, §VI.7.1]。对于一般的 Λ，范畴 $\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\ S},\ \Lambda)$ 和 $\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\ S},\ \Lambda)$ 定义如下：当 Λ 是整数环时，按 [Sch17, Definition 26.1] 中的方法取极限得到这些范畴；当 Λ 是 $\mathbb{Q}_\ell$ 的有限扩张时，通过求逆 ℓ 来定义；而对于 $\Lambda=\mathbb{Q}_\ell$，则将它们定义为相应的余极限。

对于闭子空间 $X\subset\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\ S}$，我们也可以类似地定义范畴 $\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(X,\ \Lambda)$。特别地，由于

$$i_{0,S}\colon[S/L_S^+G]=[L_S^+G\backslash L_S^+G/L_S^+G]\to[L_S^+G\backslash L_SG/L_S^+G]=\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,S}\tag{2.9}$$

是闭浸入，我们得到范畴 $\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}([S/L_S^+G],\ \Lambda)$。

引理 2.10。

$$\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,S},\Lambda)=\varinjlim_{\mu}\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,S,\le\mu},\Lambda)$$

证明。当 Λ 是挠环时，引理由定义立即成立。设 L 是 $\mathbb{Q}_\ell$ 的有限扩张，并假设 $\Lambda=\mathcal{O}_L$。由于 $\mathcal{O}_L/\ell^n$ 上的完美复形 M 为零当且仅当 $M\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_L/\ell^n}(\mathcal{O}_L/\ell)=0$，因此，$A\in\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\ S},\ \mathcal{O}_L/\ell^n)$ 支撑在 $\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\ S,\ \le\mu}$ 上，当且仅当 $A\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_L/\ell^n}(\mathcal{O}_L/\ell)$ 支撑在 $\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\ S,\ \le\mu}$ 上。这就证明了引理对 $\Lambda=\mathcal{O}_L$ 成立。现在，引理对 $\Lambda=L$ 或 $\mathbb{Q}_\ell$ 成立则由定义可得。

□

当 G' 是 $\mathcal{O}_F$ 上的约化群，且 S 是 $\mathrm{Div}^1_{\mathcal{Y}}$ 上的小 v-叠，并且 $S\to\mathrm{Div}^1_{\mathcal{Y}}$ 经由由自然映射 $\mathrm{Spd}\,\mathcal{O}_C\to\mathrm{Div}^1_{\mathcal{Y}}$ 诱导的映射 $\mathrm{Spd}\,\mathcal{O}_{\breve{E}}\to\mathrm{Div}^1_{\mathcal{Y}}$ 分解时。例如，$S=\mathrm{Spd}\ \mathcal{O}_C$、$\mathrm{Spd}\ k$、$[\mathrm{Spd}\ \mathcal{O}_C/I_E]$ 或 $[\mathrm{Spd}\ k/I_E]$ 满足此条件。然后，我们以类似的方式定义 $\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G',\ S},\ \Lambda)$、$\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G',\ S},\ \Lambda)$ 等。

接下来，假设 $S=\mathrm{Div}^1$。注意到 $\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,\breve{E}}=\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Div}^1}\times_{\mathrm{Div}^1}\mathrm{Spd}\ \breve{E}$ 上有一个 W_E/I_F-作用，因为 Div^1 是 $\mathrm{Spd}\ \breve{E}$ 关于 W_F/I_E-作用的商，参见 [FS21, §IV.7]。这就在 $\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,\breve{E}},\Lambda)$ 这个 ∞-范畴上定义了一个 W_F/I_E-作用。我们定义

$$\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Div}^1},\Lambda):=\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,\breve{E}},\Lambda)^{W_F/I_E}.$$

对于闭子空间 $X \subset \mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Div}^1}$，我们也可以类似地定义范畴 $\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(X,\Lambda)$。

注 2.11. (1) 根据定义可立即得出，若 $S \to \mathrm{Div}^1$ fac-$\breve{}$tors 通过 $\mathrm{Spd}\, E$，则我们有包含关系

$$\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,S},\Lambda) \subset \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,S},\Lambda) \subset \mathcal{D}_{\text{ét}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,S},\Lambda)$$

对一般的 Λ 也成立。另一方面，根据我们的定义，$\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\,\mathrm{Div}^1},\,\Lambda)$ 并非 $\mathcal{D}_{\text{ét}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\,\mathrm{Div}^1},\,\Lambda)$ 的全子范畴。不过这并不是什么严重问题，因为我们不需要这种包含关系。

(2) 当 Λ 是挠环时，我们对 $\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\,\mathrm{Div}^1},\,\Lambda)$ 的定义与 [FS21, Definition VI.6.1] 中的定义一致。这是由 [Sch17, 命题 17.3] 中关于下降的结果以及等价关系得出的

$$\mathcal{D}_{\text{ét}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,\breve{E}} \times (W_F/I_E)^i,\Lambda) \simeq \prod_{(W_F/I_E)^i} \mathcal{D}_{\text{ét}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,\breve{E}},\Lambda).$$

(3) 我们大概可以使用 [Sch24] 的动机语言来定义 $\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\,S},\,\Lambda)$ 的类似物。该定义将类似于

$$\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}_{MT}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,S}) \otimes_{\mathcal{D}_{MT}(*)^{\mathrm{dual}}} \Lambda\text{-mod}^{\mathrm{perf}},$$

采用 [Sch26] 中的记号。这一定义预计与我们的定义等价（包括 $S = \mathrm{Div}^1$ 的情形），但本文不讨论这一点。

假设 $S \to \mathrm{Div}^1$ 经由 $\mathrm{Spd}\ \breve{E}$分解。范畴 $\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,S},\Lambda)$ 在 [FS21, §VI.8] 中定义的卷积积 $-\star-$ 下构成幺半范畴。具体而言，考虑图表

$$\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,S} \times_S \mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,S} \xleftarrow{p} \mathcal{H}\mathrm{ck}^{(2)}_{G,S} \xrightarrow{m} \mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,S}, \tag{2.10}$$

其中 $\mathcal{H}\mathrm{ck}^{(2)}_{G,S} := [L^+_S G \backslash L_S G \times^{L^+_S G} L_S G/L^+_S G]$，卷积积定义为$A \star B := Rm_* p^*(A \boxtimes B)$。

幺半单位 $\mathbb{1}_{D^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,S},\Lambda)}$ 为 $i_{0,S*}\Lambda$其中 $i_{0,S}$ 是 (2.9) 中定义的闭浸入。令 $\pi_{\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,S}}$: $\mathrm{Gr}_{G,S} \to \mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,S}$ 和 $\pi_{G,S}$: $\mathrm{Gr}_{G,S} \to S$ 表示自然映射，并置

$$F_{G,S} := \mathcal{H}^i(R\pi_{G,S*}\pi^*_{\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,S}}(-))\colon \mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,S},\Lambda) \to \mathrm{LS}(S,\Lambda) \tag{2.11}$$

如 [FS21, Definition/Proposition VI.7.10]所述。通过与 Fargues–Scholze 在 [FS21, §VI],中证明几何 Satake 等价相同的论证，我们可以证明以下结论：

命题 2.12。 *(1)* 在$\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,\breve{E}}, \Lambda)$上存在一个对称幺半结构，并且在$^{F}_{G,\mathrm{Spd}\,\breve{E}}$ 上存在一个对称幺半结构，由此诱导出一个对称幺半等价

$$S_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}\colon \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(\widehat{G}_{\Lambda} \times I_E, \Lambda) \simeq \mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,\breve{E}}, \Lambda) \tag{2.12}$$

通过坦纳克形式主义。

（*2*）$\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C}, \Lambda)$ 上存在一个对称幺半结构，$F_{G,\mathrm{Spd}\,C}$ 上也存在一个对称幺半结构，它们诱导出一个对称幺半等价

$$S_{\mathrm{Spd}\,C}\colon \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(\widehat{G}_{\Lambda}, \Lambda) \simeq \mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C}, \Lambda). \tag{2.13}$$

证明。 我们可以假设 Λ 是一个挠环。然后，我们可以用与 [FS21, §VI]相同的论证证明这些结论。注意， [FS21] 中的论证并不完全适用于在$F_{G,\mathrm{Spd}\,C}$上构造幺半结构；这一点在[Ban23]中处理。

□

2.5.4 Witt 向量与等特征 Hecke 叠

我们经常将上述定义为 v-堆栈的 Hecke 叠上的问题归约到 Witt 向量 Hecke 叠或等特征 Hecke 叠；后者是以概形论方式定义的。本节汇集了关于后者上的 ´étale 层的导出范畴的预备知识。

假设 G 是分裂的。我们仍用 G 表示它在 $\mathcal{O}_F$上的模型。令 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{Witt}}_{G,\mathrm{Spec}\,k}$（分别为 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{eq}}_{G,\mathrm{Spec}\,k}$）表示 [Zhu17a, §1.1] （例如，等特征情形见 [MV07, §2]）中定义的 Witt 向量（分别为等特征）仿射 Grassmannian。类似地，令 $L^{+,\mathrm{Witt}\ \mathrm{Spec}\,k}G$（分别为 $L^{+,\mathrm{eq}\ \mathrm{Spec}\,k}G$）表示 Witt 向量（分别为等特征）圈群，并令$\mathcal{H}\mathrm{ck}^{(-)}_{G,\mathrm{Spec}\,k} = [L^{+,(-)}{}_{\mathrm{Spec}\,k}G \backslash \mathrm{Gr}^{(-)}_{G,\mathrm{Spec}\,k}]$ 表示（–）Witt 或 eq。我们类似地定义舒伯特胞腔、舒伯特簇以及点 $[\mu]$。

对于 (–) =Witt 或 eq，我们首先定义范畴

$$\mathcal{D}_{\mathrm{cons}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{(-)}_{G,\mathrm{Spec}\,k,\leq\mu}, \Lambda)$$

如下定义 Λ-复形在 $\mathcal{H}\mathrm{ck}^{(-)}_{G,\mathrm{Spec}\,k,\leq\mu}$ for $\mu \in \mathbb{X}^{+}_{*}(T)$ 上的完美可构造对象：由于 $L^{+,(-)}\mathrm{Spec}\ {}_{k}G$ 对 $\mathrm{Gr}^{(-)}_{G,\mathrm{Spec}\,k,\leq\mu}$ 的作用经由某个商 $L^{+,(-)}\mathrm{Spec}\ {}_{k}G/L^{(-)}\mathrm{Spec}\ {}_{k}G^{(m)}$ 因子化，其中 $L^{(-)}\ \mathrm{Spec}_{k}G^{(m)}$ 是 [Zhu17b, §5.2] or [Zhu17a, (1.1.1)] 中定义的第 m 个同余子群。由于 $L^{+,(-)}\ \mathrm{Spec}_{k}G/L^{(-)}\ \mathrm{Spec}_{k}G^{(m)}$ 是一个在 k 上有限型的概形或其完美化，该商叠

$$X^{(m)}_{\leq\mu} = [(L^{+,(-)}_{\mathrm{Spec}\,k}G/L^{(-)}_{\mathrm{Spec}\,k}G^{(m)}) \backslash \mathrm{Gr}^{(-)}_{G,\mathrm{Spec}\,k,\leq\mu}]$$

是一个在 Spec k 上有限型的 Artin 叠，或其完美化。于是，当 Λ 是挠环时，由 [LZ24]，可知，存在一个 ∞-范畴

$$\mathcal{D}_{\text{ét}}(X^{(m)}_{\leq\mu}, \Lambda)$$

´etale 层上的（因为根据 [Zhu17a, §A] 中的论证，选择去完美化不会改变 ´etale 层的范畴）。令

$$\mathcal{D}_{\text{cons}}(X^{(m)}_{\leq\mu}, \Lambda).$$

表示完美可构造层的全子范畴，其中，若某个复形在 $X^{(m)}_{\leq\mu}$ 上沿到 $\mathrm{Gr}_{G,\mathrm{Spec}\,k,\leq\mu}$ 的拉回是完美可构造的，则称该复形为完美可构造。我们定义

$$\mathcal{D}_{\text{ét}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{(-)}_{G,\mathrm{Spec}\,k,\leq\mu}, \Lambda) := \mathcal{D}_{\text{ét}}(X^{(m)}_{\leq\mu}, \Lambda)$$
$$\mathcal{D}_{\text{cons}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{(-)}_{G,\mathrm{Spec}\,k,\leq\mu}, \Lambda) := \mathcal{D}_{\text{cons}}(X^{(m)}_{\leq\mu}, \Lambda).$$

这些定义不依赖于 m的选择，因为对于任意 m，同余子群 $L^{(-)}\ 谱_k G^{(m)}$都是一个原幺幂群的（完美化），并且对平凡作用的幺幂群取商叠不会改变导出范畴。

在 Hecke叠上，完美可构造性与普遍局部无环性一致 :

引理2.13。 假设 Λ是一个挠环。对象

$$A \in \mathcal{D}((X^{(m)}_{\leq\mu})_{\acute{e}t}, \Lambda)$$

属于 $\mathcal{D}_{\text{cons}}((X^{(m)}_{\leq\mu})_{\acute{e}t}, \Lambda)$ 当且仅当它作为 $\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spec}\,k}$ 上的复形是普遍局部无环（*ULA*）的，定义见 *[Ban24, Definition 4.6]*。

证明。令

$$\pi_{\mathrm{Gr},k} \colon \mathrm{Gr}^{(-)}_{G,\mathrm{Spec}\,k} \to \mathcal{H}\mathrm{ck}^{(-)}_{G,\mathrm{Spec}\,k}$$

为自然投影。根据定义， A 属于 $\mathcal{D}_{\text{cons}}((X^{(m)}_{\leq\mu})_{\text{ét}}, \Lambda)$，当且仅当$\pi^*_{\mathrm{Gr},\ k}A$ 拉回到 $\mathrm{Gr}^{(-)}_{G}\ 谱_k$后是完美可构造的。由$A$的等变性，对象$\pi^*_{\mathrm{Gr},\ k}A$ 在每个舒伯特胞腔上局部常值。因此， A 属于$\mathcal{D}_{\text{cons}}((X^{(m)}_{\leq\mu})_{\text{ét}}, \Lambda)$，当且仅当纤维 $[\mu]^*A$ 是一个完美复形。于是由 [Ban24，命题 4.7]即可得出结论。

□

对于 $\mathbb{Q}_\ell$ 的有限扩张 L ，我们定义

$$\mathcal{D}_{\text{cons}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{(-)}_{G,\mathrm{Spec}\,k,\leq\mu}, \mathcal{O}_L) := \varprojlim_n \mathcal{D}_{\text{cons}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{(-)}_{G,\mathrm{Spec}\,k,\leq\mu}, \mathcal{O}_L/\ell^n), \tag{2.14}$$

$$\mathcal{D}_{\text{cons}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{(-)}_{G,\mathrm{Spec}\,k,\leq\mu}, L) := \mathcal{D}_{\text{cons}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{(-)}_{G,\mathrm{Spec}\,k,\leq\mu}, \mathcal{O}_L)[1/\ell] \tag{2.15}$$

and

$$\mathcal{D}_{\mathrm{cons}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{(-)}_{G,\mathrm{Spec}\,k,\leq\mu},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) := \varinjlim_{L/\mathbb{Q}_\ell} \mathcal{D}_{\mathrm{cons}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{(-)}_{G,\mathrm{Spec}\,k,\leq\mu},L) \tag{2.16}$$

其中 L 遍历 $\mathbb{Q}_\ell$ 中 $\mathbb{Q}_\ell$ 的有限扩张。另一方面，根据 [BS15] 和 [Cho20]，存在一个范畴

$$D_{\mathrm{cons}}((X^{(m)}_{\leq\mu})_{\mathrm{pro\acute{e}t}},\Lambda)$$

在 $X^{(m)}_{\leq\mu}$ 上的 pro-étale site 上的完美可构造层。

引理 2.14。假设 $\Lambda=\mathcal{O}_L/\ell^n,\mathcal{O}_L,L$ 或 $\mathbb{Q}_\ell$，其中 $\overline{L}$ 是 $\mathbb{Q}_\ell$ 的有限扩张，且 n 是非负整数。$\mathcal{D}_{\mathrm{cons}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{(-)}_{G,\text{谱}\,k,\leq\mu},\Lambda)$ 的同伦范畴等价于 $D_{\mathrm{cons}}((X^{(m)}_{\leq\mu})_{pro\acute{e}t},\Lambda)$。

证明。只需证明对任意 Artin 叠 X 都有类似的结论。当 Λ 是挠环时，根据下降（[LZ24，命题 5.3.5]和 [Cho20，命题 4.27]），问题归结为概形的情形，并已在 [BS15，定义 6.5.1]之后的段落中证明。当 $\Lambda=\mathcal{O}_L$时，问题再次归结为概形的情形，并由 [BS15，定义 6.5.1]推出。当 $\Lambda=L$ 或 $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$时，由 [Cho20，定理 1.2]可得。

□

根据引理2.13，我们也将 $\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{(-)}_{G,\text{谱}\,k,\leq\mu},\Lambda)$ 记作 $\mathcal{D}_{\mathrm{cons}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{(-)}_{G,\text{谱}\,k,\leq\mu},\Lambda)$，并定义 $\mathcal{H}\mathrm{ck}^{(-)}_{G,\text{谱}\,k}$ 上 ULA 复形的范畴为

$$\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{(-)}_{G,\mathrm{Spec}\,k},\Lambda) = \varinjlim_{\mu\in\mathbb{X}^+_*(T)} \mathcal{D}_{\mathrm{cons}}((\mathcal{H}\mathrm{ck}^{(-)}_{G,\mathrm{Spec}\,k,\leq\mu})_{\text{ét}},\Lambda)$$

即使 Λ 不是挠环。

$\mathcal{D}_{\mathrm{cons}}(\mathrm{Gr}_{G,\mathrm{Spec}\,k,\leq\mu},\mathbb{Q}_\ell)$ 上的 perverse t-结构诱导出 $\mathcal{D}_{\mathrm{cons}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spec}\,k,\leq\mu},\mathbb{Q}_\ell)$ 上的 perverse t-结构，即，当且仅当 $\overline{A}\in\mathcal{D}_{\mathrm{cons}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spec}\,k,\leq\mu},\mathbb{Q}_\ell)$ 的拉回到 $\mathrm{Gr}_{G,\mathrm{Spec}\,k,\leq\mu}$ 后，关于通常的 perverse t-结构 $({}^p\mathcal{D}^{\geq0},{}^p\mathcal{D}^{\leq0})$ 属于 ${}^p\mathcal{D}^{\geq0}$（分别属于 ${}^p\mathcal{D}^{\leq0}$）时，它才属于 ${}^p\mathcal{D}^{\geq0}$（分别属于 ${}^p\mathcal{D}^{\leq0}$）。由此诱导出 $\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{(-)}_{G,\text{谱}\,k},\mathbb{Q}_\ell)$ 上的 perverse t-结构。由于任意有限型 k 概形上的任意可构造层关于 perverse t-结构都是有界的，我们得到以下结论：

引理 2.15. $\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{(-)}_{G,\text{谱}\,k},\mathbb{Q}_\ell)$ 中的任何对象关于 *perverse* t-结构都是有界的。

3 Hecke叠的上同调

I本节中，我们将证明关于 $\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\,\mathrm{Spd}\,C}$ 的上同调环的一些结果。 .

3.1 ULA层范畴之间的等价

回顾一下，我们固定了一个极大环面 $T \subset G$ （不一定是分裂的）。令 $T^{\mathrm{spl}} \subset G^{\mathrm{spl}}$ 为 $T \subset G$ 在谱 $\mathbb{Z}$ 上的一个分裂模型，即谱 $\mathbb{Z}$ 上的一个分裂约化群 G^{spl}，以及其极大分裂环面 T^{spl}，并配备一个将包含关系 $T^{\mathrm{spl}}_F \subset G^{\mathrm{spl}}_F$ 与 $T_F \subset G_F$ 相识别的同构。首先，我们有以下命题：−

命题 3.1. 存在幺半等价

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\Lambda) &\simeq \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spd}\,C},\Lambda)\\ &\simeq \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spd}\,\mathcal{O}_C},\Lambda)\\ &\simeq \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spd}\,k},\Lambda)\\ &\simeq \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{Witt}}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spec}\,k},\Lambda)\\ &\simeq \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{eq}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spec}\,k},\Lambda). \end{aligned} \tag{3.1}$$

的幺半 ∞-范畴。

证明. 根据 (2.14-2.16)、引理 2.10 以及 $\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}$ 的定义，我们可以假设 Λ 是一个挠环。首先，同构 (2.8) 表明

$$\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\Lambda) \simeq \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spd}\,C},\Lambda).$$

此外，根据 [FS21, Corollary VI.6.7]，拉回函子定义了等价

$$\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spd}\,C},\Lambda) \xleftarrow{\sim} \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spd}\,\mathcal{O}_C},\Lambda) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spd}\,k},\Lambda). \tag{3.2}$$

接下来，我们断言

$$\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spd}\,k},\Lambda) \simeq \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spec}\,k},\Lambda).$$

这由 [Sch17, §27] 中与概形的比较结果得出。更确切地说，论证如下：

$$\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{Witt}}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spec}\,k,\leq\mu} = [L^{+,\mathrm{Witt}}_{\mathrm{Spec}\,k}G^{\mathrm{spl}}\backslash \mathrm{Gr}^{\mathrm{Witt}}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spec}\,k,\leq\mu}] \tag{3.3}$$

$$\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spd}\,k,\leq\mu} = [(L^{+,\mathrm{Witt}}_{\mathrm{Spec}\,k}G^{\mathrm{spl}})^{\diamondsuit}\backslash(\mathrm{Gr}^{\mathrm{Witt}}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spec}\,k,\leq\mu})^{\diamondsuit}] \tag{3.4}$$

按照 [Sch17 §27] 的术语。如 §2.5.4 所述，$L^{+,\ \mathrm{Witt}\ 谱 k}G^{\mathrm{spl}}$-作用在 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{Witt}}_{G^{\mathrm{spl}},\ 谱\ k,\leq\mu}$ 经由商 $L^{+,\ \mathrm{Witt}\,谱 k}G^{\mathrm{spl}}/L^{+,\ \mathrm{Witt}\,谱\ k}G^{\mathrm{spl},\ (m)}$ 对某个 m，由第 m 个同余群分解，且

$$\mathcal{D}_{\text{ét}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{Witt}}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spec}\,k,\leq\mu},\Lambda) = \mathcal{D}_{\text{ét}}([(L^{+,\mathrm{Witt}}_{\mathrm{Spec}\,k}G^{\mathrm{spl}}/L^{+,\mathrm{Witt}}_{\mathrm{Spec}\,k}G^{\mathrm{spl},(m)})\backslash\mathrm{Gr}^{\mathrm{Witt}}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spec}\,k,\leq\mu}],\Lambda).$$

类似地，由 [FS21，命题 VI.4.1],

$$\mathcal{D}_{\text{ét}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spd}\,k,\leq\mu},\Lambda)\simeq\mathcal{D}_{\text{ét}}([(L^{+,\mathrm{Witt}}_{\mathrm{Spec}\,k}G^{\mathrm{spl}}/L^{+,\mathrm{Witt}}_{\mathrm{Spec}\,k}G^{\mathrm{spl},(m)})^{\diamondsuit}\backslash(\mathrm{Gr}^{\mathrm{Witt}}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spec}\,k,\leq\mu})^{\diamondsuit}],\Lambda).$$

由 [Sch17，命题 27.2]以及下降结果（[LZ24，命题 5.3.5]和 [Sch17，命题 17.3]）可知，对于任意栈 X，只要它是 Spec k 上有限型 Artin叠的完美化，就存在一个典范全忠实函子

$$c_X^*\colon\mathcal{D}_{\text{ét}}(X,\Lambda)\to\mathcal{D}_{\text{ét}}(X^{\diamondsuit},\Lambda),$$

根据 [Sch17，命题 27.1、命题 27.4]，此函子与 $*$-拉回和 !-推前相容。因此，存在一个全忠实函子

$$\mathcal{D}_{\text{ét}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{Witt}}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spec}\,k,\leq\mu},\Lambda)\to\mathcal{D}_{\text{ét}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spd}\,k,\leq\mu},\Lambda)\tag{3.5}$$

对任意 μ 均如此。根据 [FS21, PROPOSITIONVI.6.5] 和 [Ban24，命题 4.7], 中对普遍局部无环性的刻画，可以证明这限制为一个函子

$$\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{Witt}}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spec}\,k,\leq\mu},\Lambda)\to\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spd}\,k,\leq\mu},\Lambda).$$

因此，我们得到一个全忠实函子

$$\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spec}\,k},\Lambda)\to\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spd}\,k},\Lambda).$$

由于卷积积是利用 $*$-拉回和 !-推前定义的，此函子是幺半的。根据对应于舒伯特胞腔分层的半正交分解，此函子的本质满射性归结为以下函子的本质满射性:

$$D^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spec}\,k,\mu},\Lambda)\to D^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spd}\,k,\mu},\Lambda)$$

对每个 μ 均如此。由于对于某个群概形 H_μ， $\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spec}\ k,\mu}=[\mathrm{Spec}\ k/H_\mu]$ 和 $\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spd}\,k,\mu}=[\mathrm{Spd}\ k/H_\mu^{\diamondsuit}]$ 成立，根据 [FS21, PROPOSITION IV.7.1], 证明中的下降论证，本质满射性归结为 $D_{\mathrm{lc}}(\mathrm{Spec}\,k,\Lambda)\to D_{\mathrm{lc}}(\mathrm{Spd}\ k,\Lambda)$ 的本质满射性，其中 $D_{\mathrm{lc}}(-)$ 表示具有完美纤维的局部常值层范畴。由于 $D_{\mathrm{lc}}(\mathrm{Spec}\,k,\Lambda)$ 和 $D_{\mathrm{lc}}(\mathrm{Spd}\,k,\Lambda)$ 等价于完美 Λ-复形的范畴，结论得证。

最后，我们有

$$\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{Witt}}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spec}\,k},\Lambda)\simeq\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{eq}}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spec}\,k},\Lambda)\tag{3.6}$$

由 [Ban24，定理 1]得出。这证明了该命题。 □

我们在上述证明中用到了 [Ban24，定理 1]。让我们回顾一下 [Ban24，定理 1] 的证明思路。我们引入一个概形 $\widetilde{\mathrm{Div}_0^{\perp}}$ 以及其上的一个仿射格拉斯曼量 $\mathrm{Gr}^{\widetilde{\mathrm{Div}_0^{\perp}}}$，使得它在点 $x_1\colon \mathrm{Spec}\ k \to \widetilde{\mathrm{Div}_0^{\perp}}$ 上的纤维是 Witt 向量仿射格拉斯曼量，而在另一个点 x_2 上的纤维是等特征仿射格拉斯曼量（的完美化）。然后，我们可以利用三元组证明 (3.6)

$$(x_1, \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_1, \mathrm{Spec}\,\overline{K(\widetilde{\mathrm{Div}_0^{\perp}})}]) \text{ and } (x_2, \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_2, \mathrm{Spec}\,\overline{K(\widetilde{\mathrm{Div}_0^{\perp}})}]) \tag{3.7}$$

对于某个亨泽尔局部环 $\mathcal{O}_1$，$\mathcal{O}_2$ 这里使用的是映射，而不是三元组 (Spd k，Spd $\mathcal{O}_C$，Spd C)[（见 FS21 Corollary VI.6.7]）。我们不会用到这个证明的细节，但之后会用到这样一个事实：这个证明中出现的所有函子都是沿映射的拉回。

之后我们需要以下关于偏 perversity 保持性的引理：

引理 3.2. 对于 $(-) = \mathrm{eq}$ 或 Witt，令 $\mathrm{Perv}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{(-)}_{G^{\mathrm{spl}},\ \mathrm{Spec}\,k},\ \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \subset \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{(-)}_{G^{\mathrm{spl}},\ \mathrm{Spec}\,k},\ \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$表示 $_{,\ (-)\ \mathrm{Spec}\,k}G^{\mathrm{spl}}$-等变 *perverse* $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-层在 $\mathrm{Gr}^{(-)}_{G^{\mathrm{spl}},\ \mathrm{Spec}\,k}$上的全子范畴。

(1) 命题 *3.1* 中的等价限制为以下范畴之间的幺半等价：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) &\simeq \mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spd}\,C}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\
&\simeq \mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spd}\,\mathcal{O}_C}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\
&\simeq \mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spd}\,k}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\
&\simeq \mathrm{Perv}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{Witt}}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spec}\,k}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\
&\simeq \mathrm{Perv}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{eq}}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spec}\,k}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

(2) 存在典范幺半自然同构，使得以下方块

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow{(2.13)} & \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\
\simeq \big\downarrow (3.8) & & \| \\
\mathrm{Perv}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{Witt}}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spec}\,k}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow{S^{\mathrm{Witt}}_{\mathrm{Spec}\,k}} & \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\
\simeq \big\downarrow (3.8) & & \| \\
\mathrm{Perv}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{eq}}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spec}\,k}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow{S^{\mathrm{eq}}_{\mathrm{Spec}\,k}} & \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)
\end{array}$$

可交换，其中 $S^{\mathrm{Witt}}_{\mathrm{Spec}\,k}$ 是 *[Zhu17a]* 中的几何 *Satake* 等价，而 $S^{\mathrm{eq}}{}_{\text{谱}\,k}$ 是 *[MV 07]* 中的几何 *Satake* 等价。

备注 3.3. 与 [FS21, §VI], 不同， [MV07] 和 [Zhu17a] 中几何 Satake 等价的构造并非完全典范。它们建立了

从纤维函子得到的几何 Satake 等价

$$\mathrm{Perv}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{(-)}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spec}\,k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to \mathrm{Vect}^{\heartsuit,\mathrm{f.d.}}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell},A\mapsto \bigoplus_i H^i(\mathrm{Gr}^{(-)}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spec}\,k},A)$$

$\widehat{\ }$经由 Tannakian 构造得到，但 Tannakian 群与 $\widehat{G}$ 之间的同构具有 G 的内自同构所引起的歧义。因此，引理 3.2 (2) 的陈述中“典范”一词更精确地是指“在此歧义意义下的典范”。这一歧义不影响我们的结果。此外，若采用 [FS21] 在 [MV07] 与 [Zhu17a] 的证明中所用的方法，则可以避免这一歧义并严格证明该陈述。

证明。 (1) 最后一个等价在 [Ban24，§6]中得到证明。

对于前四个等价，该结果在 [FS21，注记 I.2.14]中被隐含地提及。我们给出如下证明：由于第一个等价由 (2.8) 推出，我们可以假设 $G=G^{\mathrm{spl}}_F$ ，并滥用记号将 G 记作 G^{spl}。对于第二个和第三个等价，我们可以假设 Λ是挠环。根据 [FS21 中命题 VI.6.4、命题 VI.7.7], 对 ULA层与 Satake 层的刻画，第二个（相应地，第三个）等价归结为如下断言： $\mathcal{D}_{\mathrm{lc}}(\mathrm{Spd}\ \mathcal{O}_C,\Lambda)$ 中一个对象的所有纤维均为 0 次的有限投射 Λ- 模，当且仅当它到 $\mathcal{D}_{\mathrm{lc}}(\mathrm{Spd}\,k,\Lambda)$ （相应地， $\mathcal{D}_{\mathrm{lc}}(\mathrm{Spd}\ C,\Lambda)$ ）的拉回满足同样的条件。这由等价 $\mathcal{D}_{\mathrm{lc}}(S,\Lambda)\simeq\Lambda\text{-}\mathrm{mod}^{\mathrm{perf}}$ （对 $S=\mathrm{Spd}\ \mathcal{O}_C$, $\mathrm{Spd}\ k$ 以及 $\mathrm{Spd}\,C$）推出。

对于第四个等价，令

$$\mathcal{D}_{\text{ét}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k},\Lambda)^{\mathrm{bd}}\subset\mathcal{D}_{\text{ét}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k},\Lambda)$$

表示所有具有拟紧支撑的对象的全子范畴。当 Λ 为挠环时， $\mathcal{D}_{\text{ét}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k},\Lambda)^{\mathrm{bd}}$ 上的 perverse t-结构定义于 [FS21, Definition/PropositionVI.7.1] ； 再通过取极限、对 ℓ 取逆并取余极限，我们也得到 $\mathcal{D}_{\text{ét}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k},\mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{bd}}$上的perverse t-结构。由于全忠实函子(3.5)依与命题 3.1的证明相同的论证是本质满射的，我们得到一个等价

$$D_{\text{ét}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{Witt}}_{G,\mathrm{Spec}\,k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{bd}}\simeq D_{\text{ét}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{bd}}. \tag{3.9}$$

根据 perverse t 结构的定义，我们可以证明这个等价保持 perverse t 结构。

令 $j_{\mu,\mathrm{Spd}\,k}\colon \mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k,\mu} \hookrightarrow \mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k}$ 表示包含，并令 $d_\mu = \langle 2\rho, \mu\rangle$。令 $IC_{\mu,\mathrm{Spd}\,k}$ 表示自然同态的像

$$ {}^p\mathcal{H}^0(j_{\mu,\mathrm{Spd}\,k!}\overline{\mathbb{Q}}_\ell[d_\mu]) \to {}^p\mathcal{H}^0(Rj_{\mu,\mathrm{Spd}\,k*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell[d_\mu]). $$

事实上，$IC_{\mu,\mathrm{Spd}\,k} \cong {}^p\mathcal{H}^0(j_{\mu,\mathrm{Spd}\,k!}\mathbb{Q}_\ell[d_\mu]) \cong {}^p\mathcal{H}^0(Rj_{\mu,\mathrm{Spd}\,k*}\mathbb{Q}_\ell[d_\mu])$ 根据 [FS21, 命题 VI.7.5] 成立。由于 $j_{\mu,\mathrm{Spd}\,k!}$ 和 ${}^p\mathcal{H}^0(-)$ 与比较等价（3.9）相容，该等价将 $IC_{\mu,\mathrm{Spd}\,k}$ 映射为 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{Witt}}_{G,\mathrm{Spec}\,k,\leq\mu}$ 上的交叉上同调层 $IC_{\mu,\mathrm{Spec}\,k}$。按照 [FS21, §VI.11] 中关于 "$\mathrm{Sat}_G(\mathbb{Q}_\ell)$" 的同样论证，范畴 $\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,S},\mathbb{Q}_\ell)$ 由 $\bigoplus \mathrm{Vect}^{\heartsuit,\mathrm{f.d.}}_{\mathbb{Q}_\ell} \otimes_{,\mu\in\mathbb{X}^+_*(T)}$ 给出

$IC_{\mu,\mathrm{Spd}\,k}$。由于 $\mathrm{Perv}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{Witt}}_{G,\mathrm{Spec}\,\overline{k}},\mathbb{Q}_\ell)$ 由 $IC_{\mu,\mathrm{Spec}\,k}$'s 根据 [Zhu17a, §2.1.1], 生成，我们得到第四个等价。

注意，幺半群结构可由（3.1）中的幺半群结构推出。

（2）我们可以假设 $G = G^{\mathrm{spl}}_F$，并略去严谨性地记 G 为 G^{spl}。令

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_1 &= \mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell),\\
\mathcal{P}_2 &= \mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\\
\mathcal{P}_3 &= \mathrm{Perv}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{Witt}}_{G,\mathrm{Spec}\,k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell),\\
\mathcal{P}_4 &= \mathrm{Perv}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{eq}}_{G,\mathrm{Spec}\,k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell).
\end{aligned}$$

对于 $1 \le i \le 4$，令

$$F_i\colon \mathcal{P}_i \to \mathrm{Vect}^{\heartsuit,\mathrm{f.p.}}$$

为如下函子：它将 perverse 层 A 映到 A 在仿射格拉斯曼量上所有度的上同调群的直和。函子 F_1 是（2.11）中定义的函子。我们分别按照命题 2.12, [Zhu17a, §2.4] 和 [Zhu17b, §5.2], 中的方式，为 $\mathcal{P}_1$、$\mathcal{P}_3$、$\mathcal{P}_4$ 配备对称幺半结构。我们还按照命题 2.12、[Zhu17a, §2.3] 和 [Zhu17b, §5.2], 中的方式，分别为 F_1、F_3、F_4 配备对称的幺半结构。在 [Zhu17b, §5.2], 中提到，为 F_4 配备幺半结构有多种方式，但这些方式彼此一致。此外，我们按照 [Zhu17a, §2.3] 中的方式，为 F_2 配备幺半结构。

由于 F_i 是通过对仿射格拉斯曼量中的真子空间作 $*$-拉回和推前定义的，我们可以证明存在一个自然同构

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{P}_i & \xrightarrow{F_i} & \mathrm{Vect}^{\heartsuit,\mathrm{f.d.}} \\
{\scriptstyle (3.8)}\big\downarrow{\scriptstyle \simeq} & & \big\| \\
\mathcal{P}_{i+1} & \xrightarrow{F_{i+1}} & \mathrm{Vect}^{\heartsuit,\mathrm{f.d.}}
\end{array} \tag{3.10}$$

对于 $i=1$，2，3。我们声称，对于 $i=1$，2，3，这个同构是幺半的。当$i=1$时，这已在 [Ban23] 中得到证明。当 $i=2$时， F_2 和F_3 上的幺半结构由取等变上同调 $H^*_{L^+G}(\mathrm{Gr}_G,\ -)$ 的函子的幺半结构诱导而来，该函子取值于 $H^*_{L^+G}(*,\mathbb{Q}_\ell)$-模。这些构造与证明 (3.1) 中的比较函子相容。因此，自然同构 (3.10) 对于 $i=2$ 是幺半的。

类似地，对于情形 $i=3$，由于在F_3 与 F_4 上定义幺半结构的方式是平行的，并且由于我们可以在 (3.7) 中的空间谱 $\mathcal{O}_1$、谱 $K(\widetilde{\ \ }\mathrm{Div}_0^\perp)$ 与谱 $\mathcal{O}_2$ 上定义类似的函子和幺半结构，我们可以证明自然同构 (3.10) 对于 $i=3$ 是幺半的。

因此，我们得到一个图表

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{P}_1 & \xrightarrow{F_1} & \mathrm{Vect}^{\heartsuit,\mathrm{f.d.}} \\
{\scriptstyle (3.8)}\big\downarrow{\scriptstyle \simeq} & & \big\| \\
\mathcal{P}_3 & \xrightarrow{F_3} & \mathrm{Vect}^{\heartsuit,\mathrm{f.d.}} \\
{\scriptstyle (3.8)}\big\downarrow{\scriptstyle \simeq} & & \big\| \\
\mathcal{P}_4 & \xrightarrow{F_4} & \mathrm{Vect}^{\heartsuit,\mathrm{f.d.}}
\end{array} \tag{3.11}$$

在幺半群自然同构的意义下交换。由于 F_1,F_3,F_4 是对称且忠实的，由此可知左侧的竖直同构是对称的。$\widehat{\ \ }$ $\widehat{\ \ }$因此，由坦纳克形式主义，存在自同构 φ_1,φ_2: $G\to G$，使得该图表

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \longrightarrow & \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\
{\scriptstyle \simeq}\big\downarrow{\scriptstyle (3.8)} & & {\scriptstyle \simeq}\big\downarrow{\scriptstyle (-)^{\varphi_1}} \\
\mathrm{Perv}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{Witt}}_{G,\mathrm{Spec}\,k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \longrightarrow & \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\
{\scriptstyle \simeq}\big\downarrow{\scriptstyle (3.8)} & & {\scriptstyle \simeq}\big\downarrow{\scriptstyle (-)^{\varphi_2}} \\
\mathrm{Perv}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{eq}}_{G,\mathrm{Spec}\,k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \longrightarrow & \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)
\end{array}$$

在幺半自然同构意义下是可交换的，其中 $(-)^{\varphi_i}$ 是一个函子$\widehat{\ \ }$，它通过 φ_i 扭曲 G-作用。然而，根据 (1)，交层在左侧垂直箭头下对应；并且已知交层 IC_μ在水平箭头下对应于不可约表示 V_μ 。因此，函子 $(-)^{\varphi_1}$ 和 $(-)^{\varphi_2}$ 将最高权为 μ 的不可约表示映到其自身。这意味着 φ_1，φ_2 是内自同构。

□

3.2 Hecke栈的上同调环

根据命题 3.1，我们可以计算各种等变上同调：

推论 3.4. 存在一个典范分次同构

$$H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\,C}G}(\mathrm{Spd}\,C,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\cong\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}^*/W}},$$

其中 $\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}^*/W}}$ 被分次，使得 $\mathfrak{t}^*$ 的坐标的度为2。

证明. 我们可以假设 $G=G^{\mathrm{spl}}_F$，并滥用记号以 G 表示 G^{spl}。由于$\mathbb{1}:=i_{0*}\mathbb{Q}_\ell$（定义于§2.5.3）是普遍局部无环的，由命题 3.1 可得

$$H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\,C}G}(\mathrm{Spd}\,C)\cong H^*(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\mathbb{1})\cong H^*(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{Witt}}_{G,\mathrm{Spec}\,k},\mathbb{1})\cong H^*_{L^{+,\mathrm{Witt}}_{\mathrm{Spec}\,k}G}(\mathrm{Spec}\,k).$$

由于第一同余子群 $L^{+,\mathrm{Witt}\ \text{谱}\,k}G^{(1)}$ 是（一个原幺幂群的）完美化，且 $L^{+,\mathrm{Witt}\,\text{谱}}{}_k\,G/L^{+,\mathrm{Witt}\,\text{谱}\ k}G^{(1)}$ 是 $G_{\mathrm{Spec}\,k}$的完美化，我们有

$$H^*_{L^{+,\mathrm{Witt}}_{\mathrm{Spec}\,k}G}(\mathrm{Spec}\,k)\cong H^*_G(\mathrm{Spec}\,k).$$

同构 $H^*_G(\text{谱}\,k)\cong\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}^*/W}}$ 是熟知的。 □

推论3.5。 存在一个典范分次同构

$$H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\,C}\mathbb{G}_m}(\mathrm{Spd}\,C,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\cong\overline{\mathbb{Q}}_\ell[x],$$

其中 x 是一个度为 2 的不定元（，它是典范线丛的陈类）。

推论 3.6。 存在一个典范分次同构

$$H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\,C}T}(\mathrm{Spd}\,C,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\cong\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\widehat{\mathfrak{t}}],$$

其中 $\mathfrak{t}$ 的元素度为 2。

对应关系如下：对于特征 $\alpha\colon T_F\to\mathbb{G}_{m,\,F}$，$x$ 在诱导映射下的像

$$\alpha^*\colon H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\,C}\mathbb{G}_m}(\mathrm{Spd}\,C,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\,C}T}(\mathrm{Spd}\,C,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

对应于 α 在映射空间 $\mathbb{X}^*(T_E)\cong\mathbb{X}_*(\widehat{T})_{\text{李}}\to\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_\ell}(\mathbb{Q}_\ell,\widehat{\mathfrak{t}})=\widehat{\mathfrak{t}}$ 下的像。

定义 3.7。 假设 G 是半单且单连通的。我们将 $\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C}$ 的导出全局截面代数定义为

$$R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) := \underset{\mu\in\mathbb{X}_*^+(T_{\overline{F}})}{R\varprojlim} R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},i_{\leq\mu *}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\in\overline{\mathbb{Q}}_\ell\text{-mod}$$

其中

$$R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},i_{\leq\mu *}\overline{\mathbb{Q}}_\ell) := R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\text{ét}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)}(i_{\leq\mu *}\overline{\mathbb{Q}}_\ell,i_{\leq\mu *}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\in\overline{\mathbb{Q}}_\ell\text{-mod}$$

此外，我们定义 i-次上同调群 $\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\ \mathrm{Spd}\,C}$ 如下

$$H^i(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) := H^i(R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)).$$

我们通常将 $H^i_{L^+\mathrm{Spd}\,C}G(\mathrm{Gr}_{G,\ \mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ 记作 $H^i(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\ \mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}_\ell})$。

事实上， $H^i(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\ \mathrm{Spd}\,\overline{C}},\ \mathbb{Q}_\ell)$ 可以写成 $H^i(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\ \mathrm{Spd}\,C,\ \leq\mu},\ \mathbb{Q}_\ell)$ 的极限。

引理 3.8。 假设 G 是半单且单连通的。规范同态

$$H^i(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to\underset{\mu\in\mathbb{X}_*^+(T_{\overline{F}})}{\varprojlim} H^i(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C,\leq\mu},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

是一个等价。

证明。 由于 G 是半单且单连通的，指标集 $\mathbb{X}_*^+(T_F)$ 是一个可数有向集。根据 Mittag–Leffler 条件，只需证明同态

$$H^i(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C,\leq\mu'},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to H^i(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C,\leq\mu},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

对任意 $\mu'\geq\mu\in\mathbb{X}_*^+(T_F)$ 都是满射。由命题 3.1，这归结为证明下式满射

$$H^i(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{eq}}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spec}\,k,\leq\mu'},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to H^i(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{eq}}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spec}\,k,\leq\mu},\overline{\mathbb{Q}}_\ell). \tag{3.12}$$

我们知道 $H^i(\mathrm{Gr}^{\mathrm{eq}}_{G^{\mathrm{spl}},\ \text{谱}\,k},\ \mathbb{Q}_\ell)$ 的显式描述来自 [Gin00]，，并且可以证明 $H^i(\mathrm{Gr}^{\mathrm{eq}}_{G^{\mathrm{spl}},\ \text{谱}\,k},\ \mathbb{Q}_\ell)$ 是 Frobenius 权重为 i 的纯对象。由 [Gin98，定理 1.5]，可知，对于任意 $\mu\in\mathbb{X}_*^+(T_F)$，$H^i(\mathrm{Gr}^{\mathrm{eq}}_{G^{\mathrm{spl}},\ \text{谱}\,k,\ \leq\mu},\ \mathbb{Q}_\ell)$ 也是权重为 i 的纯对象。由 [GKM98，定理 14.1 (8)]，可知，存在一个非典范同构

$$H^*(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{eq}}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spec}\,k,\leq\mu'},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\cong H^*(\mathrm{Gr}^{\mathrm{eq}}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spec}\,k,\leq\mu},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\otimes H^{*,\mathrm{eq}}_{L^+_{\mathrm{Spec}\,k}G}(\mathrm{Spec}\,k,\overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

因此，由分次 Nakayama 引理，(3.12) 的满射性归结为

$$H^i(\mathrm{Gr}^{\mathrm{eq}}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spec}\,k,\leq\mu'},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to H^i(\mathrm{Gr}^{\mathrm{eq}}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spec}\,k,\leq\mu},\overline{\mathbb{Q}}_\ell),$$

这由 [Gin98，定理 1.5] 得出。 □

命题 3.9。 假设 G 是半单且单连通的。那么存在一个典范分次同构

$$H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\,C}G}(\mathrm{Gr}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\cong\mathcal{O}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}^*/W})},\tag{3.13}$$

其中 $\mathbb{T}(-)$ 表示切丛， W 是 G的魏尔群，而$\mathcal{O}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}^*/W})}$ 的分次由$\mathcal{O}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}^*})}$ （$\hookrightarrow\mathcal{O}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}^*/W})}$）的分次诱导而来；后者的分次规定为： $\mathfrak{t}^*$ 在底空间方向上的$\widehat{}$坐标的度为 *2*，而在纤维方向上的度为 *0*。

证明。 首先，我们断言 $i_{\leq\mu*}\Lambda\in\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\ \mathrm{Spd}\,C},\ \Lambda)$。我们可以假设 Λ是一个挠环；在这种情况下，该断言成立，因为 $i_{\leq\mu*}\Lambda$ 满足[FS21, Proposition VI.6.5]的条件。

因此，由命题 3.1 以及 $H^*_{L^+\mathrm{Spd}\,C^G}(\mathrm{Gr}_{G,\ \mathrm{Spd}\,C},\ \mathbb{Q}_\ell)$的定义可知，

$$H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\,C}G}(\mathrm{Gr}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\cong H^*_{L^+_{\mathrm{Spec}\,k}G}(\mathrm{Gr}^{\mathrm{eq}}_{G,\mathrm{Spec}\,k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

该断言成立，因为

$$H^*_{L^{+,\mathrm{eq}}_{\mathrm{Spec}\,k}G}(\mathrm{Gr}^{\mathrm{eq}}_{G,\mathrm{Spec}\,k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\cong\mathcal{O}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}^*/W})}$$

根据 [BF08 定理 1]， □

在 (3.13) 中，我们没有考虑等式两边的 Weil 作用。这将在下一节讨论。本小节的其余部分用于一些准备工作。群 $L^+\mathrm{Spd}\,C^T(\subset L^+\mathrm{Spd}\,C^G)$ 作用在 $\mathrm{Gr}_{G,\ \mathrm{Spd}\,C}$而 $[\lambda]$（在 (2.7) 中定义）的像在此作用下不变。（实际上，所有不动点都具有这种形式。）因此我们有同构

$$\begin{aligned}\varprojlim_{\mu\in\mathbb{X}_*^+(T_{\overline{F}})}H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\,C}T}\left(\coprod_{\substack{\lambda\in\mathbb{X}_*(T_{\overline{F}})\\[\lambda]\in\mathrm{Gr}_{G,\leq\mu}}}[\lambda],\overline{\mathbb{Q}}_\ell\right)&\cong\prod_{\lambda\in\mathbb{X}_*(T_{\overline{F}})}H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\,C}T}([\lambda],\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\\&\cong\prod_{\lambda\in\mathbb{X}_*(T_{\overline{F}})}\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\widehat{\mathfrak{t}}].\end{aligned}\tag{3.14}$$

因此 当 G 是半单且单连通时，存在一个典范同态——

映射

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)} &\overset{(3.13)}{\cong} H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\,C}G}(\mathrm{Gr}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\\ &\cong \varprojlim_{\mu\in\mathbb{X}_*^+(T_{\overline{F}})} H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\,C}G}(\mathrm{Gr}_{G,\mathrm{Spd}\,C,\leq\mu},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\\ &\to \varprojlim_{\mu\in\mathbb{X}_*^+(T_{\overline{F}})} H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\,C}T}\left(\coprod_{\substack{\lambda\in\mathbb{X}_*(T_{\overline{F}})\\ [\lambda]\in\mathrm{Gr}_{G,\leq\mu}}}[\lambda],\overline{\mathbb{Q}}_\ell\right)\\ &\overset{(3.14)}{\cong} \prod_{\lambda\in\mathbb{X}_*(T_{\overline{F}})}\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\widehat{\mathfrak{t}}]. \end{aligned}\tag{3.15}$$

于是我们有如下结论：

命题 3.10. 假设 G 是半单且单连通的。同态 *(3.15)* 与如下复合相一致：

$$\begin{aligned}&\mathcal{O}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}\to\mathcal{O}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*)}\cong\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*}[\widehat{\mathfrak{t}}]\\ &\to\prod_{\lambda\in\mathbb{X}_*(T_{\overline{F}})}\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*}\cong\prod_{\lambda\in\mathbb{X}_*(T_{\overline{F}})}\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\widehat{\mathfrak{t}}].\end{aligned}\tag{3.16}$$

这里，第一行中的同构是在代数 $\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*}$ 上、相对于 $\mathcal{O}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*)}$ 上由自然投影 $\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*)\to\widehat{\mathfrak{t}}^*$ 到基空间所诱导的 $\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*}$-代数结构而言的那个同构，而第二行中的箭头由下式给出

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*}[\widehat{\mathfrak{t}}]\ni a\cdot t_1\dots t_n\mapsto(a\langle\lambda,t_1\rangle\cdots\langle\lambda,t_n\rangle)_\lambda\in\prod_{\lambda\in\mathbb{X}_*(T_{\overline{F}})}\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*}$$

对 $a\in\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*}$ 与 $t_1,\ .....,\ t_n\in\widehat{\mathfrak{t}}$。这里，$\lambda$ 在 $\mathbb{X}_*(T_F)\cong\mathbb{X}^*(\widehat{T})$ 李$\longrightarrow$同态$\mathbb{Q}_\ell(\widehat{\mathfrak{t}},\mathbb{Q}_\ell)$ $=\widehat{\mathfrak{t}}^*$下的像也记作 λ。特别地，同态 *(3.15)* 是单射。

证明。 由于涉及的所有同态都是由沿栈之间的映射拉回所诱导的，因此该同态

$$H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\,C}G}(\mathrm{Gr}^{\mathrm{eq}}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to\prod_{\lambda\in\mathbb{X}_*(T_{\overline{F}})}H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\,C}T}([\lambda],\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

and

$$H^*_{L^{+,\mathrm{eq}}_{\mathrm{Spec}\,k}G^{\mathrm{spl}}}(\mathrm{Gr}_{G^{\mathrm{spl}},\mathrm{Spec}\,k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to\prod_{\lambda\in\mathbb{X}_*(T^{\mathrm{spl}})}H^*_{L^+_{\mathrm{Spec}\,k}T^{\mathrm{spl}}}([\lambda],\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\tag{3.17}$$

在命题 3.9 和推论 3.6 的证明中所用的同构下彼此相容。因此，定理归结为关于 (3.17) 的类似陈述。仔细考察 [BF08，定理 1]的证明即可证明这一陈述。证明思路如下：为简便起见，记 G 为 G^{spl}， T 为 T^{spl}，依此类推。我们也省略下标 $\mathrm{Spec}\, k$ 和上标 eq。在 [BF08，定理 1], 中，同构$H^*_{L^+G}(\mathrm{Gr}_G,\ \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}$ 是通过在一个同构中取 $\hbar = 0$ 得到的

$$H^*_{L^+G\rtimes\mathbb{G}_m}(\mathrm{Gr}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \cong \mathcal{O}_{N_{(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)^2}\Delta} \tag{3.18}$$

在 $H^*_{\mathbb{G}_m}(\mathrm{Spec}\, k, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \cong \mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}\ \overline{\mathbb{Q}}_\ell[\hbar]$ 上。这里， $\mathbb{G}_m$ 通过环旋转作用于 L^+G 和 LG；对于概形 X 的闭子概形 Z ，空间 N_XZ 是 Fulton 的法锥变形。同构 (3.18) 由以下映射诱导：

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)^2\times\mathbb{A}^1} &\cong H^*_{G\times\mathbb{G}_m\times G}(\mathrm{Spec}\, k, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)\\ &\cong H^*_{L^+G\rtimes\mathbb{G}_m\ltimes L^+G}(\mathrm{Spec}\, k, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to H^*_{L^+G\rtimes\mathbb{G}_m}(\mathrm{Gr}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell),\end{aligned}$$

其中，右侧的同态是经由 $\mathrm{Gr}_G \to [\mathrm{Spec}\, k/L^+G]$ 的拉回。我们考虑此同态与拉回同态 $H^*_{L^+G\rtimes\mathbb{G}_m}(\mathrm{Gr}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to H^*_{L^+T\rtimes\mathbb{G}_m}([\lambda], \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 的复合。根据 BF08 引理 1], 的证明中的论证，拉回

$$H^*_{G\times\mathbb{G}_m\times G}(\mathrm{Spec}\, k, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to H^*_{L^+T\rtimes\mathbb{G}_m}([\lambda], \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

同构于同态 $f_\lambda : \mathcal{O}_{(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)^2\times\mathbb{A}^1} \to \mathcal{O}_{\Gamma_\lambda}$，其中

$$\Gamma_\lambda := \{(x_1, x_2, a) \in (\widehat{\mathfrak{t}}^*)^2 \times \mathbb{A}^1 \mid x_2 = x_1 + a\cdot\lambda\}$$

且 f_λ 对应于映射 $\Gamma_\lambda \subset (\widehat{\mathfrak{t}}^*)^2 \times \mathbb{A}^1 \to (\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)^2 \times \mathbb{A}^1$。这诱导出映射$\Gamma_\lambda \to N_{(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)_2}\Delta$。将其限制在轨迹 $\hbar = 0$ 上，便得到映射

$$\begin{aligned}&\widehat{\mathfrak{t}}^* \to \widehat{\mathfrak{t}}^* \times \widehat{\mathfrak{t}}^* \cong \mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*) \to \mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W),\\ &x \mapsto (\lambda, x)\end{aligned}$$

在 $\widehat{\mathfrak{t}}^*/W$ 上。这就证明了该断言。 □

用同样的论证，我们可以证明以下引理：

引理 3.11. 复合

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*/W} \cong H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\, C}G}(\mathrm{Spd}\, C) \to H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\, C}T}(\mathrm{Spd}\, C) \cong \mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*}$$

与自然映射 $\widehat{\mathfrak{t}}^* \to \widehat{\mathfrak{t}}^*/W$诱导的同态一致。特别地，它是单射。

引理 3.12. 假设 G是半单且单连通的。令

$$\pi_1, \pi_2 \colon \mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, C} \to [\mathrm{Spd}\, C/L^+_{\mathrm{Spd}\, C} G]$$

分别是对应于右作用和左作用的商的投影。对于 $i = 1,2$，复合

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*/W} \cong H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\, C} G}(\mathrm{Spd}\, C, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \xrightarrow{\pi_i^*} H^*(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, C}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}$$

与由自然投影 $\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W) \to \widehat{\mathfrak{t}}^*/W$ 诱导的同态一致。特别地，它是单射。

此外，回顾卷积图 (2.10)，并令

$$\mathcal{H}\mathrm{ck}^{(2)}_{G,\mathrm{Spd}\, C,\leq(\mu_1,\mu_2)} := p^{-1}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, C,\leq\mu_1} \times \mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, C,\leq\mu_2}).$$

令 $i_{\leq(\mu_1,\mu_2)} \colon \mathcal{H}\mathrm{ck}^{(2)}_{G,\mathrm{Spd}\, C,\leq(\mu_1,\mu_2)} \to \mathcal{H}\mathrm{ck}^{(2)}_{G,\mathrm{Spd}\, C}$ 为闭浸入，并令 $m_{\leq(\mu_1,\mu_2)} := m \circ i_{\leq(\mu_1,\mu_2)}$。根据 $- \star -$ 的定义，我们有一个同态

$$\begin{aligned} R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, C,\leq(\mu_1+\mu_2)}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) &\to R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, C,\leq(\mu_1+\mu_2)}, Rm_{\leq(\mu_1,\mu_2)*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\ &= R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, C}, i_{\leq\mu_1*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell \star i_{\leq\mu_2*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell), \end{aligned}$$

以及一个同态

$$\begin{aligned} &R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, C,\leq\mu_1}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes^{\mathbb{L}}_{R\Gamma([\mathrm{Spd}\, C/L^+_{\mathrm{Spd}\, C} G])} R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, C,\leq\mu_2}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\ &\to R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, C,\leq\mu_1} \times_{[\mathrm{Spd}\, C/L^+_{\mathrm{Spd}\, C} G]} \mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, C,\leq\mu_2}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\ &= R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{(2)}_{G,\mathrm{Spd}\, C,\leq(\mu_1,\mu_2)}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\ &\simeq R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, C,\leq(\mu_1+\mu_2)}, Rm_{\leq(\mu_1,\mu_2)*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\ &= R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, C}, i_{\leq\mu_1*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell \star i_{\leq\mu_2*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \end{aligned} \tag{3.19}$$

其中，第一个映射是将以下引理应用于 $X = Y = \mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, C}, Z = [\mathrm{Spd}\, C/L^+_{\mathrm{Spd}\, C} G]$ 以及 $f, g \colon \mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, C} \to [\mathrm{Spd}\, C/L^+_{\mathrm{Spd}\, C} G]$ 得到的；该映射分别对应于右作用和左作用。

引理 3.13。 对于任意笛卡尔图表

$$\begin{array}{ccc} X \times_Z Y & \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} & X \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow[g]{} & Z \end{array}$$

小 ν-层叠的图表，以及任意 $A \in \mathcal{D}_{\text{ét}}(X, \Lambda)$ 和 $B \in \mathcal{D}_{\text{ét}}(Y, \Lambda)$，存在一个典范同态

$$R\Gamma(X, A) \otimes^{\mathbb{L}}_{R\Gamma(Z,\Lambda)} R\Gamma(Y, B) \to R\Gamma(X \times_Z Y, A \boxtimes B).$$

证明。 这可以通过使用六函子的形式论证来证明。具体而言，我们可以假设 Λ 是一个挠环。存在一个同态

$$\begin{aligned}
&(f \circ \mathrm{pr}_1)^*(Rf_*A \otimes^{\mathbb{L}} Rg_*B) \\
&\cong (f \circ \mathrm{pr}_1)^* Rf_*A \otimes^{\mathbb{L}} (f \circ \mathrm{pr}_1)^* Rg_*B \\
&\cong (f \circ \mathrm{pr}_1)^* Rf_*A \otimes^{\mathbb{L}} (g \circ \mathrm{pr}_2)^* Rg_*B \\
&\cong f^* Rf_*A \boxtimes g^* Rg_*B \\
&\to A \boxtimes B
\end{aligned}$$

并通过取伴随，得到

$$Rf_*A \otimes^{\mathbb{L}} Rg_*B \to R(f \circ \mathrm{pr}_1)_*(A \boxtimes B).$$

因此，如果我们证明 $X = Y = Z$ 的情形下引理成立，那么所需的同态由下式给出

$$\begin{aligned}
R\Gamma(X, A) \otimes^{\mathbb{L}}_{R\Gamma(Z,\Lambda)} R\Gamma(Y, B) &\cong R\Gamma(Z, Rf_*A) \otimes^{\mathbb{L}}_{R\Gamma(Z,\Lambda)} R\Gamma(Z, Rg_*B) \\
&\to R\Gamma(Z, Rf_*A \otimes^{\mathbb{L}} Rg_*B) \\
&\to R\Gamma(X \times_Z Y, A \boxtimes B).
\end{aligned}$$

因此，我们可以假设 $X = Y = Z$。在这种情况下，结论由以下事实得出：作为取值于导出范畴 Λ-模中的层，张量积 $A \otimes^{\mathbb{L}} B$ 与形如 $U \mapsto R\Gamma(U, A) \otimes^{\mathbb{L}}_{R\Gamma(U,\Lambda)} R\Gamma(U, B)$ 的预层的层化相一致。 □

这定义了同态

$$\begin{array}{ccc}
 & & H^*(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, C,\leq\mu_1}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes_{R_G} H^*(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, C,\leq\mu_1}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\
 & & \downarrow \\
H^*(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, C,\leq(\mu_1+\mu_2)}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \longrightarrow & H^*(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, C}, i_{\leq\mu_1 *}\overline{\mathbb{Q}}_\ell \star i_{\leq\mu_2 *}\overline{\mathbb{Q}}_\ell),
\end{array}$$

其中 $R_G := H^*([\mathrm{Spd}\, C/L^+{}_{\mathrm{Spd}\, C} G])$。设

$$m_{\mathbb{T}} \colon \mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W) \times_{\widehat{\mathfrak{t}}^*/W} \mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W) \to \mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W) \tag{3.20}$$

是 $\widehat{\mathfrak{t}}^*/W$ 上的一个向量丛态射，它在纤维上由加法给出。这定义了一个同态

$$m_{\mathbb{T}}^*\colon \mathcal{O}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)} \otimes_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*/W}} \mathcal{O}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}.$$

接下来可以证明如下结论：

引理 3.14。该图表

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)} & \xrightarrow{\quad m_{\mathbb{T}}^* \quad} & \mathcal{O}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)} \otimes_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*/W}} \mathcal{O}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)} \\
\downarrow & & \downarrow \\
 & & H^*(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\operatorname{Spd} C,\leq\mu_1}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes_{R_G} H^*(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\operatorname{Spd} C,\leq\mu_1}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\
 & & \downarrow \\
H^*(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\operatorname{Spd} C,\leq(\mu_1+\mu_2)}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \longrightarrow & H^*(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\operatorname{Spd} C}, i_{\leq\mu_1 *}\overline{\mathbb{Q}}_\ell \star i_{\leq\mu_2 *}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)
\end{array}$$

可交换，其中左侧的竖直映射由命题 *3.9* 给出（再与拉回 $H^*(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\operatorname{Spd} C}, \mathbb{Q}_\ell) \to H^*(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\operatorname{Spd} C,\leq(\mu_1+\mu_2)}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$复合），类似地，右上方的映射由命题 *3.9*、推论 *3.4* 和引理 *3.12* 给出。

证明。用于定义相关同态的所有函子，都是沿小 v-叠之间的映射进行的拉回，或沿真映射进行的推前，例如 $\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\operatorname{Spd} C,\leq\mu} \to [\operatorname{Spd} C/L^+{}_{\operatorname{Spd} C}G]$ 或 $m_{\leq(\mu_1,\mu_2)}$。对于 $\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\operatorname{Spd}\mathcal{O}_C}$, $\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\operatorname{Spd} k}$, $\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{Witt}}_{G,\operatorname{Spec} k}$ 或 $\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{eq}}_{G,\text{谱}\,k}$，也有类似的映射。因此，按照命题 3.1 中证明命题 3.9 时所用的相同论证，利用真基变换以及 [Sch17，命题 27.5]，，该断言可归结为等特征情形。接着，仔细考察 [BF08，定理 1] 的证明即可得到该结论。证明思路如下：

记号滥用地，将 G 记作 G^{spl}，将 T 记作 T^{spl}，依此类推。我们也省略下标 $\operatorname{Spec} k$ 和上标 eq。首先，利用卷积图定义 $-\star-$ 在$D_{\text{ét}}([*/(L^+G \rtimes \mathbb{G}_m \ltimes L^+G)])$ $= D_{\text{ét}}([*/(L^+G \rtimes \mathbb{G}_m)] \times_{[*/\mathbb{G}_m]} [*/(L^+G \rtimes \mathbb{G}_m)])$ 中的卷积积

$$\begin{aligned}
&([*/(L^+G \rtimes \mathbb{G}_m)] \times_{[*/\mathbb{G}_m]} [*/(L^+G \rtimes \mathbb{G}_m)]) \times ([*/(L^+G \rtimes \mathbb{G}_m)] \times_{[*/\mathbb{G}_m]} [*/(L^+G \rtimes \mathbb{G}_m)]) \\
&\xleftarrow{\mathrm{pr}_{12}\times\mathrm{pr}_{23}} [*/(L^+G \rtimes \mathbb{G}_m)] \times_{[*/\mathbb{G}_m]} [*/(L^+G \rtimes \mathbb{G}_m)] \times_{[*/\mathbb{G}_m]} [*/(L^+G \rtimes \mathbb{G}_m)] \\
&\xrightarrow{\mathrm{pr}_{13}} [*/(L^+G \rtimes \mathbb{G}_m)] \times_{[*/\mathbb{G}_m]} [*/(L^+G \rtimes \mathbb{G}_m)]
\end{aligned}$$

然后我们可以证明该图表

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}_{(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)^2\times\mathbb{A}^1} & \xrightarrow{m_1^*} & \mathcal{O}_{(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)^2\times\mathbb{A}^1}\otimes_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*/W\times\mathbb{A}^1}}\mathcal{O}_{(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)^2\times\mathbb{A}^1} \\
\downarrow\cong & & \downarrow \\
H^*_{L^+G\rtimes\mathbb{G}_m\ltimes L^+G}(*,\overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \longrightarrow & H^*_{L^+G\rtimes\mathbb{G}_m\ltimes L^+G}(*,\overline{\mathbb{Q}}_\ell\star\overline{\mathbb{Q}}_\ell)
\end{array}$$

交换，其中 m_1 由以下方式定义

$$\begin{aligned}((\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)^2\times\mathbb{A}^1)\times_{\widehat{\mathfrak{t}}^*/W\times\mathbb{A}^1}((\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)^2\times\mathbb{A}^1)&\xrightarrow{m_1}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)^2\times\mathbb{A}^1,\\ ((x_1,x_2,a),(x_2,x_3,a))&\mapsto(x_1,x_3,a).\end{aligned}$$

映射 m_1 诱导出一个映射

$$m_2\colon (N_{(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)^2\times\mathbb{A}^1}\Delta)\times_{(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)\times\mathbb{A}^1}(N_{(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)^2\times\mathbb{A}^1}\Delta)\to N_{(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)^2\times\mathbb{A}^1}\Delta.$$

由此，我们可以证明如下形式的图表具有交换性

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}_{N_{(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)^2}\Delta} & \xrightarrow{m_2^*} & \mathcal{O}_{N_{(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)^2}\Delta}\otimes_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*/W\times\mathbb{A}^1}}\mathcal{O}_{N_{(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)^2}\Delta} \\
\downarrow\cong & & \downarrow \\
H^*_{\mathbb{G}_m}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\le(\mu_1+\mu_2)},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \longrightarrow & H^*_{\mathbb{G}_m}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_G, i_{\le\mu_1*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell\star i_{\le\mu_2*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell).
\end{array}$$

限制在轨迹 $\hbar=0$上时，映射 m_2 与映射 $m_{\mathbb{T}}$一致。这就证明了该引理。

□

3.3 Weil 作用于 Hecke 栈的上同调环

在本节中，我们确定在 (3.13) 下 Weil 作用如何对应。对于半单单连通群 G，对象 $R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\ \mathrm{Spd}\,C,\ \mathbb{Q}_\ell})$ 具有

如下所示的 $\mathcal{D}\mathrm{Rep}(W_F, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 中对象的结构：在 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-模中，我们有

$$\begin{aligned} R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) &:= R\varprojlim_{\mu} R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C,\leq\mu}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\ &\simeq \varinjlim_{n} \tau^{\leq n} R\varprojlim_{\mu} R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C,\leq\mu}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\ &\simeq \varinjlim_{n} R\varprojlim_{\mu} \tau^{\leq n} R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C,\leq\mu}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\ &\simeq \varinjlim_{n} R\varprojlim_{\mu} ((\tau^{\leq n} R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C,\leq\mu}, \mathbb{Z}_\ell)) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \end{aligned} \tag{3.21}$$

由于 $\mathrm{Div}^1 \cong [\mathrm{Spd}\ C/\underline{W_F}]$（见 [FS21, §IV.7]），$\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\ \mathrm{Spd}\,C}$ 具有 W_F的作用。I_E-作用限制到 $\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\ \mathrm{Spd}\,C,\ \leq\mu}$，并且我们有

$$R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C,\leq\mu}, \Lambda) \in \mathcal{D}(\mathrm{Rep}^{\mathrm{sm}}(I_E, \Lambda))$$

对于挠环 Λ。因此，对象

$$R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C,\leq\mu}, \mathbb{Z}_\ell) = R\varprojlim_{i} R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C,\leq\mu}, \mathbb{Z}/\ell^i)$$

可视为 $\varprojlim \mathcal{D}(\mathrm{Rep}^{\mathrm{sm}}(I_E, \mathbb{Z}_\ell/\ell^i))$ 中的一个对象。由于 $\tau^{\leq n} R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\ \mathrm{Spd}\,C,\ \leq\mu}, \mathbb{Z}_\ell)_i$ 的所有上同调都是 $\mathbb{Z}_\ell$ 上的有限生成模，它在 $\mathbb{Z}_\ell$ 上是完美的。因此，我们有

$$\tau^{\leq n} R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C,\leq\mu}, \mathbb{Z}_\ell) \in \mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(I_E, \mathbb{Z}_\ell)$$

由推论 2.2。因此，对象

$$\tau^{\leq n} R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C,\leq\mu}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = (\tau^{\leq n} R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C,\leq\mu}, \mathbb{Z}_\ell)) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$$

可视为 $\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(I_E, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 中的一个对象。由引理 3.8 和命题 3.9，极限

$$H^i(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \varprojlim_{\mu} H^i(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C,\leq\mu}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

是有限维的，并且由引理 3.8 的证明可知，此极限的过渡映射是满射。因此，

$$\varprojlim_{\mu} H^i(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C,\leq\mu}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq H^i(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C,\leq\mu'}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

对于某个 μ'，且

$$R\varprojlim_{\mu} \tau^{\leq n} R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C,\leq\mu}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq \tau^{\leq n} R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C,\leq\mu'}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

对于某个 μ'。因此，我们可以将后者视为 $\mathcal{D}$表示范畴$^{\mathrm{perf}}(I_E,\ \mathbb{Q}_\ell)$ 中的一个对象；根据 (3.21)， $R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\ \mathrm{Spd}\overline{C}},\ \mathbb{Q}_\ell)$ 是 $\mathcal{D}$表示范畴$(I_E,\ \mathbb{Q}_\ell)$ 中的一个对象。

此外，将 μ 的指标集限制为由 Weil 不变支配余特征组成的共尾集，我们看到上面的每个对象都属于各个范畴的 W_F/I_E-不变量。因此，我们有 $R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\ \mathrm{Spd}\,C},\ \mathbb{Q}_\ell) \in \mathcal{D}\mathrm{Rep}(W_F,\ \mathbb{Q}_\ell)$。通过这些构造，其 i-次上同调

$$H^i(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) := \tau^{\geq i}\tau^{\leq i}R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

具有 $\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(W_F,\ \mathbb{Q}_\ell)^\heartsuit = \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(W_F,\ \mathbb{Q}_\ell)$ 中对象的结构。类似地

$$H^i([\mathrm{Spd}\,C/L^+_{\mathrm{Spd}\,C}G],\overline{\mathbb{Q}}_\ell) = H^i(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},i_{0*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

也具有 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(W_F,\ \mathbb{Q}_\ell)$ 中对象的结构。

我们首先将推论3.5 扩展为包含 Weil作用。

引理3.15。 存在一个 W_F-表示的典范分次同构

$$H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\,C}\mathbb{G}_m}(\mathrm{Spd}\,C,\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \cong \mathrm{Sym}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell(-1)[-2]),$$

其中 (i)表示 i-次 *Tate* 扭曲。

证明。 (1) 首先，我们断言惯性群 $I_F \subset W_F$ 的作用是平凡的。由于$L^+{}_{\mathrm{Spd}\,\mathcal{O}_C}\mathbb{G}_m$定义在 Spd $\mathcal{O}_{\breve{F}}$ 上，且 Spd $\mathcal{O}_C \to$Spd $\mathcal{O}_{\breve{F}}$经由栈 $[(\mathrm{Spd}\ \mathcal{O}_C)/I_F]$ 分解， I_F在 [Spd $C/L^+{}_{\mathrm{Spd}\,C}\mathbb{G}_m$] 上的作用可延拓为其在 [Spd $\mathcal{O}_C/L^+{}_{\mathrm{Spd}\,\mathcal{O}_C}\mathbb{G}_m$]上的作用。将其限制后得到 [Spd $k/L^+_k\mathbb{G}_m$]的作用，而该作用是平凡的。这些作用与同构相容。

$$H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\,k}\mathbb{G}_m}(\mathrm{Spd}\,k) \xleftarrow{\sim} H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\,\mathcal{O}_C}\mathbb{G}_m}(\mathrm{Spd}\,\mathcal{O}_C) \xrightarrow{\sim} H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\,C}\mathbb{G}_m}(\mathrm{Spd}\,C)$$

在推论3.5的证明中，且 $H^*_{L^+{}_{\mathrm{Spd}\,k}\mathbb{G}_m}$(Spd k)上的作用是平凡的。这就证明了该断言。

(2) 我们证明 Frobenius提升 $\sigma \in W_F$的作用为 $x \mapsto q^{-1}x$，其中 x如推论3.5所述。利用 Spd $\mathcal{O}_{\breve{F}}$ 上任意局部常值复形都是常值复形这一事实，并采用与命题 3.1和推论 3.5的证明相同的论证，我们可以证明拉回同态

$$H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\,\mathcal{O}_{\breve{F}}}\mathbb{G}}(\mathrm{Spd}\,\mathcal{O}_{\breve{F}}) \to H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\,k}\mathbb{G}}(\mathrm{Spd}\,k)$$

以及复合

$$H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\,\mathcal{O}_{\breve{F}}}\mathbb{G}}(\mathrm{Spd}\,\mathcal{O}_{\breve{F}}) \to H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\,\breve{F}}\mathbb{G}}(\mathrm{Spd}\,\breve{F}) \to H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\,C}\mathbb{G}}(\mathrm{Spd}\,C)$$

是同构。 $\sigma \in W_F$对 $[\mathrm{Spd}\, C/L^+{}_{\mathrm{Spd}\, C}\mathbb{G}]$的作用下降为对 $[\mathrm{Spd}\ \breve{F}/L^+{}_{\mathrm{Spd}\ \breve{F}}\mathbb{G}]$的作用（因为 $\mathrm{Spd}\ C \to \mathrm{Div}^1$通过 $\mathrm{Spd}\ \breve{F}$分解）。回顾等式 $\mathrm{Spd}\ \breve{F} = \mathrm{Spd}\ F \times_{\mathrm{Spd}\, k_F} \mathrm{Spd}\ k$以及 $\mathrm{Div}^1_{k_F} = \mathrm{Spd}\ F/\mathrm{Frob}^{\mathrm{Spd}\, F}$，可知，在如下同一化下， σ对 $[\mathrm{Spd}\ \breve{F}/L^+{}_{\mathrm{Spd}\ \breve{F}}\mathbb{G}]$的作用是 $\mathrm{id} \times \mathrm{Frob}_{\mathrm{Spd}\, F} \times \mathrm{id}$

$$[\mathrm{Spd}\, \breve{F}/L^+_{\mathrm{Spd}\, \breve{F}}\mathbb{G}_m] \cong [\mathrm{Div}^1_{k_F}/L^+_{\mathrm{Div}^1_{k_F}}\mathbb{G}_m] \times_{\mathrm{Div}^1_{k_F}} \mathrm{Spd}\, F \times_{\mathrm{Spd}\, k_F} \mathrm{Spd}\, k. \tag{3.22}$$

然而，我们有如下引理，它可由定义直接推出：

引理 3.16. 对于 F 上的概形 Z， $L^+{}_{\mathrm{Div}^1_{k_F}}Z$ 和 $L_{\mathrm{Div}^1_{k_F}}Z$ 的绝对 *Frobenius* 均为恒等映射。

证明. 对于 k_F 上的完美空间 S，按定义， $L^+{}_{\mathrm{Div}^1_{k_F}}Z$（分别为 $L_{\mathrm{Div}^1_{k_F}}Z$）的 S-值点集，是由 Fargues–Fontaine曲线 X_S 上的卡蒂埃除子 D 和 $Z(B^+{}_{\mathrm{Div}^1}(S))$（分别为 $Z(B_{\mathrm{Div}^1}(S))$）中的一个元素组成的有序对的集合。对于完美空间之间的态射 $S \to T$，值点集上的诱导映射由除子和元素的拉回给出。然而，绝对 Frobenius $S \to S$ 的拉回不会改变这些数据，因为 X_S 已经是按 Frobenius 取商所得。

□

因此， σ 在 (3.22) 上的作用由相对于 $\mathrm{Spd}\, k$ 的相对 Frobenius 给出。此作用延拓为 k 上的 $[\mathrm{Spd}\, \mathcal{O}_{\breve{F}}/L^+{}_{\mathrm{Spd}\, \mathcal{O}_{\breve{F}}}\mathbb{G}_m]$ 上的相对 Frobenius，并限制为 k 上的 $[\mathrm{Spd}\, k/L^+{}_{\mathrm{Spd}\, k}\mathbb{G}_m]$ 的相对 Frobenius。只需证明 $[\mathrm{Spd}\, k/L^+{}_{\mathrm{Spd}\, k}\mathbb{G}_m]$ 上的相对 Frobenius 诱导出形式为 $x \mapsto q^{-1}x$ 的上同调作用。将问题化归到概形情形后，这一点众所周知。

引理由 (1) 和 (2) 得出。 □

这使我们能够将推论 3.6 加强为韦伊等变形式：

推论 3.17. 存在一个 W_F-表示的典范分次同构

$$H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\, C}T}(\mathrm{Spd}\, C, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \cong \mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{t}}(-1)[-2]),$$

其中 $\widehat{\mathfrak{t}}$ 具有 W_F-作用 作用$^{\mathrm{geom}}_{\widehat{\mathfrak{t}}}$ （定义见 *§2.3*）。

证明。对于 $\alpha \in \mathbb{X}^*(T_F)$，令 $\alpha^w = w^{-1} \circ \alpha \circ w$，即 α^w 是使下列交换图成立的特征：

$$\begin{array}{ccc} T_{\overline{F}} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{G}_{m,\overline{F}} \\ {\scriptstyle w}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle w} \\ T_{\overline{F}} & \xrightarrow{\alpha^w} & \mathbb{G}_{m,\overline{F}}. \end{array}$$

这给出了交换图

$$\begin{array}{ccc} H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\, C}\mathbb{G}_m}(\mathrm{Spd}\, C) & \xrightarrow{\alpha^*} & H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\, C}T}(\mathrm{Spd}\, C) \\ {\scriptstyle w^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle w^*} \\ H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\, C}\mathbb{G}_m}(\mathrm{Spd}\, C) & \xrightarrow{(\alpha^w)^*} & H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\, C}T}(\mathrm{Spd}\, C). \end{array}$$

因此，根据推论 3.6 之后的段落，当我们将 α 在映射 $\mathbb{X}^*(T^{\mathrm{spl}}) \cong \mathbb{X}_*(\widehat{T})_{\mathrm{Lie}} \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_\ell, \widehat{\mathfrak{t}}) = \widehat{\mathfrak{t}}$ 下的像记为 $d\alpha(1)$ 时，我们有

$$w^*(d\alpha(1)) = w^*(\alpha^*(x)) = \alpha^{w,*}(w^*(x)) \overset{\text{Lemma 3.15}}{=} \alpha^{w,*}(q^{-\deg w}x) = q^{-\deg w} d\alpha^w(1),$$

其中 $\deg\colon W_F \to \mathbb{Z}$ 是投影。这就证明了该断言，因为 $d\alpha(1) \mapsto d\alpha^w(1)\widehat{\ }$ 给出了通常的 W_F-作用于 $\mathfrak{t}$。 □

对于 $w \in W_F$，映射 $\mathrm{act}^{\mathrm{geom}}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*}(w)\colon \widehat{\mathfrak{t}}^* \to \widehat{\mathfrak{t}}^*$（定义于 §2.3）诱导出映射 $f^w\colon \widehat{\mathfrak{t}}^*/W \to \widehat{\mathfrak{t}}^*/W$。令 $q^{\deg w}\colon \widehat{\mathfrak{t}}^*/W \to \widehat{\mathfrak{t}}^*/W$ 为由 $\widehat{\mathfrak{t}}^*$ 上乘以 $q^{\deg w}$ 所诱导的映射。映射 $f^w \circ q^{\deg w}$ 诱导出一个同态

$$a_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*/W}}(w)\colon \mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*/W} \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*/W}.$$

令 $q^{\deg w}{}_{\mathrm{fib}}\colon \mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W) \to \mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)$ 为在每个纤维上应用 $q^{\deg w}$、在底空间上为恒等态射的映射。导数 $d(f^w \circ q^{\deg w})\colon \mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W) \to \mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)$ 与 $(q^{\deg w}{}_{\mathrm{fib}})^{-1}$ 复合后诱导出一个同态

$$a_{\mathcal{O}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}}(w)\colon \mathcal{O}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)} \tag{3.23}$$

现在我们可以陈述本小节的主定理。

定理 3.18. 假设 G 是半单且单连通的。当我们赋予 $\mathcal{O}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}$ 由 $a_{\mathcal{O}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}}$ 定义的 W_F-作用时，同构

$$H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\, C}G}(\mathrm{Gr}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}$$

在命题 *3.9* 中是韦伊等变的。

证明。类似于 α^w 的定义，将 $\lambda^w = w^{-1} \circ \lambda \circ w$ 置于 $\lambda \in \mathbb{X}_*(T_F)$ 中。上同调

$$H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\, C}T}\left(\coprod_{\lambda\in\mathbb{X}_*(T_{\overline{F}})}[\lambda],\overline{\mathbb{Q}}_\ell\right)\cong\prod_{\lambda\in\mathbb{X}_*(T_{\overline{F}})}H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\, C}T}([\lambda],\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

具有 W_F 的作用，而 $w \in W_F$ 的作用分解为

$$H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\, C}T}([\lambda],\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\, C}T}([\lambda^{w^{-1}}],\overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

由推论 3.6，这诱导出一个同态

$$\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\widehat{\mathfrak{t}}]\to\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\widehat{\mathfrak{t}}],$$

并且由推论 3.17，这由 w 在 $\widehat{\mathfrak{t}}$ 上的通常作用与 $\widehat{\mathfrak{t}}$ 的元素乘以 $q^{-\deg w}$ 所组成的复合诱导得到。将这些结果结合起来，我们便得到 W_F 在 $\prod_{\lambda\in\mathbb{X}_*(T_F)}\mathbb{Q}_\ell[\widehat{\mathfrak{t}}]$ 上作用的一个显式描述，使得同构 (3.14) 是 W_F-等变的。我们将此作用记为 ${}^a\prod\mathbb{Q}_\ell[\widehat{\mathfrak{t}}]$。

经过简单计算，我们可以证明，同态 (3.16) 关于 ${}^a\mathcal{O}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}$ 和 ${}^a\prod\mathbb{Q}_\ell[\widehat{\mathfrak{t}}]$ 是 W_F-等变的。于是由命题 3.10 得出该定理。

□

通过类似的论证，我们得到如下结果：

定理 3.19. 当我们赋予 $\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*/W}$ 由 ${}^a\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*/W}$ 定义的 W_F-作用时，同构

$$H^*_{L^+_{\mathrm{Spd}\, C}G}(\mathrm{Spd}\, C,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\cong\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*/W}$$

推论 *3.4* 中的同构是韦伊等变的。

证明. 这由推论 3.17 和引理 3.11 得出，因为典范映射$\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*/W}\to\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*}=\mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{t}})$关于$\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*/W}$上的 W_F-作用 ${}^a\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*/W}$ 以及推论 3.17 中所述的 $\mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{t}})$ 上的韦伊作用是等变的。

□

3.4 Hecke叠的上链代数

我们为 $\mathcal{O}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}$ 配备一个分次，使得 $\mathfrak{t}^*$ 在基方向上的坐标具有度 1，而在纤维方向上的坐标具有 0 次。应用剪切操作（即 [AG15, §A.2] 或 [BZSV24, §6]中定义的分次平移），我们得到一个对象

$$\mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}.$$

这是一个形式微分分次代数，使得 $\mathfrak{t}^*$ 在基方向上的坐标具有上同调次数 2，而在纤维方向上的坐标具有上同调次数 0。为 $\mathcal{O}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}$ 配备一个 W_F-作用 ${}^a\mathcal{O}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}$，我们将 $\mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}$ 视为$\mathcal{D}$表示范畴$(W_F, \mathbb{Q}_\ell)$中的一个对象。类似地，我们定义 $\mathcal{O}^{/\!/}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*/W} \in \mathcal{D}$ 表示范畴$(\overline{W_F}, \mathbb{Q}_\ell)$，使得 $\mathfrak{t}^*$ 的坐标具有上同调次数 2。

在本节中，我们证明，当 G 是半单且单连通时，微分分次代数 $R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C}, \mathbb{Q}_\ell)$ 与形式微分分次代数 $\mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}$ 规范同构。首先，我们证明 $R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C}, \mathbb{Q}_\ell)$ 上的 W_F-作用经由 W_F/I_E 分解。令

$$\mathcal{D}\mathrm{Rep}(W_F/I_E, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) := (\mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell})^{W_F/I_E}.$$

根据 $(-)^{W_F/I_E}$ 的定义，图表

$$\begin{array}{ccc} W_F/I_E & \longleftarrow & W_F \\ \uparrow & & \uparrow \\ 1 & \longleftarrow & I_E \end{array}$$

群的图表诱导出一个笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}\mathrm{Rep}(W_F/I_E, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \longrightarrow & \mathcal{D}\mathrm{Rep}(W_F, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} & \longrightarrow & \mathcal{D}\mathrm{Rep}(I_E, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \end{array}$$

∞-范畴的。

引理 3.20。 $R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C}, \mathbb{Q}_\ell) \in \mathrm{CAlg}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(\overline{W_F}, \mathbb{Q}_\ell))$ 上的 I_E-作用是平凡的。也就是说，存在本质唯一的提升

$$R'_{\mathcal{H}\mathrm{ck}} \in \mathrm{CAlg}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(W_F/I_E, \overline{\mathbb{Q}}_\ell))$$

的 $R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \in \mathrm{CAlg}(\mathcal{D}$表示范畴$(W_F, \overline{\mathbb{Q}}_\ell))$。

证明。 由于 $G_{\breve{E}}$ 是分裂的，而且我们只考虑 I_E-作用，因此可以假设 $G = G_F^{\mathrm{spl}}$。我们不太严谨地将 G 记作 G^{spl}。由于 $\mathrm{Spd}\,\mathcal{O}_C \to \mathrm{Spd}\,\mathcal{O}_{\breve{E}}$ 可经由栈 $[(\mathrm{Spd}\ \mathcal{O}_C)/I_E]$分解， I_E在 $\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C}$上的作用可扩张为 I_E-作用 $\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,\mathcal{O}_C}$，并限制为平凡的 I_E-作用 $\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k}$。因此，由命题 3.1 可得

$$R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \in \mathrm{CAlg}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(I_E))$$

且 I_E 对 $R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\ \mathrm{Spd}\,k,\ \mathbb{Q}_\ell})$ 的作用是平凡的。 □

由此，我们可以通过以下纯性论证证明， $R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\,\mathrm{Spd}\,C},\ \overline{\mathbb{Q}}_\ell)\ \in \mathrm{CAlg}(\mathcal{D}$表示范畴$(W_F,\ \overline{\mathbb{Q}}_\ell))$ 同构于 $\mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}\ (\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}$：

命题 3.21. 假设 G是半单且单连通的。存在一个典范等价

$$R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\simeq\mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}$$

在 $\mathrm{CAlg}(\mathcal{D}$表示范畴$(W_F,\ \overline{\mathbb{Q}}_\ell))$。

证明。 只需证明存在一个等价 $R'_{\mathcal{H}\mathrm{ck}}\simeq\mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}$，它属于 $\mathrm{CAlg}(\mathcal{D}$表示范畴$(W_F/I_E,\ \overline{\mathbb{Q}}_\ell))$。由定理 3.18， $\bigoplus_i H^i(R'_{\mathcal{H}\mathrm{ck}})$ 与 $\mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}$ 之间存在一个典范同构。令 $H^i=H^i(\mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)})$。注意，当 i 为奇数时， $H^i=0$；并且 H^i 是 Frobenius 权重为 i的纯对象。若对象 $V\in$ 表示范畴$^{\mathrm{f.d.}}(W_F/I_E,\ \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 是权重为 $w\neq0$ 的纯对象，则群上同调消失:

$$H^j(W_F/I_E,V)=0 \tag{3.24}$$

对于任意 j。由此，我们有

$$\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{D}\mathrm{Rep}(W_F/I_E,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)}\left(H^i[-i],\bigoplus_{i'<i}H^{i'}[-i']\right)=0$$

对于任意 i 和 j。因此，经过归纳可知，$\tau_{\leq i}R'_{\mathcal{H}\mathrm{ck}}$与 $\bigoplus_{i'\leq i}H^{i'}[-i']$ 在 $\mathcal{D}$表示范畴 $^{\mathrm{perf}}(W_F/I_E))$ 中的同构空间非空:

$$\mathrm{Isom}_{\mathcal{D}\mathrm{Rep}(W_F/I_E,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)}\left(\tau_{\leq i}R'_{\mathcal{H}\mathrm{ck}},\bigoplus_{i'\leq i}H^{i'}[-i']\right)\neq\varnothing, \tag{3.25}$$

其中， $\tau_{\leq i}$ 和 $\tau_{\geq i}$ 是关于标准 t结构的截断函子。由于 $\widehat{\mathfrak{t}}^*/W$ 同构于一个仿射空间，因此存在如下形式的同构

$$\mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}\cong\mathrm{Sym}\left(\bigoplus_{i=1}^r V_i(-d_i)[-2d_i]\right)$$

对于某个权为 0 的纯 $V_i\in$表示范畴$^{\mathrm{f.d.}}(W_F/I_E)$ 以及 $0<d_1<\cdots<d_r\in\mathbb{Z}$。令 f 为复合

$$V_i(-d_i)[-2d_i]\subset H^{2d_i}[-2d_i]\cong H^{2d_i}(R'_{\mathcal{H}\mathrm{ck}})[-2d_i].$$

这定义了 $Map_{\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}\ (W_F/I_E))}(V_i(-d_i)[-2d_i],\ \tau_{\geq 2d_i}\tau_{\leq 2d_i}R'_{\mathcal{H}\mathrm{ck}})$。 此外，典范映射

$$\begin{aligned}&Map_{\mathcal{D}\mathrm{Rep}(W_F/I_E,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)}(V_i(-d_i)[-2d_i],\tau_{\leq 2d_i}R'_{\mathcal{H}\mathrm{ck}})\\&\to Map_{\mathcal{D}\mathrm{Rep}(W_F/I_E,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)}(V_i(-d_i)[-2d_i],\tau_{\geq 2d_i}\tau_{\leq 2d_i}R'_{\mathcal{H}\mathrm{ck}})\end{aligned}$$

是同伦等价，因为这些纤维等价于

$$Map_{\mathcal{D}\mathrm{Rep}(W_F/I_E,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)}\left(V_i(-d_i)[-2d_i],\bigoplus_{i'<2d_i}H^{i'}[-i']\right),$$

根据（3.24），该空间是可缩的。因此，f 有唯一的提升 $\widetilde{f}$，位于

$$Map_{\mathcal{D}\mathrm{Rep}(W_F/I_E,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)}(V_i(-d_i)[-2d_i],\tau_{\leq d_i}R'_{\mathcal{H}\mathrm{ck}})$$

至多相差可缩歧义。因此我们得到一个映射

$$V_i(-d_i)[-2d_i]\xrightarrow{\widetilde{f}}\tau_{\leq d_i}R'_{\mathcal{H}\mathrm{ck}}\to R'_{\mathcal{H}\mathrm{ck}}$$

在 $\mathcal{D}\mathrm{Rep}(W_F/I_E,\ \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ 中。这定义了一个映射

$$\mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}=\mathrm{Sym}\left(\bigoplus_{i=1}^{r}V_i(-d_i)[-2d_i]\right)\to R'_{\mathcal{H}\mathrm{ck}}$$

在 $\mathcal{D}\mathrm{Rep}(W_F/I_E,\overline{\ }\ \mathbb{Q}_\ell)$ 中。注意，根据 [Lur16，构造 3.1.3.9，例 3.1.3.14]，导出意义下的对称代数 $\mathrm{Sym}(V)$ 具有形式 $\bigoplus_n\mathrm{Sym}^n(V)$，其中 $\mathrm{Sym}^n(V)$ 是由以 $N(B\Sigma_n)$ 为指标的图表取同伦余极限得到的；该图表将对象映至 $V^{\otimes n}$，并通过置换各因子来作用。（这里，$N(B\Sigma_n)$ 是群胚 $B\Sigma_n$ 的神经；该群胚只有一个对象，其自同构群为对称群 Σ_n。）由于有限群在 $\mathbb{Q}_\ell$ 上的群同调在非零度处消失，这与视为形式微分分次代数的经典对称代数一致。因此，根据构造，上述同态在它们的上同调上诱导同构，故它是一个等价。

□

用同样的论证，我们可以证明以下结果：

命题 3.22。存在一个典范等价

$$R\Gamma([\mathrm{Spd}\,C/L^+_{\mathrm{Spd}\,C}G],\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\simeq\mathcal{O}^{/\!/}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*/W}$$

在 $\mathrm{CAlg}(\mathcal{D}$表示范畴$(W_F^{\overline{\ }},\mathbb{Q}_\ell))$。

4 Spd C 上的导出 Satake 等价

本节讨论 $\mathrm{Spd}\,C$ 上的导出 Satake 等价 (1.2)。我们有以下三种证明方法：

(1) 只需将等特征下的导出 Satake 等价与命题 3.1 中的等价复合即可。这是 [Ban24] 采用的方法。

这种方法很简单，但与 W_F-作用的关系并不清楚。

(2) 假设 G 是半单且单连通的（因为一般情形可由此推出），并构造一个全忠实函子

$$\widetilde{S}_{qc}\colon \mathcal{O}^{/\!/}_{\widehat{\mathfrak{g}}^*}\text{-mod}^{fr}(\mathcal{D}(\mathrm{Rep}(\widehat{G},\overline{\mathbb{Q}}_\ell))) \to \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

满足某些条件，该函子通过利用等特征下一个类似的函子构造而成，见 [BF08，定理 4]和命题 3.1。然后，我们可以用与 [BF08，第 6 节6] 相同的论证证明所需等价。

这种方法可以清楚地揭示与 W_F-作用的关系，但下面的方法 (3) 更简单。

(3) 利用 (1.2) 两边都由半单对象经扩张生成这一事实，并通过一个与 $\widetilde{\ }$ 平行的论证直接定义所需等价 (1.2)，其中用到的论证与 S_{qc} 的定义平行。更准确地说，具体如下：在方法 (2) 中构造$\widetilde{\ }$ 的过程中，我们使用了由半单对象组成的全子范畴，例如

$$\mathcal{O}^{/\!/}_{\widehat{\mathfrak{g}}^*}\text{-mod}^{fr}(\mathcal{D}(\mathrm{Rep}(\widehat{G},\overline{\mathbb{Q}}_\ell))) \subset \mathcal{O}^{/\!/}_{\widehat{\mathfrak{g}}^*}\text{-mod}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{D}(\mathrm{Rep}(\widehat{G},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)))$$

或 $\mathcal{IC}\subset\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\ \mathrm{Spd}\,C,\ \overline{\mathbb{Q}}_\ell})$（稍后定义）。然而，由于这些子范畴在扩张下生成整个范畴，方法 (2) 中出现的命题可以推广到整个范畴。这使我们能够直接构造$\widetilde{\ }$等价 (1.2)，类似于 S_{qc} 的定义。

这种方法可应用于等特征情形，并以更简单的论证替代 Bezrukavnikov–Finkelberg 的 BF08, §6.5, §6.6] 中的论证。

我们只使用方法 (3)。根据构造，我们可以很容易地证明，通过 (1) 和 (3) 得到的等价是一致的。方法 (3) 的步骤如下：在 §4.2.1 中，假设 G的半单性和单连通性，我们将首先定义一个函子

$$R\Gamma\colon \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to \mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}\text{-mod}$$

利用Hecke叠的上同调。我们还将定义一个纯代数函子，称为Kostant 函子

$$\kappa\colon \mathrm{Coh}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{/\!/} \to \mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}\text{-mod}.$$

然后我们将证明 $R\Gamma$ 与 κ 是全忠实的，并且具有相同的本质像。这蕴含所需等价 $\mathcal{S}^{der}_{\mathrm{Spd}\,C^\diamond}$。在§4.2.2中，我们将证明 $R\Gamma$ 与 κ 具有幺半结构，因而 $\mathcal{S}^{der}_{\mathrm{Spd}\,C}$亦然。在§4.2.3中，我们将处理与非导出 Satake 等价的相容性。在§4.3中，我们将证明环面情形的所需等价，并在§4.4中对一般的 G证明之，方法是利用从一个环面与一个半单单连通群的乘积到 G 的中心同源。

4.1 非导出 Satake 函子

$\mathrm{Spd}\,C$ 上的（非导出）几何 Satake 等价 (2.13) 定义了一个幺半函子

$$\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

根据 [BCKW25，推论 7.4，12],它可典范地扩张为一个幺半函子

$$\mathcal{S}_{\mathrm{Spd}\,C}:=\mathcal{S}_{G,\mathrm{Spd}\,C}\colon\mathcal{D}^b(\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G},\overline{\mathbb{Q}}_\ell))\to\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

的幺半稳定 ∞-范畴。令

$$\mathcal{IC}\subset\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

表示 $\mathcal{S}_{\mathrm{Spd}\,C}$ 的本质像。这是由形如 $\bigoplus_{i=1}^{n}A_i[d_i]$ 的对象n构成的全子范畴，其中 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$、 $d_i\in\mathbb{Z}$，且 $A_i\in\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\,\mathrm{Spd}\,C},\,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$。 —

Lemma 4.1. 范畴 $\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\,\mathrm{Spd}\,C},\mathbb{Q}_\ell)$ 由 $\overline{\mathcal{IC}}$ 在扩张下生成。

证明。 只需证明， $\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G、\,\mathrm{Spd}\,C、}\,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 可由 $\overline{\mathrm{Sat}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G、\,\mathrm{Spd}\,C、}\,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 中的对象在扩张和移位下生成。根据引理 3.2，只需证明$\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{Witt}}_{G、\,\mathrm{Spec}\,k、}\,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 可由反常层在扩张和移位下生成。这由引理 2.15 得出。

□

4.2 半单且单连通情形

4.2.1 导出 Satake 等价的构造

对于任意 $\mathcal{F}\in\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\,\mathrm{Spd}\,C,}\,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$，上同调 $R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\,\mathrm{Spd}\,C,}\,\mathcal{F})$ 根据命题 3.21 是微分分次代数 $\mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}}(\mathfrak{t}^*/W)$ 上的微分分次模。事实上，同一命题将其提升为一个函子

$$R\Gamma\colon\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to\mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\mathfrak{t}^*/W)}\text{-mod},\tag{4.1}$$

其目标范畴是对 $\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)$ 上相干层的导出范畴应用剪切操作得到的。

引理 4.2. 函子 $R\Gamma$ 是全忠实的。

证明。 由引理 4.1，只需证明它在 $\mathcal{IC}$上是全忠实的。一个类似的函子

$$D^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{eq}}_{G,\mathrm{Spec}\,k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to\mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}\text{-mod}$$

在 [BF08]中定理 4 前的段落里定义。根据构造，交换图

$$\begin{array}{ccc} D^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow{R\Gamma} & \mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}\text{-mod} \\ \downarrow{\scriptstyle (3.1)} & & \| \\ D^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{eq}}_{G,\mathrm{Spec}\,k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \longrightarrow & \mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}\text{-mod} \end{array} \tag{4.2}$$

自然交换。因此，所要证明的结论归结为等特征的情形，这已在 [BF08，引理 13]中得到证明。 □

令 $\mathrm{Coh}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{fr}$ 表示 $*$-拉回函子的本质像

$$fr\colon \mathcal{D}^b(\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}\cdot}(\widehat{G}))=\mathrm{Coh}([\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{Q}}_\ell/\widehat{G}])\to\mathrm{Coh}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}]).$$

由于 $\mathrm{Coh}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])\simeq\mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{g}})\text{-模}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{D}(\mathrm{Rep}(\widehat{G})))$，容易证明以下引理：

引理 4.3. 范畴 $\mathrm{Coh}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])$ 由$\mathrm{Coh}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{fr}$ 通过扩张生成。

在 [BF08, §2.6], 中，作者定义了 Kostant 函子

$$\kappa\colon \mathrm{Coh}^{\mathbb{G}_m}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{\heartsuit}\to\mathrm{Coh}^{\mathbb{G}_m}(\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W))^{\heartsuit}.$$

我们将在引理 4.9 之后的段落中回顾其定义。该定义推广到

$$\kappa\colon \mathrm{QCoh}^{\mathbb{G}_m}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{\heartsuit}\to\mathrm{QCoh}^{\mathbb{G}_m}(\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W))^{\heartsuit}.$$

由于存在自然等价

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\mathrm{QCoh}^{\mathbb{G}_m}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{\heartsuit})&\simeq\mathrm{QCoh}^{\mathbb{G}_m}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])\\ \mathcal{D}(\mathrm{QCoh}^{\mathbb{G}_m}(\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W))^{\heartsuit})&\simeq\mathrm{QCoh}^{\mathbb{G}_m}(\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W))\end{aligned}$$

根据 [GR17，命题 I.3.2.4.3，注释 I.3.2.4.4], ，它诱导出一个函子

$$\kappa\colon \mathrm{QCoh}^{\mathbb{G}_m}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}]) \to \mathrm{QCoh}^{\mathbb{G}_m}(\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)).$$

利用等变化与去等变化之间的等价（例如 [AG15] 中关于群 $\mathbb{G}_m$ 的 (A.2) 和 (A.3)），我们得到

$$\kappa\colon \mathrm{QCoh}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}]) \to \mathrm{QCoh}(\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W))$$

并应用 [AG15, §A.2]，中定义的剪切算子，我们还得到

$$\kappa^{/\!/}\colon \mathrm{Coh}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{/\!/} \to \mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}\text{-mod}.$$

事实上，展开 [BF08, 引理4], 中所断言的“全嵌入”的含义可知，其限制

$$\kappa^{/\!/}|_{\mathrm{Coh}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{/\!/,fr}}\colon \mathrm{Coh}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{/\!/,fr} \to \mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}\text{-mod}$$

是全忠实的。由于 $\mathrm{Coh}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{/\!/}$ 由 $\mathrm{Coh}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{/\!/,\,fr}$ 在扩张下生成，我们得到以下引理:

引理 4.4。

$$\kappa^{/\!/}\colon \mathrm{Coh}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{/\!/} \to \mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}\text{-mod}$$

是全忠实的。

我们还有以下引理:

引理 4.5. $R\Gamma\colon \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C}, \mathbb{Q}_\ell) \to \mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}$-模 的本质像与 $\kappa^{/\!/}\colon \mathrm{Coh}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{/\!/} \to \mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}$-模 的本质像相同。

证明。 由图表 (4.2)，问题可归结为等特征情形。根据 [BF08，定理 4], ， $R\Gamma|_{\mathcal{IC}}$ 与 $\kappa^{/\!/}|_{\mathrm{Coh}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{/\!/,fr}}$ 的本质像相同。由于两个函子都保持扩张，结论由引理 4.1 和引理 4.3 得出。 □

于是我们有以下命题:

命题 4.6。 存在一个本质上唯一的等价

$$\mathcal{S}^{der}_{\mathrm{Spd}\,C} := \mathcal{S}^{der}_{G,\mathrm{Spd}\,C}\colon \mathrm{Coh}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{/\!/} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell),$$

使得存在自然同构

$$S_{\mathrm{Spd}\,C} \simeq \mathcal{S}^{der}_{\mathrm{Spd}\,C} \circ fr|_{\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G})}\ :\ \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G}) \to \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell), \tag{4.3}$$

$$\kappa^{/\!/} \simeq R\Gamma \circ \mathcal{S}^{der}_{\mathrm{Spd}\,C}\ :\ \mathrm{Coh}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{/\!/} \to \mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}\text{-mod}. \tag{4.4}$$

证明。 将问题归约到等特征情形，并利用 [BF08，定理 4], ，我们可以证明存在一个本质唯一的全忠实函子

$$\widetilde{S}_{qc}\colon \mathrm{Coh}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{/\!/,fr} \to \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell),$$

使得 $\mathcal{S}_{\mathrm{Spd}\,C} \simeq \widetilde{S}_{qc} \circ fr$ 和 $\kappa^{/\!/}|_{\mathrm{Coh}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{/\!/,\ fr}} \simeq R\Gamma \circ \widetilde{S}_{qc}$ 成立。这里，在化归到等特征情形时，我们使用引理 3.2 来确保 $\mathcal{S}_{\mathrm{Spd}\,C}$ 对应于非导出几何 Satake 等价所诱导的函子。

由引理 4.2、引理 4.4 和引理 4.5，这可以本质上唯一地延拓为所需等价 $\mathcal{S}^{der}_{\mathrm{Spd}\,C}$。 □

注 4.7。 将 $\mathrm{Spd}\,C$ 替换为 $\mathrm{Spd}\ k$时，同样的证明仍然适用。我们将所得函子记为 $\mathcal{S}^{der}_{\mathrm{Spd}\,k}$

我们想证明这个等价 $\mathcal{S}^{der}_{\mathrm{Spd}\,C}$ 是幺半的。

4.2.2 导出 Satake 的幺半结构

在本小节中，我们为 $R\Gamma$、 κ和 $\mathcal{S}^{der}_{\mathrm{Spd}\,C}$赋予幺半结构。 $R\Gamma$ 和 κ 上的幺半结构的定义与 BF08 的 §3.5] 和 BF08 的 §4.6]类似。不过，他们只在反常层的全子范畴上定义这些结构，而我们则在整个范畴上定义。

∞-范畴

$$\mathrm{Coh}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{/\!/} = \mathcal{O}^{/\!/}_{\widehat{\mathfrak{g}}}\text{-}\mathrm{mod}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{D}(\mathrm{Rep}(\widehat{G})))$$

借助张量积 $-\otimes_{\mathcal{O}^{/\!/}_{\widehat{\mathfrak{g}}^*}}-$ 成为幺半范畴。考虑图表

$$\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W) \times \mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W) \xleftarrow{p_{\mathbb{T}}} \mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W) \times_{\widehat{\mathfrak{t}}^*/W} \mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W) \xrightarrow{m_{\mathbb{T}}} \mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W),$$

其中 $p_{\mathbb{T}}$ 是自然闭浸入， $m_{\mathbb{T}}$ 是 (3.20) 中定义的纤维逐点加法。 ∞-范畴拟凝聚层($\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)$) 借助乘积成为幺半范畴

$$-\star- := Rm_{\mathbb{T}*}Lp^*_{\mathbb{T}}(-\boxtimes-),$$

因而 $\mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}$-模亦然。类似地，范畴拟凝聚层$^{\mathbb{G}_m}(\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G})^\heartsuit$与拟凝聚层$^{\mathbb{G}_m}(\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W))^\heartsuit$在非导出意义下是幺半的。

与（3.19）的构造类似，对于 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C})$，存在一个自然同态

$$R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C}, \mathcal{F}_1) \otimes_{R\Gamma([\mathrm{Spd}\,C/L^+_{\mathrm{Spd}\,C}G],\overline{\mathbb{Q}}_\ell)} R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C}, \mathcal{F}_2) \to R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C}, \mathcal{F}_1 \star \mathcal{F}_2) \quad (4.5)$$

微分分次模的同态；根据 [BF08, §3.5], 中的论证，当 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathcal{IC}$ 时，它是一个等价，因此由引理 4.1 可知，对于任意 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ 也成立。这与引理 3.12、命题 3.21、命题 3.22 和引理 3.14 一起，推出了以下引理：

引理 4.8. 函子上存在一个幺半结构

$$R\Gamma\colon \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C}) \to \mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}\text{-mod}.$$

另一方面，我们可以证明 κ 的幺半性：

引理 4.9. 存在一个幺半结构于

$$\kappa\colon (\mathrm{QCoh}^{\mathbb{G}_m}(\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G})^{\heartsuit}, - \otimes_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{g}}^*}} -) \to (\mathrm{QCoh}^{\mathbb{G}_m}(\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W))^{\heartsuit}, - \star -).$$

回顾 κ 在 [BF08, §2.6] 中的定义。令 $(\widehat{\mathfrak{g}}^*)^{\mathrm{reg}} \subset \widehat{\mathfrak{g}}^*$ 为正则元的子集。令 $\mathfrak{z} \subset \widehat{\mathfrak{g}} \otimes \mathcal{O}_{(\widehat{\mathfrak{g}}^*)^{\mathrm{reg}}}$ 为 $(\widehat{\mathfrak{g}}^*)^{\mathrm{reg}}$ 上的万有中心化子层，其在 $\xi \in (\widehat{\mathfrak{g}}^*)^{\mathrm{reg}}$ 处的纤维是 ξ 的中心化子 $\mathfrak{z}(\xi) \subset \widehat{\mathfrak{g}}$。对于 $\widehat{\mathfrak{g}}^*$ 上的 G-等变凝聚层的复形 $\mathcal{F}$，限制 $\mathcal{F}|_{(\widehat{\mathfrak{g}}^*)^{\mathrm{reg}}}$ 带有交换李代数 $\mathfrak{z}$ 的作用，从而定义了 $\mathfrak{z}$ 的全空间 $\mathrm{Tot}(\mathfrak{z})$ 上的一个拟凝聚复形 $\mathcal{F}$。将 $\mathcal{F}$ 限制到"Kostant切片" $\Sigma \subset (\widehat{\mathfrak{g}}^*)^{\mathrm{reg}}$，得到 $X_\Sigma := \mathrm{Tot}(\mathfrak{z}) \times_{(\widehat{\mathfrak{g}}^*)^{\mathrm{reg}}} \Sigma$ 上的一个凝聚层，它经由形如以下的复合与 $\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)$ 同构

$$X_\Sigma \hookrightarrow \mathrm{Tot}(\mathfrak{z}) \twoheadrightarrow \mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W).$$

这定义了 κ。注意，κ 不依赖于 Kostant切片的选择，因为所有这些切片都彼此 G-共轭，且 $\mathcal{F}$ 是 G-等变的。

引理 *4.9* 的证明。考虑图表

$$\mathrm{Tot}(\mathfrak{z}) \times \mathrm{Tot}(\mathfrak{z}) \xleftarrow{p_{\mathrm{Tot}}} \mathrm{Tot}(\mathfrak{z}) \times_{(\widehat{\mathfrak{g}}^*)^{\mathrm{reg}}} \mathrm{Tot}(\mathfrak{z}) \xrightarrow{m_{\mathrm{Tot}}} \mathrm{Tot}(\mathfrak{z}), \tag{4.6}$$

其中 m_{Tot} 是在 $(\widehat{\mathfrak{g}}^*)^{\mathrm{reg}}$ 上的逐纤维加法映射，并令

$$- \star_{\mathrm{Tot}} - := (m_{\mathrm{Tot}})_*(p_{\mathrm{Tot}})^*(- \boxtimes -).$$

对于 $\mathcal{F}_1$，$\mathcal{F}_2 \in$ 拟凝聚层$^{\mathbb{G}_m}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{\heartsuit}$ 和 $\xi \in (\widehat{\mathfrak{g}}^*)^{\mathrm{reg}}$，$(\mathcal{F}_1 \otimes_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{g}}^*}} \mathcal{F}_2)_\xi$ 上的 $\mathfrak{z}(\xi)$-作用由 $z \cdot (m \otimes n) = (z \cdot m) \otimes n + m \otimes (z \cdot n)$ 给出。因此，根据 $\mathcal{F}$ 的构造可得

$$(\mathcal{F}_1 \otimes_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{g}}^*}} \mathcal{F}_2)^\sim \cong \widetilde{\mathcal{F}_1} \star_{\mathrm{Tot}} \widetilde{\mathcal{F}_2}. \tag{4.7}$$

现在由此以及拟凝聚层$^{\mathbb{G}_m}(\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W))^{\heartsuit}$上的幺半结构的定义，即可得出该引理。

□

由于函子

$$\kappa^{/\!/}\colon \mathrm{Coh}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{/\!/} \to \mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}\text{-mod}$$

由 κ 构造：$\mathsf{QCoh}^{\mathbb{G}_m}(\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G})^{\heartsuit} \to \mathsf{QCoh}^{\mathbb{G}_m}(\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W))^{\heartsuit}$。如 §4.2.1 所示，我们得到 $\kappa^{/\!/}$ 的幺半结构。这意味着：

定理 4.10。 存在一个幺半结构，使得

$$\mathcal{S}^{der}_{\mathrm{Spd}\,C}\colon \mathrm{Coh}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{/\!/} \simeq \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell),$$

使 *(4.4)* 中的自然同构 $\kappa^{/\!/} \cong R\Gamma \circ \mathcal{S}^{der}_{\mathrm{Spd}\,C}$ 典范地成为幺半同构。

证明。 这由引理 4.8、引理 4.9 以及 $R\Gamma\colon \mathcal{IC} \to \mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}$-模的全忠实性推出。 □

4.2.3 幺半性与非导出 Satake 的相容性

根据定理 4.10，我们赋予 $\mathcal{S}^{der}_{\mathrm{Spd}\,C}$ 幺半结构。本节将证明，这一幺半结构与非导出几何 Satake 等价相容：

命题 4.11。 自然同构

$$S_{\mathrm{Spd}\,C} \cong \mathcal{S}^{der}_{\mathrm{Spd}\,C} \circ fr|_{\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G})}$$

（*4.3*）中的自然同构是典范幺半的。

证明。 我们定义了函子

$$\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G}) \xrightarrow{fr} \mathrm{Coh}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{/\!/} \xrightarrow{\mathcal{S}^{der}_{\mathrm{Spd}\,C}} \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C}) \xrightarrow{R\Gamma} \mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}\text{-mod}.$$

令 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ 分别表示 $\mathsf{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G})$ 在 $\mathsf{Coh}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{/\!/}$, $\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C})$, $\mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}$-模中的本质像。注意，根据 $\mathcal{S}^{der}_{\mathrm{Spd}\,C}$ 和 $R\Gamma$ 的全忠实性，$\mathcal{C}_1 \simeq \mathcal{C}_2 \simeq \mathcal{C}_3$，且 $\mathcal{C}_2 = \mathsf{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\,\mathrm{Spd}\,C})$。特别地，这些 ∞-范畴是 1-范畴的神经。在图表中

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{表示范畴}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G}) & \longrightarrow & \mathcal{C}_1 & \longrightarrow & \mathcal{C}_2 & \longrightarrow & \mathcal{C}_3 \\
\| & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\text{表示范畴}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G}) & \xrightarrow{fr} & \mathsf{Coh}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{/\!/} & \xrightarrow{\mathcal{S}^{der}_{\mathrm{Spd}\,C}} & \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathsf{ck}_{G,\,\mathrm{Spd}\,C}) & \xrightarrow{R\Gamma} & \mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}\text{-模},
\end{array}$$

所有垂直函子都是规范的幺半函子，且其中三个方块在幺半意义下交换。因此，只需证明该同构

$$(\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G}) \xrightarrow{fr} \mathcal{C}_1 \xrightarrow{\mathcal{S}^{der}_{\mathrm{Spd}\, C}} \mathcal{C}_2) \simeq (\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G}) \xrightarrow{S_{\mathrm{Spd}\, C}} \mathcal{C}_2) \tag{4.8}$$

是幺半的。考虑幺半函子

$$H^*\colon \mathcal{C}_3 \to \mathrm{QCoh}(\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W))^{\heartsuit},\ \mathcal{F} \mapsto \bigoplus_i H^i(\mathcal{F})$$

1-范畴之间的。此外，考虑与自然投影 $\pi_{\mathbb{T}}\colon \mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W) \to \widehat{\mathfrak{t}}^*/W$ 相对应的同态 $\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*/W} \to \mathcal{O}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}$，以及与包含 $\{0\} \hookrightarrow \widehat{\mathfrak{t}}^*/W$ 相对应的 $\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*/W} \to \overline{\mathbb{Q}_\ell}$。令 d 为复合

$$d\colon \mathcal{C}_3 \xrightarrow{H^*} \mathrm{QCoh}(\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W))^{\heartsuit} \xrightarrow{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \otimes_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*/W}} -} \mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}.$$

我们可以证明以下引理：

引理 4.12。 复合之间存在一个自然的幺半同构

$$\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, C}) = \mathcal{C}_2 \xrightarrow{R\Gamma} \mathcal{C}_3 \xrightarrow{d} \mathrm{Vect}^{\heartsuit}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$$

and

$$F_{G,\mathrm{Spd}\, C}\colon \mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, C}) \to \mathrm{Vect}^{\heartsuit}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell},\quad \mathcal{F} \mapsto \bigoplus_i H^i(\mathrm{Gr}_{G,\mathrm{Spd}\, C}, \mathcal{F}).$$

证明。 同构

$$d \circ R\Gamma \simeq F_{G,\mathrm{Spd}\, C} \tag{4.9}$$

fol由引理 3.12、命题 3.21、命题 3.22 以及同构得出

$$H^*(\mathrm{Spd}\, C) \otimes_{H^*([\mathrm{Spd}\, C/L^+_{\mathrm{Spd}\, C}G])} H^*(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, C}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^*(\mathrm{Gr}_{G,\mathrm{Spd}\, C}, \mathcal{F}). \tag{4.10}$$

例如，同构 (4.10) 可由 [Zhu17b, §A.1.3], 中的论证推出：借助 §3 的结果归约到等特征情形，并注意到 $H^*(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{eq}}_{G^{\mathrm{spl}},\ \text{谱}\ k},\ \mathcal{F})$ 是 $H^*([\text{谱}\ k/L^+,\ \mathrm{eq}\,\text{谱}\ k G^{\mathrm{spl}}])$ 上的自由对象。

剩下要证明幺半性。利用命题 3.1 归约到 Witt 向量情形；若赋予 $F_{G,\ \mathrm{Spd}\, C}$ [Zhu17a, §2.3], 中的幺半结构，那么根据定义，同构 (4.9) 是幺半的。由于 Zhu 在 $F_{G,\ \mathrm{Spd}\, C}$ 上定义的幺半结构与我们的幺半结构由 [Ban23], 相同，结论得证。

□

此外，我们还有以下引理：

引理 4.13。 同构 *(4.8)* 与 $F_{G,\operatorname{Spd} C}$ 复合：

$$\begin{aligned}&(\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}\cdot}(\widehat{G}) \xrightarrow{fr} \mathcal{C}_1 \xrightarrow{\mathcal{S}^{der}_{\operatorname{Spd} C}} \mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\operatorname{Spd} C}) \xrightarrow{F_{G,\operatorname{Spd} C}} \mathrm{Vect}^{\heartsuit})\\ &\simeq (\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}\cdot}(\widehat{G}) \xrightarrow{S_{\operatorname{Spd} C}} \mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\operatorname{Spd} C}) \xrightarrow{F_{G,\operatorname{Spd} C}} \mathrm{Vect}^{\heartsuit}).\end{aligned} \tag{4.11}$$

分解为

$$\begin{aligned}&(\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}\cdot}(\widehat{G}) \xrightarrow{fr} \mathcal{C}_1 \xrightarrow{\mathcal{S}^{der}_{\operatorname{Spd} C}} \mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\operatorname{Spd} C}) \xrightarrow{F_{G,\operatorname{Spd} C}} \mathrm{Vect}^{\heartsuit})\\ &\simeq (\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}\cdot}(\widehat{G}) \xrightarrow{fr} \mathcal{C}_1 \xrightarrow{\mathcal{S}^{der}_{\operatorname{Spd} C}} \mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\operatorname{Spd} C}) \xrightarrow{R\Gamma} \mathcal{C}_3 \xrightarrow{d} \mathrm{Vect}^{\heartsuit})\\ &\simeq (\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}\cdot}(\widehat{G}) \xrightarrow{fr} \mathcal{C}_1 \xrightarrow{\kappa} \mathcal{C}_3 \xrightarrow{d} \mathrm{Vect}^{\heartsuit})\\ &\simeq (\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}\cdot}(\widehat{G}) \xrightarrow{\mathrm{forget}} \mathrm{Vect}^{\heartsuit})\\ &\simeq (\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}\cdot}(\widehat{G}) \xrightarrow{S_{\operatorname{Spd} C}} \mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\operatorname{Spd} C}) \xrightarrow{F_{G,\operatorname{Spd} C}} \mathrm{Vect}^{\heartsuit}).\end{aligned} \tag{4.12}$$

这里，第一个同构是引理 *4.12* 中的同构，第二个是 *(4.3)*。第三个由纯代数论证给出：根据 *[BF08*，引理 *9],* ，我们有

$$\overline{\mathbb{Q}}_\ell \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{t}^*/W}} \kappa(fr(V)) \cong \overline{\mathbb{Q}}_\ell \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{t}^*/W}} \mathcal{O}_\Sigma \otimes V \cong V.$$

第四个由（非导出）几何 *Satake* 等价的构造给出。

我们暂且假设此引理。(4.12) 中的第一个同构根据引理 4.12 是幺半的，第二个根据 $\mathcal{S}^{der}_{\operatorname{Spd} C}$ 上幺半结构的定义是幺半的，第三个由一个简单的代数论证得出，第四个则由（非导出）几何 Satake 等价的构造给出。因此，根据引理 4.13，同构 (4.11) 是幺半的。由于 1-范畴的函子 $F_{G,\operatorname{Spd} C}$ 在 Sat($\mathcal{H}$ck$_{G,\operatorname{Spd} C}$) 上是忠实的，故结论成立。

□

我们以给出引理 4.13 的证明来结束本小节；该证明此前暂未给出。

引理 *4.13* 的证明。 由引理 3.2 可知，只需证明等特征情形下的类似结论，其中我们使用 $\widetilde{S}_{qc}$in [BF08, 定理 4] 而非 $\mathcal{S}^{der}_{\operatorname{Spd} C}$。于是，断言的证明如下：

下文中，我们将使用一些来自 [BF08] 的记号而不加说明。根据定-~义，同构 $S_{qc} \circ fr \simeq S^{\mathrm{eq}}{}_{\text{谱 } k}$是由以下映射诱导的

$$\kappa \circ fr \simeq R\Gamma \circ S^{\mathrm{eq}}_{\operatorname{Spec} k} \tag{4.13}$$

通过 $R\Gamma$的全忠实性得到。同构 (4.13) 是通过限制以下同构得到的

$$\eta_V := \eta_{V,\psi} \colon H^*_{L^{+,\mathrm{eq}}_{\mathrm{Spec}\, k} G \rtimes \mathbb{G}_m}(\mathrm{Gr}^{\mathrm{eq}}_{G,\mathrm{Spec}\, k}, S^{\mathrm{eq}}_{\mathrm{Spec}\, k}(V)) \cong \phi(V)$$

在 [BF08 的定理 6] 至 $\hbar = 0$中。此处我们将 η 写成带下标 ψ 的形式，因为 ϕ 的定义依赖于加性特征 ψ。回想 η_V 是.....上的模的同构

$$H^*_{L^{+,\mathrm{eq}}_{\mathrm{Spec}\, k} G \rtimes \mathbb{G}_m \ltimes L^{+,\mathrm{eq}}_{\mathrm{Spec}\, k} G}(*, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \cong \mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*/W \times \widehat{\mathfrak{t}}^*/W \times \mathbb{A}^1}.$$

只需证明，在这些同构下

$$\overline{\mathbb{Q}}_\ell \otimes_{H^*_{L^{+,\mathrm{eq}}_{\mathrm{Spec}\, k} G \rtimes \mathbb{G}_m}(*)} H^*_{L^{+,\mathrm{eq}}_{\mathrm{Spec}\, k} G \rtimes \mathbb{G}_m}(\mathrm{Gr}^{\mathrm{eq}}_{G,\mathrm{Spec}\, k}, S^{\mathrm{eq}}_{\mathrm{Spec}\, k}(V)) \cong H^*(\mathrm{Gr}^{\mathrm{eq}}_{G,\mathrm{Spec}\, k}, S^{\mathrm{eq}}_{\mathrm{Spec}\, k}(V)) \cong V, \quad (4.14)$$

$$\overline{\mathbb{Q}}_\ell \otimes_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*/W \times \mathbb{A}^1}} (\phi(V)) \cong \overline{\mathbb{Q}}_\ell \otimes_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*/W}} (\mathcal{O}_\Sigma \otimes V) \cong V, \quad (4.15)$$

同态 $\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*/W \times \mathbb{A}^1}} \overline{\eta_V}$ 与 id_V一致。此处，(4.14) 中的第二个同构由几何 Satake 等价 S^{eq} 谱 k 的构造给出，而 (4.15) 中的第一个同构由 [BF08 的引理 9] 给出。设

$$(\mathrm{id}, \pi, \mathrm{id}) \colon \widehat{\mathfrak{t}}^*/W \times \widehat{\mathfrak{t}}^* \times \mathbb{A}^1 \to \widehat{\mathfrak{t}}^*/W \times \widehat{\mathfrak{t}}^*/W \times \mathbb{A}^1$$

表示该投影。如 [BF08], 中所写，在 (id π,id)$^*\eta_V$的两侧存在一个 $\mathbb{X}_*(T)$-滤过，其第 λ个分次分量典范同构于

$$\mathcal{O}(\Gamma_\lambda) \otimes {}_\lambda V,$$

其中 ${}_\lambda V$是 V的 λ-权空间，且 $\Gamma_\lambda = \{(x, y, a) \in (\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)^2 \times \mathbb{A}^1 \mid y = x + a\lambda\}$。此外，$\eta_V$是唯一的同构，使得 (id π, id)$^*\eta_V$保持这些滤过，并诱导伴随分次上的恒等态射。因此， $\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*/W \times \mathbb{A}^1}} \eta_V$保持 (4.14) 与 (4.15) 上的诱导滤过，并诱导伴随分次上的恒等态射。由于 (4.14) 与 (4.15) 上的诱导滤过是

$$F^\lambda V = \bigoplus_{\lambda' \le \lambda} {}_{\lambda'} V,$$

由此可得

$${}_\lambda V \hookrightarrow V \xrightarrow[\simeq]{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \otimes_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*/W \times \mathbb{A}^1}} \eta_V} V \twoheadrightarrow {}_{\lambda'} V$$

若 $\lambda = \lambda'$，则为恒等态射。

只需证明当 $\lambda \neq \lambda'$ 时它为零。我们可以假设 V 是 G 的最高权为 μ的不可约$\widehat{}$表示范畴 V_μ。于是，由同构 η_V 与弗罗贝尼乌斯作用相容这一事实即可得出结论（参见 [BZSV24, §6.7] 的最后一段）。具体如下：假设 $V \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G}, \mathbb{Q}_\ell)$ 带有一个$\widehat{}$弗罗贝尼乌斯作用，使得 V是 $G \rtimes \langle Fr \rangle$-表示，其中 Fr在 G上的作用如 §2.3 所述，经由圆分作用扭曲。则相应的 perverse 层$S^{\mathrm{eq}}\operatorname{Spec}_k(V)$ 带有相应的弗罗贝尼乌斯结构，见 [Zhu17b, 定理 5.5.12] 或 [BZSV24, 命题 6.7.2]。例如，令 $IC_\mu \in \mathrm{Perv}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_G^{\mathrm{eq}}, \operatorname{Spec}_k, \mathbb{Q}_\ell)$ 表示 $\mathrm{Gr}_G^{\mathrm{eq}}$,$_{\leq\mu}$上的交叉上同调层。若 IC_μ 带有由 $\mathrm{Gr}_G^{\mathrm{eq}}$,$_\mu$上的常值层的平凡弗罗贝尼乌斯结构诱导的弗罗贝尼乌斯结构，则相应的 Fr-作用在 V_μ 上由在 $_\lambda V_\mu$上的乘以$q^{\langle \rho, \lambda - \mu \rangle}$ 的作用之直和给出。$S^{\mathrm{eq}}\operatorname{Spec}_k(V)$上的弗罗贝尼乌斯结构诱导出弗罗贝尼乌斯作用

$$H^*_{L^{+,\mathrm{eq}}_{\operatorname{Spec} k} G \rtimes \mathbb{G}_m}(\mathrm{Gr}^{\mathrm{eq}}_{G,\operatorname{Spec} k}, S^{\mathrm{eq}}_{\operatorname{Spec} k}(V)).$$

此外，我们如下定义量子包络代数 $U_\hbar(\widehat{\mathfrak{g}})$ 上的弗罗贝尼乌斯作用：

$$\widehat{\mathfrak{g}} \ni x \mapsto qx, \quad \hbar \mapsto q\hbar,$$

以及在 $\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}}}$ 和 $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}$ 上通过乘法映射 $\widehat{\mathfrak{t}} \to \widehat{\mathfrak{t}}$，并在 $\mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ 上通过 q^{-1}定义。其他对象，如 $\mathcal{O}_{\Gamma_\lambda}$，具有诱导的弗罗贝尼乌斯作用。这些诱导出映射

$$\phi_\psi(V) \xrightarrow{\simeq} \phi_{Fr \circ \psi \circ Fr^{-1}}(V),$$

其中我们将 ϕ 写成带下标 ψ 的形式，因为它依赖于特征 ψ 的选取：$U_\hbar(\widehat{\mathfrak{n}}_-) \to \mathbb{Q}_\ell[\hbar]$。通过直接计算，我们可以证明同构

$$gr((\mathrm{id}, \pi, \mathrm{id})^* H^*_{L^{+,\mathrm{eq}}_{\operatorname{Spec} k} G \rtimes \mathbb{G}_m}(\mathrm{Gr}^{\mathrm{eq}}_{G,\operatorname{Spec} k}, S^{\mathrm{eq}}_{\operatorname{Spec} k}(V))) \cong \bigoplus_\lambda \mathcal{O}(\Gamma_\lambda) \otimes {}_\lambda V$$

是弗罗贝尼乌斯等变的，并且该交换图

$$\begin{array}{ccc} gr((\mathrm{id}, \pi, \mathrm{id})^* \phi_\psi(V)) & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_\lambda \mathcal{O}(\Gamma_\lambda) \otimes {}_\lambda V \\ \downarrow{\scriptstyle Fr} & & \downarrow{\scriptstyle Fr} \\ gr((\mathrm{id}, \pi, \mathrm{id})^* \phi_{Fr \circ \psi \circ Fr^{-1}}(V)) & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_\lambda \mathcal{O}(\Gamma_\lambda) \otimes {}_\lambda V \end{array}$$

是交换的。根据 η_V 的刻画，可知该交换图

$$\begin{array}{ccc} H^*_{L^{+,\mathrm{eq}}_{\mathrm{Spec}\,k}G\rtimes\mathbb{G}_m}(\mathrm{Gr}^{\mathrm{eq}}_{G,\mathrm{Spec}\,k}, S^{\mathrm{eq}}_{\mathrm{Spec}\,k}(V))) & \xrightarrow[\cong]{\eta_{V,\psi}} & \phi_\psi(V) \\ \downarrow{\scriptstyle Fr} & & \downarrow{\scriptstyle Fr} \\ H^*_{L^{+,\mathrm{eq}}_{\mathrm{Spec}\,k}G\rtimes\mathbb{G}_m}(\mathrm{Gr}^{\mathrm{eq}}_{G,\mathrm{Spec}\,k}, S^{\mathrm{eq}}_{\mathrm{Spec}\,k}(V))) & \xrightarrow[\cong]{\eta_{V,r\circ\psi\circ Fr^{-1}}} & \phi_{Fr\circ\psi\circ Fr^{-1}}(V). \end{array}$$

通过直接计算，我们可以证明同构 (4.14) 和 (4.15) 是弗罗贝尼乌斯等变的，并且由此得到的函子

$$V \xrightarrow{\simeq} V$$

是弗罗贝尼乌斯等变的。由于 ${}_\lambda V_\mu$ 上的 Frobenius 权重对于每个 λ 都不同，因此得证。 □

4.3 环面的情形

假设 $G = T$ 是一个环面。那么

$$\mathcal{H}\mathrm{ck}_{T,\mathrm{Spd}\,C} = \coprod_{\lambda\in\mathbb{X}_*(T_{\overline{F}})} [\mathrm{Spd}\,C/L^+_{\mathrm{Spd}\,C}T]. \tag{4.16}$$

在这种情况下，∞-范畴 $\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{T,\,\mathrm{Spd}\,C})$ 是 $\mathbb{E}_\infty$-幺半的。

为了证明 $\mathcal{H}\mathrm{ck}_{T,\,\mathrm{Spd}\,C}$ 的导出 Satake 等价，我们首先证明以下结论：

命题 4.14. 存在一个规范的对称幺半等价

$$\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}([\mathrm{Spd}\,C/L^+_{\mathrm{Spd}\,C}T], \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq \mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{t}}[-2])\text{-mod}^{\mathrm{perf}}$$

对称幺半 ∞-范畴。

这里，左侧的幺半结构由 $-\otimes_{\mathbb{Q}_\ell}-$ 给出。 –

证明. 根据命题 3.22，存在一个函子

$$\begin{aligned} R\Gamma_{BL^+T}\colon \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}([\mathrm{Spd}\,C/L^+_{\mathrm{Spd}\,C}T], \overline{\mathbb{Q}}_\ell) &\to R\Gamma([\mathrm{Spd}\,C/L^+_{\mathrm{Spd}\,C}T], \overline{\mathbb{Q}}_\ell)\text{-mod} \simeq \mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{t}}[-2])\text{-mod} \\ A &\mapsto R\Gamma([\mathrm{Spd}\,C/L^+_{\mathrm{Spd}\,C}T], A). \end{aligned}$$

$\mathcal{IC}_{BL^+T} \subset \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}([\mathrm{Spd}\,C/L^+{}_{\mathrm{Spd}\,C}T], \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 是单位函子的本质像

$$\mathrm{Vect}^{\mathrm{perf}}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} \to \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}([\mathrm{Spd}\,C/L^+_{\mathrm{Spd}\,C}T], \overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

我们断言， $\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}([\mathrm{Spd}\, C/L^+{}_{\mathrm{Spd}\, C}T], \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 由 $\mathcal{IC}_{BL^+T}$在扩张下生成。事实上，根据截断， $\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}([\mathrm{Spd}\, C/L^+{}_{\mathrm{Spd}\, C}T], \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 由

$$\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}([\mathrm{Spd}\, C/L^+_{\mathrm{Spd}\, C}T], \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^\heartsuit := \{A \in \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}([\mathrm{Spd}\, C/L^+_{\mathrm{Spd}\, C}T], \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \mid A \text{ is concentrated on degree } 0\}$$

在移位和扩张下。由于 T 的连通性，我们可以证明 $\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}([\mathrm{Spd}\, C/L^+{}_{\mathrm{Spd}\, C}T], \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^\heartsuit$ 中的任意对象都同构于某个 n。例如，可以通过命题 3.1 将问题归约为 $\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}([\mathrm{Spec}\, k/L^+{}_{\mathrm{Spec}\, k}T_{\mathrm{spl}}], \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^\heartsuit$ 的类似命题，并利用 $L^+{}_{\mathrm{Spec}\, k}T_{\mathrm{spl}}$ 的连通性来证明。因此， $\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}([\mathrm{Spd}\, C/L^+{}_{\mathrm{Spd}\, \overline{C}}\overline{T}], \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 由 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 在移位和扩张下生成，因而由 $\mathcal{IC}_{BL^+T}$ 在扩张下生成。

对于 A_1， $A_2 \in \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}([\mathrm{Spd}\, C/L^+{}_{\mathrm{Spd}\, \overline{C}}\overline{T}], \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$，存在一个典范同态

$$R\Gamma_{BL^+T}(A_1) \otimes_{R\Gamma_{BL^+T}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)} R\Gamma_{BL^+T}(A_2) \to R\Gamma_{BL^+T}(A_1 \otimes A_2) \tag{4.17}$$

根据引理 3.13。这是一个等价，因为我们可以将问题归约到 A_1， $A_2 \in \mathcal{IC}_{BL^+T}$ 的情形。因此，函子 $R\Gamma_{BL^+T}$ 是幺半的。此外，它还是对称幺半的。我们断言 $R\Gamma_{BL^+T}$ 是全忠实的。事实上，只需证明它在 $\mathcal{IC}_{BL^+T}$ 上全忠实，这可由 3.22 得出。

因此， $R\Gamma_{BL^+T}$诱导了 $\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}([\mathrm{Spd}\, C/L^+{}_{\mathrm{Spd}\, C}T], \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$与对称代数$(\widehat{\mathfrak{t}}[-2])$-模的一个全子范畴之间的幺半等价，该全子范畴由本质像生成，而该本质像来自

$$\mathrm{Vect}^{\mathrm{perf}}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} \to \mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{t}}[-2])\text{-mod}, V \mapsto \mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{t}}[-2]) \otimes V$$

在扩张之下。后者即为对称代数$(\widehat{\mathfrak{t}}[-2])$-模^{perf}，因此我们得到该结果。 □

现在我们可以证明 $\mathrm{Spd}\, C$ 上环面的导出 Satake 等价：

定理 4.15. 存在一个典范对称幺半等价

$$\mathcal{S}^{der}_{T,\mathrm{Spd}\, C} \colon \mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{t}}[-2])\text{-mod}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{D}(\mathrm{Rep}(\widehat{T}))) \simeq \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{T,\mathrm{Spd}\, C}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

对称幺半 ∞-范畴的。

此外，存在一个典范幺半等价

$$S_{T,\mathrm{Spd}\, C} \simeq \mathcal{S}^{der}_{T,\mathrm{Spd}\, C} \circ fr|_{\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{T}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)} \colon \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{T}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{T,\mathrm{Spd}\, C}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

证明。 由 (4.16)，存在一个等价

$$\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{T,\mathrm{Spd}\, C}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}([\mathrm{Spd}\, C/L^+_{\mathrm{Spd}\, C}T], \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes \bigoplus_{\mathbb{X}_*(T)} \mathrm{Vect}^{\mathrm{perf}}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell},$$

并且，当我们赋予 $\bigoplus_{\mathbb{X}_*(T_F)} \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}_\ell}$ 一个典范的 $\mathbb{X}_*(T_F)$-分次幺半结构时，该等价是幺半的。另一方面，由于 $\mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{t}}[-2])$ 具有平凡的 $\widehat{T}$-作用，因此存在一个典范幺半等价

$$\mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{t}}[-2])\text{-mod}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{D}(\mathrm{Rep}(\widehat{T}))) \simeq \mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{t}}[-2])\text{-mod}^{\mathrm{perf}} \otimes \mathcal{D}^b(\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{T})).$$

我们也有一个幺半等价

$$\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{T}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq \bigoplus_{\mathbb{X}_*(T_{\overline{F}})} \mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{\heartsuit,\mathrm{f.d.}},$$

其中右侧被赋予典范的 $\mathbb{X}_*(T_F)$-分次（非导出）幺半结构。由 [BCKW25推论7.4.12] 中 $\mathcal{D}^b(-)$的万有性可知， $\mathcal{D}^b(-)$保持直和。因此，我们有一个幺半等价

$$\begin{aligned}\mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{t}}[-2])\text{-mod}^{\mathrm{perf}} \otimes \mathcal{D}^b(\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{T})) &\simeq \mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{t}}[-2])\text{-mod}^{\mathrm{perf}} \otimes \mathcal{D}^b\left(\bigoplus_{\mathbb{X}_*(T_{\overline{F}})} \mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{\heartsuit,\mathrm{f.d.}}\right) \\ &\simeq \mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{t}}[-2])\text{-mod}^{\mathrm{perf}} \otimes \bigoplus_{\mathbb{X}_*(T_{\overline{F}})} \mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{\mathrm{perf}}.\end{aligned}$$

现在，该定理的第一个陈述由命题 4.14 得出。

（非导出）几何 Satake 等价

$$\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{T,\mathrm{Spd}\,C}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{T}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

按构造同构于该复合

$$\begin{aligned}\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{T,\mathrm{Spd}\,C}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) &= \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{T,\mathrm{Spd}\,C}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^\heartsuit \\ &= \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}\left(\coprod_{\lambda\in\mathbb{X}^*(T_{\overline{F}})} [\mathrm{Spd}\,C/L^+_{\mathrm{Spd}\,C}T], \overline{\mathbb{Q}}_\ell\right)^\heartsuit \\ &\simeq \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{X}^*(T_{\overline{F}})} \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}([\mathrm{Spd}\,C/L^+_{\mathrm{Spd}\,C}T], \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^\heartsuit \\ &\xrightarrow[\simeq]{\oplus(-)^*} \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{X}^*(T_{\overline{F}})} \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathrm{Spd}\,C, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^\heartsuit \\ &\simeq \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{X}^*(T_{\overline{F}})} \mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{\heartsuit,\mathrm{f.d.}} \simeq \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{T}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell).\end{aligned}$$

因此，很容易验证存在一个幺半等价 $\mathcal{S}^{der}_{T,\ \mathrm{Spd}\,C} \circ fr \simeq \mathcal{S}_{T,\ \mathrm{Spd}\,C}$。

□

4.4 一般情形

设 G 是 F 上的任意连通约化群。本节中，我们证明导出 Satake 等价：

定理 4.16. 存在一个典范幺半等价

$$\mathcal{S}^{der}_{G,\mathrm{Spd}\,C}\colon \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\simeq \mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{g}}[-2])\text{-}\mathrm{mod}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G})).$$

为此，我们需要以下引理：

引理 4.17. 设 G' 是定义在 F 上的约化群， T' 是定义在 F 上的环面。那么自然幺半群函子

$$-\boxtimes_{\mathrm{Spd}\,C}-\colon \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{T',\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\otimes\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G',\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{T'\times G',\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

是一个等价。

证明。 根据命题 3.1，只需证明

$$\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{eq}}_{T',\mathrm{Spec}\,k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\otimes\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{eq}}_{G',\mathrm{Spec}\,k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{eq}}_{T'\times G',\mathrm{Spec}\,k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

是一个等价，其中我们省略上标 $(-)^{\mathrm{spl}}$。

首先，我们证明全忠实性。由 [FS21, Corollary VI.6.7]中的同样论证，只需证明函子

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}([\mathrm{Spec}\,k/L^+_{\mathrm{Spec}\,k}T'],\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\otimes\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{eq}}_{G',\mathrm{Spec}\,k,\mu},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)&\\ \to\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}([\mathrm{Spec}\,k/L^+_{\mathrm{Spec}\,k}T']\times_{\mathrm{Spec}\,k}\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G',\mathrm{Spec}\,k,\mu},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)&\quad(4.18)\end{aligned}$$

对于 G'_F的极大环面的任意余特征 μ。由于 T'是由原幺幂群对 $L^+{}_{\mathrm{Spd}\,C}T'$取商得到的，因此我们可以用 T'替换 $L^+{}_{\mathrm{Spd}\,C}T'$。

因此，只需证明

$$\begin{aligned}R\mathrm{Hom}_{D^{\mathrm{ULA}}([\mathrm{Spec}\,k/T'],\overline{\mathbb{Q}}_\ell)}(A_1,A_2)\otimes^{\mathbb{L}}R\mathrm{Hom}_{D^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{eq}}_{G',\mathrm{Spec}\,k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)}(B_1,B_2)&\\ \to R\mathrm{Hom}_{D^{\mathrm{ULA}}([\mathrm{Spec}\,k/T']\times\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{eq}}_{G',\mathrm{Spec}\,k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)}(A_1\boxtimes B_1,A_2\boxtimes B_2)&\end{aligned}$$

对于任意 A_1， $A_2\in D^{\mathrm{ULA}}([\text{谱}\ k/T'],\ \mathbb{Q}_\ell)$ 和 B_1， $B_2\in D^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{eq}}_{G',\ \text{谱}\,k},\ \mathbb{Q}_\ell)$，这是一个同构。通过截断，我们可以假设 A_1 和 A_2 都集中在 0 次。由于 T' 是连通的，我们可以假设 $A_1=A_2=\mathbb{Q}_\ell$。因此，只需证明

$$\begin{aligned}R\Gamma([\mathrm{Spec}\,k/T'],\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\otimes^{\mathbb{L}}R\mathrm{Hom}_{D^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{eq}}_{G',\mathrm{Spec}\,k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)}(B_1,B_2)&\\ \to R\mathrm{Hom}_{D^{\mathrm{ULA}}([\mathrm{Spec}\,k/T']\times\mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{eq}}_{G',\mathrm{Spec}\,k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)}(\mathrm{pr}_2^*B_1,\mathrm{pr}_2^*B_2),&\end{aligned}$$

其中 pr_2：$[\text{谱 } k/T'] \times \mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{eq}}_{G',\text{谱 } k} \to \mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{eq}}_{G',\text{谱 } k}$ 是投影。我们断言，自然映射

$$\mathrm{pr}_2^* R\mathscr{H}\mathrm{om}(B_1, B_2) \to R\mathscr{H}\mathrm{om}(\mathrm{pr}_2^* B_1, \mathrm{pr}_2^* B_2)$$

是一个同构。只需在沿自然投影 $\pi_{T'}$：$\mathrm{Spec}\ k \times \mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{eq}}_{G',\mathrm{Spec}\ k} \to [\mathrm{Spec}\ k/T'] \times \mathcal{H}\mathrm{ck}^{\mathrm{eq}}_{G',\mathrm{Spec}\ k}$ 的拉回之后验证这一点。由于 $\pi_{T'}$ 是光滑的，只需证明

$$\pi_{T'}^* \mathrm{pr}_2^* R\mathscr{H}\mathrm{om}(B_1, B_2) \to R\mathscr{H}\mathrm{om}(\pi_{T'}^* \mathrm{pr}_2^* B_1, \pi_{T'}^* \mathrm{pr}_2^* B_2)$$

是一个同构，这一点由 $\mathrm{pr}_2 \circ \pi_{T'} = \mathrm{id}$ 可知。于是得到所述结论。

根据这一结论，将 B_1 替换为 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$，并将 B_2 替换为 $R\mathscr{H}\mathrm{om}(B_1, B_2)$，我们可以假设 $B_1 = \mathbb{Q}_\ell$。此外，根据截断，我们可以假设 B_2 是 perverse 的。于是只需证明如下形式的同构

$$H^*_{T'}(*, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes H^*_{L^{+,\mathrm{eq}}_{\mathrm{Spec}\ k} G'}(\mathrm{Gr}^{\mathrm{eq}}_{G,\mathrm{Spec}\ k}, B_2) \cong H^*_{T' \times L^{+,\mathrm{eq}}_{\mathrm{Spec}\ k} G'}(\mathrm{Gr}^{\mathrm{eq}}_{G,\mathrm{Spec}\ k}, B_2).$$

将 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{eq}}_{G,\mathrm{Spec}\ k}$ 替换为 B_2 的支撑，并将 $L^+_{,\mathrm{eq}\,\mathrm{Spec}\ k} G'$ 替换为其某个有限型商后，该结论由一个等变 Künneth 公式推出，见 [Zhu17b, （A.1.12）]。

剩下的工作是证明本质满射性。由切除可知，只需证明 (4.18) 本质满射。由截断可知，只需证明 $A \in \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}([\text{谱 } k/L^+_{\text{谱 } k} T'] \times_{\mathrm{Spec}\ k} \mathcal{H}\mathrm{ck}_{G',\text{谱}k,\mu}, \mathbb{Q}_\ell)$ 集中在 0 次时属于本质像。根据上述利用 T' 和 G'的连通性的论证，我们可以假设 $A = \mathbb{Q}_\ell$是 $\mathbb{Q}_\ell \boxtimes \mathbb{Q}_\ell$的一个像。

□

引理 4.18。设 α：$Y \to X$ 是小 ν-层叠之间的映射空间，$K \to X$ 是 X上的有限 *étale* 群。假设存在一个 ℓ-上同调光滑态射 $X' \to X$，使得 $Y \times_X X'$ 在 X'上同构于 $[X/K] \times_X X'$。那么对于任意 $\mathcal{F} \in \mathcal{D}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_\ell)$，自然映射

$$\mathcal{F} \to R\alpha_* \alpha^* \mathcal{F}$$

是一个同构。

证明。由光滑基变换，我们可以假设 $Y = [X/K]$。设 β：$X \to [X/K]$为自然映射。由于该复合

$$\mathcal{F} \to R\alpha_* \alpha^* \mathcal{F} \to R\alpha_* R\beta_* \beta^* \alpha^* \mathcal{F} = \mathcal{F} \tag{4.19}$$

是恒等态射， $\mathcal{F} \to R\alpha_*\alpha^*\mathcal{F}$ 是分裂单态射。另一方面，由于 K 是 X上的有限 ´平展群，映射 β 是 ´平展且真的。因此，对于 $\mathcal{G} \in \mathcal{D}_{\text{ét}}([X/K],\ \mathbb{Q}_\ell)$，我们有一个自然复合

$$u\colon \mathcal{G} \to R\beta_*\beta^*\mathcal{G} \simeq R\beta_!R\beta^!\mathcal{G} \to \mathcal{G}.$$

根据基变换，在任意几何点 x 处的纤维上的诱导映射具有如下形式

$$u_x\colon \mathcal{G}_x \to \mathcal{G}_x^{\oplus r} \to \mathcal{G}_x$$

其中 r 是某个正整数，第一个映射是对角映射，第二个映射是加法。因此， u_x 是乘以 r 的映射；由于系数环 $\mathbb{Q}_\ell$ 包含 $\mathbb{Q}$，它是一个同构。于是 u 是一个同构；将此应用于情形 $\mathcal{G} = \alpha^*\mathcal{F}$，可知 (4.19) 中的第二个映射是分裂单态射。这就证明了所述结论。

□

定理 *4.16* 的证明。如果 G 是环面 T' 与半单单连通群 G' 的乘积 $T' \times G'$，则该定理由引理 4.17、定理 4.10 和定理 4.15 得证。

~ ~现在考虑一般的 G。设 $\varphi\colon G \to G$ 是一个中心同源，使得 G 是一个环面与一个单连通半单群的乘积。令 K 表示 $\widetilde{G} \to G$ 的有限核。置 $\mathbb{X}_*^+ := \mathbb{X}_*^+(T)$ 和 $\widetilde{\mathbb{X}}_*^+ := \mathbb{X}_*^+(\varphi^{-1}T)$。

众所周知，自然映射

$$\mathrm{Gr}_{\widetilde{G},\mathrm{Spd}\,C} \to \mathrm{Gr}_{G,\mathrm{Spd}\,C}$$

是开闭浸入，其像为 $\bigcup_{\mu\in\widetilde{\mathbb{X}}_*^+\subset\mathbb{X}_*^+}\mathrm{Gr}_{G,\ \mathrm{Spd}\,C,\ \mu}$（例如参见 [PR08, §5], 中的论证）。此外，令 $\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\ \mathrm{Spd}\,C,\ \widetilde{\mathbb{X}}_*^+} \subset \mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\ \mathrm{Spd}\,C}$ 表示 $\mathrm{Gr}_{\widetilde{G},\ \mathrm{Spd}\,C} \subset \mathrm{Gr}_{G,\ \mathrm{Spd}\,C}$ 的像，则有一个分解

$$\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C} \simeq \coprod_{\mathbb{X}_*^+/\widetilde{\mathbb{X}}_*^+} \mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C,\widetilde{\mathbb{X}}_*^+}.$$

因此，我们有一个等价

$$\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C,\widetilde{\mathbb{X}}_*^+},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes \bigoplus_{\mathbb{X}_*^+/\widetilde{\mathbb{X}}_*^+} \mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{\mathrm{perf}}, \tag{4.20}$$

并且，当我们赋予 $\bigoplus_{\mathbb{X}_*^+/\widetilde{\mathbb{X}}_*^+}\mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{\mathrm{perf}}$ 一个规范的 $\mathbb{X}_*^+/\widetilde{\mathbb{X}}_*^+$-分次对称幺半结构时，这个等价是幺半的。

我们首先断言存在一个幺半等价

$$\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C,\widetilde{\mathbb{X}}_*^+},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\simeq\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{\widetilde{G},\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\tag{4.21}$$

Let

$$r_\varphi\colon\mathcal{H}\mathrm{ck}_{\widetilde{G},\mathrm{Spd}\,C}=[L^+_{\mathrm{Spd}\,C}\widetilde{G}\backslash\mathrm{Gr}_{\widetilde{G},\mathrm{Spd}\,C}]\to[L^+_{\mathrm{Spd}\,C}G\backslash\mathrm{Gr}_{\widetilde{G},\mathrm{Spd}\,C}]\simeq\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C,\widetilde{\mathbb{X}}_*^+}$$

表示自然映射。

那么， $L^+{}_{\mathrm{Spd}\,C}\widetilde{G}\to L^+{}_{\mathrm{Spd}\,C}G$ 的核为 $K^\diamondsuit$，它是 $\mathrm{Spd}\ C$ 上的一个有限群。因此，拉回函子

$$r_\varphi^*\colon\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C,\widetilde{\mathbb{X}}_*^+},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{\widetilde{G},\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

由引理 4.18 可知是全忠实的。r_φ 的本质满射性归结为

$$\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C,\mu},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{\widetilde{G},\mathrm{Spd}\,C,\mu},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

由切除可知，对于任意 $\mu\in\mathbb{X}_*^+$，$\widetilde{\ }$。利用截断，按照引理 4.17 的证明中的相同论证，只需证明 $\mathbb{Q}_\ell$ 属于本质像，这显然成立。因此， r_φ^* 是一个等价。

$\widetilde{\ }$接下来，我们断言 r_φ^*是幺半的。令 $(L_{\mathrm{Spd}\,C}G)^{\widetilde{\mathbb{X}}_*^+}$表示 $L_{\mathrm{Spd}\,C}G\to L_{\mathrm{Spd}\,C}G$的像。注意，自然同态 $[L_{\mathrm{Spd}\,C}G/L^+{}_{\mathrm{Spd}\,C}G]\to[(L_{\mathrm{Spd}\,C}G)^{\widetilde{\mathbb{X}}_*^+}/L^+{}_{\mathrm{Spd}\,C}G]$是一个同构。范畴 $\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\ \mathrm{Spd}\,C,\widetilde{\mathbb{X}}_*^+},\mathbb{Q}_\ell)$ 借助关于如下形式卷积图的卷积乘积，成为一个幺半范畴

$$\begin{aligned}&[L^+_{\mathrm{Spd}\,C}G\backslash(L_{\mathrm{Spd}\,C}G)_{\widetilde{\mathbb{X}}_*^+}/L^+_{\mathrm{Spd}\,C}G]\times_{\mathrm{Spd}\,C}[L^+_{\mathrm{Spd}\,C}G\backslash(L_{\mathrm{Spd}\,C}G)_{\widetilde{\mathbb{X}}_*^+}/L^+_{\mathrm{Spd}\,C}G]\\&\qquad\leftarrow[L^+_{\mathrm{Spd}\,C}G\backslash(L_{\mathrm{Spd}\,C}G)_{\widetilde{\mathbb{X}}_*^+}\times^{L^+_{\mathrm{Spd}\,C}G}_{\mathrm{Spd}\,C}(L_{\mathrm{Spd}\,C}G)_{\widetilde{\mathbb{X}}_*^+}/L^+_{\mathrm{Spd}\,C}G]\\&\qquad\qquad\to[L^+_{\mathrm{Spd}\,C}G\backslash(L_{\mathrm{Spd}\,C}G)_{\widetilde{\mathbb{X}}_*^+}/L^+_{\mathrm{Spd}\,C}G].\end{aligned}$$

另一方面， $\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{\widetilde{G},\ \mathrm{Spd}\,C,\ \mathbb{Q}_\ell})$ 的卷积积来自如下形式的卷积图

$$\begin{aligned}&[L^+_{\mathrm{Spd}\,C}\widetilde{G}\backslash L_{\mathrm{Spd}\,C}\widetilde{G}/L^+_{\mathrm{Spd}\,C}\widetilde{G}]\times_{\mathrm{Spd}\,C}[L^+_{\mathrm{Spd}\,C}\widetilde{G}\backslash L_{\mathrm{Spd}\,C}\widetilde{G}/L^+_{\mathrm{Spd}\,C}\widetilde{G}]\\&\qquad\leftarrow[L^+_{\mathrm{Spd}\,C}\widetilde{G}\backslash L_{\mathrm{Spd}\,C}\widetilde{G}\times^{L^+_{\mathrm{Spd}\,C}\widetilde{G}}_{\mathrm{Spd}\,C}L_{\mathrm{Spd}\,C}\widetilde{G}/L^+_{\mathrm{Spd}\,C}\widetilde{G}]\\&\qquad\qquad\to[L^+_{\mathrm{Spd}\,C}\widetilde{G}\backslash L_{\mathrm{Spd}\,C}\widetilde{G}/L^+_{\mathrm{Spd}\,C}\widetilde{G}].\end{aligned}$$

由同构 $[L_{\mathrm{Spd}\,C}G/L^+{}_{\mathrm{Spd}\,C}G] \to [(L_{\mathrm{Spd}\,C}G)_{\widetilde{\mathbb{X}}_*^+}/L^+{}_{\mathrm{Spd}\,C}G]$，很容易证明交换图

$$\begin{array}{ccc}
[L^+_{\mathrm{Spd}\,C}\widetilde{G}\backslash L_{\mathrm{Spd}\,C}\widetilde{G} \times^{L^+_{\mathrm{Spd}\,C}\widetilde{G}}_{\mathrm{Spd}\,C} L_{\mathrm{Spd}\,C}\widetilde{G}/L^+_{\mathrm{Spd}\,C}\widetilde{G}] & \longrightarrow & [L^+_{\mathrm{Spd}\,C}\widetilde{G}\backslash L_{\mathrm{Spd}\,C}\widetilde{G}/L^+_{\mathrm{Spd}\,C}\widetilde{G}] \\
\downarrow & & \downarrow r^*_\varphi \\
L^+_{\mathrm{Spd}\,C}G\backslash (L_{\mathrm{Spd}\,C}G)_{\widetilde{\mathbb{X}}_*^+} \times^{L^+_{\mathrm{Spd}\,C}G}_{\mathrm{Spd}\,C} (L_{\mathrm{Spd}\,C}G)_{\widetilde{\mathbb{X}}_*^+}/L^+_{\mathrm{Spd}\,C}G] & \longrightarrow & [L^+_{\mathrm{Spd}\,C}G\backslash (L_{\mathrm{Spd}\,C}G)_{\widetilde{\mathbb{X}}_*^+}/L^+_{\mathrm{Spd}\,C}G]
\end{array}$$

是笛卡尔的。这一结果以及关于更高次数卷积积的类似结果，表明 r^*_φ具有幺半性。因此我们得到一个幺半等价 (4.21)。

将此与 (4.20) 结合，我们得到一个幺半等价

$$\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{\widetilde{G},\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes \bigoplus_{\mathbb{X}_*^+/\widetilde{\mathbb{X}}_*^+} \mathrm{Vect}^{\mathrm{perf}}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}.$$

另一方面，通过按中心特征分解，存在一个幺半等价

$$\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widetilde{G},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \bigoplus_{\mathbb{X}_*^+/\widetilde{\mathbb{X}}_*^+} \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{\widetilde{G}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell),$$

其中右侧具有典范的 $\mathbb{X}_*^+/\mathbb{X}_*^+$-分次幺半结构。由于$\widehat{\sim G}$在 $\mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{g}}[-2])$ 上的作用可通过 $\widetilde{G}$ 分解，因此存在一个自然同构

$$\mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{g}}[-2])\text{-}\mathrm{mod}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{D}(\mathrm{Rep}(\widehat{G}))) \simeq \mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{g}}[-2])\text{-}\mathrm{mod}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{D}(\mathrm{Rep}(\widehat{\widetilde{G}})))\otimes_{\mathcal{D}^b(\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{\widetilde{G}}))}\mathcal{D}^b(\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G})).$$

利用这一点，我们可以用与引理 4.15 的证明相同的论证来证明该命题。

□

与非导出几何 Satake 的相容性成立：

命题 4.19. 存在一个典范幺半等价

$$S_{G,\mathrm{Spd}\,C} \simeq \mathcal{S}^{der}_{G,\mathrm{Spd}\,C} \circ fr|_{\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)} \colon \mathcal{D}^b(\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)) \to \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

证明. 首先，假设 G 是环面 T' 与半单单连通群 G'的乘积 $T'\times G'$。根据非导出几何 Satake 的构造

$$S_{G,\mathrm{Spd}\,C}\colon \mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G},\overline{\mathbb{Q}}_\ell),$$

可以证明，对于 $A\in\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G',\mathrm{Spd}\,C},\mathbb{Q}_\ell)$ 和 $B\in\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{T',\mathrm{Spd}\,C},\mathbb{Q}_\ell)$，存在一个典范同构

$$S_{G',\mathrm{Spd}\,C}(A)\boxtimes S_{T',\mathrm{Spd}\,C}(B) \simeq S_{G'\times T',\mathrm{Spd}\,C}(A\boxtimes_{\mathrm{Spd}\,C} B)\in \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G}'\times\widehat{T}',\overline{\mathbb{Q}}_\ell),$$

与幺半结构相容。这表明存在一个幺半自然同构，使得该交换图

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{D}^b(\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G'}))\otimes\mathcal{D}^b(\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{T'})) & \xrightarrow{-\boxtimes-} & \mathcal{D}^b(\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G'}\times\widehat{T'})) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathcal{S}_{G',\mathrm{Spd}\,C}\otimes\mathcal{S}_{T',\mathrm{Spd}\,C}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{S}_{G'\times T',\mathrm{Spd}\,C}} \\
\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G',\mathrm{Spd}\,C})\otimes\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{T',\mathrm{Spd}\,C}) & \xrightarrow[-\boxtimes-]{} & \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G'\times T',\mathrm{Spd}\,C})
\end{array}$$

交换。由于该命题对 G' 和 T'成立，因此它对 $G'\times T'$也成立。

现在对于一般的 G，设 $\varphi\colon\ G\to G$ 为中心同源，使得 G 是一个环面与一个单连通半单群的乘积。由非导出几何Satake的构造，可以证明该复合

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) &\xrightarrow[\simeq]{(4.20)} \bigoplus_{\mathbb{X}_*^+/\widetilde{\mathbb{X}}_*^+}\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C,\widetilde{\mathbb{X}}_*^+},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\
&\xrightarrow[\simeq]{(4.20)} \bigoplus_{\mathbb{X}_*^+/\widetilde{\mathbb{X}}_*^+}\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{\widetilde{G},\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)
\end{aligned}$$

限制到

$$\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\simeq\bigoplus_{\mathbb{X}_*^+/\widetilde{\mathbb{X}}_*^+}\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{\widetilde{G},\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell),$$

以及该复合

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) &\simeq \bigoplus_{\mathbb{X}_*^+/\widetilde{\mathbb{X}}_*^+}\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{\widetilde{G},\mathrm{Spd}\,C},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\
&\xrightarrow[\simeq]{S_{\widetilde{G},\mathrm{Spd}\,C}} \bigoplus_{\mathbb{X}_*^+/\widetilde{\mathbb{X}}_*^+}\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{\widetilde{G}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\
&\simeq \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)
\end{aligned}$$

幺半同构于$S_{G,\ \mathrm{Spd}\,C}$。这蕴含了对 G的断言。 □

5 $\mathrm{Spd}\,E$ 上的导出 Satake与Weil 作用

令 $\mathsf{Cat}_{\infty,\mathbb{Q}_\ell}$ 表示 ∞-线性 ∞-范畴的 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-范畴。对于任意（离散）群 H，令 $\mathsf{Cat}_{\infty,\mathbb{Q}_\ell}^{BH} := \mathsf{Fun}(BH\to\mathsf{Cat}_{\infty,\mathbb{Q}_\ell}^{mon})$ 表示带有 H-作用的 $\mathbb{Q}_\ell$-线性幺半 ∞-范畴的 ∞-范畴。我们用 $\mathsf{Cat}_{\infty,,\mathbb{Q}_\ell}^{mon\,BH}$ 表示带有幺半 H-作用的$\mathbb{Q}_\ell$-线性幺半 ∞-范畴的 ∞-范畴。令 E/F 为一个有限伽罗瓦

扩张，使得 G 在 E上非分歧。我们用W_F^{disc}（分别用I_E^{disc}）表示赋予离散拓扑的群 W_F（分别为 I_E）。本节中，我们将在 $\widehat{\mathbf{Cat}}_{mon,B(W_F/I_E)\,\infty,\mathbb{Q}_\ell}$ 中证明 Spd $\breve{E}$ 上的导出 Satake 等价。其策略与§4类似，但我们需要将 W_F/I_E-等变性纳入考虑：首先在§5.1中，我们将证明一个类似于 [FS21, Corollary VI.6.7] 的退化结果，该结果适用于 Spd $\breve{E}$ 和[Spd k/I_E]，而非 Spd C和 Spd k。在§5.3中，利用§5.1中的结果，并假设 G的半单性和单连通性，我们将定义上链函子

$$R\Gamma_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}\colon \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,\breve{E}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to \mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}\text{-mod}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(I_E)).$$

在 $\widehat{\underline{\mathbf{Cat}}}_{mon,\ B(W_F/I_E)\ \infty,\ \mathbb{Q}_\ell}$ 以及 Kostant 函子

$$\kappa^{/\!/}_{I_E}\colon \mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{g}}[-2])\text{-mod}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(\widehat{G}\times I_E))\to \mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}\text{-mod}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(I_E))$$

在 $\widehat{\underline{\mathbf{Cat}}}_{mon,\ B(W_F/I_E)\ \infty,\ \mathbb{Q}_\ell}$。然后我们将证明这两个函子都是全忠实的，并且具有相同的本质像，从而在 $\widehat{\mathbf{Cat}}_{mon,\ B(W_F/I_E)\ \infty,\ \mathbb{Q}_\ell}$ 中得到所需等价。在 §5.4 中，我们将证明环面的所需等价；在 §5.5 中，我们将利用一个中心同源，将一般 G 映射到由一个环面和一个半单单连通群的乘积构成的群 G。

5.1 从 Spd E 到 [Spd k/I_E]

在本小节中，我们证明若干稍后会用到的引理。首先，关于 $\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\,[\mathrm{Spd}\,\mathcal{O}_C/I_E]},\ \Lambda)$ 的问题可以归约为关于 $\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\ [\mathrm{Spd}\,k/I_E]},\ \Lambda)$ 的问题。

引理 5.1. 存在典范幺半等价

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,[\mathrm{Spd}\,C/I_E]},\Lambda)&\simeq \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G^{\mathrm{spl}},[\mathrm{Spd}\,C/I_E]},\Lambda)\\&\leftarrow \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G^{\mathrm{spl}},[\mathrm{Spd}\,\mathcal{O}_C/I_E]},\Lambda)\\&\to \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G^{\mathrm{spl}},[\mathrm{Spd}\,k/I_E]},\Lambda)\end{aligned}\tag{5.1}$$

证明. 我们可以假设 Λ 是一个挠环。该引理由与 [FS21, Corollary VI.6.7]（或 [Ban24，定理 5.1]）相同的论证得出，其依据是这两个拉回函子

$$\mathcal{D}_{\mathrm{lc}}([\mathrm{Spd}\,k/I_E],\Lambda)\xleftarrow{\sim}\mathcal{D}_{\mathrm{lc}}([\mathrm{Spd}\,\mathcal{O}_C/I_E],\Lambda)\xrightarrow{\sim}\mathcal{D}_{\mathrm{lc}}([\mathrm{Spd}\,C/I_E],\Lambda)$$

根据引理 2.4、引理 2.6 和引理 2.7，它们是等价。 □

此外，范畴 $\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\ [\mathrm{Spd}\,k/I_E]},\ \Lambda)$ 也分解为一个张量积：

引理5.2。 典范函子

$$-\boxtimes-\colon \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k},\Lambda)\otimes_{\Lambda\text{-}\mathrm{mod}^{\mathrm{perf}}}\mathcal{D}_{\mathrm{lc}}([\mathrm{Spd}\,k/I_E],\Lambda)\\ \to \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}/[\mathrm{Spd}\,k/I_E]}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k}\times[\mathrm{Spd}\,k/I_E],\Lambda)\quad(5.2)$$

是一个等价。

证明。 我们可以假设 Λ 是一个挠环。

首先，我们证明全忠实性。由引理 2.5，只需证明函子的全忠实性

$$-\boxtimes-\colon \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k},\Lambda)\otimes\mathcal{D}_{\mathrm{lc}}(\mathrm{Spd}\,\breve{E},\Lambda)\\ \to \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}/[\mathrm{Spd}\,k/I_E]}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k}\times\mathrm{Spd}\,\breve{E},\Lambda).$$

考虑图表

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k}\times\mathrm{Spd}\,\breve{E} & \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} & \mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k}\\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_2} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha}\\ \mathrm{Spd}\,\breve{E} & \xrightarrow[\beta]{} & \mathrm{Spd}\,k.\end{array}$$

只需证明，对于 $A,\ A'\in\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\ \mathrm{Spd}\,k},\ \Lambda)$ 以及对于 $B,\ B'\in\mathcal{D}_{\mathrm{lc}}(\mathrm{Spd}\ \breve{E},\ \Lambda)$，存在一个典范同构

$$R\alpha_*R\mathscr{H}\mathrm{om}_\Lambda(A,A')\otimes_\Lambda R\beta_*R\mathscr{H}\mathrm{om}_\Lambda(B,B')\xrightarrow{\sim}R(\alpha\times\beta)_*R\mathscr{H}\mathrm{om}_\Lambda(A\boxtimes B,A'\boxtimes B')$$

在 $\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}/[\mathrm{Spd}\,k/I_E]}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\ \mathrm{Spd}\,k}\times\mathrm{Spd}\ \breve{E},\ \Lambda)$ 中，参见 [RS25，命题 3.8]。由于 B 和 B' 是具有完美纤维的局部常值复形，因此

$$\begin{aligned}R\mathscr{H}\mathrm{om}_\Lambda(A\boxtimes B,A'\boxtimes B')&\cong R\mathscr{H}\mathrm{om}_\Lambda(\mathrm{pr}_1^*A,\mathrm{pr}_1^*A')\otimes(\mathrm{pr}_2^*B)^\vee\otimes\mathrm{pr}_2^*B'\\&\cong\mathrm{pr}_1^*R\mathscr{H}\mathrm{om}(A,A')\otimes(\mathrm{pr}_2^*B)^\vee\otimes\mathrm{pr}_2^*B'\\&\cong R\mathscr{H}\mathrm{om}(A,A')\boxtimes R\mathscr{H}\mathrm{om}(B,B'),\end{aligned}$$

其中第二个同构由 β 的上同调光滑性推出（ [Sch17，第 24.5] 条命题）。现在只需证明 K¨unneth 公式˘适用于 $\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\ \mathrm{Spd}\,k}\to\mathrm{Spd}\ k\leftarrow\mathrm{Spd}\ E$，即存在一个典范同构

$$R\alpha_*A\otimes R\beta_*B\xrightarrow{\sim}R(\alpha\times\beta)_*(A\boxtimes B)$$

适用于 $A \in \mathcal{D}_{\text{ét}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\,\mathrm{Spd}\,k},\ \Lambda)$ 和 $B \in \mathcal{D}_{\mathrm{lc}}(\mathrm{Spd}\ \breve{E},\ \Lambda)$。这由以下三个同构得出：

$$\begin{aligned} R\alpha_* A \otimes R\beta_* B &\cong R\beta_*(\beta^* R\alpha_* A \otimes B), \\ \beta^* R\alpha_* A &\cong R\mathrm{pr}_{2*}\mathrm{pr}_1^* A, \\ B \otimes R\mathrm{pr}_{2*}\mathrm{pr}_1^* A &\cong R\mathrm{pr}_{2*}(\mathrm{pr}_2^* B \otimes \mathrm{pr}_1^* A). \end{aligned}$$

第一个同构由投影公式得出。注意到，我们可以证明 β 是真的，其论证与 [FS21, Proposition II.1.21], 相同；第二个由光滑基变换以及 β的上同调光滑性得出，第三个则由如下事实得出： B 是局部常值的且具有完美纤维。

尚需证明本质满射性。由切除可知，只需证明

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k,\mu}, \Lambda) \otimes \mathcal{D}_{\mathrm{lc}}([\mathrm{Spd}\,k/I_E], \Lambda) \\ \to \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}/[\mathrm{Spd}\,k/I_E]}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k,\mu} \times [\mathrm{Spd}\,k/I_E], \Lambda) \end{aligned}$$

对任意 $\mu \in \mathbb{X}_*^+(T_F)$都是本质满射的。由截断可知，只需证明集中在0次的对象 $A \in \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}/[\mathrm{Spd}\,k/I_E]}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k,\mu} \times [\mathrm{Spd}\ k/I_E], \Lambda)$位于本质像中。由于 $\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k,\mu}$ 如同引理 4.17的证明中那样同构于$\mathrm{Spd}\,k$ 上一个连通群的分类空间，我们可以假定 A 是 $\mathcal{D}_{\mathrm{lc}}([\mathrm{Spd}\,k/I_E], \Lambda)$中某个层的拉回，而这显然位于本质像中。

□

5.2 非导出 Satake 等价与 Weil 作用

如 (2.12) 所示，存在一个对称幺半等价

$$S_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}} : \text{表示范畴}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G} \times I_E, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\ \mathrm{Spd}\ \breve{E}}\overline{\mathbb{Q}_\ell}) \subset \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\ \mathrm{Spd}\ \breve{E}}\overline{\mathbb{Q}_\ell})。 \tag{5.3}$$

根据 [FS21, §VI.11] 中的论证，它是 W_F/I_E-等价的。

由于 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G} \times I_E,\ \mathbb{Q}_\ell)$ 中的任意对象都同构于以下形式的有限直和

$$\bigoplus_{i=1}^n V_i \boxtimes W_i,$$

其中 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $V_i \in$ 表示范畴$^{\mathrm{f.p.}}(\widehat{G},\ \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ 和 $W_i \in$ 表示范畴$^{\mathrm{f.p.}}(I_E,\ \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ 之间有一个函子

$$\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G} \times I_E, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \to \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \otimes \mathcal{D}_{\mathrm{lc}}([\mathrm{Spd}\,k/I_E], \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \tag{5.4}$$

$$\bigoplus_{i=1}^n V_i \boxtimes W_i \mapsto \bigoplus_{i=1}^n S_{\mathrm{Spd}\,k}(V_i) \otimes \mathcal{L}_{W_i}, \tag{5.5}$$

其中 $\mathcal{L}_{W_i}$ 是在（2.5）下对应于 W_i 的局部系统。记

$$\begin{aligned}\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\otimes\mathrm{LS}([\mathrm{Spd}\,k/I_E],\overline{\mathbb{Q}}_\ell)&\\ \subset\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\otimes_{\mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{\mathrm{perf}}}\mathcal{D}_{\mathrm{lc}}([\mathrm{Spd}\,k/I_E],\overline{\mathbb{Q}}_\ell)&\end{aligned}$$

其本质像是指由同构于以下形式的有限直和的对象组成的全子范畴

$$\bigoplus_{i=1}^{n}A_i\boxtimes\mathcal{L}_i,$$

其中 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $A_i\in\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\ \mathrm{Spd}\,k},\ \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 和 $\mathcal{L}_i\in\mathrm{LS}([\mathrm{Spd}\ k/I_E],\ \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$。

本小节的其余部分将用于证明以下引理：

引理 5.3。（*1*）等价（*5.1*）诱导出等价

$$\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,[\mathrm{Spd}\,k/I_F]},\Lambda)\simeq\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,[\mathrm{Spd}\,\mathcal{O}_C/I_F]},\Lambda)\simeq\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,[\mathrm{Spd}\,C/I_F]},\Lambda).\tag{5.6}$$

（*2*）等价（*5.2*）诱导出一个等价

$$\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\otimes\mathrm{LS}([\mathrm{Spd}\,k/I_E],\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\xrightarrow{\simeq}\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k}\times[\mathrm{Spd}\,k/I_E],\overline{\mathbb{Q}}_\ell).\tag{5.7}$$

（*3*）存在一个典范幺半自然同构，使图表

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G}\times I_E,\overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow{S_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}} & \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,\breve{E}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\\ \| & & \simeq\big\downarrow{\scriptstyle(5.1)}\\ & & \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,[\mathrm{Spd}\,k/I_E]},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\\ & & \simeq\big\uparrow{\scriptstyle(5.2)}\\ \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G}\times I_E,\overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow{(5.4)} & \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\otimes\mathcal{D}_{\mathrm{lc}}([\mathrm{Spd}\,k/I_E],\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\end{array}\tag{5.8}$$

可交换。

证明。(1) 我们可以假设 Λ 是一个挠环。根据 [FS21 中 ULA 层和 Satake 层的刻画, 命题 VI.6.4、命题 VI.7.7], , 第一个（分别是第二个）等价归结为以下断言： $\mathcal{D}_{\mathrm{lc}}([\mathrm{Spd}\ \mathcal{O}_C/I_E],\Lambda)$ 中一个对象的所有纤维都是 0 次的有限投射 Λ-模，当且仅当它拉回到 $\mathcal{D}_{\mathrm{lc}}([\mathrm{Spd}k/I_E],\Lambda)$（分别是 $\mathcal{D}_{\mathrm{lc}}([\mathrm{Spd}\,C/I_E],\Lambda)$）后满足相同条件。这由 (2.5) 得出。

(2) 范畴 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G}\times I_E,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 是由同构于如下形式的直和的对象组成的范畴

$$\bigoplus_{i=1}^{n} V_i\boxtimes W_i$$

其中 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $V_i\in\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 和 $W_i\in\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(I_E,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$。因此，$\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\,\mathrm{Spd}\,\breve{E}})$ 是由与以下形式的直和同构的对象构成的范畴

$$\bigoplus_{i=1}^{n} S_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}(V_i\boxtimes\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\star S_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell\boxtimes W_i). \tag{5.9}$$

根据 $S_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}$ 的构造，有 $S_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}(\mathbb{Q}_\ell\boxtimes W_i)=i_{0,\,\mathrm{Spd}\,\breve{E}*}\mathcal{L}_{W_i}$。对象 $i_{0,\,\mathrm{Spd}\,\breve{E}*}\mathcal{L}_{W_i}\in\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\,\mathrm{Spd}\,\breve{E}},\,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 对应于

$$i_{0,[\mathrm{Spd}\,k/I_E]*}\mathcal{L}_{W_i}=i_{0,[\mathrm{Spd}\,k/I_E]*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell\boxtimes\mathcal{L}_{W_i}\in\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,[\mathrm{Spd}\,k/I_E]},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

在 (5.6) 下。因此，对象 $S_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}(\mathbb{Q}_\ell\boxtimes W_i)$ 对应于

$$i_{0,[\mathrm{Spd}\,k/I_E]*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell\boxtimes\mathcal{L}_{W_i}\in\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\otimes_{\mathrm{Vect}^{\mathrm{perf}}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}}\mathcal{D}_{\mathrm{lc}}([\mathrm{Spd}\,k/I_E],\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

在 (5.6) 和 (5.2) 的复合下。

任取 $\mu\in\mathbb{X}_*^+(T_F)$。令 $V_\mu\in\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(\widehat{G},\mathbb{Q}_\ell)$ 表示 G 的最高权为 μ 的不可约表示。交叉上同调层 $IC_\mu\in\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\mathbb{Q}_\ell)$ 配备由 $\mathbb{Q}_\ell,\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\mu$ 上的平凡 I_E-等变结构诱导的 I_E-等变结构，从而定义 $\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,\breve{E}},\mathbb{Q}_\ell)$ 中的一个对象。根据非导出 Satake 等价 (5.3) 的构造（该构造遵循 [FS21, §VI.11], 中的规范化），$\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,\breve{E}},\mathbb{Q}_\ell)$ 中的这个对象在 $S_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}$ 下对应于 $V_\mu\boxtimes\mathbb{Q}_\ell\in\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(\widehat{G}\times I_E,\mathbb{Q}_\ell)$。此外，$IC_\mu\in\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\mathbb{Q}_\ell)$ 和 $IC_{\mu,\mathrm{Spd}\,k}\in\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k},\mathbb{Q}_\ell)$ 在 (3.8) 下对应；考虑到 I_E-等变结构，我们可以证明，$\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,\breve{E}},\mathbb{Q}_\ell)$ 中的上述对象与 $IC_{\mu,\mathrm{Spd}\,k}\boxtimes\mathbb{Q}_\ell\in\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,[\mathrm{Spd}\,\breve{k}/I_E]},\mathbb{Q}_\ell)$ 中的对象在 (5.6) 下对应。这意味着对象 $S_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}(V_\mu\boxtimes\mathbb{Q}_\ell)$ 对应于

$$IC_\mu\boxtimes\overline{\mathbb{Q}}_\ell\in\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\otimes_{\mathrm{Vect}^{\mathrm{perf}}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}}\mathcal{D}_{\mathrm{lc}}([\mathrm{Spd}\,k/I_E],\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

在 (5.6) 与 (5.2) 的复合下。因此，对象 (5.9) 对应于

$$\bigoplus_{i=1}^{n}(S^{-1}_{\mathrm{Spd}\,k}(V_i)\boxtimes\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\star(\overline{\mathbb{Q}}_\ell\boxtimes\mathcal{L}_{W_i})=\bigoplus_{i=1}^{n}(S^{-1}_{\mathrm{Spd}\,k}(V_i)\boxtimes\mathcal{L}_{W_i}).$$

此类对象构成的全子范畴与陈述中的全子范畴一致。

(3) 依照引理 3.2 (2) 证明中的相同论证，存在典范自然同构，使方块

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,\breve{E}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow{F_{G,\mathrm{Spd}\,\breve{E}}} & \mathrm{LS}(\mathrm{Spd}\,\breve{E},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(I_E,\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\
{\scriptstyle(5.6)}\uparrow\simeq & & \uparrow\simeq & {\scriptstyle(2.5)} & \| \\
\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,[\mathrm{Spd}\,\mathcal{O}_C/I_E]},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow[F_{G,[\mathrm{Spd}\,\mathcal{O}_C/I_E]}]{} & \mathrm{LS}([\mathrm{Spd}\,\mathcal{O}_C/I_E],\overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(I_E,\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\
{\scriptstyle(5.6)}\downarrow\simeq & & \uparrow\simeq & {\scriptstyle(2.5)} & \| \\
\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,[\mathrm{Spd}\,k/I_E]},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow{F_{G,[\mathrm{Spd}\,k/I_E]}} & \mathrm{LS}([\mathrm{Spd}\,k/I_E],\overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(I_E,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)
\end{array} \tag{5.10}$$

交换。我们定义

$$F_{G,\mathrm{Spd}\,k}\otimes\mathrm{id}\colon \mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\otimes\mathrm{LS}([\mathrm{Spd}\,k/I_E],\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to\mathrm{LS}([\mathrm{Spd}\,k/I_E],\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

by

$$\bigoplus_{i=1}^{n} A_i\boxtimes\mathcal{L}_i\mapsto\bigoplus_{i=1}^{n} F_{G,\mathrm{Spd}\,k}(A_i)\otimes\mathcal{L}_i,$$

其中 $F_{G,\ \mathrm{Spd}\,k}(A_i)\ \in\mathrm{LS}(\mathrm{Spd}\ k,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\ =\mathrm{Vect}^{\heartsuit\ \mathrm{f.d.}}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$，被视为 $[\mathrm{Spd}\,k/I_E]$ 上的常局部系。由 K¨unneth 公式，存在一个自然同构，使交换图

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,[\mathrm{Spd}\,k/I_E]},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow{F_{G,[\mathrm{Spd}\,k/I_E]}} & \mathrm{LS}([\mathrm{Spd}\,k/I_E],\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\
{\scriptstyle(5.7)}\uparrow & & \| \\
\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{c}\ \ \mathrm{k}_{G,\mathrm{Spd}\,k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\otimes\mathrm{LS}([\mathrm{Spd}\,k/I_E],\overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow[F_{G,\mathrm{Spd}\,k}\otimes\mathrm{id}]{} & \mathrm{LS}([\mathrm{Spd}\,k/I_E],\overline{\mathbb{Q}}_\ell).
\end{array} \tag{5.11}$$

复合 (5.10) 和 (5.11)，得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,\breve{E}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \longrightarrow & \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(I_E,\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\
\downarrow\simeq & & \| \\
\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}\ \ _{G,\mathrm{Spd}\,k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\otimes\mathrm{LS}([\mathrm{Spd}\,k/I_E],\overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \longrightarrow & \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(I_E,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)
\end{array} \tag{5.12}$$

在自然同构意义下交换。由 3.2 (2) 的证明，$F_{\mathrm{Spd}\,k}$ 与等价 $\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C})\ \simeq \mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k})$ 在 (3.8) 中的复合同构于 $F_{\mathrm{Spd}\,C}$。我们在 $F_{\mathrm{Spd}\,k}$ 上定义一个对称幺半结构为

$F_{\mathrm{Spd}\, C}$ 上该结构的拉回。这定义了 $F_{G,\mathrm{Spd}\, k} \otimes \mathrm{id}$ 上的对称幺半结构。我们断言，自然同构 (5.12) 关于这些幺半结构是幺半的。

图表（5.10）与图表相容

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, C}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow{F_{G,\mathrm{Spd}\, C}} & \mathrm{LS}(\mathrm{Spd}\, C, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{\heartsuit,\mathrm{f.d.}} \\
\uparrow{\scriptstyle (3.8)}\,\simeq & & \uparrow\simeq & & \| \\
\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, \mathcal{O}_C]}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow[F_{G,\mathrm{Spd}\, \mathcal{O}_C}]{} & \mathrm{LS}(\mathrm{Spd}\, \mathcal{O}_C, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{\heartsuit,\mathrm{f.d.}} \\
\downarrow{\scriptstyle (3.8)}\,\simeq & & \uparrow\simeq & & \| \\
\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, k}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow{F_{G,\mathrm{Spd}\, k}} & \mathrm{LS}(\mathrm{Spd}\, k, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{\heartsuit,\mathrm{f.d.}}
\end{array}$$

且交换图（5.11）与交换图相容

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, k}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow{F_{G,\mathrm{Spd}\, k}} & \mathrm{LS}(\mathrm{Spd}\, k, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\
\| & & \| \\
\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, k}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow[F_{G,\mathrm{Spd}\, k}]{} & \mathrm{LS}(\mathrm{Spd}\, k, \overline{\mathbb{Q}}_\ell).
\end{array}$$

在沿着 $\mathrm{Spd}\ C \to \mathrm{Spd}\ \breve{E}$ 和 $\mathrm{Spd}\, k \to [\mathrm{Spd}\ k/I_E]$ 的各种拉回函子以及遗忘函子 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(I_E) \to \mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{\heartsuit\ \mathrm{f.d.}}$，作用下。因此，交换图（5.12）与一个自然同构相容，该自然同构使得交换图呈现为

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, C}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \longrightarrow & \mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{\heartsuit,\mathrm{f.d.}} \\
\downarrow\simeq & & \| \\
\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, k}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \longrightarrow & \mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{\heartsuit,\mathrm{f.d.}}
\end{array} \tag{5.13}$$

交换。由于根据定义，该自然同构是幺半的，并且由于遗忘函子 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(I_E) \to \mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{\heartsuit\ \mathrm{f.d.}}$，是忠实的。这意味着自然同构（5.12）是幺半的。

由于纤维函子$F_{G,\mathrm{Spd}\, C}$ 的 Tannakian 群同构于 G，故$F_{G,\mathrm{Spd}\, k}$的 Tannakian 群亦然。从而，$F_{G,\mathrm{Spd}\, k} \otimes \mathrm{id}$ 的 Tannakian 群同构于带有平凡 I_E-作用的 G。因此，交换图 (5.12) 诱导出一个交换图

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, \breve{E}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G} \times I_E, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\
\downarrow\simeq & & \downarrow{\scriptstyle (-)^\psi} \\
\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, k}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes \mathrm{LS}([\mathrm{Spd}\, k/I_E], \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G} \times I_E, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)
\end{array} \tag{5.14}$$

在相差一个幺半自然同构的意义下交换，其中 $(\text{–})^{\psi}$ 是一个经由同构 $\psi\colon \widehat{G} \xrightarrow{\simeq} \widehat{G}$ 扭转 $\widehat{G}$-作用的函子。交换图 (5.13) 诱导出交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, C}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\ \downarrow \simeq & & \| \\ \mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, k}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell). \end{array}$$

由于这与 (5.14) 相容，由此可得 $\psi = \mathrm{id}$。因此，幺半自然同构 (5.14) 诱导出所需的幺半自然同构。

□

5.3 半单与单连通情形

5.3.1 上链函子、其全忠实性与 Weil 作用

设 $q_{I_E}\colon \mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, C} \to \mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, \breve{E}}$ 表示自然投影。对任意对象 $A \in \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, \breve{E}}, \mathbb{Q}_\ell)$，微分分次代数 $R\Gamma(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, C}, q_{I_E}^* A)$ 同时具有 $\mathcal{D}\mathrm{Rep}(I_E, \mathbb{Q}_\ell)$ 中对象的结构（论证同 §3.3）以及 $R\Gamma(\mathcal{H}\overline{\mathrm{ck}}_{G,\mathrm{Spd}\, C}, \mathbb{Q}_\ell)$-模的结构，且二者相容。由命题 3.21，我们得到一个函子

$$R\Gamma_{\mathrm{Spd}\, \breve{E}}\colon \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\, \breve{E}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to \mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}\text{-mod}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(I_E)).$$

首先，我们证明如下结论：

引理 5.4. 函子 $R\Gamma_{\mathrm{Spd}\, \breve{E}}$ 是全忠实的。

证明. 由引理 5.1，问题可归结为在 $[\mathrm{Spd}\, k/I_E]$ 上的情形，而非 $\mathrm{Spd}\, \breve{E} = [\mathrm{Spd}\, C/I_E]$。也就是说，只需证明其全忠实性

$$R\Gamma_{[\mathrm{Spd}\, k/I_E]}\colon \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,[\mathrm{Spd}\, k/I_E]}) \to \mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}\text{-mod}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(I_E))$$

其定义方式与 $R\Gamma_{\mathrm{Spd}\, \breve{E}}$ 相同。由于 $\mathcal{O}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}$ 上的 I_E-作用是平凡的，存在一个典范等价

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}\text{-mod} \otimes \mathcal{D}\mathrm{Rep}(I_E) &= \mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}\text{-mod}(\mathrm{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}) \otimes \mathcal{D}\mathrm{Rep}(I_E) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}\text{-mod}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(I_E)). \quad (5.15) \end{aligned}$$

该复合

$$\begin{aligned}&\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k})\otimes\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(I_E)\simeq\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k})\otimes\mathcal{D}_{\mathrm{lc}}([\mathrm{Spd}\,k/I_E])\\&\xrightarrow{-\boxtimes-}\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k}\times[\mathrm{Spd}\,k/I_E],\Lambda)=\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,[\mathrm{Spd}\,k/I_E]},\Lambda)\\&\xrightarrow{R\Gamma_{[\mathrm{Spd}\,k/I_E]}}\mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}\text{-mod}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(I_E))\simeq\mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}\text{-mod}\otimes\mathcal{D}\mathrm{Rep}(I_E)\end{aligned}$$

同构于

$$R\Gamma_{\mathrm{Spd}\,k}\otimes\mathrm{incl}\colon\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k})\otimes\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(I_E))\to\mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}\text{-mod}\otimes\mathcal{D}\mathrm{Rep}(I_E)$$

其中，函子 $R\Gamma_{\mathrm{Spd}\,k}$ 以与 $R\Gamma$ 相同的方式定义，而 incl 是包含。由于 $R\Gamma_{\mathrm{Spd}\,k}$ 将 Spd C 替换为 Spd k 后由引理 4.2 可知是全忠实的，因此我们得到所述结论。

□

我们以给出一个关于 Weil 作用的引理来结束本节。 W_F 对 $\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)$ 的作用，以及 W_F 通过内自同构对 I_E 的作用，使 $\mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}$-mod($\mathcal{D}$ 表示范畴 (I_E)) 成为 $\widehat{\mathrm{Cat}}^{mon}_{\infty}$ 中的一个对象。由于 I_E 对 $\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)$ 的作用是平凡的，且任意 $w\in I_E$ 在 $\mathcal{D}$ 表示范畴(I_E) 上的作用都自然同构于恒等态射，因此我们可以将目标视为 $\widehat{\mathrm{Cat}}^{mon,\,B(W_F/I_E)}_{\infty}$ 中的一个对象。

引理 5.5。该函子

$$R\Gamma_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}\colon\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,\breve{E}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to\mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}\text{-mod}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(I_E,\overline{\mathbb{Q}}_\ell))$$

自然具有函子结构 $\widehat{\mathrm{Cat}}^{mon,\,B(W_F/I_E)}_{\infty}$。

证明。这由与引理 4.8 相同的论证以及同构 (4.5) 是 W_F-等价的这一事实得出。

□

5.3.2 Kostant 函子与 Weil 作用

我们还需要一个关于 Kostant 函子的结果

$$\kappa^{/\!/}\colon\mathrm{Coh}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{/\!/}\to\mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}\text{-mod}.$$

令 $\mathrm{act}^{\mathrm{geom}}_{\widehat{\mathfrak{g}}^*,1,()}(w)\colon\widehat{\mathfrak{g}}^*\to\widehat{\mathfrak{g}}^*$ 为 $\mathrm{act}^{\mathrm{geom}}_{\widehat{\mathfrak{g}}^*}(w)$（定义于 §2.3）与乘以 $q^{\deg w}$（Tate 扭曲）的复合。也就是说，由 $\mathrm{act}^{\mathrm{geom}}_{\widehat{\mathfrak{g}}^*,1,()}$诱导的 W_F 在 $\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{g}}^*}$上的作用，与定理 1.1 中写出的 W_F 在 $\mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{g}}(-1)[-2])$上的作用相差一个平移$[-2]$。作用 $\mathrm{act}^{\mathrm{geom}}_{\widehat{G}}$和 $\mathrm{act}^{\mathrm{geom}}_{\widehat{\mathfrak{g}}^*,1,()}$在 $[\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}]$ 上诱导出一个 W_F-作用 $\mathrm{act}_{\widehat{\mathfrak{g}}^*(1)/\widehat{G}}$，其中

$\sim I_E$ 平凡作用。这个作用使范畴 拟凝聚层$([\widehat{\mathfrak{g}}^*/G])$ 和 $\mathrm{Coh}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/G])$ 成为 $\widehat{\mathrm{Cat}}_{mon,\ B(W_F/I_E)\ \infty,\ \mathbb{Q}_\ell}$ 的对象。具体而言，在以下识别下

$$\mathrm{QCoh}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}]) \simeq \mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{g}}^*}\text{-}\mathrm{mod}(\mathcal{D}(\mathrm{Rep}(\widehat{G}))),$$

$w \in W_F$ 的作用与函子 $(-)^{w}$ 一致：通过 $\mathrm{act}^{\mathrm{geom}}_{\widehat{G}}(w)$ 将 $\widehat{G}$-作用扭曲，并通过由 $\mathrm{act}^{\mathrm{geom}}_{\widehat{\mathfrak{g}}^*\ 1\ ()}(w)$ 诱导的同态 $\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{g}}^*} \to \mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{g}}^*}$ 将 $\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{g}}^*}$-作用扭曲：$\widehat{\mathfrak{g}}^* \to \widehat{\mathfrak{g}}^*$。因此，范畴 $\mathrm{QCoh}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{/\!\!/}$ 和 $\mathrm{Coh}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{/\!\!/}$ 也是 $\widehat{\mathrm{Cat}}_{mon,\ B(W_F/I_E)\ \infty,\ \mathbb{Q}_\ell}$ 的对象。

回想一下，正如我们在 §4.2.1 中讨论的，函子 $\kappa^{/\!\!/}$ 是由以下内容构造的

$$\kappa\colon \mathrm{Coh}^{\mathbb{G}_m}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{\heartsuit} \to \mathrm{QCoh}^{\mathbb{G}_m}(\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W))^{\heartsuit}.$$

$\mathrm{Coh}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{/\!\!/}$ 上的 W_F/I_E-作用（分别为 $\mathcal{O}^{/\!\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}$-模上的作用）等价于由 $\mathrm{Coh}^{\mathbb{G}_m}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{\heartsuit}$ 上的 W_F/I_E-作用（分别为 $\mathrm{QCoh}^{\mathbb{G}_m}(\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W))^{\heartsuit}$ 上的作用）构造的作用。

我们有如下结果：

引理 5.6. 对于 $w \in W_F$，存在一个幺半自然同构，使得该交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Coh}^{\mathbb{G}_m}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{\heartsuit} & \xrightarrow{\kappa} & \mathrm{QCoh}^{\mathbb{G}_m}(\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W))^{\heartsuit} \\ {\scriptstyle w^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle w^*} \\ \mathrm{Coh}^{\mathbb{G}_m}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{\heartsuit} & \xrightarrow{\kappa} & \mathrm{QCoh}^{\mathbb{G}_m}(\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W))^{\heartsuit} \end{array} \tag{5.16}$$

交换。

证明. 乘积 $\mathrm{act}^{\mathrm{geom}}_{\widehat{\mathfrak{g}}^*\ 1\ ()} \times \mathrm{act}^{\mathrm{geom}}_{\widehat{\mathfrak{g}}}$ 定义了 $\widehat{\mathfrak{g}}^* \times \widehat{\mathfrak{g}}$ 上的一个 W_F-作用。由于乘以 q 不改变中心化子，这诱导了 $\mathrm{Tot}(\mathfrak{z}) \subset (\widehat{\mathfrak{g}}^*)^{\mathrm{reg}} \times \widehat{\mathfrak{g}}$ 上的一个 W_F-作用。对于 $w \in W_F$，令

$$w^*\colon \mathrm{Coh}(\mathrm{Tot}(\mathfrak{z})) \to \mathrm{Coh}(\mathrm{Tot}(\mathfrak{z})).$$

为沿 w 的作用的拉回。对于 $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}^{\mathbb{G}_m}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{\heartsuit}$，令 $\widetilde{\mathcal{F}} \in \mathrm{Coh}^{\mathbb{G}_m}(\mathrm{Tot}(\mathfrak{z}))^{\heartsuit}$为按 κ 的定义中所写方式定义的凝聚层。于是我们有

$$\widetilde{w^*\mathcal{F}} \cong w^*\widetilde{\mathcal{F}}. \tag{5.17}$$

为证明这一点，只需证明对于任意点 ξ：谱 $K \to (\widehat{\mathfrak{g}}^*)^{\mathrm{reg}}$，在以下识别下，$\mathcal{F}$ 的 G-等变结构所诱导的 $Z_{\widehat{G}_K}(w(\xi))$ 在 $\mathcal{F}_{w(\xi)}$ 上的作用$\widehat{}$，与 $w^*\mathcal{F}$ 的 G-等变结构所诱导的 $Z_{\widehat{G}_K}(\xi)$ 在 $(w^*\mathcal{F})_\xi$ 上的$\widehat{}$作用一致：

识别 $(\mathrm{act}^{\mathrm{geom}}_{\widehat{G}}(w))_K$：$Z_{\widehat{G}_K}(\xi) \xrightarrow{\sim} Z_{\widehat{G}_K}(w(\xi))$ 与 $\mathcal{F}_{w(\xi)} \cong (w^*\mathcal{F})\xi$。这显而易见。现在，所需自然同构的存在性可由自然投影这一事实轻易推出

$$\mathrm{Tot}(\mathfrak{z}) \to \mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)$$

相对于我们所考虑的 W_F-作用，它是 W_F-等变的。该同构的幺半性可由一个直接的论证得出，其中用到了存在如下形式的交换图这一事实：

$$\begin{array}{ccc}
w^*((\mathcal{F}_1 \otimes_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{g}}^*}} \mathcal{F}_2)^\sim) & \xrightarrow[(4.7)]{\sim} & w^*(\widetilde{\mathcal{F}_1} \star_{\mathrm{Tot}} \widetilde{\mathcal{F}_2}) \\
\downarrow{\scriptstyle (5.17)} & & \downarrow \\
(w^*(\mathcal{F}_1 \otimes_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{g}}^*}} \mathcal{F}_2))^\sim & & w^*\widetilde{\mathcal{F}_1} \star_{\mathrm{Tot}} w^*\widetilde{\mathcal{F}_2} \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (5.17)} \\
(w^*\mathcal{F}_1 \otimes_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{g}}^*}} w^*\mathcal{F}_2)^\sim & \xrightarrow[(4.7)]{\sim} & \widetilde{w^*\mathcal{F}_1} \star_{\mathrm{Tot}} \widetilde{w^*\mathcal{F}_2}.
\end{array}$$

□

由此以及各种自然同构之间的相容性，函 r

$$\kappa\colon \mathrm{Coh}^{\mathbb{G}_m}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^\heartsuit \to \mathrm{QCoh}^{\mathbb{G}_m}(\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W))^\heartsuit$$

具有 $\widehat{\mathsf{Cat}}^{mon\ \ BW_F^{\mathrm{disc}}}_{\infty,,\mathbb{Q}_\ell}$ 中函子的结构。此外，由于 $w \in I_E$ 的自然态射 (5.16) 是平凡的，它也具有 $\widehat{\mathsf{Cat}}_{mon,B(W_F/I_E)\ \infty,\mathbb{Q}_\ell}$ 中函子的结构。因此，根据 §4.2.1 中的构造，我们得到如下结果：

引理 5.7。函子

$$\kappa^{/\!/}\colon \mathrm{Coh}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{/\!/} \to \mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}\text{-mod}$$

具有 $\widehat{\mathrm{Cat}}_{mon,\ B(W_F/I_E)\ \infty,\mathbb{Q}_\ell}$ 中函子的典范结构。

此外，我们定义

$$\kappa^{/\!/}_{I_E}\colon \mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{g}}[-2])\text{-mod}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(\widehat{G} \times I_E)) \to \mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}\text{-mod}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(I_E))$$

因此，在自然等价之下

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Coh}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{/\!/} \otimes \mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(I_E) \\
&= \mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{g}}[-2])\text{-mod}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{D}(\mathrm{Rep}(\widehat{G})) \otimes \mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(I_E) \\
&\xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{g}}[-2])\text{-mod}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(\widehat{G} \times I_E))
\end{aligned}$$

以及等价 (5.15) 之下，函子 κ_{I_E} 与 κ和包含 $\mathcal{D}$表示范畴$^{\mathrm{perf}}(I_E)$ $\subset$ $\mathcal{D}$表示范畴(I_E)的张量积一致。由于我们可以将 $\mathcal{D}$表示范畴$^{\mathrm{perf}}(I_E)$)视为 $\widehat{\mathrm{Cat}}_{B(W_F/I_E)\ \infty,\mathbb{Q}_\ell}$ 中的一个对象，并且如 §4.2.1 所述， $\kappa^{/\!/}$ 是全忠实的，因此我们有

引理 5.8. 该函子

$$\kappa^{/\!/}_{I_E}\colon \mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{g}}[-2])\text{-mod}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(\widehat{G}\times I_E)) \to \mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\check{\mathfrak{t}}^*/W)}\text{-mod}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(I_E))$$

在 $\widehat{\mathrm{Cat}}_{mon,\ B(W_F/I_E)\ \infty,\mathbb{Q}_\ell}$ 中具有函子的典范结构。此外，它是全忠实的。

由引理 5.4、引理 5.5 和引理 5.8，我们有如下结论：

定理 5.9. 存在一个本质上唯一的等价

$$\mathcal{S}^{der}_{\mathrm{Spd}\,\check{E}}\colon \mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{g}}[-2])\text{-mod}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(\widehat{G}\times I_E,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,\check{E}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

在 $\widehat{\mathrm{Cat}}_{mon,\ B(W_F/I_E)\ \infty,\mathbb{Q}_\ell}$ 中，使得存在自然同构

$$R\Gamma_{I_E}\circ\mathcal{S}^{der}_{\mathrm{Spd}\,\check{E}} \simeq \kappa^{/\!/}_{I_E} \tag{5.18}$$

在 $\widehat{\mathrm{Cat}}_{mon,\ B(W_F/I_E)\ \infty,\mathbb{Q}_\ell}$ 中，
以及

$$S_{\mathrm{Spd}\,\check{E}} \simeq \mathcal{S}^{der}_{\mathrm{Spd}\,\check{E}}\circ fr|_{\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(\widehat{G}\times I_E,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)} \tag{5.19}$$

在 $\widehat{\mathrm{Cat}}^{mon}_{\infty,\ \mathbb{Q}_\ell}$，
$\mathbb{Q}_\ell$。

我们将在下一节证明，(5.19) 可以规范地提升为 $\widehat{\mathrm{Cat}}_{mon,\ \ B(W_F/I_E)\ \infty,\ \mathbb{Q}_\ell}$ 中的一个态射。

证明。 考虑该陈述的非等变版本：

存在一个本质上唯一的等价 $\mathcal{S}^{der}{}_{\mathrm{Spd}\ \check{E}}$ 到 $\widehat{\mathrm{Cat}}^{mon}_{\infty\ ,\ \mathbb{Q}_\ell}$，使得 (5.18) 和 (5.19) 是 $\widehat{\mathrm{Cat}}^{mon}_{\infty\ ,\ \mathbb{Q}_\ell}$ 中的自然同构。

若该版本得证，则由 $R\Gamma_{I_E}$ 和 $\kappa^{/\!/}_{I_E}$ 的全忠实性可知， $\mathcal{S}^{der}{}_{\mathrm{Spd}\ \check{E}}$ 上存在本质上唯一的 W_E/I_F-等变结构，使得 (5.18) 是等变的。因此，定理得证。

接下来只需证明非等变版本。由 $R\Gamma_{I_E}$ 和 $\kappa^{/\!/}_{I_E}$ 的全忠实性可得本质唯一性。根据引理 5.3 以及 §5.3.1 和 §5.3.2 中的论证，只需证明存在一个函子

$$\mathcal{S}^{der}_{\mathrm{Spd}\,k,I_E}\colon \mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{g}}[-2])\text{-mod}^{fr}(\mathcal{D}(\mathrm{Rep}(\widehat{G})))\otimes\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(I_E) \to \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k})\otimes\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(I_E)$$

使得存在自然同构

$$(R\Gamma_{\mathrm{Spd}\,k}\otimes \mathrm{id}_{\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(I_E)})\circ \mathcal{S}^{der}_{\mathrm{Spd}\,k,I_E}\simeq \kappa\otimes \mathrm{id}_{\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(I_E)}.$$

and

$$S_{\mathrm{Spd}\,k}\otimes \mathrm{id}_{\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(I_E)}\simeq \mathcal{S}^{der}_{\mathrm{Spd}\,k,I_E}\circ (fr|_{\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(\widehat{G})}\otimes \mathrm{id}_{\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(I_E)})$$

在 $\widehat{\underline{\mathrm{Cat}}}^{mon}_{\infty,\mathbb{Q}_\ell}$ 中。这里， $S_{\mathrm{Spd}\,k}\otimes \mathrm{id}_{\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(I_E)}$ 是如下形式的函子

$$\bigoplus_{i=1}^{n} V_i\boxtimes W_i\mapsto \bigoplus_{i=1}^{n} S_{\mathrm{Spd}\,k}(V_i)\boxtimes W_i,$$

其中 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$、 $V_i\in \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(\widehat{G})$ 和 $W_i\in \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(I_E)$。我们类似地定义函子 $fr|_{\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(\widehat{G})}\otimes \mathrm{id}_{\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(I_E)}$。

然而，由命题 4.6 和注 4.7 可知，

$$\mathcal{S}^{der}_{\mathrm{Spd}\,k,I_E}=\mathcal{S}^{der}_{\mathrm{Spd}\,k}\otimes \mathrm{id}_{\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(I_E)}$$

满足该条件。 □

5.3.3 与非导出 Satake 等价的相容性

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$由于映射空间 $[\mathfrak{g}^*/G]\to[*/G]$ 是 W_F/I_E-等变的，函子

$$fr|_{\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G})}:\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G})\subset \mathcal{D}^b(\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G}))=\mathrm{Coh}([*/\widehat{G}])\to \mathrm{Coh}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{/\!/}$$

具有 $\widehat{\underline{\mathrm{Cat}}}^{mon\ \ BW_F^{\mathrm{disc}}}_{\infty,,\mathbb{Q}_\ell}$ 和 $\widehat{\underline{\mathrm{Cat}}}_{mon,\ B(W_F/I_E)\infty,\mathbb{Q}_\ell}$ 中的函子结构。具体地，对于对象 $V\in \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G})=\mathcal{D}^b(\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G}))^{\heartsuit}$，在识别 $\mathrm{Coh}([\widehat{\mathfrak{g}}^*/\widehat{G}])^{/\!/}\simeq \mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{g}}[-2])\text{-}\mathrm{mod}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{D}(\mathrm{Rep}(\widehat{G})))$ 下， fr 的 W_F-等变结构是如下同构

$$\mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{g}}[-2])\otimes (V^w)\xrightarrow{\sim}(\mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{g}}[-2])\otimes V)^w, a\otimes v\mapsto w(a)\otimes v.$$

通过与 κ_{I_E} 情形相同的论证，存在一个典范函子

$$fr|_{\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G}\times I_E)}:\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G}\times I_E)\to \mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{g}}[-2])\text{-}\mathrm{mod}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(\widehat{G}\times I_E)),$$
$$V\mapsto \mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{g}}[-2])\otimes V$$

在 $\widehat{\underline{\mathrm{Cat}}}_{mon,\ B(W_F/I_E)\ \infty,\mathbb{Q}_\ell}$ 中。本节将证明以下命题

命题 5.10. 自然同构 *(5.19)* 具有如下态射的结构：在 $\widehat{\mathrm{Cat}}_{mon,\ B(W_F/I_E)\infty,\mathbb{Q}_\ell}$ 中，关于上文定义的 (W_F/I_E) 等变结构。

证明与 §4.2.3 中的论证类似。我们已经定义了这些函子

$$\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G}\times I_E)\xrightarrow{fr}\mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{g}}[-2])\text{-mod}^{fr}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(\widehat{G}\times I_E))$$
$$\xrightarrow{\mathcal{S}^{der}_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}}\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,\breve{E}})\xrightarrow{R\Gamma}\mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}\text{-mod}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(I_E)).$$

令 $\mathcal{C}'_1$，$\mathcal{C}'_2$，$\mathcal{C}'_3$ 分别为上述第二、第三和第四个范畴中 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G}\times I_E)$ 的本质像。如 §4.2.3 所示，只需证明自然同构

$$(\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G}\times I_E)\xrightarrow{fr}\mathcal{C}'_1\xrightarrow{\mathcal{S}^{der}_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}}\mathcal{C}'_2)\simeq(\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G}\times I_E)\xrightarrow{S_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}}\mathcal{C}'_2)\tag{5.20}$$

是 1-范畴之间的幺半且 (W_F/I_E)-等变的函子。考虑幺半函子

$$H^*\colon\mathcal{C}'_3\subset\mathcal{O}^{/\!/}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}\text{-mod}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(I_E))\to\mathcal{O}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}\text{-mod}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(I_E))^{\heartsuit},\ \mathcal{F}\mapsto\bigoplus_i H^i(\mathcal{F})$$

（这些 1-范畴之间的函子）。令 d_{I_E} 为复合

$$d_{I_E}\colon\mathcal{C}'_3\xrightarrow{H^*}\mathcal{O}_{\mathbb{T}(\widehat{\mathfrak{t}}^*/W)}\text{-mod}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(I_E))^{\heartsuit}\xrightarrow{\overline{\mathbb{Q}}_\ell\otimes_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{t}}^*/W}}-}\mathrm{Rep}(I_E).$$

那么我们可以证明以下引理：

引理 5.11。 存在一个(W_F/I_E)-等变的幺半自然同构，连接复合

$$\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,\breve{E}})=\mathcal{C}'_2\xrightarrow{R\Gamma}\mathcal{C}'_3\xrightarrow{d_{I_E}}\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(I_E)$$

and

$$F_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}:=H^*(\mathrm{Gr}_{G,\mathrm{Spd}\,C},q^*_{I_E}-)\colon\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,\breve{E}})\to\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(I_E)$$
$$\mathcal{F}\mapsto\bigoplus_i H^i(\mathrm{Gr}_{G,\mathrm{Spd}\,C},q^*_{I_E}\mathcal{F}).$$

证明。 由引理 4.12，只需证明对任意 $\mathcal{F}\in\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C})$ 与 $w\in W_F$，下列交换图可交换，这是显然的：

$$\begin{array}{ccc}
H^*(\mathrm{Spd}\,C)\otimes_{H^*([\mathrm{Spd}\,C/L^+_{\mathrm{Spd}\,C}G])}H^*(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\mathcal{F}) & \xrightarrow{(4.10)} & H^*(\mathrm{Gr}_{G,\mathrm{Spd}\,C},\mathcal{F})\\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes w^*} & & \downarrow{\scriptstyle w^*}\\
H^*(\mathrm{Spd}\,C)\otimes_{H^*([\mathrm{Spd}\,C/L^+_{\mathrm{Spd}\,C}G])}H^*(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,C},w^*\mathcal{F}) & \xrightarrow{(4.10)} & H^*(\mathrm{Gr}_{G,\mathrm{Spd}\,C},w^*\mathcal{F}).
\end{array}$$

□

命题 *5.10* 的证明。 考虑同构 (4.8) 与 $F_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}$ 的复合:

$$\begin{aligned}&(\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G}\times I_E)\xrightarrow{fr}\mathcal{C}_1'\overset{\mathcal{S}^{der}_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}}{\longrightarrow}\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,\breve{E}})\overset{F_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}}{\longrightarrow}\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(I_E))\\&\simeq(\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G}\times I_E)\overset{S_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}}{\longrightarrow}\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,\breve{E}})\overset{F_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}}{\longrightarrow}\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(I_E))\end{aligned}\tag{5.21}$$

我们断言，这个同构与如下形式的复合一致

$$\begin{aligned}&(\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G}\times I_E)\xrightarrow{fr}\mathcal{C}_1'\overset{\mathcal{S}^{der}_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}}{\longrightarrow}\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,\breve{E}})\overset{F_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}}{\longrightarrow}\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(I_E))\\&\simeq(\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G}\times I_E)\xrightarrow{fr}\mathcal{C}_1'\overset{\mathcal{S}^{der}_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}}{\longrightarrow}\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,\breve{E}})\overset{R\Gamma_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}}{\longrightarrow}\mathcal{C}_3'\xrightarrow{d_{I_E}}\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(I_E))\\&\simeq(\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G}\times I_E)\xrightarrow{fr}\mathcal{C}_1'\xrightarrow{\kappa_{I_E}}\mathcal{C}_3'\xrightarrow{d_{I_E}}\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(I_E))\\&\simeq(\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G}\times I_E)\xrightarrow{\mathrm{forget}}\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(I_E)))\\&\simeq(\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G}\times I_E)\overset{S_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}}{\longrightarrow}\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,\breve{E}})\overset{F_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}}{\longrightarrow}\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(I_E)).\end{aligned}\tag{5.22}$$

由引理 5.1 可知，这归结为对 $\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,[\mathrm{Spd}\,k/I_E]})$ 的类似断言。接着，根据 §5.2、5.3.1 和 5.3.2 中的论证，所有出现的函子都可以写成某个函子与 $\mathrm{id}_{\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(I_E,\mathbb{Q}_\ell)}$ 的张量积的限制。因此，这归结为对 $\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,k})$ 的类似断言。该断言可由引理 4.13 的证明推出。于是断言得证。

由引理 5.11 可知，(5.22) 中的第一个同构是幺半的且具 (W_F/I_E)-等变性；根据 $\mathcal{S}^{der}{}_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}$ 上幺半结构和 (W_F/I_E)-等变结构的定义，第二个同构也如此；第三个同构则由一个简单的纯代数论证得出；第四个同构则来自（非导出的）几何 Satake 等价的构造。因此，同构 (5.21) 是幺半的且具 (W_F/I_E)-等变性。由于 1-范畴的函子 $F_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}$of 在 $\mathrm{Sat}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,\breve{E}})$ 上是忠实的，故断言成立。

□

5.4 环面的情形

假设 $G=T$ 是一个环面。通过与定理 4.15 类似的论证，我们可以证明˘环面上的导出 Satake 等价，其中底空间为 $\mathrm{Spd}\,E$ 。

定理 5.12. 存在一个典范等价

$$\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{T,\mathrm{Spd}\,\breve{E}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\simeq\mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{t}}[-2])\text{-}\mathrm{mod}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(\widehat{T}\times I_E,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)).$$

在 $\widehat{\ }\mathrm{Cat}_{mon,\ B}($
$W_F/I_E)\ \infty,\ \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 。

此外，存在一个典范等价

$$S_{T,\mathrm{Spd}\,C} \simeq \mathcal{S}^{der}_{T,\mathrm{Spd}\,\breve{E}} \circ fr|_{\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{T}\times I_E,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)} : \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{T}\times I_E,\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{T,\mathrm{Spd}\,\breve{E}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

in $\widehat{\mathrm{Cat}}^{mon,\ B(W_F/I_E)}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$.

证明。 存在一个分解

$$\mathcal{H}\mathrm{ck}_{T,\mathrm{Spd}\,\breve{E}} = \coprod_{\mathbb{X}_*(T_{\overline{F}})} [\mathrm{Spd}\,\breve{E}/L^+_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}T].$$

考虑到 W_E-作用，存在一个等价

$$\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{T,\mathrm{Spd}\,\breve{E}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}([\mathrm{Spd}\,\breve{E}/L^+_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}T],\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes \bigoplus_{\mathbb{X}_*(T_{\overline{F}})} \mathrm{Vect}^{\mathrm{perf}}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} \tag{5.23}$$

在 $\widehat{\mathrm{Cat}}^{mon,\ B(W_F/I_E)}_{\infty,\mathbb{Q}_\ell}$ 中，其中 $\bigoplus_{\mathbb{X}_*(T_F)} \mathrm{Vect}^{\mathrm{perf}}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ 作为 $\widehat{\mathrm{Cat}}^{mon,\ B(W_F/I_E)}_{\infty,\mathbb{Q}_\ell}$ 中的一个对象，具有典范结构，使得其幺半结构是 $\mathbb{X}_*(T_F)$-分次的，且其 W_F/I_E-等变结构由 $\mathbb{X}_*(T_F)$ 上的 W_F/I_E-作用诱导。

令 q_{BL^+T}: $[\mathrm{Spd}\,C/L^+\mathrm{Spd}\,CT] \to [\mathrm{Spd}\ \breve{E}/L^+\mathrm{Spd}\,\breve{E}T]$ 为该投影。与上文类似，我们可以定义函子

$$\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}([\mathrm{Spd}\,\breve{E}/L^+_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}T]) \to \mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{t}}[-2])\text{-mod}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(I_E)),$$
$$A \mapsto R\Gamma(\mathrm{Spd}\,C, q^*_{BL^+T}A)$$

令 g: $[\mathrm{Spd}\ \breve{E}/L^+\mathrm{Spd}\,\breve{E}T] \to \mathrm{Spd}\ \breve{E}$ 表示该投影，并令 $\mathcal{IC}_{BL^+T,\mathrm{Spd}\,\breve{E}}$ 表示函子的本质像

$$\mathcal{D}\mathrm{Rep}^{\mathrm{perf}}(I_E,\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \simeq \mathcal{D}_{\mathrm{lc}}(\mathrm{Spd}\,\breve{E},\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \xrightarrow{g^*} \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}([\mathrm{Spd}\,\breve{E}/L^+_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}T]).$$

然后，按照定理 4.15 的相同论证，我们可以由 $R\Gamma_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}|_{\mathcal{IC}_{BL^+T,\mathrm{Spd}\,\breve{E}}}$ 的全忠实性和幺半性，证明 $R\Gamma_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}$ 的全忠实性和幺半性。注意到，同态 (4.17) 与 $\mathrm{Spd}\,C/L^+\mathrm{Spd}\,CT$ 上的 Weil 作用相容，因此 $R\Gamma_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}$ 具有 $\widehat{\mathrm{Cat}}^{mon,\ B(W_F/I_E)}_{\infty,\mathbb{Q}_\ell}$ 中态射的结构。

再次按照定理 4.15 的相同方式论证，可得一个等价

$$\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}([\mathrm{Spd}\,\breve{E}/L^+_{\mathrm{Spd}\,\breve{E}}T]) \simeq \mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{t}}[-2])\text{-mod}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(I_E))$$

以及一个等价

$$\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{T,\mathrm{Spd}\,\breve{E}}) \simeq \mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{t}}[-2])\text{-mod}^{\mathrm{perf}}(\mathrm{DRep}(\widehat{T}\times I_E))$$

根据 (5.23)，在 $\widehat{\mathrm{Cat}}^{mon,\ B(W_F/I_E)}_{\infty,\mathbb{Q}_\ell}$ 中。

与非导出 Satake 等价的相容性由与定理4.15相同的论证得出。

□

5.5 一般情形

在本节中，我们证明任意定义于 F上的连通约化群 G 在Spd E 上的导出 Satake 等价。

引理 5.13. 设 G'是定义在 F上的约化群， T'是定义在 F上的环面。那么自然函子

$$\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{T',\mathrm{Spd}\,\breve{E}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\otimes_{\mathcal{D}_{\mathrm{lc}}(\mathrm{Spd}\,\breve{E},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)}\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G',\mathrm{Spd}\,\breve{E}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{T'\times G',\mathrm{Spd}\,\breve{E}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

in $\widehat{\mathrm{Cat}}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{mon,\ B(W_F/I_E)}$ *is an equivalence.*

Proof. 根据引理 5.1 和引理5.2，只需证明典范函子 r

$$\begin{aligned}&(\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{T',\mathrm{Spd}\,k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\otimes\mathcal{D}_{\mathrm{lc}}([\mathrm{Spd}\,k/I_E],\overline{\mathbb{Q}}_\ell))\\&\qquad\otimes_{\mathcal{D}_{\mathrm{lc}}([\mathrm{Spd}\,k/I_E],\overline{\mathbb{Q}}_\ell)}(\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G',\mathrm{Spd}\,k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\otimes\mathcal{D}_{\mathrm{lc}}([\mathrm{Spd}\,k/I_E],\overline{\mathbb{Q}}_\ell)))\\&\qquad\qquad\to\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{T'\times G',\mathrm{Spd}\,k},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\otimes\mathcal{D}_{\mathrm{lc}}([\mathrm{Spd}\,k/I_E],\overline{\mathbb{Q}}_\ell))\end{aligned}$$

是一个等价。这由引理 4.17 得出，只需将 Spd C替换为 Spd k。 □

现在，按照定理 4.16 的相同论证，我们得到 Spd E上的导出 Satake 等价：

定理 5.14. 存在一个典范等价

$$\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,\breve{E}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\simeq\mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{g}}[-2])\text{-}\mathrm{mod}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(\widehat{G}\times I_E,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)).\tag{5.24}$$

在 $\widehat{\mathrm{Cat}}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{mon,\ B(W_F/I_E)}$。

此外，存在一个典范等价

$$\mathcal{S}_{G,\mathrm{Spd}\,C}\simeq\mathcal{S}^{der}_{G,\mathrm{Spd}\,\breve{E}}\circ fr|_{\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G}\times I_E,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)}\colon\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G}\times I_E,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Spd}\,\breve{E}},\overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

in $\widehat{\mathrm{Cat}}_{\infty,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{mon,\ B(W_F/I_E)}$.

6 在 Div^1 上的 DerivedSatake 等价

为证明 Div^1, 上的导出 Satake 等价，我们将 [AG15, (A.2)]，中定义的运算 (–)$^{W_F/I_E}$ 应用于 (5.24) 的两边。根据标准论证，将 (–)$^{W_F/I_E}$ 应用于左边，得到 $\mathcal{O}^{/\!/}_{\widehat{\mathfrak{g}}^*}$-mod^{fr}(DRep($\widehat{G}\rtimes W_F$, $\mathbb{Q}_\ell$))。根据定义，将其应用于右边则得到 $\mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}$(Hck$_{G,\ \mathrm{Div}^1}$, $\mathbb{Q}_\ell$)。因此，我们得到 Div^1 上的导出 Satake 等价：

定理 6.1。 存在一个稳定幺半 ∞-范畴之间的等价

$$\mathcal{S}^{der}_{\mathrm{Div}^1}\colon \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Div}^1},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\simeq \mathrm{Sym}(\widehat{\mathfrak{g}}(-1)[-2])\text{-}\mathrm{mod}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{D}\mathrm{Rep}(\widehat{G}\rtimes W_F)).$$

此外，令

$$S_{G,\mathrm{Div}^1}\colon \mathrm{Rep}^{\mathrm{f.d.}}(\widehat{G}\rtimes W_E,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to \mathcal{D}^{\mathrm{ULA}}(\mathcal{H}\mathrm{ck}_{G,\mathrm{Div}^1},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

表示由Div^1上、 [FS21, §VI]中的非导出几何 Satake 等价所诱导的函子。然后由构造, S_{G,Div^1}同构于$(S_{G,\mathrm{Spd}\,\check{E}})^{W_F/I_E}$，并且我们有一个典范幺半等价

$$S_{G,\mathrm{Div}^1}\simeq \mathcal{S}^{der}_{G,\mathrm{Div}^1}\circ fr|_{\mathrm{Rep}^{\mathrm{f.p.}}(\widehat{G}\rtimes W_F,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)}.$$

参考文献

[AG15] D. Arinkin and D. Gaitsgory，相干层的奇异支撑与几何朗兰兹猜想，Selecta Math. (N.S.) 21 (2015)，第 1 期，1–199 页。[Ban23] K. Bando，混合特征下 Satake 范畴上的两种幺半结构，2023，即将发表于《波尔多数论杂志》，arXiv:2302.07376。[Ban24] K. Bando，混合特征下的导出 Satake 范畴与仿射 Hecke 范畴，2024，arXiv:2310.16244。[BCKW25] U. Bunke、D.-C. Cisinski、D. Kasprowski 和 C. Winges，左正合 ∞范畴中的受控对象与诺维科夫猜想，《法国数学会通报》153 (2025)，第 2 期，295–458 页。[BF08] R. Bezrukavnikov 和 M. Finkelberg，等变 Satake 范畴与 Kostant-Whittaker 约化，《莫斯科数学杂志》8 (2008)，第 1 期，39–72、183 页。[BS15] B. Bhatt 和 P. Scholze，概形的 pro-´étale 拓扑，《Astérisque》（2015），第 369 期，99–201 页。[BZSV24] D. Ben-Zvi、Y. Sakellaridis 和 A. Venkatesh，相对朗兰兹对偶，2024，arXiv:2409.04677。[Cho20] C.-Y. Chough，代数叠的 pro-´étale 拓扑，Comm. Algebra 48 (2020)，第 9 期，3761–3770 页。

[CR24] J. Campbell 和 S. Raskin，贝林森-德林费尔德格拉斯曼簇上的朗兰兹对偶，2024，arXiv:2310.19734。[FS21] L. Fargues 和 P. Scholze，局部朗兰兹对应的几何化，2021，arXiv:2102.13459。[Gin98] V. Ginzburg，圈格拉斯曼簇上同调、主幂零元与 Kostant 定理，1998，arXiv:math/9803141。[Gin00] V. Ginzburg，圈群上的反常层与朗兰兹对偶，2000，arXiv:alg-geom/9511007。[GKM98] M. Goresky、R. Kottwitz 和 R. MacPherson，等变上同调、Koszul对偶与局部化定理，《数学发明》131 (1998)，第 1 期，25–83 页。[GR17] D. Gaitsgory 和 N. Rozenblyum，《导出代数几何研究》第一卷：对应与对偶，《数学综述与专著》第 221 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，2017。[Kra15] H. Krause，Auslander公式的导出，《数学文献》20 (2015)，669–688 页。[Lur16] J. Lurie，高阶代数，2016，见 http://www.math.harvard. edu/~lurie/papers/HA.pdf。[LZ24] Y. Liu 和 W. Zheng，高阶Artin栈上的增强六运算与基变换定理，2024，arXiv:1211.5948。[MV07] I. Mirkovi´c 和 K. Vilonen，几何朗兰兹对偶与交换环上代数群的表示，《数学年刊》(2) 166 (2007)，第 1 期，95–143 页。[PR08] G. Pappas 和 M. Rapoport，扭曲圈群及其仿射旗簇，《数学进展》219 (2008)，第 1 期，118–198 页，附录由 T. Haines 和 Rapoport 撰写。[RS25] T. Richarz 和 J. Scholbach，上同调动机的范畴 K¨unneth 公式，2025，arXiv:2503.14416。[Sch17] P. Scholze，钻石的平展上同调，http://www.math.uni-bonn. de/people/scholze/EtCohDiamonds.pdf，2017。[Sch24] P. Scholze，Berkovich动机，2024，arXiv:2412.03382。[Sch26] P. Scholze，局部朗兰兹对应的几何化：动机论视角，2026，arXiv:2501.07944。

[Sta18] Stacks Project 作者，《Stacks Project》，2018，https://stacks.math.columbia.edu.[Zhu15] 朱歆文，《分歧群的几何Satake对应》，《数学科学高等研究院学报》（第四辑）48（2015），第2期，409–451页。[Zhu17a] 朱歆文，《混合特征下的仿射Grassmann簇与几何Satake》，《数学年刊》（第二辑）185（2017），第2期，403–492页。[Zhu17b] 朱歆文，《仿射Grassmann簇与几何Satake等价简介》，载于《模空间几何与表示论》，IAS/Park City数学丛书第24卷，第59–154页，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，2017年。