arXiv:2603.12555v1 [math.AP] 13 Mar 2026

定常 KdV 方程在锐利 L^p 空间中的非平凡弱解

Mandon Pathak

摘要。本文利用凸积分方案构造定常 KdV 方程的非平凡解，这些解属于 $L^p(\mathbb{T})$，$p < 2$。此外，我们证明了这一结果是尖锐的，即如果 $u \in L^2(\mathbb{T})$ 是一个弱解，那么 $u \in C^\infty(\mathbb{T})$。

1. 引言

1.1. 研究动机与背景。定常 Korteweg–de Vries（KdV）方程

$$6uu' - u^{(3)} = 0 \tag{1.1}$$

对于 $u: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$，它是经典KdV方程的时间无关对应形式。经典KdV方程描述浅水波和等离子体振荡等非线性色散现象。KdV 方程是一个具有丰富数学结构的完全可积系统，包含孤子解和无穷层级的守恒量，因此成为非线性色散偏微分方程应用分析与理论分析中的核心研究对象。

近年来，KdV 方程理论取得了许多令人振奋的进展，其中大多涉及适定性问题。简要概述如下：在[28] 和 [29] 中，Molinet 证明，对于 $s > 1$，当初始数据属于 $H^{-s}(\mathbb{T})$ 和 $H^{-s}(\mathbb{R})$ 时，KdV 是不适定的。随后，Kappeler 和 Topalov [23] 证明了 KdV 在 $H^{-1}(\mathbb{T})$ 中是适定的；最后，在 [24]，Killip 和 Vişan 确立了 KdV 在实直线上求解时的相同阈值。我们还要提及 Christ [13] 的工作：他构造了一个非零 KdV 解，该解的初始数据为零，且属于 $C_t H_x^{-\epsilon}([0,T] \times \mathbb{T})$，$\epsilon > 0$。这与 [23] 的结果并不矛盾，因为 Christ 对解的定义比 [23]，[24], [28], 和 [29]中所考虑的定义更弱。这表明低正则性解在 KdV 研究中发挥着重要作用。相比之下，定常 KdV 方程的低正则性解迄今仍鲜少得到研究。

在这项工作中，我们研究定常 KdV 方程在 $L^p(\mathbb{T})$ 中的弱解，其中 $p < 2$。我们的主要结果确立了一个精确的二分结论：

- 当 $p < 2$ 时，存在非平凡且不光滑的弱解；而
- 当 $p = 2$ 时，每个弱解必然都是光滑的（关于这类光滑解构造的示例，见 [17], [18], 和 [21] ）。

这一结果确定了区分光滑解与可能出现的奇异解的 L^p 正则性精确阈值，并表明定常 KdV 方程存在丰富的低正则性解。

一个技术问题是，当 $u \in L^p(\mathbb{T}), p < 2$ 时，究竟该如何定义弱解的概念。由于 (1.1) 中的非线性项是二次的，因此，要使经典的

弱解概念有明确的定义，就需要满足 $u \in L^2(\mathbb{T})$。然而，由定理 1.3 可知，这将立即推出 u 是光滑的。在如此低的正则性下，例如 [23] 和 [24] 中所采用的非定常 KdV 方程弱解概念，关键依赖于时间参数，因此似乎并不适用于定常情形。为克服这一困难，我们借鉴了 [1][1]，其中引入了二维定常纳维-斯托克斯方程的弱抛物乘积解[2] 概念（见定义 1.2）。本文的两个刚性结果应与二维定常纳维-斯托克斯方程的刚性结果进行比较。对于二维定常纳维-斯托克斯方程，已知若 $u \in L^p(\mathbb{T}^2)$、$p > 2$ 是零均值弱解，则 $u = 0$ [1, 25]。另一方面，定理 1.3 给出了一个尖锐结果，也涵盖了端点 $p = 2$。其不足之处在于，对于定常 KdV 方程，我们无法得出光滑的零均值解必定恒等于 0。还应将这一结果与 [18, 引理 1] 进行比较；该引理证明，若 $u \in C^3(\mathbb{T})$ 是定常 KdV 方程的一个解，则 u 是光滑的。

这些解的构造依赖于凸积分框架。该框架最初由 De Lellis 和 Székelyhidi 在 [15] 和 [16] 中针对流体方程提出。除了确立定常 KdV 方程此类解的存在性之外，这种方法还为将凸积分技术应用于 *KdV* 型方程及更一般的非线性色散偏微分方程开辟了新途径，有望进一步揭示可积与不可积情形中的低正则性现象。此前，由于我们所称的色散误差会导致导数损失，凸积分方法无法应用于 KdV 方程或更一般的色散偏微分方程：

$$E_D = -w''_{q+1}.$$

更详细地讨论这一项的由来，请参见第 3 节。本讨论中，假设 w_{q+1} 的频率局部化在尺度 $\lambda_{q+1} \gg 1$ 上。在标准的凸积分方案中，必须在 L^p 范数或 C^α 范数 [9] 下估计这一误差。我们再次假设使用 L^p 范数，因此有

$$\|E_D\|_{L^p} \lesssim \lambda_{q+1}^2 \|w_{q+1}\|_{L^p}. \tag{1.2}$$

为了使凸积分方案闭合，我们要求 $\|E_D\|_{L^p}$ 可以足够小。为此，（1.2）表明 $\|w_{q+1}\|_{L^p}$ 必须足够小，尤其要远小于 λ_{q+1}^2。实现这一点的标准工具是使用一个间歇性构造块。间歇性在许多凸积分构造中都发挥了关键作用；例如参见
[1], [3], [6], [7], [8], [10], [11], [12], [14], [19], [20], [26], [27], [30], [31]及其中的参考文献。遗憾的是，一维中可能达到的最大间歇性只能给出粗略估计

$$\|w_{q+1}\|_{L^p} \lesssim \lambda_{q+1}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}. \tag{1.3}$$

结合（1.2）和（1.3）可知，不存在任何 $p \geq 1$ 值能使 $\lambda_{q+1} \gg 1$的误差足够小。这也是 Luo 在 [26] 中采用的方案要求维数至少为 4 的原因。

为了避开这个问题，我们像在 [1], [10], [19], 和 [20]中所做的那样，使用具有负正则性指标的齐次 Sobole夫范数来衡量误差。通过选择足够大的 $s > 0$

[1]在 [25], Lemarié-Rieusset 为 $u \otimes u$ 非线性项$u \in L^p$在$\mathbb{T}^2$($\mathbb{T}^2$)、 $p < 2$的情况下提出了另一种定义，这与 [1]中给出的定义略有不同。[2]在 [10] 中，这些解被称为奇异解。

我们可以得到如下估计

$$\|E_D\|_{\dot{H}^{-s}} \lesssim \|w_{q+1}\|_{\dot{H}^{-s+2}} \lesssim \|w_{q+1}\|_{L^1} \lesssim \lambda_{q+1}^{-1/2}$$

这对 $\lambda_{q+1} \gg 1$显然很小。从本质上讲，这就是我们所采用的方法，只不过我们利用了极少量的间歇性，以获得尽可能好的 Besov 正则性。详见第5节。

这些发现有助于更广泛地理解非线性色散方程中解的正则性，并说明了凸积分作为构造具有受控 L^p 性质的弱解这一工具的有效性。它们还为研究经典偏微分方程中可积性、色散与低正则性行为之间的相互作用指明了一个新方向。

1.2. **主要结果**。 我们的首要任务是将（1.1）的弱解定义推广到u ，使其位于某个具有严格负正则性的 Sobole夫空间中。为此，我们需要理解 u^2 对于 u 可能为任意分布时的意义。一般而言，当两个函数都位于具有负正则性的 Sobole夫空间中时，关于这一乘积所能说的并不多，但遵循 [1, 定义 1.1] ，我们可以给出零均值乘积的如下定义：

定义 1.1 (**在** $H^s(\mathbb{T})$)。 设 f, g为分布，使得 $\mathbb{P}_{2^j}(f)\,\mathbb{P}_{2^{j'}}(g)$对于 $j, j' \geq 0$均有定义。若存在某个 $s \in \mathbb{R}$ ，使得 $\mathbb{P}_{\neq 0}(fg)$ 作为 $H^s(\mathbb{T})$中的旁乘积有定义，则称

$$\sum_{j,j' \geq 0} \|\mathbb{P}_{\neq 0}\left(\mathbb{P}_{2^j}(f)\mathbb{P}_{2^{j'}}(g)\right)\|_{\dot{H}^s} < \infty\,.$$

于是我们定义

$$\mathbb{P}_{\neq 0}(fg) = \sum_{j,j' \geq 0} \mathbb{P}_{\neq 0}\left(\mathbb{P}_{2^j}(f)\mathbb{P}_{2^{j'}}(g)\right)\,,$$

因为右端是 $H^s(\mathbb{T})$中的绝对收敛级数。

根据这一定义，沿用 [1, 定义 1.2], ，我们现在可以定义一个适用于 1.1 的弱解，其中 u 属于任意正则性的 Sobole夫空间。

定义 1.2 (**（1.1）的弱旁乘积解** (1.1))。 若 $u \in H^s,\ s < 0$，称 u是定常 *KdV* 方程的弱旁乘积解，如果存在 $s' \in \mathbb{R}$ 使得$\mathbb{P}_{\neq 0}(u^2)$ 作为 $\dot{H}^{s'}$ 中的旁乘积按前一定义的意义有定义，并且

$$-\left\langle u, \phi^{(3)} \right\rangle_{\dot{H}^s, \dot{H}^{-s}} + 3\left\langle \mathbb{P}_{\neq 0}(u^2), \phi' \right\rangle_{\dot{H}^{s'}, \dot{H}^{-s'}} = 0$$

对所有光滑的 ϕ。

由此，我们可以陈述主要结果。

定理 1.3 (**刚性结果**)。 若 $u \in L^2(\mathbb{T})$ 满足 (1.1) ， 则 $u \in C^\infty(\mathbb{T})$。

证明。 假设 $u \in L^2(\mathbb{T})$ 满足

$$-\int_{\mathbb{T}} u\psi^{(3)} + 3\int_{\mathbb{T}} u^2\psi' = 0$$

对所有 $\psi \in C^\infty(\mathbb{T})$ 均成立。在分布意义下，我们有

$$\left\langle \left(u'' - 3u^2\right)', \psi \right\rangle = \left\langle u^{(3)} - 3(u^2)', \psi \right\rangle = 0.$$

因此，在分布的意义下，我们有 $u'' - 3u^2 = C$，其中 $C \in \mathbb{R}$。由于 $u \in L^2(\mathbb{T})$，这意味着 $u \in W^{2,1}(\mathbb{T})$。由索伯列夫嵌入 $W^{2,1}(\mathbb{T}) \subset C^1(\mathbb{T})$，我们得出 $u \in C^1(\mathbb{T})$，从而 $u \in C^3(\mathbb{T})$。接下来，我们可以采用自举法，或者借助 [18,引理 1]，从而推出 $u \in C^\infty(\mathbb{T})$。□

定理 1.4 (**灵活性结果**)。存在

$$u \in \bigcap_{0<\epsilon<1} \left(\dot{B}^{-\epsilon}_{\infty,\infty}(\mathbb{T}) \cap L^{2-\epsilon}(\mathbb{T}) \right) \setminus L^2(\mathbb{T})$$

使得

(a) $\mathbb{P}_{\neq 0}(u^2)$ 在 $\dot{H}^{-s}(\mathbb{T})$ 中对所有 s 足够大时均存在一个抛物乘积；

(b) u 满足(1.1)，其意义与定义*1.2*中相同。

注 1.5。 在定理 1.4 中，只需取 $s > 5/2$，但对我们的目的而言，这个确切取值并不重要。

本文其余部分将致力于证明定理 1.4。

1.3. **论文概述**。 在第 2 节中，我们回顾一些与 Littlewood-Paley 理论以及本文将要使用的函数空间相关的内容。我们还介绍了构造中所用的间歇性构造块。在第3 节中，我们简要概述接下来将采用的凸积分方案。在第 4 节中，我们陈述主要的归纳命题（命题 4.1），并用它证明定理 1.4。随后，我们给出高振荡扰动的定义，并在第 4.1 节中用它证明命题 5。

1.4. **致谢**。 作者感谢与 Nicholas Gismondi 的讨论。

2. 背景理论与技术引理

关于 Littlewood-Paley 理论、傅里叶乘子算子和函数空间的以下内容可参见 [2] 和 [22]。定义2.1 的确切表述基于 [1, 定义 2。1]。

定义 2.1 (**Littlewood-Paley 投影算子**)。 存在 $\varphi\colon \mathbb{R} \to [0,1]$，光滑、径向对称，且紧支撑于 $\{\xi : 6/7 \le |\xi| \le 2\}$，使得 $\varphi(\xi) = 1$ 在$\{\xi : 1 \le |\xi| \le 12/7\}$上，

$$\sum_{j\ge 0} \varphi(2^{-j}\xi) = 1 \quad \textit{for all} \quad |\xi| \ge 1,$$

并且，对于所有 $|j-j'| \ge 2$，都有 支撑φ_j∩支撑$\varphi_{j'} = \emptyset$，其中 $\varphi_j(\cdot) = \varphi(2^{-j}\cdot)$。我们将函数 f 在其0模态上的投影定义为

$$\mathbb{P}_{=0}(f) = \int_{\mathbb{T}} f(x)\,dx,$$

以及在 j^{th} 壳层上的投影定义为

$$\mathbb{P}_{2^j}(f)(x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\xi)\varphi_j(\xi)e^{2\pi i\xi x}\,.$$

我们还将频率截断定义为

$$\mathbb{P}_{\leq 2^j}(f) = \mathbb{P}_{=0}(f) + \sum_{k=1}^{j} \mathbb{P}_{2^k}(f),$$

将投影到高频的算子定义为 $\mathbb{P}_{>2^j}(f) =$（恒等算子 $-\mathbb{P}_{\leq 2^j}$）(f)，将去均值投影定义为 $\mathbb{P}_{\neq 0}f :=$（恒等算子 $-\mathbb{P}_{=0}$）f。

下面的引理是标准结果，可由泊松求和公式推得。

引理 2.2（L^p **投影算子的有界性**）。 $\mathbb{P}_{\leq\lambda}$ 是从L^p 到 L^p 的有界算子，其中 $1 \leq p \leq \infty$ 的算子范数与 λ无关。

接下来我们介绍贯穿全文并将发挥重要作用的函数空间。

定义 2.3（H^s **索博列夫空间**）。对于 $s \in \mathbb{R}$，我们定义

$$\dot{H}^s(\mathbb{T}) = \left\{ f : \sum_{\xi\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |\xi|^{2s}|\hat{f}(\xi)|^2 < \infty \right\}$$

赋予由上述求和所诱导的范数。

注 2.4. 对于每个 $f \in H^s$，取某个 $s \in \mathbb{R}$，我们定义傅里叶系数

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-2\pi i\xi x}\,dx, \quad \text{where} \quad \mathbb{T} = [0,1],$$

因此，我们可以为 $j \geq 0$ 定义 $\mathbb{P}_{2^j}f$。注意，无论 $s \in \mathbb{R}$ 的取值如何，每个 $\mathbb{P}_{2^j}f$ 对于 $f \in H^s$ 都是光滑的。

定义 2.5. ***(***齐次***Besov***空间***)*** 对于 $\alpha \in \mathbb{R}$、$0 < p$、$q \leq \infty$ 和 $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^d)$，定义齐次 *Besov*空间为

$$\dot{B}^{\alpha}_{p,q} = \left\{ f : \|f\|_{\dot{B}^{\alpha}_{p,q}} = \left\| 2^{j\alpha}\|\mathbb{P}_{2^j}f\|_{L^p(\mathbb{T})} \right\|_{\ell^q_{j\geq 0}} < \infty \right\}.$$

注 2.6. 注意，对于 $\alpha > 0$，空间 $B^{\alpha}_{\infty,\infty}$ 等价于 $\{f \in C^{\alpha} : f(0) = 0\}$。此外，空间 $B^{\alpha}_{2,2}$ 对于所有 $\alpha \in \mathbb{R}$ 都等价于齐次索博列夫空间 H^{α}。

按照 [19] 和 [20], ，我们采用一种通用的间歇性构造块，它不满足任何定常偏微分方程。在 [20]中，为了采用完全间歇的构造块，这一点至关重要。我们在此也采用同样的做法，因为我们的设定是一维环面，并且将使用一个维度的间歇性。与 [19] 和 [20], 中的情况一样，使用齐次 Sobole夫范数估计误差，可确保我们始终不需要导数算子作用于非线性项；这与标准凸积分方案形成鲜明对比，后者在估计误差时使用 L^p 或 C^{α}，见 [9]。就我们的目的而言， [19, 引理 2。12] 中的间歇薄层已足够；不过需要指出，在此设定下这些薄层是完全间歇的，而在 [19] 中则不是。

引理 2.7 (**间歇薄层**). 令 λ 为 *2* 的一个较大幂次，并取 $0<\epsilon<1$ 使得 λ^{ϵ} 也是整数。那么存在光滑的 $\rho_{\lambda,\epsilon}:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$，使得

(1) $\int_{\mathbb{T}}\rho_{\lambda,\epsilon}=0$; *(2)* $\|\rho_{\lambda,\epsilon}\|_{L^p(\mathbb{T})}\lesssim\lambda^{(1-\epsilon)(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}$; *(3)* $\rho_{\lambda,\epsilon}$ 是 $\frac{\mathbb{T}}{\lambda^{\epsilon}}$-周期的。

证明。 构造见 [19, 引理 2。12] 只需令 $d=1$。不过，为了后续证明方便，我们只说明该函数具有如下形式

$$\rho_{\lambda,\epsilon}(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda^{\frac{1-\epsilon_{q+1}}{2}}\phi\left(\lambda x+\lambda^{1-\epsilon}n\right). \tag{2.1}$$

其中 $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是光滑、奇函数，支撑于 $(-1,1)$，均值为零，且 L^2 已归一化。 □

同样，依据 [19, 引理 2。13] 和 [20, 引理 2。15]，我们的间歇性构件的傅里叶级数展开将非常有用，其主要应用是证明引理 2.10。

引理 2.8 (**间歇性薄层的傅里叶级数表示**)。 $\rho_{\lambda,\epsilon}$ 的傅里叶级数表示为

$$\rho_{\lambda,\epsilon}(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda^{\frac{\epsilon-1}{2}}\hat{\phi}\left(\lambda^{\epsilon-1}n\right)e^{2\pi i\lambda^{\epsilon}nx}. \tag{2.2}$$

证明。 将泊松求和公式应用于（2.1）可得（2.2）。 □

引理 2.9 （L^2 **间歇薄层的范数**）。 $\rho_{\lambda,\epsilon}$ 在主阶上归一化为 L^2（$\mathbb{T}$）。更精确地说，

$$\|\rho_{\lambda,\epsilon}\|_{L^2}=1+O\left(\lambda^{\epsilon-1}\right).$$

*Pr*证明。 根据引理2.8和普朗歇尔定理，我们得到如下表达式

$$\|\rho_{\lambda,\epsilon}\|_{L^2}^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda^{\epsilon-1}\left|\hat{\phi}\left(\lambda^{\epsilon-1}n\right)\right|^2. \tag{2.3}$$

我们可以看出，(2.3) 的右侧是 $\|\hat{\phi}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$ 的黎曼和近似，步长为 $\lambda^{\epsilon-1}$。再次应用普朗歇尔定理，$\|\hat{\phi}\|_{L^2(\mathbb{R})}=\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})}=1$，并且由于 ϕ 是光滑且紧支撑的，我们有

$$\|\rho_{\lambda,\epsilon}\|_{L^2(\mathbb{T})}^2=1+O\left(\lambda^{\epsilon-1}\right). \tag{2.4}$$

对（2.4）开平方，然后使用泰勒展开即可得到结论。 □

下面的引理将表明，在我们所关心的每一种范数下，只需将间歇薄层的最小活跃频率取得足够大，光滑函数与间歇薄层乘积的投影就可以任意小。

引理 2.10(**负 Sobolev 范数中的高低频乘积**)。对于任意 $a\in C^{\infty}(\mathbb{T})$，

$$\lim_{\lambda\to\infty}\|\mathbb{P}_{>\lambda^2}(a\rho_{\lambda,\epsilon})\|_{L^{\infty}}=0.$$

证明。 对于 $a \in C^\infty(\mathbb{T})$，我们先将其傅里叶级数表示为

$$a(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{a}(k) e^{2\pi i k x}.$$

结合 (2.2)，我们可以写成

$$(a\rho_{\lambda,\epsilon})(x) = \sum_{n,k\in\mathbb{Z}} \widehat{a}(k)\lambda^{\frac{\epsilon-1}{2}} \hat{\phi}\left(\lambda^{\epsilon-1}n\right) e^{2\pi i(\lambda^\epsilon n+k)x}. \tag{2.5}$$

回想一下， λ 被选为 2 的一个较大次幂。因此，令 $\mu = 2\log_2(\lambda) \in \mathbb{N}$。因此，根据定义 2.1 ，高频投影可表示为

$$\mathbb{P}_{>\lambda^2}(a\rho_{\lambda,\epsilon})(x) = \sum_{j=\mu}^{\infty} \sum_{n,k\in\mathbb{Z}} \varphi_j\left(\lambda^\epsilon n + k\right) \widehat{a}(k)\lambda^{\frac{\epsilon-1}{2}} \hat{\phi}\left(\lambda^{\epsilon-1}n\right) e^{2\pi i(\lambda^\epsilon n+k)x},$$

由此得到

$$\left\|\mathbb{P}_{>\lambda^2}(a\rho_{\lambda,\epsilon})\right\|_{L^\infty} \le \lambda^{\frac{\epsilon-1}{2}} \sum_{\substack{n,k\in\mathbb{Z}\\ |\lambda^\epsilon n+k|\ge\frac{1}{2}\lambda^2}} |\widehat{a}(k)| \left|\hat{\phi}\left(\lambda^{\epsilon-1}n\right)\right| \le \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2,$$

其中令

$$\mathcal{S}_1 := \lambda^{\frac{\epsilon-1}{2}} \sum_{|n|\ge\frac{1}{4}\lambda^{2-\epsilon}} \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ |\lambda^\epsilon n+k|\ge\frac{1}{2}\lambda^2}} |\widehat{a}(k)| \left|\hat{\phi}\left(\lambda^{\epsilon-1}n\right)\right|$$

and

$$\mathcal{S}_2 := \lambda^{\frac{\epsilon-1}{2}} \sum_{|n|\le\frac{1}{4}\lambda^{2-\epsilon}} \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ |\lambda^\epsilon n+k|\ge\frac{1}{2}\lambda^2}} |\widehat{a}(k)| \left|\hat{\phi}\left(\lambda^{\epsilon-1}n\right)\right|.$$

我们将分别估计这些项。

对 $\mathcal{S}_1$ 的估计：由于 $a \in C^\infty(\mathbb{T})$，因此 $\hat{a} \in \ell^1(\mathbb{Z})$。于是

$$\mathcal{S}_1 \lesssim \lambda^{\frac{\epsilon-1}{2}} \sum_{|n|\gtrsim\lambda^{2-\epsilon}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{a}(k)| \left|\hat{\phi}\left(\lambda^{\epsilon-1}n\right)\right| \lesssim \lambda^{\frac{\epsilon-1}{2}} \sum_{|n|\gtrsim\lambda^{2-\epsilon}} \left|\hat{\phi}\left(\lambda^{\epsilon-1}n\right)\right|. \tag{2.6}$$

现在，由于已假定 ϕ 为施瓦茨函数，我们有估计

$$\left|\hat{\phi}(\xi)\right| \lesssim \frac{1}{(1+|\xi|)^N}$$

对 $N > 100$成立。因此我们有

$$\sum_{|n|\gtrsim\lambda^{2-\epsilon}} \left|\hat{\phi}\left(\lambda^{\epsilon-1}n\right)\right| \lesssim \sum_{|n|\gtrsim\lambda^{2-\epsilon}} \frac{1}{(1+|\lambda^{\epsilon-1}n|)^N} \lesssim \lambda^{N(1-\epsilon)} \sum_{|n|\gtrsim\lambda^{2-\epsilon}} |n|^{-N}. \tag{2.7}$$

现在利用积分判别法，我们有

$$\sum_{|n|\gtrsim\lambda^{2-\epsilon}} |n|^{-N} \simeq \int_{\lambda^{2-\epsilon}}^{\infty} x^{-N}\, dx \simeq \lambda^{(1-N)(2-\epsilon)}. \tag{2.8}$$

结合（2.6）、（2.7）和（2.8），我们有估计

$$\mathcal{S}_1 \lesssim \lambda^{\frac{\epsilon-1}{2}} \lambda^{N(1-\epsilon)} \lambda^{(1-N)(2-\epsilon)}$$

当我们令 $\lambda \to \infty$ 时，它显然趋于 0。

对 $\mathcal{S}_2$的估计:
在 $|n| \leq \frac{1}{4}\lambda^{2-\epsilon}$ 的情形下，可得 $\lambda^{\epsilon}|n| \leq \frac{1}{4}\lambda^2$。因此，根据投影条件，我们推导出

$$|k| \geq |k + \lambda^{\epsilon} n| - \frac{1}{4}\lambda^{\epsilon}|n| \geq \frac{1}{4}\lambda^2.$$

因此，在该区域中，频率 k 必然具有很高的量级。
我们现在利用 $\widehat{a}(k)$的快速衰减。由于 $a \in C^{\infty}(\mathbb{T})$，其傅里叶系数衰减得比任何多项式速率都快。特别地，对于 $|k| \geq \frac{1}{4}\lambda_{q+1}^2$ （即在高频情形下）[-]，我们有如下界

$$|\widehat{a}(k)| \lesssim |k|^{-N}$$

其中再次选取大于100的 N。因此，利用平凡估计

$$\sum_{|n| \lesssim \lambda^{2-\epsilon}} \left|\hat{\phi}\left(\lambda^{\epsilon-1} n\right)\right| \lesssim \lambda^{2-\epsilon}$$

我们有

$$\mathcal{S}_2 \lesssim \lambda^{\frac{\epsilon-1}{2}} \lambda^{2-\epsilon} \sum_{|k| \geq \frac{1}{4}\lambda^2} |k|^{-N} \tag{2.9}$$

并且我们再次应用（2.8），这次取 λ^2，以完成（2.9）中的估计并完成证明。□

下面的引理将在第5节中发挥作用，可简化其中进行的许多估计。

引理 2.11（**Kato-Ponce 型乘积估计**）。固定 α，$\beta \in C^{\infty}$（$\mathbb{T}^2$），其中 β 具有零均值。则对于 $s \geq 0$，有

$$\|\alpha\beta\|_{\dot{H}^{-s}} \lesssim \|\alpha\|_{C^s} \|\beta\|_{\dot{H}^{-s}}.$$

证明。见 [20, 引理 2.16][3]。 □

我们还在此汇总一些将会派上用场的伯恩斯坦型不等式。

引理 2.12（**伯恩斯坦型估计**）。设 u、v：$\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ 为光滑函数，且 u 的频率支撑包含于 B（0，μ），而 v 的频率支撑包含于B（0，2μ）$\setminus B$（0，μ），$\mu \gg 1$。则有以下估计：

（*a*）对于 $s \geq 0$，有

$$\|u\|_{C^s} \lesssim \mu^s \|u\|_{L^{\infty}} \quad and \quad \|u\|_{\dot{B}^s_{\infty,\infty}} \lesssim \mu^s \|u\|_{L^{\infty}}.$$

（*b*）对于 $s \in \mathbb{R}$，我们有

$$\|v\|_{\dot{H}^s} \lesssim \mu^s \|v\|_{L^2} \quad and \quad \|v\|_{\dot{B}^s_{\infty,\infty}} \lesssim \mu^s \|v\|_{L^{\infty}}.$$

证明。第（a）部分。对于 Littlewood–Paley 分块，我们注意到：

- 如果 $2^j \gg \mu$，那么 $\mathbb{P}_{2^j} u = 0$，因为 u 的傅里叶支撑包含于 $B(0, \mu)$。
- 如果 $2^j \lesssim \mu$，那么由引理2.2 可得

$$\|\mathbb{P}_{2^j} u\|_{L^{\infty}} \leq \|u\|_{L^{\infty}}.$$

[3]此证明关键地运用了 [4, 命题 1]

这给出

$$\|u\|_{\dot{B}^{\alpha}_{\infty,\infty}} \lesssim \mu^s \|\mathbb{P}_{2^j} u\|_{L^\infty} \lesssim \mu^s \|u\|_{L^\infty}$$

令 $\chi \in C_c^\infty$ 为尺度为 1 的光滑径向截断函数，并定义 $\chi_\mu(\xi) = \chi(\xi/\mu)$。由于 u 的频率支撑位于 $|\xi| \le \mu$，我们可以写成

$$u = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi_\mu(k) e^{2\pi i k x} \right) * u.$$

对于 $|\alpha| \le s$，利用杨氏卷积不等式可得

$$\|\partial^\alpha u\|_{L^\infty} = \left\| \partial^\alpha \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi_\mu(k) e^{2\pi i k x} \right) * u \right\|_{L^\infty} \le \left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} (2\pi i k)^\alpha \chi_\mu(k) e^{2\pi i k x} \right\|_{L^1} \|u\|_{L^\infty}.$$

因此，只需证明

$$\left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} (2\pi i k)^\alpha \chi_\mu(k) e^{2\pi i k x} \right\|_{L^1} \lesssim \mu^\alpha. \tag{2.10}$$

首先，计算 $x^\alpha \chi_\mu(x)$ 的傅里叶变换可得

$$\left(x^\alpha \chi_\mu(x)\right)^\wedge(\xi) = \mu^{\alpha+1} \int_{\mathbb{R}} x^\alpha \chi(x) e^{2\pi i \mu x \xi}\, dx$$

现在应用泊松求和公式可得

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (2\pi i k)^\alpha \chi_\mu(k) e^{-2\pi i k x} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (2\pi i)^\alpha \mu^{\alpha+1} \int_{\mathbb{R}} x^\alpha \chi(x) e^{2\pi i \mu(\xi+k)}\, dx.$$

应用 $L^1(\mathbb{T})$ 范数可得

$$\left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} (2\pi i k)^\alpha \chi_\mu(k) e^{2\pi i k x} \right\|_{L^1} \lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu^{\alpha+1} \int_0^1 \left| \int_{\mathbb{R}} x^\alpha \chi(x) e^{2\pi i \mu x(\xi+k)}\, dx \right| d\xi.$$

最后，我们进行变量代换 $\mu(\xi+k) \mapsto \xi$，得到

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} (2\pi i k)^\alpha \chi_\mu(k) e^{2\pi i k x} \right\|_{L^1} &\lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu^\alpha \int_{\mu k}^{\mu(k+1)} \left| \int_{\mathbb{R}} x^\alpha \chi(x) e^{2\pi i x \xi}\, dx \right| d\xi \\
&= \mu^\alpha \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} x^\alpha \chi(x) e^{2\pi i \mu x \xi}\, dx \right| d\xi \\
&\simeq \mu^\alpha \|x^\alpha \chi(x)\|_{L^1(\mathbb{R})} \\
&\lesssim \mu^\alpha.
\end{aligned}$$

现在对 $\alpha \le s$ 求和，并利用 $\mu \gg 1$ 可得（2.10）。对于$s \notin \mathbb{N}$ 的情形，所需修改显而易见。

(b) 部分。在这种设置下，我们仅在 $\mu \simeq 2^j$ 时观察到 $\mathbb{P}_{2^j} v \neq 0$。于是可以写成

$$\|v\|_{\dot{B}^{\alpha}_{\infty,\infty}} \simeq \mu^s \|\mathbb{P}_{2^j} v\|_{L^\infty} \lesssim \mu^s \|v\|_{L^\infty}.$$

对于（b）部分中的第一个估计，在 $\widehat{v}$ 的支集上，我们有 $|k| \sim \mu$ ，因此得出

$$\|v\|_{\dot{H}^s}^2 = \sum_{\mu \le |k| \le 2\mu} |k|^{2s} |\hat{v}(k)|^2 \lesssim \mu^{2s} \sum_{\mu \le |k| \le 2\mu} |\hat{v}(k)|^2 \le \mu^{2s} \|v\|_{L^2}^2,$$

因此

$$\|v\|_{\dot{H}^s} \lesssim \mu^s \|v\|_{L^2}.$$

□

3. 凸积分方案

这里我们简要概述接下来要给出的论证。我们将考虑方程（1.1）的松弛版本，其形式为

$$3\left(u^2\right)' - u^{(3)} = E' \tag{3.1}$$

对于 $E\colon\ \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ 我们将其称为误差。我们归纳地假设，存在一个光滑经典解 (u_q, E_q) 满足（3.1），且 E_q 不恒等于0。若令

$$u_{q+1} = u_q + w_{q+1} \tag{3.2}$$

对于某个经过精心选择的光滑函数 $w_{q+1}: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$，则 E_{q+1} 必须满足

$$\begin{aligned} E'_{q+1} &= 3\left(u_{q+1}^2\right)' - u_{q+1}^{(3)} \\ &= \left(E_q + 3w_{q+1}^2\right)' + \left(6w_{q+1}u_q\right)' - w_{q+1}^{(3)} \end{aligned} \tag{3.3}$$

令

$$E_O = E_q + 3w_{q+1}^2, \tag{3.4}$$

$$E_N = 6w_{q+1}u_q \tag{3.5}$$

and

$$E_D = -w''_{q+1} \tag{3.6}$$

我们有

$$E_{q+1} = E_O + E_N + E_D + C_{q+1} \tag{3.7}$$

for

$$C_{q+1} = \begin{cases} 1, & E_O + E_N + E_D = 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}. \tag{3.8}$$

方程 (3.4)–(3.6) 分别称为振荡误差、纳什误差和色散误差。我们将证明，对于任意的 $\alpha < 0$ 和 $1 \le p < 2$, $\|w_{q+1}\|_{\dot{B}^{\alpha}_{\infty}}$、$_{\infty}$ 和 $\|w_{q+1}\|_{L^p}$ 都可求和，因此 $u_q \to u \in B^{\alpha}_{\infty}$、$_{\infty} \cap L^p$。由于 α 和 p 是任意选取的，我们便得到 u 所需的正则性。接下来，只要证明色散误差、纳什误差、$\dot{}$和振荡误差在 H^{-s} 范数下当 $q \to \infty$ 时都趋于 0，就能说明 u 是满足定义 1.2 意义下的方程 (1.1) 的所需解。我们注意到，$\mathbb{P}_{\neq 0}$（u^2）作为抛物乘积的存在性，几乎可以直接从我们的计算中得出；这些计算表明，振荡误差可以任意小。

4. 归纳命题

我们在此陈述主要命题 4.1，称之为归纳命题，并用它来证明定理 1.4。在第 5 节，我们证明归纳命题。

命题 4.1 (**归纳命题**)。 存在序列 u_q 和 E_q, $q \geq 0$，满足以下条件：

(1) (u_q, E_q) 是由(3.1)给出的松弛方程的光滑解。此外， u_q具有零均值，且 E_q 不恒等于0；*(2)* $\|E_q\|_{\dot{H}^{-s}} < 2^{-q}$；*(3)* 存在常数 $C(\alpha, p) > 0$， 它仅依赖于 $\alpha < 0$ 和 $1 \leq p < 2$， 使得对所有 $q' \leq q$， 都有

$$\|u_{q'} - u_{q'-1}\|_{\dot{B}^{\alpha}_{\infty,\infty}} + \|u_{q'} - u_{q'-1}\|_{L^p} \lesssim 2^{-C(\alpha,p)q'}$$

其中隐含常数依赖于 α 和 p， 但不依赖于 q或 q'；

（*4*）对于所有 $q' \leq q$， 都有

$$\|u_{q'} - u_{q'-1}\|_{L^2} \gtrsim 1$$

其中隐含常数与 q 和 q'无关；

(5) 对于每个 $q' \leq q$， 都存在唯一的 $j \in \mathbb{Z}$， 使得

$$\mathbb{P}_{2^j}(u_{q'} - u_{q'-1}) = u_{q'} - u_{q'-1};$$

(6) 存在与 q 无关的 C_1、 $C_2 > 0$， 使得

$$\sum_{\substack{n,m \leq q \\ n \neq m}} \|(u_n - u_{n-1})(u_m - u_{m-1})\|_{\dot{H}^{-s}} < C_1 - 2^{-q}$$

and

$$\sum_{n \leq q} \|(u_n - u_{n-1})^2\|_{\dot{H}^{-s}} < C_2 - 2^{-q+100}.$$

定理 1.4 的证明（使用命题 4.1）。我们首先验证归纳命题的基例。令 $u_0 = A\sin(x)$，并令 $R_0 = 3A^2 \sin^2(x) + A\sin(x)$，其中 $A > 0$ 将稍后选取。显然，条件 1、4 和 5（取 $u_{-1} = 0$[4]）成立。只要将 A 取得足够小，条件 2 和 3 就成立。最后，取足够大的 C_1 和 C_2，即可满足条件 6。

现在我们假设命题 4.1 成立。3 意味着 $\{u_q\}$ 在 L^p 和$B^{\alpha}_{\infty,\infty}$中均为柯西序列，对所有 $p < 2$ 和 $\alpha < 0$ 均如此，因此

$$u_q \to u \in \bigcap_{\epsilon > 0} \dot{B}^{-\epsilon}_{\infty,\infty} \cap L^{2-\epsilon}.$$

由5，t 每个 $u_q - u_{q-1}$ 的频率支撑互不相交，因此由 4 可知 e

$$\|u\|_{L^2}^2 \geq \|u_0\|_{L^2}^2 + \sum_{q' \leq q} \|u_{q'} - u_{q'-1}\|_{L^2}^2 \gtrsim \|u_0\|_{L^2}^2 + q.$$

令 $q \to \infty$ 可知 $u \notin L^2$。

[4]若希望得到均值为 m 的解，只需令 $u_{-1} = m$，然后继续执行该方案的其余部分，即可得到所需的解。由于KdV解的均值随时间守恒，从某种意义上说，只需考虑零均值解即可。

现在我们 可知 u 在定义 1.1) 的意义下求解 (1.2。由1，我们有 t

$$-\int_{\mathbb{T}} u_q \psi^{(3)} + 3\int_{\mathbb{T}} u_q^2 \psi' = -\int_{\mathbb{T}} E_q \psi' \tag{4.1}$$

对所有 $\psi \in C^\infty(\mathbb{T})$。由 2，令 $q \to \infty$ 可得

$$\left|\int_{\mathbb{T}} E_q \psi'\right| \lesssim \|E_q\|_{\dot{H}^{-s}} \|\psi'\|_{\dot{H}^s} < 2^{-q} \|\psi'\|_{\dot{H}^s} \to 0. \tag{4.2}$$

类似地，由于 $u_q \to u$ 属于 L^1，我们有

$$\int_{\mathbb{T}} u_q \psi^{(3)} \to \int_{\mathbb{T}} u\psi^{(3)} = \langle u, \psi^{(3)} \rangle_{\dot{H}^{-s'}, \dot{H}^{s'}} \tag{4.3}$$

对所有 $s' > 0$。最后结合 5 和 6 可知 $\mathbb{P}_{\neq 0}(u^2)$ 在定义1.1的意义下存在。因此

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} u_q^2 \psi' &= \int_{\mathbb{T}} \mathbb{P}_{\neq 0}(u_q^2)\psi' \\
&= \int_{\mathbb{T}} \left(\sum_{q', q'' \leq q} \mathbb{P}_{\neq 0} \left((u_{q'} - u_{q'-1})(u_{q''} - u_{q''-1}) \right) \right) \psi' \\
&= \left\langle \sum_{q', q'' \leq q} \mathbb{P}_{\neq 0} \left((u_{q'} - u_{q'-1})(u_{q''} - u_{q''-1}) \right), \psi' \right\rangle_{\dot{H}^{-s}, \dot{H}^s} \\
&\to \langle \mathbb{P}_{\neq 0}(u^2), \psi' \rangle_{\dot{H}^{-s}, \dot{H}^s}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

结合（4.1）、（4.2）、（4.3）和（4.4）可知 u 是我们所求的解。

□

5. 命题 4.1 的证明

5.1. 参数。 这里我们指定本节中将始终使用的参数。首先定义序列 $\{\epsilon_q\}_{q \in \mathbb{N}}$ 如下:

$$\epsilon_q = 1 - 2^{-q-1000}.$$

接下来，我们假设 $\{\lambda_q\}_{q \in \mathbb{N}}$ 是一个由非常大的2 的幂组成的单调递增序列，且 $\lambda_q^{\epsilon_q}$ 对所有 q 都是整数。我们将选择 λ_{q+1} 的大小，以确保 (5.1)、(5.4)、(5.5)、(5.7)、(5.11)、(5.12)、(5.13)、(5.15)、(5.17)、(5.21)、(5.24)、(5.25)、(5.28)均成立。最后定义 $\{\sigma_q\}_{q \in \mathbb{N}}$ 如下:

$$\sigma_q = \frac{5}{4}\lambda_q^3 \in \mathbb{Z}. \tag{5.1}$$

No我们可以通过要求 λ_q 是足够大的 2 的幂来确保 $\sigma_q \in \mathbb{Z}$.

5.2. **增量的构造**。

D定义 5.1 (**增量**)。 取 $\rho_{q+1}=\rho_{\lambda_{q+1},\ \epsilon_{q+1}}$ 来自引理 2.7 并且满足 t

$$w_{q+1}=\sqrt{\frac{2}{3}}\mathbb{P}_{\leq\lambda_{q+1}^2}\left(a_q(x)\rho_{q+1}(x)\right)\cos(2\pi\sigma_{q+1}x) \tag{5.2}$$

其中我们令

$$a_q=\left(2\|E_q\|_{L^\infty}-E_q\right)^{1/2}. \tag{5.3}$$

引理 5.2 (L^p **关于** w_{q+1})**的估计**。对所有 $1\leq p\leq\infty$，我们有

$$\|w_{q+1}\|_{L^p}\lesssim\lambda_{q+1}^{(1-\epsilon_{q+1})\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}.$$

证明。 应用引理2.2、Hölder 不等式、引理 2.7以及（5.2），可得

$$\|w_{q+1}\|_{L^p}\lesssim\|\rho_{q+1}\|_{L^p}\lesssim\lambda_{q+1}^{(1-\epsilon_{q+1})\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}$$

由此证明了该引理。 □

注 5.3。 注意，在引理 5.2的证明中，我们用到了 $\|a_q\|_{L^\infty}\lesssim 1$。这是因为该范数与参数 λ_{q+1} 无关（见（5.3））， 因此，只要参数 λ_{q+1}中存在衰减，任何仅依赖于 λ_1、.....、λ_q的较大常数都可以通过选取足够大的 λ_{q+1}来控制。本文后续部分我们将频繁采用这一做法；任何仅依赖于 λ_q 的常数都将用1来估计。

5.3. **条目 1 的证明**。 设 u_q 光滑且均值为零。由 (3.2) 和定义5.1 可知， u_{q+1} 也光滑且零均值。根据我们在 (C_{q+1} 中对 3.8) 的选取，可推出 E_{q+1} 不恒等于 0。由 (3.3) 可知，E_{q+1} 光滑，并且(u_{q+1},E_{q+1}) 满足方程 (3.1)。

5.4. **条目 2 的证明**。 色散误差:

由于

$$E_D=-w_{q+1}''$$

在傅里叶侧有

$$\widehat{E}_D(k)=-(2\pi ik)^2\,\widehat{w}_{q+1}(k)=(2\pi)^2k^2\,\widehat{w}_{q+1}(k).$$

于是，利用引理 5.2 以及假设 $s>0$ 足够大（大于 $5/2$ 即可），可得

$$\|E_D\|_{\dot{H}^{-s}(\mathbb{T})}^2\simeq\sum_{k\neq0}|k|^{-2s}|k|^4|\widehat{w}_{q+1}(k)|^2\lesssim\lambda_{q+1}^{\epsilon_{q+1}-1}<2^{-2q-200} \tag{5.4}$$

其中，(5.4) 中的最终估计通过取 λ_{q+1} 足够大即可得到。

纳什误差:

回忆一下（3.5）以及索伯列夫嵌入 $L^1\subset\dot{H}^{-s}$ 对于 $s>1/2$ （回忆一下，我们选取 s 足够大）。于是利用引理 5.2 可得

$$\|E_N\|_{\dot{H}^{-s}}\lesssim\|E_N\|_{L^1}\lesssim\|w_{q+1}\|_{L^1}\|u_q\|_{L^\infty}\lesssim\lambda_{q+1}^{(1-\epsilon_{q+1})\left(-\frac{1}{2}\right)}<2^{-q-100}. \tag{5.5}$$

其中， （5.5）中的最终不等式仍可通过取 λ_{q+1} 足够大来得到。

振荡误差:

我们从定义 5.1

$$\sqrt{\frac{3}{2}}w_{q+1} = \mathbb{P}_{\leq\lambda_{q+1}^2}(a_q\rho_{q+1})\cos(2\pi\sigma_{q+1}x).$$

利用三角恒等式 $\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta)$，我们可以写成

$$\frac{3}{2}w_{q+1}^2 = \left[\mathbb{P}_{\leq\lambda_{q+1}^2}(a_q\rho_{q+1})\right]^2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4\pi\sigma_{q+1}x)\right].$$

两边乘以 2，得到

$$3w_{q+1}^2 = \left[\mathbb{P}_{\leq\lambda_{q+1}^2}(a_q\rho_{q+1})\right]^2 + \left[\mathbb{P}_{\leq\lambda_{q+1}^2}(a_q\rho_{q+1})\right]^2\cos(4\pi\sigma_{q+1}x)$$

因此我们可以写成

$$E_q + 3w_{q+1}^2 = \left(E_q + \left[\mathbb{P}_{\leq\lambda_{q+1}^2}(a_q\rho_{q+1})\right]^2\right) + \left[\mathbb{P}_{\leq\lambda_{q+1}^2}(a_q\rho_{q+1})\right]^2\cos(4\pi\sigma_{q+1}x). \tag{5.6}$$

我们先来看右侧的第二项（5.6）。这里应用引理2.11 和引理 2.12 可得

$$\begin{aligned}\left\|\left[\mathbb{P}_{\leq\lambda_{q+1}^2}(a_q\rho_{q+1})\right]^2\cos(4\pi\sigma_{q+1}x)\right\|_{\dot{H}^{-s}} &\lesssim \left\|\left[\mathbb{P}_{\leq\lambda_{q+1}^2}(a_q\rho_{q+1})\right]^2\right\|_{C^s}\|\cos(4\pi\sigma_{q+1}x)\|_{\dot{H}^{-s}}\\ &\lesssim \lambda_{q+1}^{2s}\lambda_{q+1}^{2(1-\epsilon_{q+1})\frac{1}{2}}\lambda_{q+1}^{-3s}\\ &\lesssim \lambda_{q+1}^{-s+1-\epsilon_{q+1}}.\end{aligned}$$

由于 $s > 0$ 很大，当 λ_{q+1} 足够大时，我们有

$$\left\|\left[\mathbb{P}_{\leq\lambda_{q+1}^2}(a_q\rho_{q+1})\right]^2\cos(4\pi\sigma_{q+1}x)\right\|_{\dot{H}^{-s}} < 2^{-q-1000}. \tag{5.7}$$

回忆引理 2.9 （具体来说，（2.4））可得

$$\mathbb{P}_{=0}\left(\rho_{q+1}^2\right) = 1 + O\left(\lambda_{q+1}^{\epsilon_{q+1}-1}\right).$$

˜因此，我们定义 $|C_{q+1}| \lesssim 1$ 使得

$$\mathbb{P}_{=0}\left(\rho_{q+1}^2\right) = 1 + \tilde{C}_{q+1}\lambda_{q+1}^{\epsilon_{q+1}-1}. \tag{5.8}$$

现在分析（5.6）右端的第一项，我们写作

$$
\begin{aligned}
E_q + \left[\mathbb{P}_{\leq \lambda_{q+1}^2}(a_q\rho_{q+1})\right]^2 &= E_q + \left[a_q\rho_{q+1} - \mathbb{P}_{>\lambda_{q+1}^2}(a_q\rho_{q+1})\right]^2 \\
&= E_q + (a_q\rho_{q+1})^2 - 2\,a_q\rho_{q+1}\,\mathbb{P}_{>\lambda_{q+1}^2}(a_q\rho_{q+1}) + \left[\mathbb{P}_{>\lambda_{q+1}^2}(a_q\rho_{q+1})\right]^2 \\
&= E_q + (2\|E_q\|_{L^\infty} - E_q)[1 + \tilde{C}_{q+1}\lambda_{q+1}^{\epsilon_{q+1}-1} + \mathbb{P}_{\neq 0}(\rho_{q+1}^2)] \\
&\quad - 2\,a_q\rho_{q+1}\,\mathbb{P}_{>\lambda_{q+1}^2}(a_q\rho_{q+1}) + \left[\mathbb{P}_{>\lambda_{q+1}^2}(a_q\rho_{q+1})\right]^2 \\
&= E_q + (2\|E_q\|_{L^\infty} - E_q) + \left(\tilde{C}_{q+1}\lambda_{q+1}^{\epsilon_{q+1}-1} + 1\right) a_q^2\mathbb{P}_{\neq 0}(\rho_{q+1}^2) \\
&\quad - 2\,a_q\rho_{q+1}\,\mathbb{P}_{>\lambda_{q+1}^2}(a_q\rho_{q+1}) + \left[\mathbb{P}_{>\lambda_{q+1}^2}(a_q\rho_{q+1})\right]^2 \\
&= 2\|E_q\|_{L^\infty} + \left(\tilde{C}_{q+1}\lambda_{q+1}^{\epsilon_{q+1}-1} + 1\right) a_q^2\mathbb{P}_{\neq 0}(\rho_{q+1}^2) \\
&\quad - 2\,a_q\rho_{q+1}\,\mathbb{P}_{>\lambda_{q+1}^2}(a_q\rho_{q+1}) + \left[\mathbb{P}_{>\lambda_{q+1}^2}(a_q\rho_{q+1})\right]^2
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

对（5.9）取齐次 Sobole夫范数，并分三部分进行分析。

- 我们要分析的第一项是

$$
2\|E_q\|_{L^\infty} + \left(\tilde{C}_{q+1}\lambda_{q+1}^{\epsilon_{q+1}-1} + 1\right) a_q^2\mathbb{P}_{\neq 0}(\rho_{q+1}^2).
$$

应用 H^{-s} 范数可知， $2\|E_q\|_{L^\infty}$ 该项为常数，因此消失。利用 (5.8)、引理 2.11和引理 5.2 ，我们得到

$$
\begin{aligned}
\left\|2\|E_q\|_{L^\infty} + \left(\tilde{C}_{q+1}\lambda_{q+1}^{\epsilon_{q+1}-1} + 1\right) a_q^2\mathbb{P}_{\neq 0}(\rho_{q+1}^2)\right\|_{\dot{H}^{-s}} &\lesssim \|a_q\|_{C^s}\|\mathbb{P}_{\neq 0}(\rho_{q+1}^2)\|_{\dot{H}^{-s}(\mathbb{T})} \\
&\lesssim \|\mathbb{P}_{\neq 0}(\rho_{q+1}^2)\|_{\dot{H}^{-s}} \\
&\lesssim \lambda_{q+1}^{-s\epsilon_{q+1}}\|\rho_{q+1}^2\|_{L^2} \\
&\lesssim \lambda_{q+1}^{-s\epsilon_{q+1}}\|\rho_{q+1}\|_{L^4}^2 \\
&\lesssim \lambda_{q+1}^{-s\epsilon_{q+1}}\lambda_{q+1}^{\frac{1-\epsilon_{q+1}}{2}}.
\end{aligned} \tag{5.10}
$$

只要5.10中的条件成立，我们就有衰减

$$
\frac{1}{2s+1} < \epsilon_{q+1}.
$$

根据我们对 $s > 5/2$ 和 $\epsilon_{q+1} = 1 - 2^{-q-1001}$ 的选择，这显然成立。因此，我们可以取足够大的 λ_{q+1} ，以确保

$$
\left\|2\|E_q\|_{L^\infty} + \left(\tilde{C}_{q+1}\lambda_{q+1}^{\epsilon_{q+1}-1} + 1\right) a_q^2\mathbb{P}_{\neq 0}(\rho_{q+1}^2)\right\|_{\dot{H}^{-s}} < 2^{-q-1000}. \tag{5.11}
$$

- 我们分析的第二项是

$$
\left[\mathbb{P}_{>\lambda_{q+1}^2}(a_q\rho_{q+1})\right]^2,
$$

对此，我们调用引理2.10 得到

$$\begin{aligned}\left\|[\mathbb{P}_{>\lambda_{q+1}^2}(a_q\rho_{q+1})]^2\right\|_{\dot{H}^{-s}(\mathbb{T})} &\lesssim \left\|[\mathbb{P}_{>\lambda_{q+1}^2}(a_q\rho_{q+1})]^2\right\|_{L^1}\\ &\lesssim \left\|\mathbb{P}_{>\lambda_{q+1}^2}(a_q\rho_{q+1})\right\|_{L^\infty}^2\\ &< 2^{-q-1000}\end{aligned} \tag{5.12}$$

其中，式（5.12）中的最终不等式在 λ_{q+1} 足够大时成立。

- 对于最后一项，再次利用引理 2.10 可得

$$\begin{aligned}\left\|a_q\rho_{q+1}\,\mathbb{P}_{>\lambda_{q+1}^2}(a_q\rho_{q+1})\right\|_{\dot{H}^{-s}} &\lesssim \left\|a_q\rho_{q+1}\,\mathbb{P}_{>\lambda_{q+1}^2}(a_q\rho_{q+1})\right\|_{L^1}\\ &\lesssim \|a_q\rho_{q+1}\|_{L^2}\,\|\mathbb{P}_{>\lambda_{q+1}^2}(a_q\rho_{q+1})\|_{L^2}\\ &\lesssim \|a_q\|_{L^\infty}\|\rho_{q+1}\|_{L^2}\|\mathbb{P}_{>\lambda_{q+1}^2}(a_q\rho_{q+1})\|_{L^2}\\ &\lesssim \|\mathbb{P}_{>\lambda_{q+1}^2}(a_q\rho_{q+1})\|_{L^2}\\ &< 2^{-q-1000}.\end{aligned} \tag{5.13}$$

其中，式（5.13）中的最终估计同样要求 λ_{q+1} 取得足够大 ough.

因此，结合式（3.7）、（5.6）、（5.7）、（5.9）、（5.11）、（5.12）和（5.13），得到

$$\|R_O\|_{\dot{H}^{-s}} < 4\left(2^{-q-1000}\right) < 2^{-q-100}. \tag{5.14}$$

最后，由式（5.4）、（5.5）和（5.14）可得

$$\|E_{q+1}\|_{\dot{H}^{-s}} < 3\left(2^{-q-100}\right) < 2^{-q-1}$$

至此归纳完成。

5.5. **第 3 项的**证明。由引理（5.2）可得

$$\|u_{q+1}-u_q\|_{L^p} = \|w_{q+1}\|_{L^p} \lesssim \lambda_{q+1}^{(1-\epsilon_{q+1})\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} < 2^{-C'(p)q} \tag{5.15}$$

当 $C'(p)=\frac{1}{2}-\frac{1}{p}$ 且 λ_{q+1} 足够大时。现在假设 $q(\alpha)$ 是满足以下条件的最终索引

$$\alpha+\frac{1-\epsilon_{q(\alpha)}}{2}\geq\frac{\alpha}{2}.$$

我们将分析分为两种情况：

若 • $q+1\leq q(\alpha)$，则可得

$$\|u_{q+1}-u_q\|_{\dot{B}^\alpha_{\infty,\infty}} = \|w_{q+1}\|_{\dot{B}^\alpha_{\infty,\infty}} \leq \left(2^{q(\alpha)}\max_{0\leq n\leq q(\alpha)}\|w_n\|_{\dot{B}^\alpha_{\infty,\infty}}\right)2^{-q+1}. \tag{5.16}$$

注意，（5.16）中的常数仅依赖于 α。

- $q+1>q$（α）则利用引理 2.12 可得

$$\|u_{q+1}-u_q\|_{\dot{B}^\alpha_{\infty,\infty}} = \|w_{q+1}\|_{\dot{B}^\alpha_{\infty,\infty}} \lesssim \lambda_{q+1}^\alpha\|w_{q+1}\|_{L^\infty} \lesssim \lambda_{q+1}^{\alpha+\frac{1-\epsilon_{q+1}}{2}} \leq 2^{-C''(\alpha)q} \tag{5.17}$$

对于 $C''(\alpha)=-\frac{\alpha}{2}$ 以及足够大的 λ_{q+1}。

由（5.15）、（5.16）和（5.17）可得

$$\|u_{q+1}-u_q\|_{\dot{B}^{\alpha}_{\infty,\infty}}+\|u_{q+1}-u_q\|_{L^p}\le 2^{-C'(p)q}+\left(2^{q(\alpha)+1}\max_{0\le n\le q(\alpha)}\|w_n\|_{\dot{B}^{\alpha}_{\infty,\infty}}\right)2^{-q}+2^{-C''(\alpha)q}$$

因此，只要适当选取常数 $C(\alpha,p)$，结论便成立。

5.6. **条目 4 的证明**。 我们需要证明

$$\|w_{q+1}\|_{L^2}\gtrsim 1. \tag{5.18}$$

由（5.3）和1 可知

$$0<(\|E_q\|_{L^\infty})^{1/2}\le|a_q|\le(3\|E_q\|_{L^\infty})^{1/2}$$

因此

$$|a_q|\simeq 1\quad\text{and}\quad\|a_q\|_{L^\infty}\simeq 1. \tag{5.19}$$

现在利用 L^2 对 ρ_{q+1} 的归一化以及（5.19），我们得到

$$1=\|\rho_{q+1}\|_{L^2}\le\|a_q\rho_{q+1}\|_{L^2}\|a_q\|^{-1}_{L^\infty}\simeq\|a_q\rho_{q+1}\|_{L^2}. \tag{5.20}$$

现在显然有

$$\|a_q\rho_{q+1}\|_{L^2}\le\left\|\mathbb{P}_{\le\lambda^2_{q+1}}(a_q\rho_{q+1})\right\|_{L^2}+\left\|\mathbb{P}_{\ge\lambda^2_{q+1}}(a_q\rho_{q+1})\right\|_{L^2}$$

并由引理 2.10 可取 λ_{q+1} 足够大，使得

$$\left\|\mathbb{P}_{\ge\lambda^2_{q+1}}(a_q\rho_{q+1})\right\|_{L^2}<\left\|\mathbb{P}_{\le\lambda^2_{q+1}}(a_q\rho_{q+1})\right\|_{L^2}. \tag{5.21}$$

结合（5.20）和（5.21）可知

$$1\lesssim\left\|\mathbb{P}_{\le\lambda^2_{q+1}}(a_q\rho_{q+1})\right\|_{L^2}. \tag{5.22}$$

现在计算

$$2\left\|\mathbb{P}_{\le\lambda^2_{q+1}}(a_q\rho_{q+1})\cos(2\pi\sigma_{q+1}x)\right\|^2_{L^2}=\left\|\mathbb{P}_{\le\lambda^2_{q+1}}(a_q\rho_{q+1})\right\|^2_{L^2}+\int_{\mathbb{T}}\mathbb{P}_{\le\lambda^2_{q+1}}(a_q\rho_{q+1})^2\cos(4\pi\sigma_{q+1}x). \tag{5.23}$$

现在分析（5.23）中的最后一个表达式，利用黎曼–勒贝格引理可知，当 λ_{q+1} 足够大时，有

$$\int_{\mathbb{T}}\mathbb{P}_{\le\lambda^2_{q+1}}(a_q\rho_{q+1})^2\cos(4\pi\sigma_{q+1}x)>-\frac{1}{2}\left\|\mathbb{P}_{\le\lambda^2_{q+1}}(a_q\rho_{q+1})\right\|^2_{L^2}. \tag{5.24}$$

结合（5.22）、（5.23）和（5.24）可得

$$\left\|\mathbb{P}_{\le\lambda^2_{q+1}}(a_q\rho_{q+1})\cos(2\pi\sigma_{q+1}x)\right\|_{L^2}>\frac{1}{2}\left\|\mathbb{P}_{\le\lambda^2_{q+1}}(a_q\rho_{q+1})\right\|_{L^2}\gtrsim 1$$

从而得到（5.18）。

5.7. **第 5 项的**证明。回顾一下，乘以余弦（$2\pi\sigma_{q+1}x$）对应于频率侧的平移，平移量为 $\pm\sigma_{q+1}$。因此，根据定义 2.1 和定义 5.1 可知

$$\operatorname{supp}\widehat{w}_{q+1}\subset B(\sigma_{q+1},2\lambda_{q+1}^2)\cup B(-\sigma_{q+1},2\lambda_{q+1}^2).$$

为确保该支集包含在光滑Littlewood–Paley频率投影中作为恒等算子的那一部分：

$$\{\,2^j\le|\xi|\le\tfrac{12}{7}2^j\,\},$$

（再次顾定义 2.1）只需（假设 $\lambda_{q+1}^3=2^j$ 对充分大的 $j\ge0$）即

$$2^j\le\frac{5}{4}\lambda_{q+1}^3-2\lambda_{q+1}^2\quad\text{and}\quad\frac{5}{4}\lambda_{q+1}^3+2\lambda_{q+1}^2\le\tfrac{12}{7}2^j.$$

除以 λ_{q+1}^2 并整理各项，得到

$$2\le\frac{1}{4}\lambda_{q+1}\quad\text{and}\quad2\le\frac{13}{28}\lambda_{q+1}. \tag{5.25}$$

通过选取 λ_{q+1} 充分大，（5.25）成立，从而

$$\mathbb{P}_{\lambda_{q+1}^3}(w_{q+1})=w_{q+1}. \tag{5.26}$$

（5.26）给出第5项。

5.8. **第6项的证明**。我们从归纳假设开始

$$\sum_{\substack{n,m\le q\\ n\neq m}}\|(u_n-u_{n-1})(u_m-u_{m-1})\|_{\dot H^{-s}}<C_1-2^{-q}. \tag{5.27}$$

根据引理 5.2，我们可以选取 λ_{q+1} 足够大，使得

$$2\|w_{q+1}\|_{L^1}\sum_{n\le q}\|u_n-u_{n+1}\|_{L^\infty}<2^{-q-100} \tag{5.28}$$

因此，利用（5.27）和（5.28），我们可以写成

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n,m\le q+1\\ n\neq m}}\|(u_n-u_{n-1})(u_m-u_{m-1})\|_{\dot H^{-s}}&<\sum_{\substack{n,m\le q\\ n\neq m}}\|(u_n-u_{n-1})(u_m-u_{m-1})\|_{\dot H^{-s}}\\&\quad+2\sum_{n\le q}\|(u_n-u_{n-1})w_{q+1}\|_{\dot H^{-s}}\\&<C_1-2^{-q}+2\|w_{q+1}\|_{L^1}\sum_{n\le q}\|u_n-u_{n+1}\|_{L^\infty}\\&<C_1-2^{-q}+2^{-q-100}\\&<C_1-2^{-q-1}.\end{aligned} \tag{5.29}$$

这给出了第6项的第一部分。对于下一部分，我们再次使用归纳假设

$$\sum_{n\le q}\|(u_n-u_{n-1})^2\|_{\dot H^{-s}}<C_2-2^{-q+100} \tag{5.30}$$

以及第2 项和（5.14）来推出

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq q+1}\|(u_n-u_{n-1})^2\|_{\dot{H}^{-s}} &< C_2-2^{-q+100}+\|w_{q+1}^2\|_{\dot{H}^{-s}}\\ &= C_2-2^{-q+100}+\frac{1}{3}||E_q+3w_{q+1}^2-E_q||_{\dot{H}^{-s}}\\ &\leq C_2-2^{-q+100}+\frac{1}{3}||E_q+3w_{q+1}^2||_{\dot{H}^{-s}}+\frac{1}{3}||E_q||_{\dot{H}^{-s}}\\ &< C_2-2^{-q+100}+2^{-q-101}+2^{-q-1}\\ &< C_2-2^{-q+99}.\end{aligned}\tag{5.31}$$

至此，条目6的证明完成，命题4.1也随之得证。

参考文献

[1] E. Ashkarian、A. Bhargava、N. Gismondi、M. Novack。《尖锐索伯列夫空间中定常二维纳维–斯托克斯方程的间歇奇异解》。arXiv 预印本 https://arxiv.org/abs/2506.00841。[2] H. Bahouri、J.-Y. Chemin、R. Danchin。《傅里叶分析与非线性偏微分方程》。数学科学基础丛书 /数学科学基本原理/,第343卷。Springer，海德堡，2011。[3] R. Beekie、T Buckmaster、V. Vicol。《不守恒磁螺度的理想磁流体动力学弱解》。《偏微分方程年刊》，第6卷，文章1，2020。[4] A. Benyi、T. Oh、T. Zhao。《环面上的分数阶莱布尼茨法则》。《美国数学会会刊》，第153卷，第207-221页，2025。[5] E. Bruè、M. Columbo、A. Kumar。《涡量可积的二维欧拉流的灵活性》。arXiv 预印本 https://arxiv.org/pdf/2408.07934。[6] T. Buckmaster、M. Colombo、V. Vicol。《时间奇异集的豪斯多夫维数严格小于1的纳维–斯托克斯方程野解》。《欧洲数学研究杂志》，24，第9期，第3333–3378页，2021。[7] T. Buckmaster、N. Masmoudi、M. Novack、V. Vicol。《三维欧拉方程的间歇性凸积分》（AMS-217）。《数学年刊研究》，普林斯顿大学出版社，2023。[8] T. Buckmaster、V. Vicol。《纳维–斯托克斯方程弱解的非唯一性》。《数学年刊》，189(1)：101–144，2019。[9] T. Buckmaster、V. Vicol。《凸积分与湍流现象学》。《欧洲数学会数学科学综述》，第6卷，第173-263页，2020。[10] A. Cheskidov、H. Hou。《关于纳维–斯托克斯方程温和解的非唯一性与定常奇异解》。arXiv 预印本 https://arxiv.org/abs/2603.03666。[11] A. Cheskidov、X. Luo。《二维纳维–斯托克斯方程的临界非唯一性》。《偏微分方程年刊》，9:13，2023。[12] A. Cheskidov、X. Luo。《纳维–斯托克斯方程的尖锐非唯一性》。《数学创刊》，229，第987–1054页，2022。[13]M. Christ。《非线性薛定谔方程弱解的非唯一性》。arXiv 预印本 https://arxiv.org/pdf/math/0503366。[14] S. Daneri、L. Székelyhidi。《欧拉方程赫尔德连续弱解的非唯一性与 h-原理》。《理性力学与分析档案》，第224卷，第2期，第471-514页，2017。[15] C. De Lellis、L. Székelyhidi, Jr.《作为微分包含的欧拉方程》。《数学年刊》，(2)，170，第3期，1417-1436，2009。[16] C. De Lellis、L. Székelyhidi。《耗散连续欧拉流》。《数学创刊》，193(2)：377–407，2013。[17] G.G. Doronin、F.M. Natali。《KdV 方程存在非递减解的一个例子》。Un exemple de solution non décroissante de l’équation de KdV posée sur un intervalle borné。《数学报告》，第352卷，第5期，第421-424页，2014

[18] A.V. Faminskii、A.A. Nikolaev。《关于 KdV 和 mKdV 方程的定常解》。载于：Pinelas、S.、Došlá、Z.、Došlý、O.、Kloeden，《微分方程与差分方程及其应用》。ICDDEA 2015。Springer 数学与统计学会议论文集，第164卷。Springer，卡姆。[19] N. Gismondi。《具有非奇漂移的主动标量方程的非平凡可积弱定常解》。arXiv 预印本 https://arxiv.org/abs/2601.14592。[20] N. Gismondi、A. Radu。《定常二维表面准地转方程的间歇解》。arXiv 预印本 https://arxiv.org/abs/2510.16583。[21] O. Goubet、J. Shen。《有限区间上 KdV 方程的对偶 Petrov-Galerkin 形式》。《微分方程进展》，第12卷，第2期，2007。[22] L. Grafakos。《现代傅里叶分析》。数学研究生教材，第2版。Springer，纽约，2009。[23] T. Kappeler、P. Topalov。KdV 方程在 H^{-1}（$\mathbb{T}$，$\mathbb{R}$）中具有整体适定性。《杜克数学期刊》，135(2)：327-360，2006。[24] R. Killip、M. Vişan。KdV 方程在 H^{-1}中适定。《数学年刊》(2) 190 (1) 249 - 305，2019。[25] P. G. Lemarie-Rieusset。《环面上二维纳维–斯托克斯方程的高度奇异（频率稀疏）定常解》。《泛函分析杂志》，第288卷，第4期，2025。[26] X. Luo。《高维纳维–斯托克斯方程的定常解与弱解非唯一性》。《理性力学与分析档案》，233(2)：701-747，2019。[27] S. Modena、L. Székelyhidi。《具有索伯列夫向量场的输运方程的非唯一性》。《偏微分方程年刊》4，18，2018。[28] L. Molinet。《关于 KdV 方程不适定性的一则注记》。《微分积分方程》，24 (7/8) 759 - 765，2011。[29] L. Molinet。《环面上 KdV 和 mKdV 方程的尖锐不适定性结果》。《数学进展》，第230卷，第4-6期，2012。[30] M. Novack、V. Vicol。《间歇 Onsager 定理》。《数学创刊》，第233卷，第223-323页，2023。[31] Q. Peng。《电子磁流体动力学方程的三维定常解》。《非线性分析》，第262卷，2026。

美国印第安纳州西拉法叶市普渡大学数学系。电子邮箱：pathak30@purdue.edu。