arXiv:2603.12623v1 [math.RT] 13 Mar 2026

关于Laurent级数域上的Moy-Prasad商

David Yang

2026年3月16日

摘要

设 k 为一个代数闭域， G 为 $k((t))$上满足若干条件的连通约化群。我们在 G的每个Moy-Prasad商$\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+}$ 上，定义一个由 G 的扭曲 Levi 子群的共轭类给出的分层。随后，我们用相应的扭曲 Levi 子群来计算这些层。这一计算对于局部几何Langlands纲领的若干后续论文是必要的。

目录

1 引言 **2**1.1 符号与约定.3 1.2 致谢.3

2 关于 $k((t))$ 的群 **3**

2.1 拟分裂群与扭曲环代数.3 2.2 Bruhat-Tits 建筑.5 2.3 拟分裂群的 Moy-Prasad 子群.7 2.4 扭曲 Levi 子群.8

3 向量空间$\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+}$ **9**

3.1 半稳定轨迹.9 3.2 映射$q_{x,r}$ .12 3.3 $\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+}$ 的几何不变理论.20 3.4 按扭曲 Levi 子群的分层.25

4 定理 3.19 的证明 **31**
4.1 半单元素上的双射性.31 4.2 所有元素上的双射性.35 4.3 证明的结论.37

1 引言

本文是局部几何 Langlands 纲领的若干后续论文的基础，其中一些论文与其他作者合著，包括 Gurbir Dhillon 和 Yakov Varshavsky。为说明我们的主要结果，我们将概述那些论文中的一些思路。

在本文全文中，固定一个代数闭域 k ，以及定义在 $k((t))$ 上的连通约化群 G。稍后我们需要对 k 施加特征限制，不过暂且先忽略这一点。局部几何 Langlands 纲领旨在对 k-归纳概形 $G((t))$ 的范畴表示进行分类，其点函子定义为 $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{Spec}\ A,\ G((t))) \cong \mathrm{Hom}_{k((t))}(\mathrm{Spec}\ A((t))\ G((t)))$。（在许多早期研究中，假设 G 是分裂的，但我们稍后会看到，将其推广到非分裂情形也至关重要。）我们后续论文的主要结果之一将表明，$G((t))$ 的所有范畴表示都可以由通过扭曲 Levi 子群（即 G 的一个子群，它在扩张至 $k((t))$ 的代数闭包后成为 Levi 子群）进行（非平凡）诱导过程所得到的表示构建而成。

如果 k 是有限域而非代数闭域，Moy 和 Prasad [MP94]会为$G((t))$的每个不可约向量空间表示指定一个未精化极小 K-型，它由建筑 G 中的一点 x 以及一个向量空间$\mathfrak{k}_{x的r}/\mathfrak{k}_{x的r+}$ 特征构成，该特征由 Moy-Prasad 定义。对于 k 特征足够大的情形，这个向量空间的对偶可以与另一个商$\mathfrak{k}_{x的-r}/\mathfrak{k}_{x的-r+}$相识别。在此前的一篇论文 [Yan21],中，我们将这一理论推广到了上述几何情形。不可约范畴表示这一概念并不存在，但我们证明，在某种意义上，每个范畴表示都可以由一些表示构成，而对这些表示可以关联一个未精化极小 K-型族。

作为定义上述诱导过程的第一步，我们需要将 G 的未精化极小K型与扭曲莱维子群的未精化极小K型联系起来。这是本论文的目标。现在让我们更详细地说明我们所做的工作。

在第2节中，我们将回顾Bruhat-Tits理论与莫伊-普拉萨德理论中的若干预备知识。对于不熟悉非分裂群的读者，我们还将说明如何在我们的设定中显式地处理它们。

在第 3 节中，我们将逐步定义一个分层 $(\mathfrak{k}_{x,\,r}/\mathfrak{k}_{x,\,r+})^{\geq G_0}$，其分层依据是每个向量空间 $\mathfrak{k}_{x,\,r}/\mathfrak{k}_{x,\,r+}$上的扭曲莱维子群 G_0 的共轭类。回想一下，未精化极小 K-型包含了某个$\mathfrak{k}_{x,\,-r}/\mathfrak{k}_{x,\,-r+}$中一点的信息。我们的分层指出，极小 K-型应由哪个扭曲莱维子群（在共轭意义下）诱导而来。这一原理的表述是本文的主要结果，即定理 3.19。它根据簇 $(\mathfrak{k}_{x,\,r}^{G_s}/\mathfrak{k}_{x,\,r+}^{G_s})^{=G_s}$ 描述簇 $(\mathfrak{k}_{x,\,r}/\mathfrak{k}_{x,\,r+})^{=G_0}$，其中取 G_0 的共轭元 G_s，使得 x 属于 G_s的（扩展）建筑。

在第 4 节中，我们给出定理 3.19 的证明。

1.1 记号与约定

我们还将固定 $k((t))$ 的一个代数闭包 $\overline{k((t))}$，并将普伊瑟级数域 $\cup k((t^{\frac{1}{n}}))$ 嵌入 $k((t))$。我们需要假设G 在 $k((t))$ 的一个温和分歧扩张上分裂，并且 k 的特征不整除 Weyl群 $G\times_{\operatorname{Spec}k((t))}\operatorname{Spec}\,k((t))$ 的阶。（注意，这与 ~~[Fin21]~~中的假设 2.1 相同。）

1.2 致谢

我们谨向 Ekaterina Bogdanova、Lin Chen、Gurbir Dhillon、Dennis Gaitsgory、KevinLin、Sam Raskin 和 YakovVarshavsky 致谢，感谢他们与我们进行的有益交流。

2 群 over $k((t))$

2.1 拟分裂群与扭曲环代数

在我们先前的论文 [Yan21]，中，我们研究了分裂群 over $k((t))$ 上的莫伊-普拉萨德理论。我们的主要动机仍然是分裂情形，但本文（及其后续论文）所采用的技术要求我们在非分裂群的一般情形下开展研究。

如 [PR08], 中所指出， G 的 $k((t))$-点所成的群 $G((t))$仍可等同于一个扭曲环群。为看出这一点，考虑一个驯顺域扩-

张 $k((t^{\frac{1}{n}}))/k((t))$， G 在其上分裂。于是，伽罗瓦群Gal($k((t^{\frac{1}{n}}))/k((t))$)作用在 $G((t^{\frac{1}{n}}))$上，其不动点为 $G((t))$。

令 H为 G在 k上的分裂形式，并固定 H 的一个钉扎($H, T_H, \Delta_H, (e_{\alpha,H})$)（例如参见 Milne [Mil], 19.49）。那么 G 可描述为$H \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} k((t))$经由取值于群自同构群 $\mathrm{Aut}_{k((t^{\frac{1}{n}}))}(H \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} k((t^{\frac{1}{n}})))$ 的伽罗瓦1-余循环所作的扭曲。根据 Steinberg 定理 [Ste65], G是拟分裂的，因此可以选择这个伽罗瓦1-余循环，使其取值于 $\mathrm{Aut}_{k((t))}((H, T_H, \Delta_H, (e_{\alpha,H})) \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} k((t^{\frac{1}{n}}))) \cong \mathrm{Aut}_k(H, T_H, \Delta_H, (e_{\alpha,H}))$。

具体而言，取 $\mathrm{Gal}(k((t^{\frac{1}{n}}))/k((t))$ 的一个生成元 a，它将$t^{\frac{1}{n}}$映为 $\zeta t^{\frac{1}{n}}$，其中 ζ是一个本原 n次单位根。上述1-余循环将a映为 $\mathrm{Aut}_k(H, T_H, \Delta_H, (e_{\alpha,H}))$,中的一个元素，该元素给出 H的一个自同构 σ。我们可以用下面的引理总结上述讨论。令 B_H 为包含 T_H 的 Borel子群，它由 Δ_H的选取确定。

引理 2.1. 若 H 是 G 在 k 上的分裂形式，则存在一个不被 k 的特征整除的正整数 n、$\mathrm{Gal}(k((t^{\frac{1}{n}}))/k((t)))$ 的一个生成元 $a\colon t^{\frac{1}{n}} \mapsto \zeta t^{\frac{1}{n}}$、 H 的一个保持 T_H 与 B_H 的自同态 σ，以及一个同构

$$\Xi : G \times_{\operatorname{Spec} k((t))} \operatorname{Spec} k((t^{\frac{1}{n}})) \cong H \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} k((t^{\frac{1}{n}}))$$

它使左侧 $\mathrm{id} \times a$ 的作用与右侧 $\sigma \times a$ 的作用相互缠结。这诱导了 $G((t))$ 与 $\sigma \times a$ 作用于 $H((t^{\frac{1}{n}}))$ 的不动点归纳簇之间的一个同构。

注记 2.2. 在引理 2.1 的陈述中，我们仅固定一个 Borel子群及其内部的一个极大环面，而非一整套钉扎。这一弱化将便于在后续论文中讨论扭曲 Levi 子群上 LocSys 的函子性。

在李代数的层面上，上述描述给出如下结论。我们滥用记号，仍用 σ 表示 σ 在李代数 $\mathfrak{h}$ 上诱导的作用。

引理 2.3. 存在一个自同构 θ *of* $\mathfrak{h}((t^{\frac{1}{n}}))$，由下式给出

$$\theta(h \cdot t^{\frac{i}{n}}) = \zeta^i \cdot \sigma(h) \cdot t^{\frac{i}{n}},$$

并且 $\mathfrak{g}((t))$ 可以与 θ 在 $\mathfrak{h}((t^{\frac{1}{n}})$上的不动点对应。

我们注意到，引理 2.1 和 2.3 中的同构并非典范的。因此，我们将力求使主要定理的陈述不依赖于同构的选择，但在证明中，我们通常会发现固定一种选择更为方便。

2.2 布鲁哈-蒂茨建筑

布鲁哈-蒂茨建筑理论深奥而广泛，此处我们只能作简要概述。若要了解更全面的论述，请参阅 Kaletha-Prasad 最近出版的著作 [KP23] 。

令 $\mathcal{B}(G)$ 表示 G 的布鲁哈-蒂茨建筑。这是一个拓扑空间，同时自然地具有多重单纯复形的结构。它还带有离散群 $G(k((t)))$（ $k((t))$-点所构成的群）在 G上的典范作用。

对于 G 的任意极大分裂环面 T_G，存在一个多重单纯子复形$\mathcal{A}(T_G) \subset \mathcal{B}(G)$，称为与 T_G. 对应的 $\mathcal{B}(G)$ 的公寓。作为拓扑空间，它同构于 $X_*(T_G/(T_G \cap Z_G)) \otimes \mathbb{R}$ （赋予欧几里得拓扑），其中 Z_G 是 G的中心。我们有等式$\mathcal{B}(G) = G(k((t))) \cdot \mathcal{A}(T_G)$，后文将经常利用它，将关于 $\mathcal{B}(G)$ 的命题归约为关于 $\mathcal{A}(T_G)$的命题。

当 T_G 具有特定形式时，最容易描述 $\mathcal{A}(T_G)$的多重单纯形结构。固定引理 2.1 中的 $(n,\ a,\ \sigma,\ \Xi)$。令 T为不动点轨迹 T_H^σ. 中单位元所在的连通分支。于是，选取引理 2.1 中的同构后， $T \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec}\ k((t))$ 成为 G 的极大分裂环面。下面描述 $\mathcal{A}(T \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec}\ k((t)))$（以下简称 $\mathcal{A}(T)$，不过提醒读者，这个 $\mathcal{B}(G)$ 的子空间隐式地依赖于引理 2.1 中对 Ξ 的选择。）作为一个仿射空间， $\mathcal{A}(T)$同构于 $X_*(T/(T \cap Z_H)) \otimes \mathbb{R}$，其中 Z_H 是 H 的中心。

相对于 T 作用和次数算子对 $\mathfrak{g}((t))$进行对角化，我们得到仿射根分解

$$\mathfrak{g}((t)) \cong \bigoplus_{\substack{\alpha \in X^*(T) \\ i \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}}} \mathfrak{h}_\alpha^i t^i,$$

其中， h_α 是与 α 对应的根空间，而 h_α^i 是其关于σ的 ζ^{ni}-特征子空间。（为节省篇幅，今后仿射根空间的和将默认以一个元素 $\alpha \in X^*(T)$和一个数$i \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}$为指标。）每个非零仿射根空间$\mathfrak{h}_\alpha^i t^i$ 都对应于 $\mathcal{A}(T)$上的一个泛函，由 $x \mapsto \langle x, \alpha\rangle + i.$ 给出。这些泛函构成一个仿射根系，因此它们的零点集是超平面

这些超平面在 $\mathcal{A}(T)$上诱导出一个多重单纯分解，其极大面是超平面排列之补集的连通分支（的闭包）。这就在 $\mathcal{A}(T)$上给出了所需的多重单纯复形结构。

对每个点 $x \in \mathcal{B}(G)$，布鲁哈-蒂茨都关联一个旁特殊子群$P_x \subseteq G((t))$。当 x 位于公寓 $\mathcal{A}(T)$中时， P_x 的李代数为

$$\mathfrak{p}_x = \bigoplus_{\langle \alpha, x\rangle + i \geq 0} \mathfrak{h}_\alpha^i t^i$$

其幺正根 P_x^+的李代数为

$$\mathfrak{p}_x^+ = \bigoplus_{\langle \alpha, x\rangle + i > 0} \mathfrak{h}_\alpha^i t^i.$$

显然，对于 $x \in \mathcal{A}(T)$， P_x 仅取决于 x 所属的面。反过来，知道 P_x 就足以确定点 x。这一点对于整个建筑也普遍成立。换言之， $\mathcal{B}(G)$的面与 $G((t))$的旁特殊子群一一对应，而且面的包含关系与旁特殊子群的包含关系相反。特别地， $\mathcal{B}(G)$的顶点对应于极大旁特殊子群，而 $\mathcal{B}(G)$的极大单形对应于 G的伊瓦萨瓦子群。此双射将 $G(k((t)))$在 $\mathcal{B}(G)$上的作用与旁特殊子群上的共轭作用相联系。

对于任意正整数 m，我们也可以考虑与 $k((t^{\frac{1}{m}}))$ 上的代数群 $G \times_{\overline{\operatorname{Spec} k}}$谱 $k((t^{\frac{1}{m}}))$ 相关联的建筑 $\mathcal{B}(G, k((t^{\frac{1}{m}})))$。$\mathrm{Gal}(k((t^{\frac{1}{m}}))/k((t)))$ 在 $\mathcal{B}(G, k((t^{\frac{1}{m}})))$ 上有一个作用，而 $\mathcal{B}(\overline{G})$ 可恢复为该伽罗瓦作用的不动点。若取 $m = n$，则 $T_H \times_{\operatorname{Spec} k}$谱 $k((t^{\frac{1}{n}}))$ 可视为 $H \times_{\operatorname{Spec} k}$谱 $k((t^{\frac{1}{n}})) \cong G \times_{\operatorname{Spec} k((t))}$谱 $k((t^{\frac{1}{n}}))$ 中的一个极大环面，并且 $\mathcal{B}(G, k((t^{\frac{1}{n}})))$ 中相应的公寓（此后记为 $\mathcal{A}(T_H)$）将包含 $\mathcal{A}(T)$ 作为伽罗瓦不动点集。

最后，我们定义 $\widetilde{\mathcal{B}}(G, k((t^{\frac{1}{m}})))$ 和 $\widetilde{\mathcal{A}}(T_H) \cong X_*(T_H) \otimes \mathbb{R}$。严格来说，扩张建筑并非多重单纯复形；不过，它在函子性方面或许表现得更好。

扩张建筑中点的稳定子可通过以下引理赋予群概形结构。

~**引理 2.4**。设 x 是 $\mathcal{B}(G)$中的一点。那么存在唯一的子群概形 $G^x \subseteq G((t))$ 满足以下两个性质。

1. G^x 中的单位元连通分支等于 P^x。*2.* k-点群 $G^x(k)$ 是 $G(k((t)))$ 中 x的稳定子。

证明。根据 [PR08], 的定理 0.1， $G((t))$中单位元连通分支的 k-点集可识别为 Kottwitz 同态 κ： $G(k((t))) \to \pi_1(G)_I$ 的核（记号见同上文献）。此外，由 [HR08], 可知， x的稳定子与 κ 的核的交集等于 $P_x(k)$。因此，我们可以将G^x 构造为 $G((t))$中每个含有一个稳定 x的 k-点的连通分支所对应的若干适当的 P_x平移的不交并。要证明 G^x 是一个概形（而非归纳概形），只需证明平移的个数有限。但由于 x 在 $G(k((t)))$中的稳定子有界，其在 κ 下的像是有限的，正如所需。反过来，容易看出，任何满足该引理这两个性质的子群概形都必与上述构造的子群概形一致。

□

2.3 拟分裂群的 Moy-Prasad 子群

对于每个点 x in $\mathcal{B}(G)$，Moy 和 Prasad [MP94][1] 定义了一系列子群 $K_{x,r}$ ，它们是 $G((t))$ 的子群。这些子群满足 $K_{gx,r} = gK_{x,r}g^{-1},$ ，因此要确定 Moy-Prasad 子群，只需指定它们在公寓$\mathcal{A}(T)$中的 x ，其中 T 与上一小节中的相同。

当 $r = 0$ 时，子群$K_{x,\,0}$ 和 $K_{x,\,0+}$ 还原出子群 P_x和 P_x^+。更一般地，设 r 为任意实数。于是我们可以定义 $\mathfrak{g}((t))$ 的以下子空间：

$$\mathfrak{k}_{x,r} = \bigoplus_{\langle \alpha, x\rangle + i \geq r} \mathfrak{h}_\alpha^i t^i$$

and

$$\mathfrak{k}_{x,r+} = \bigoplus_{\langle \alpha, x\rangle + i > r} \mathfrak{h}_\alpha^i t^i.$$

[1]严格来说， [MP94] 只处理定义在非阿基米德局部域上的群。不过，同样的论证也适用于 $k((t))$ 的情形。例如， [KP23] 的第 13 章对此作了明确说明。

当 r 非负时，这些子空间实际上是李子代数。不出所料，对于 $r=0$，我们还原出 $\mathfrak{p}_x$ 和 $\mathfrak{p}_x^+$。对于正的 r，$\mathfrak{k}_{x,\,r}$ 和 $\mathfrak{k}_{x,\,r+}$ 均包含于 $\mathfrak{p}_x^+$ 中；由于 P_x^+ 是幂零的，我们可以取指数得到子群 $K_{x,\,r}$ 和 $K_{x,\,r+}$。

例 2.5. 设 G 为分裂的。分裂给出 $\mathcal{A}(T)$ 内的一个典范原点（记为 0）。那么，对于 n 为非负整数的情形，$K_{0,\,n}$ 是第 n 个同余子群，而 $K_{0,\,n+}$ 是第 $(n+1)$ 个同余子群。

这些 $\mathfrak{k}_{x,\,r}$ 具有良好的交换性质。容易验证：

$$[\mathfrak{k}_{x,r},\mathfrak{k}_{x,s}]\subseteq\mathfrak{k}_{x,r+s}$$

对任意实数 r 和 s均成立。当 r 和 s 均为非负数时，可将其积分得到相应的子群：

$$[K_{x,r},K_{x,s}]\subseteq K_{x,r+s},$$

而关于 $\mathfrak{k}_{x,\,r+}$ 和 $K_{x,\,r+}$ 的类似关系也可形式地推出。一个特别重要的推论是，P_x 的伴随作用保持所有的 $\mathfrak{k}_{x,\,r}$不变，因此对于 $r\geq 0$，$K_{x,\,r}$ 是 P_x 的正规子群。

我们简要指出，也可以通过设定 $K_{x',\,r}=K_{x,\,r}$，来为 $x'\in_\sim\mathcal{B}(G)$ 定义 Moy-Prasad 子群，其中 x 是 x' 在 $\mathcal{B}(G)$ 中的像。

2.4 扭曲 Levi 子群

我们需要将 Levi 子群这一类推广。

定义 2.6. G 的扭曲 ***Levi*** 子群 是指一个子群 $G_0\subseteq G$，它在经过 $k((t))$的某个扩张后成为 *Levi* 子群。

定义 2.7. 令 $\mathrm{TL}(G)$ 为扭曲 *Levi* 子群的共轭类集合，并赋予如下偏序：G_0 的共轭类小于或等于 G_1 的共轭类，当且仅当 G_1 包含 G_0的一个共轭。令 $\mathrm{TL}(G)^\diamond$ 为通过向 $\mathrm{TL}(G)$ 添加一个新的最大元而得到的偏序集，我们将其记为 $\diamond$。

为简化记号，我们将为 TL(G) 中的每个共轭类选取一个代表元，并将 TL(G) 与所选代表元的集合等同。这样，我们可以取一个元素 $G_0\in$TL(G)，并将 G_0 视为一个实际的子群。

对于任意扭曲 Levi 子群 $G_0 \subseteq G$，我们都有一个自然的包含映射 $\sim \quad \sim\mathcal{B}(G_0) \subseteq \mathcal{B}(G)$。该包含映射与 Moy-Prasad 子代数相容，具体如下。设 x 为 $\mathcal{B}(G_0)$中的一个点。我们滥用记号$\widetilde{}$，仍用 x表示它在 $\mathcal{B}(G)$中的像。从 x 和一个有理数 r出发，我们可以取 Moy-Prasad 子代数 $\mathfrak{k}_{x,r} \subseteq \mathfrak{g}((t))$，也可以取 Moy-Prasad 子代数 $\mathfrak{k}_{x,r}^{G_0} \subseteq \mathfrak{g}_0((t))$。于是有

$$\mathfrak{k}_{x,r}^{G_0} = \mathfrak{k}_{x,r} \cap \mathfrak{g}_0((t)).$$

3 向量空间$\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+}$

本节将针对固定的 $x \in \mathcal{B}(G)$ 和 $r \in \mathbb{R}$，研究向量空间$\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+}$。对于 $r > 0$，该向量空间同构于$K_{x,r}/K_{x,r+}$，而这个群的特征在 [MP94]中起着核心作用。

Moy-Prasad 子群的交换关系意味着，P_x 在 $\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+}$ 上的伴随作用可经由 P_x/P_x^+，分解；后者是定义在 k 上的有限型约化代数群。令 L_x 表示商 P_x/P_x^+。在 [MP94], 中，人们发现（在局部域的情形下），$\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+}$ 中的半稳定 L_x-轨道控制着 $G((t))$ 的表示论。本节致力于研究这类轨道，最终得到定理 3.19（将在下一节证明）；该定理将这类轨道的研究归结为扭曲 Levi 子群的类似轨道的研究。

按照引理 2.1，固定 (n, a, σ, Ξ) 将会有所帮助。我们还将固定 T_H^σ 中的一个极大 k- 环面，以便在 $\mathcal{B}(G)$ 中定义公寓 $\mathcal{A}(T)$。不过，对于应用而言，重要的是我们的定义和定理不依赖于这些选择，除非所选对象明确出现在陈述中。这种选择无关性可从证明的结构直接看出。

3.1 半稳定轨迹

回顾一下，半稳定轨迹（$\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+}$）$^\circ$定义为那些其 L_x-轨道闭包中不含0的点所构成的轨迹。它的补集是不稳定轨迹（$\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+}$）^{us}。这些轨迹的意义由下述结果加以说明，该结果是将 [MP94] 的第6节改编到我们的设定后得到的。[2]

[2]另请参见我们此前论文 [Yan21], 中的定理 3.2；该结果本质上相同，但以范畴表示的语言表述。

定理 3.1. 设 v 是$\mathfrak{k}_{x,r}$中的一个元素。则 v 对某个$y \in \mathcal{B}(G)$ 落在$\mathfrak{k}_{y,r+}$ 中，当且仅当 v 在$\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+}$ 中的像 v 落在$(\mathfrak{k}_{x,r}^{-}/\mathfrak{k}_{x,r+})^{\mathrm{us}}$中。

证明这一点的关键是下面这个引理。

引理 3.2. 对于 $\mathcal{B}$（G）中的每个点 y，定义$Z_y \subset \mathfrak{k}_{x,\ r}/\mathfrak{k}_{x,\ r+}$ 为 $\mathfrak{k}_{x,\ r} \cap \mathfrak{k}_{y,\ r+} \to \mathfrak{k}_{x,\ r}/\mathfrak{k}_{x,\ r+}$的像。那么我们在

$$\bigcup_{y\in\mathcal{B}(G)} Z_y = \bigcup_{\substack{y\in\mathcal{B}(G)\\ \mathfrak{k}_{x,r+}\subseteq\mathfrak{k}_{y,r+}\subseteq\mathfrak{k}_{x,r}}} Z_y = (\mathfrak{k}_{x,r+}/\mathfrak{k}_{x,r})^{\mathrm{us}}$$

k-点层面有

证明。为方便起见，我们改为令 x 和 y 位于扩张建筑 $\sim\mathcal{B}(G)$中，这显然不会影响命题的正确性。

首先，我们证明每个 Z_y 都包含于 $(\mathfrak{k}_{x,\ r}/\mathfrak{k}_{x,\ r+})^{\mathrm{us}}$. 。 $\mathcal{B}(G)$中的任意两点$\tilde{}$都位于同一个公寓中，因此我们可以将 x 和 y 共轭，使它们位于 $\mathcal{A}(T) \cong X_*(T) \otimes \mathbb{R}$ 中。于是我们得到一个同构

$$\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+} \cong \bigoplus_{\langle\alpha,x\rangle+i=r} \mathfrak{h}_\alpha^i t^i.$$

子空间 $\mathfrak{h}_\alpha^i t^i$对于满足 $\langle\alpha,\ x\rangle + i = r$的 i 和 α，当且仅当 $\langle\alpha,\ y\rangle + i > r$, 时包含于 $\mathfrak{k}_{y,\ r+}$ ；等价地，$\langle\alpha,\ y - x\rangle > 0$。由此可得

$$Z_y = \bigoplus_{\substack{\langle\alpha,x\rangle+i=r\\ \langle\alpha,y-x\rangle>0}} \mathfrak{h}_\alpha^i t^i.$$

注意，存在一个余权 $z \in X_*(T)$，使得 $\langle z,\ \alpha\rangle > 0$ 对所有满足 $\langle y - x,\ \alpha\rangle > 0$ 的 α 都成立。事实上，若允许 z 取自 $X_*(T) \otimes \mathbb{R}$，则所有这类 z 构成一个包含 α的开锥。每个这样的锥都与每个格相交，包括 $X_*(T)$，因此我们可以在 $X_*(T)$ 中找到这样的一个 z。根据我们的假设，对于每个点 $p \in Z_y$，我们有

$$\lim_{a\to 0} z(a) \cdot p = 0, \tag{1}$$

因此， p 的轨道闭包包含 0，正如所需。

还需证明，对于每个 $p \in (\mathfrak{k}_{x,\ r}/\mathfrak{k}_{x,\ r+})^{\mathrm{us}}$，都存在某个 $y \in \tilde{\mathcal{B}(G)}$ 与 $\mathfrak{k}_{x,\ r+} \subseteq \mathfrak{k}_{y,\ r+} \subseteq \mathfrak{k}_{x,\ r}$ 以及 $p \in Z_y$。不妨假设

x 属于 $\mathcal{A}(T)$。根据希尔伯特–芒福德判据，存在一个一参数子群 $z:\mathbb{G}_m \to L_x$ 使得满足 (1)。

由于 z 是约化群 L_x中的一参数子群，因此对某个 $a \in L_x$，它位于 T 的某个共轭 $a\overline{T}a^{-1}$中。于是 $a^{-1}z\overline{a}$对应于 $T.$的某个余特征 α。令 $y' \in \mathcal{A}(T)$ 为点 $x+\epsilon\cdot\alpha$，其中 $\epsilon>0.$ 充分小。反过来运用证明第一部分中的推理，我们看到$a\cdot p$属于 $Z_{y'}.$。令 a 为 a 在 P_x 中的任意提升，并取 $y=a^{-1}\cdot y'.$。于是有

$$p \in \overline{a}^{-1}Z_{y'} = Z_y.$$

剩下需要证明 $K_{x,\ r+} \subseteq K_{y,\ r+} \subseteq K_{x,\ r}.$。简短计算表明 $K_{x,\ r+} \subseteq K_{y',\ r+} \subseteq K_{x,\ r}$，并用 a 共轭即可得到所需的包含映射。

□

定理 *3.1* 的证明。首先假设 v 属于 $\mathfrak{k}_{y,\ r+}$ 对某个 y成立。那么 v必包含于 Z_y，因此由引理 3.2 可知它属于不稳定轨迹。

反之，假设 v 属于$(\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+})^{\mathrm{us}}$。由引理 3.2，必存在某个 $y \in \mathcal{B}(G)$，使得$K_{x,r+} \subseteq K_{y,r+} \subseteq K_{x,r}$ 且 $v \in Z_y$。这些条件表明，$\mathfrak{k}_{y,r+}$ 与 Z_y 在投影$\mathfrak{k}_{x,\ r} \to \mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+}$.下的原像重合。由此可知，$v$ 属于$\mathfrak{k}_{y,r+},$，即为所求。 □

作为一条简短的推论，我们有如下结果。

命题 3.3. 假设$(\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+})^\circ$ 非空。则 r 是有理数。

证明. 不失一般性，我们可以假设 x 属于 $\mathcal{A}(T)$。由定理 3.1，只需证明：若假设 r 是无理的，则存在某个 $y \in \mathcal{B}(G)$，使得$\mathfrak{k}_{x,r} \subseteq \mathfrak{k}_{y,r+}.$ 事实上，我们将在$\mathcal{A}(T)$中构造出这样的 y 。

回顾一下，当且仅当 $\langle\alpha,x\rangle+i \geq r.$时，仿射根空间 $\mathfrak{h}_\alpha^i t^i$ 位于 $\mathfrak{k}_{x,r}$ 中。考虑由满足以下条件的配对 (y,s) 组成的集合 S ：$\mathfrak{k}_{x,r}$ 是 $\mathfrak{k}_{y,s}.$ 的子集。此条件等价于要求：对于 $\mathfrak{k}_{x,r}$ 中的每个仿射根空间 $\mathfrak{h}_\alpha^i t^i$ ，都有 $\langle\alpha,y\rangle+i \geq s.$。显然，我们有 $(x,r) \in S$。

先验地，S 是 $(X_*(T/T\cap Z_H) \otimes \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$ 中无穷多个半空间的交集。然而，显然，与仿射根空间 $\mathfrak{h}_\alpha^i t^i \subseteq \mathfrak{k}_{x,r}$ 对应的不等式蕴含与任意满足 $j>i.$ 的仿射根空间 $\mathfrak{h}_\alpha^j t^j$ 对应的不等式。因此，实际上只需有限多个半空间即可定义 S。由此，关于格 $\in S$，在所有 (y,s) 上最大化 s 的问题是一个有理系数的线性规划

格 $X_*(T/T\cap Z_H)\oplus\mathbb{Z}$。因此， s 可能达到的最大值必为有理数（或者 s 可以任意大，不过这种情况很容易排除），从而存在某个满足 $s>r$ 的 $(y,s)\in S$。但此时$\mathfrak{k}_{x,r}\subseteq\mathfrak{k}_{y,s}\subseteq\mathfrak{k}_{y,r+}$，如所求。

□

3.2 映射$q_{x,\ r}$

由于 G是 $k((t))$上的约化群，我们可以构造几何不变理论商 $\mathfrak{g}//G$。这给出一个仿射 $k((t))$-簇 C，它从 $\mathfrak{g}$上的缩放作用继承了一个典范 $\mathbb{G}_m$ 作用。利用引理 2.1，我们可以识别该簇C:

引理 3.4. 设 σ' 为由 σ诱导的 $\mathfrak{h}//H$ 的自同构。则 C可等同于$(\mathfrak{h}//H)\times_{\mathrm{Spec}\,k}$谱 $k((t))$ 经由将 a 映到自同构 $\sigma'\times a$.的*1*-余循环所作的伽罗瓦扭曲

此外， $\mathfrak{h}//H$上存在典范的向量空间结构，并且σ' 关于该结构是线性的。因此我们可以如下定义$(\underline{\mathfrak{h}//H})((t^{\frac{1}{n}}))$ 的一个 $k((t))$-线性自同构 θ'

$$\theta'(h\cdot t^{\frac{i}{n}})=\zeta^i\cdot\sigma'(h)\cdot t^{\frac{i}{n}},$$

并且 $C((t))$ 可等同于$(\mathfrak{h}//H)((t^{\frac{1}{n}}))$的 θ'-不动点。

上述所有同一化都与前述 $\mathbb{G}_m$作用相容。

证明。 大多数所需结论都可由标准的伽罗瓦下降操作得到，正如引理 2.1中所述。唯一并非形式性成立的结论是 σ' 是线性的。为此，我们使用Kostant截面的理论。

对于任意 $\mathfrak{sl}_2$-三元组 $\{e,h,f\}$，其中 e是一个主幂零元，Kostant [Kos63] 证明了映射 $e+C_{\mathfrak{h}}(f)\ \to\mathfrak{h}//H$ 是一个同构，其中 $C_{\mathfrak{h}}(f)$是 f 在 $\mathfrak{h}$中的中心化子。这使我们能够赋予 $\mathfrak{h}//H$ 以 $C_{\mathfrak{h}}(f)$的向量空间结构。Kostant的另一个定理 [Kos59] 指出，每个这样的 $\mathfrak{sl}_2$-三元组 $\{e,h,f\}$ 都是共轭的，因此该向量空间结构不依赖于具体的三元组，从而是规范的。

现在我们构造一个特定的此类 $\mathfrak{sl}_2$-三元组。我们可以在 H 的每个单根空间中选取一个非零元素 e_α，使得 σ 保持这些元素组成的集合不变。令 e 为这些 e_α 的和，并令 h 为

H 中正余根的和。那么存在唯一的元素 f，使得 $\{e, h, f\}$ 是一个 $\mathfrak{sl}_2$-三元组。

由于 σ 保持 e_α的集合，以及 T_H 和 B_H，它必须保持元素 e 和 h （从而也保持 f）。它显然通过线性自同构作用于 $C_\mathfrak{g}(f)$，因此也同样作用于 $\mathfrak{h}//H$，正如所需。 □

为便于日后引用，我们指出上述证明的如下简单推论。

引理 3.5. 存在 $\mathfrak{g}$ 中的一个 $\mathfrak{sl}_2$-三元组 $\{e_\mathfrak{g}, h_\mathfrak{g}, f_\mathfrak{g}\}$，使得映射 $e_\mathfrak{g} + C_\mathfrak{g}(f_\mathfrak{g}) \to C$ 是一个同构。

证明。设 e, h, 以及 f 如引理 3.4 的证明中所述。由于 σ 保持 e，我们可以利用引理 2.3 将 $\mathfrak{h}((t))$中 e 的像下降为$\mathfrak{g}$. 的一个元素 $e_\mathfrak{g}$。对 h 和 f可同样处理。该引理现由对 Kostant 定理进行下降而得。 □

引理 3.4 中的等同并非典范的，因为它们依赖于引理 2.1 中所作的选择。然而，人们确实在 C上得到某些典范结构。

引理 3.6. 引理 *3.4* 所赋予 C 的向量空间结构不依赖于 (n, a, σ, Ξ) 的选择。此外，在引理 *3.4* 下与$(\mathfrak{h}//H)((t))$ 上的次数分次相对应的 $\mathbb{Q}$-指标分次 $C((t))$ 也不依赖于上述选择。

证明。假设我们有如引理 2.1 中所述的两种不同选择（n, a, σ, Ξ）和（n', a', σ', Ξ'）。取一个公倍数后，我们可以假设（n, a）$=$（n', a'）。那么（σ, Ξ）和（σ', Ξ'）必相差一个 $H \times_{\mathrm{Spec}\, k} \mathrm{Spec}\ k((t^{\frac{1}{n}}))$ 的自同构。将 $k((t^{\frac{1}{n}}))$ 替换为一个扩张（如有必要）后，这样的自同构可以写成一个内自同构与一个保持钉扎的自同构的复合。内自同构在（$\mathfrak{h}//H$）$\times_{\mathrm{Spec}\, k} \mathrm{Spec}\ k((t^{\frac{1}{n}}))$ 上作用平凡，因此我们只需考虑保持钉扎的自同构。这种自同构必定是某个保持钉扎的 k-自同构 H 经基变换到 $\mathrm{Spec}\ k((t^{\frac{1}{n}}))$ 所得；正如我们在引理 3.4 的证明中所见，它诱导出 $\mathfrak{h}//H$ 的一个线性自同构。进而，这又诱导出（$\mathfrak{h}//H$）$\times_{\mathrm{Spec}\, k} \mathrm{Spec}\ k((t^{\frac{1}{n}}))$ 的一个线性自同构，以及（$\mathfrak{h}//H$）$((t))$ 的一个保持次数的线性自同构，所求即得。 □

对于一个有理数 j，令 $C((t))^j$ 表示在次数分次下 $C((t))$ 的第 j 个分次分量。$C((t))$ 上还有另一种自然分次。回忆一下 C 上的典范 $\mathbb{G}_m$ 作用。我们断言这个作用是线性的。事实上，这由引理 3.4 以及 $\mathfrak{h}//H$ 上的典范 $\mathbb{G}_m$ 作用是线性的这一事实推出。因此我们得到一个分解

$$C = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} C_i$$

将 C 分解为其权 i 分量。由于 $\mathbb{G}_m$ 作用是扩张的，只有当 i 为正时，C_i 才可能非零。注意，$C((t))$上的诱导分次与次数分次交换，因此我们有

$$C((t)) = \bigoplus_{\substack{i\in\mathbb{Z}_+\\ j\in\mathbb{Q}}} C_i((t))^j.$$

$\mathbb{G}_m$ 在 $\mathfrak{h}//H$ 上的作用诱导出类似的分解

$$\mathfrak{h}//H = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_+} (\mathfrak{h}//H)_i,$$

并且每个 C_i 都是 $(\mathfrak{h}//H)_i$.的相应伽罗瓦扭曲。由此可知，每个$C_i((t))$都可以识别为 $(h//H)_i((t^{\frac{1}{n}}))$的 θ'-不动点。

根据定义，存在一个 $k((t))$-簇的自然映射 $\mathfrak{g} \to C$，它诱导出归纳概形的映射 $q\colon\ \mathfrak{g}((t)) \to C((t))$。该映射与 Moy-Prasad 滤过具有如下良好的相容性。

定理 3.7。选取 $x \in \mathcal{B}(G)$ 以及一个实数 r。

1. 映射 q 将$\mathfrak{k}_{x,\ r}$ 映入

$$\bigoplus_{\substack{i\in\mathbb{Z}_+, j\in\mathbb{Q}\\ j\geq r\cdot i}} C_i((t))^j.$$

2. 复合

$$\mathfrak{k}_{x,r} \to \bigoplus_{\substack{i\in\mathbb{Z}_+, j\in\mathbb{Q}\\ j\geq r\cdot i}} C_i((t))^j \to \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_+} C_i((t))^{r\cdot i}$$

经由$\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+}$.

证明。 我们将通过归约到分裂情形，并利用交换图来证明该定理

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{g}((t)) & \xrightarrow{q} & C((t)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathfrak{g}((t^{\frac{1}{n}})) & \longrightarrow & C((t^{\frac{1}{n}})) \\
\downarrow\cong & & \downarrow\cong \\
\mathfrak{h}((t^{\frac{1}{n}})) & \longrightarrow & (\mathfrak{h}//H)((t^{\frac{1}{n}}))。
\end{array}$$

由于对于任意 $g \in G(k((t)))$，$\mathfrak{k}_{x,r}$ 与 $\mathfrak{k}_{gx,r}$ 共轭，它们在 q 下的像相同。因此不失一般性，我们可以假设 $x \in \mathcal{A}_*(T)$，其中T 如第 2.2 节所述。令 $y \in \mathcal{A}_*(T_H)$ 为 x 在 $\mathcal{A}_*(T)$ 到 $\mathcal{A}_*(T_H)$ 的包含映射下的像。

令 $\mathfrak{k}^H_{y,r}$ 表示子空间

$$\bigoplus_{\substack{\alpha\in X^*(T_H)\\ i\in\frac{1}{n}\mathbb{Z}\\ \langle\alpha,y\rangle+i\geq r}} \mathfrak{h}_\alpha t^i$$

$\mathfrak{h}((t^{\frac{1}{n}}))$。 （这里保留 $\alpha \in X^*(T_H)$ 下标，因为它不同于 $g((t))$ 子空间的 $\alpha \in X^*(T)$ 下标。）根据定义可立即得出，包含映射 $\mathfrak{g}((t)) \to \mathfrak{h}((t^{\frac{1}{n}}))$ 将 $\mathfrak{k}_{x,r}$ 映入 $\mathfrak{k}^H_{y,r}$。从上述交换图可知，要证明第 1) 部分，只需证明箭头

$$\mathfrak{h}((t^{\frac{1}{n}})) \to (\mathfrak{h}//H)((t^{\frac{1}{n}}))$$

将$\mathfrak{k}^H_{y,r}$ 映射到

$$\bigoplus_{\substack{i\in\mathbb{Z}_+, j\in\frac{1}{n}\mathbb{Z}\\ j\geq r\cdot i}} (\mathfrak{h}//H)_i t^j. \tag{2}$$

我们同样可以将第 2 部分化归为分裂情形。事实上，令 $\mathfrak{k}^H_{y,\,r+}$ 表示该子空间

$$\bigoplus_{\substack{\alpha\in X^*(T_H)\\ i\in\frac{1}{n}\mathbb{Z}\\ \langle\alpha,y\rangle+i> r}} \mathfrak{h}_\alpha t^i.$$

注意，沿着 $\mathfrak{k}_{x,\ r} \to \mathfrak{k}^H_{y,\ r}$ 的 $\mathfrak{k}^H_{y,\ r+}$ 的原像等于 $\mathfrak{k}_{x,\ r+}$. 因此，如果我们知道该映射，那么定理的第 2 部分便可得出

$$\mathfrak{k}^H_{y,r} \to \bigoplus_{\substack{i\in\mathbb{Z}_+, j\in\frac{1}{n}\mathbb{Z}\\ j\geq r\cdot i}} (\mathfrak{h}//H)_i t^j \to \bigoplus_{\substack{i\in\mathbb{Z}_+, j\in\frac{1}{n}\mathbb{Z}\\ j= r\cdot i}} (\mathfrak{h}//H)_i t^j \tag{3}$$

经由分解 $\mathfrak{k}^H_{y,r}/\mathfrak{k}^H_{y,r+}$.

这两个陈述实际上已在 [Yan21], 的第4.4.2节和第4.4.3节中得到证明，但是是在非交换情形下。为完整起见，我们将在此重述该证明。

归纳概形 $\mathfrak{h}((t^{\frac{1}{n}}))$是归纳仿射的，因而自然对应于一个交换拓扑代数（参见 [FG06]的第19.2节）。具体而言，若将 $\mathfrak{h}((t^{\frac{1}{n}}))$写成仿射概形在闭嵌入下的归纳极限$\varinjlim X_i$，则相应的交换拓扑代数为$\varprojlim \mathcal{O}(X_i)$。对于 $\mathfrak{h}((t^{\frac{1}{n}}))$的情形，这一构造可显式描述如下。拓扑向量空间 $\mathfrak{h}((t^{\frac{1}{n}}))$是Tate的，因此在其对偶 $\mathfrak{h}((t^{\frac{1}{n}}))^*$上存在典范拓扑。于是，与归纳概形 $\mathfrak{h}((t^{\frac{1}{n}}))$相关联的交换拓扑代数是对称代数$(\mathfrak{h}((t^{\frac{1}{n}}))^*)$关于由 $\mathfrak{h}((t^{\frac{1}{n}}))^*$的拓扑所诱导的拓扑的完备化对称代数$(\mathfrak{h}((t^{\frac{1}{n}}))^*)$。类似地，对于归纳概形$(\mathfrak{h}//H)((t^{\frac{1}{n}}))$，这一构造所关联的代数为对称代数$((\mathfrak{h}//H)((t^{\frac{1}{n}}))^*)$。

映射 $\mathfrak{h}((t^{\frac{1}{n}})) \Rightarrow (\mathfrak{h}//H)((t^{\frac{1}{n}}))$ 随后对应于拓扑代数之间的映射 $\mathrm{Sym}((\mathfrak{h}//H)((t^{\frac{1}{n}}))^*) \to \mathrm{Sym}(\mathfrak{h}((t^{\frac{1}{n}}))^*)$。我们需要对这个映射作出明确描述。对每个向量空间 $(\mathfrak{h}//H)_i^*$，选取一个基 $a_{i,j}$ 。那么对每个 $m \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}$，我们都有一个元素 $a^m_{i,j} \in (\mathfrak{h}//H)_i((t))^*$ ，定义如下：

$$\langle a^m_{i,j}, ct^s\rangle = \langle a_{i,j}, c\rangle \delta_{m,s}.$$

拓扑向量空间 $(\mathfrak{h}//H)((t^{\frac{1}{n}}))^*$可以描述为由 $a^m_{i,j}$ 张成的离散向量空间 V_o 的逆极限，其中 $m \geq o$，而 o 遍历 $\frac{1}{n}\mathbb{Z}$.的所有元素

我们类似地为每个对偶根空间$\mathfrak{h}^*_\alpha$ 选取一组基$b_{\alpha,j}$ ，并类似于$a^m_{i,j}$定义元素 $b^m_{\alpha,j} \in \mathfrak{h}((t^{\frac{1}{n}}))^*$。假设$a_{i,j}$ 沿着 $\mathfrak{h} \to \mathfrak{h}//H$ 的拉回等于

$$\sum_l c_l b_{\alpha_{l,1},j_{l,1}} b_{\alpha_{l,2},j_{l,2}} \cdots b_{\alpha_{l,i},j_{l,i}},$$

其中包含 k的 c_l 元素。（我们利用了这样一个事实： $\mathfrak{h} \to \mathfrak{h}//H$与自然的 $\mathbb{G}_m$ 作用相容，这说明$a_{i,j}$ 的拉回是$b_{\alpha,j'}$中的一个 i 次齐次多项式。）然后，通过对洛朗级数进行简短计算可知，$a^m_{i,j}$在 Sym($\mathfrak{h}((t^{\frac{1}{n}}))^*$) 中的像等于

$$\sum_l c_l \sum_{\substack{m_1,m_2,\cdots,m_i\in\frac{1}{n}\mathbb{Z}\\ m_1+m_2+\cdots+m_i=m}} b^{m_1}_{\alpha_{l,1},j_{l,1}} b^{m_2}_{\alpha_{l,2},j_{l,2}} \cdots b^{m_i}_{\alpha_{l,i},j_{l,i}}.$$

$(\mathfrak{h}//H)((t^{\frac{1}{n}}))$ 的子概形 (2) 由 $a^m_{i,\bar{j}}$的消失所定义，其中 $m < r \cdot i$。因此，对于第 1 部分，只需证明每个这样的 $a^m_{i,j}$ 在 Sym($\mathfrak{h}((t^{\frac{1}{n}}))^*$) 中的像在 $\mathfrak{k}_{x,r}$ 上消失。固定这样的 $i, j,$以及 m，并像之前一样假设沿 $\mathfrak{h} \to \mathfrak{h}//H$ 对 $a_{i,j}$ 的拉回等于

$$\sum_l c_l b_{\alpha_{l,1},j_{l,1}} b_{\alpha_{l,2},j_{l,2}} \cdots b_{\alpha_{l,i},j_{l,i}}.$$

该多项式必须是 H-不变的，因此也是 T_H-不变的，所以对于任意 l，必有

$$\alpha_{l,1} + \alpha_{l,2} + \cdots + \alpha_{l,i} = 0.$$

由此，对于 $b^{m_1}_{\alpha_{l,1},j_{l,1}} b^{m_2}_{\alpha_{l,2},j_{l,2}} \cdots b^{m_i}_{\alpha_{l,i},j_{l,i}}$ 这一项，即 $a^m_{i,j}$ 在 Sym($\mathfrak{h}((t^{\frac{1}{n}}))^*$) 中的像的任意项，我们都有

$$\sum_{z=1}^{i} (\langle \alpha_{l,z}, y\rangle + r - m_z) = \langle 0, y\rangle + r \cdot i - m > 0.$$

因此存在某个 z 的值，使得$\langle \alpha_{l,z}, y\rangle + r > m_z$. 这意味着 $b^{m_z}_{\alpha_{l,z},j_{l,z}}$ 在 $\mathfrak{k}^H_{y,r}$ 上平凡作用。因此，$a^m_{i,j}$ 的像的每一项都在 $\mathfrak{k}^H_{y,r}$ 上消失，正如所需。

为证明第 2 部分），我们更仔细地考察上述证明。复合 (3) 由将 $m = r \cdot i$ 拉回到 $\mathfrak{k}^H_{y,r}$ 的 $a^m_{i,j}$ 决定。固定这样的 i， j，和 m。

沿着第 1 部分证明的思路，我们看到，$b^{m_1}_{\alpha_{l,1},j_{l,1}} b^{m_2}_{\alpha_{l,2},j_{l,2}} \cdots b^{m_i}_{\alpha_{l,i},j_{l,i}}$中，像 $a^m_{i,j}$在 Sym($\mathfrak{h}((t^{\frac{1}{n}}))^*$) 中的项，只有在 $\mathfrak{k}^H_{y,-r}$上才可能非平凡，前提是$\langle \alpha_{l,z}, y\rangle + r - m_z \le 0$ 对所有 z 都成立。但我们有

$$\sum_{z=1}^{i} (\langle \alpha_{l,z}, y\rangle + r - m_z) = \langle 0, y\rangle + r \cdot i - m = 0,$$

因此，对所有 z，必有 $\langle \alpha_{l,z}, y\rangle + r - m_z = 0$。但这意味着我们的项是从 $\mathfrak{k}^H_{y,r}/\mathfrak{k}^H_{y,r+}$ 拉回的，正如所需。 □

受上述定理的启发，我们将 $C((t))_{\geq r}, C((t))_{>r}$ 和 $C((t))_{=r}$ 定义为

$$\bigoplus_{\substack{i\in\mathbb{Z}_+, j\in\mathbb{Q}\\ j\geq r\cdot i}} C_i((t))^j,$$

$$\bigoplus_{\substack{i\in\mathbb{Z}_+, j\in\mathbb{Q}\\ j> r\cdot i}} C_i((t))^j,$$

and

$$\bigoplus_{\substack{i\in\mathbb{Z}_+, j\in\mathbb{Q}\\ j= r\cdot i}} C_i((t))^j,$$

分别为。然后定理 3.7 给出一个映射 $\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+} \to C((t))_{=r}$，我们将其称为 $q_{x,r}$。由于映射 $\mathfrak{k}_{x,r} \to C((t))$ 按定义是 P_x-不变的，因此 $q_{x,r}$ 是 L_x-不变的。它也自然地与域 $k((t))$ 的扩张相容。特别地，若 $y \in \mathcal{B}(G, k((t^{\frac{1}{n}})))$ 表示 x 沿包含映射 $\mathcal{B}(G) \to \mathcal{B}(G, k((t^{\frac{1}{n}})))$ 的像，则存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+} & \xrightarrow{q_{x,r}} & C((t))_{=r} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{k}^H_{y,r}/\mathfrak{k}^H_{y,r+} & \longrightarrow & \displaystyle\bigoplus_{\substack{i\in\mathbb{Z}_+, j\in\frac{1}{n}\mathbb{Z}\\ j=r\cdot i}} (\mathfrak{h}//H)_i t^j. \end{array}$$

将底部箭头称为 $q^H_{y,r}$. 我们可以进一步利用证明定理 3.7 中的方法，来描述 $q^H_{y,r}$。

引理 3.8。图表

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{k}^H_{y,r}/\mathfrak{k}^H_{y,r+} & \xrightarrow{q^H_{y,r}} & \displaystyle\bigoplus_{\substack{i\in\mathbb{Z}_+, j\in\frac{1}{n}\mathbb{Z}\\ j=r\cdot i}} (\mathfrak{h}//H)_i t^j \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{h} & \longrightarrow & \mathfrak{h}//H \end{array}$$

其中左侧箭头是复合

$$\mathfrak{k}^H_{y,r}/\mathfrak{k}^H_{y,r+} \cong \bigoplus_{\substack{\alpha\in X^*(T_H)\\ i\in\frac{1}{n}\mathbb{Z}\\ \langle\alpha,y\rangle+i=r}} \mathfrak{h}_\alpha t^i \xrightarrow{t\mapsto 1} \bigoplus_{\substack{\alpha\in X^*(T_H)\\ r-\langle\alpha,y\rangle\in\frac{1}{n}\mathbb{Z}}} \mathfrak{h}_\alpha \to \mathfrak{h}$$

而右侧箭头是复合

$$\bigoplus_{\substack{i\in\mathbb{Z}_+, j\in\frac{1}{n}\mathbb{Z}\\ j=r\cdot i}} (\mathfrak{h}//H)_i t^j \cong \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_+, r\cdot i\in\frac{1}{n}\mathbb{Z}} (\mathfrak{h}//H)_i t^{r\cdot i} \xrightarrow{t\mapsto 1} \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_+, r\cdot i\in\frac{1}{n}\mathbb{Z}} (\mathfrak{h}//H)_i \to \mathfrak{h}//H$$

是交换的。

证明。 我们按照定理 3.7 的证明选取 $a_{i,j}$ 和 $b_{\alpha,j}$ 。由于 $a_{i,j}$构成了 $(\mathfrak{h}//H)^*$ 的一组基，只需证明对于任意 i 和 j，沿图表中两条路径将 $a_{i,j}$ 拉回到$\mathfrak{k}^H_{y,r}/\mathfrak{k}^H_{y,r+}$ 所得的结果相同。同样，设沿 $\mathfrak{h}\to\mathfrak{h}//H$ 将 $a_{i,j}$ 拉回后等于

$$\sum_l c_l b_{\alpha_{l,1},j_{l,1}} b_{\alpha_{l,2},j_{l,2}} \cdots b_{\alpha_{l,i},j_{l,i}}.$$

然后，再将此表达式拉回到$\mathfrak{k}^H_{y,r}/\mathfrak{k}^H_{y,r+}$，得到

$$\sum_{\substack{l\\ \forall z, r-\langle\alpha_{l,z},y\rangle\in\frac{1}{n}\mathbb{Z}}} c_l b^{r-\langle\alpha_{l,1},y\rangle}_{\alpha_{l,1},j_{l,1}} b^{r-\langle\alpha_{l,2},y\rangle}_{\alpha_{l,2},j_{l,2}} \cdots b^{r-\langle\alpha_{l,i},y\rangle}_{\alpha_{l,i},j_{l,i}}.$$

由于对于任意 l，$\alpha_{l,z}$ 的和等于零，因此我们看到，要使这次拉回非零，必须有

$$r\cdot i = \sum_{z=1}^{i}(r-\langle\alpha_{l,z},y\rangle)\in\frac{1}{n}\mathbb{Z}.$$

另一方面，将 $a_{i,j}$ 拉回到

$$\bigoplus_{\substack{p\in\mathbb{Z}_+, q\in\frac{1}{n}\mathbb{Z}\\ q=r\cdot p}} (\mathfrak{h}//H)_p t^q$$

当 $r\cdot i$ 不在 $\frac{1}{n}\mathbb{Z}$ 中时为零，否则等于 $a^{r\cdot i,\ j}_i$。如果 $r\cdot i\notin\frac{1}{n}\mathbb{Z}$，那么两个拉回都为零，结论即得，因此不妨设 $r\cdot i\in\frac{1}{n}\mathbb{Z}$.。定理 3.7 的证明表明，将 $a^{r\cdot i,\ j}_i$ 拉回到 $\mathfrak{k}_{y,\ r}/\mathfrak{k}_{y,\ r+}$ 后，可以表示为各项 $b^{m_1}_{\alpha_{l,\ 1},\ j_{l,\ 1}} b^{m_2}_{\alpha_{l,\ 2},\ j_{l,\ 2}} \cdots b^{m_i}_{\alpha_{l,\ i},\ j_{l,\ i}}$之和，其中对每个 z，都有 $m_z = r-\langle\alpha_{l,\ z},\ y\rangle$. 但这显然与另一个拉回一致，因此结论即得。 □

3.3 几何不变理论：$\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+}$

事实证明，L_x 在 $\mathfrak{k}_{x,\,r}/\mathfrak{k}_{x,\,r+}$ 上的作用必定具有相当受限的形式。为说明这一点，我们将使用分次李代数理论。在本小节中，除非另有说明，我们假设 x 位于 $\mathcal{A}(T)$ 中。

x与 σ 的取值按下式确定 $\mathfrak{h}$上的一个 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$-分次

$$\mathfrak{h}_j = \bigoplus_{\substack{\alpha\in X^*(T)\\ i\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}\\ \langle\alpha,x\rangle+i\cong j \pmod 1}} \mathfrak{h}^i_\alpha.$$

不难验证，按引理 2.3 选取等同，便确定了$\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+}$ 与第 r个分次分量 $\mathfrak{h}_r$. 之间的同构。特别地，对于 $r=0$，我们看到 L_x 的李代数等同于$\mathfrak{h}_0$. 。因此，L_x 在$\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+}$ 上的作用本质上正是 Vinberg [Vin76]在特征零下以及 Levy [Lev09] 在正特征下所研究的情形。我们需要下述对命题 3.3 的加强，以处理 Vinberg 与 Levy 未涵盖的情形。

引理 3.9. 假设不存在 $\mathfrak{h}$ 的指数 e 使得 $e\cdot r\in\frac{1}{n}\mathbb{Z}$。则 $\mathfrak{h}_r$ 的每个元素既是 L_x-不稳定的，也是幂零的。

证明。首先，我们证明 $\mathfrak{h}_r$ 的每个元素都是幂零的（作为$\mathfrak{h}$. 的元素）。根据引理 3.8，只需证明映射 $q^{H}_{y,\,r}$ 恒为零。回想一下，$q^{H}_{y,\,r}$ 的目标是

$$\bigoplus_{\substack{i\in\mathbb{Z}_+, j\in\frac{1}{n}\mathbb{Z}\\ j=r\cdot i}} (\mathfrak{h}//H)_i t^j.$$

由于仅当 i 是 $\mathfrak{h}$的一个指数时，$(\mathfrak{h}//H)_i$ 才非空，我们的假设保证其目标仅包含零点，正如所需。

还需证明每个幂零元素 $z\in\mathfrak{h}_r$ 都是 L_x-不稳定的。由于 $\mathfrak{h}$中只有有限个幂零轨道，因此必定存在某个幂零轨道 $o\subseteq\mathfrak{h}$，其与 $\mathfrak{h}_r$ 的交集是稠密的。于是，对于任意点 $p\in o\cap\mathfrak{h}_r$，$o\cap\mathfrak{h}_r$ 在 p处的切空间 $[\mathfrak{h},p]\cap\mathfrak{h}_r$必定等于 $\mathfrak{h}_r$。根据 $\mathfrak{h}$上分次的性质，我们有 $[\mathfrak{h},p]\cap\mathfrak{h}_r=[\mathfrak{h}_0,p]$，因此可知，对于任意 $p\in o\cap\mathfrak{h}_r$.，必定有$[\mathfrak{h}_0,p]=\mathfrak{h}_r$。但是，$[\mathfrak{h}_0,p]$ 是 $L_x\cdot p$ 在 p处的切空间，所以 $o\cap\mathfrak{h}_r$ 必定只包含一个 L_x-轨道。这意味着 $\mathfrak{h}_r$ 中的每个元素都是 L_x-不稳定的，证毕。

□

设 $\mathfrak{c}$ 是 $\mathfrak{h}_r$的一个嘉当子空间，即由彼此对易的半单元素构成的极大子空间。 $\mathfrak{c}$的 Weyl群 $W_{\mathfrak{c}}$ 是商群$N_{L_0}(\mathfrak{c})/Z_{L_0}(\mathfrak{c})$。 下面将 [Vin76]和 [Lev09] 的一些结果转述到我们的情形中。

P命题 3.10. *1.* 元素 $z \in \mathfrak{h}_r$ 是 L_x-不稳定的，当且仅当 z 是幂零的。

2. 元素 $z \in \mathfrak{h}_r$ 有闭的 L_x-轨道，当且仅当 z 是半单的。

3. 群 $W_{\mathfrak{c}}$ 是有限的。

4. 几何不变量理论商 $\mathfrak{c}/W_{\mathfrak{c}} \to \mathfrak{h}_r//L_x$ 之间的自然映射是同构。*5.* $\mathfrak{h}_r$ 中的两个元素在 $\mathfrak{h}_r//L_x$ 中的像相同，当且仅当它们的半单部分属于同一个闭的 L_x-轨道。

证明。 如果不存在指数 e 满足 $\mathfrak{h}$，那么该命题的所有断言都是显然的。因此，我们可以假设对于某个指数 e，有 $e \cdot r \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}$。特别地， r 是有理数，且其分母（以最简形式表示）不是 char k 的倍数（根据我们对 G 和 char k 的假设）。在可能修改我们对 x 的选择后（但不改变 $\mathfrak{h}_r$），我们还可以假设 $x \in X_*(T/(T \cap Z_H)) \otimes \mathbb{Q}$。

令 d 为满足 $dr \in \mathbb{Z}$ 的 n 的最小倍数，并令 $\mathfrak{h}'$ 表示李代数 $\mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{h}_r \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_{(d-1)r}$。它具有一个自然的 $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$-分次，由 $\mathfrak{h}'_i = \mathfrak{h}_{i \cdot r}$. 定义。仿照 Kawanaka 的定理 2.2.9(i) 的证明 [Kaw87]，可以构造一个连通约化子群 $H' \subseteq H$，它诱导李代数的包含映射 $\mathfrak{h}' \subseteq \mathfrak{h}$.。根据构造， H' 包含 T^σ 的单位连通分支，并且是 σ-不变的。

令 $\zeta_d \in k^*$ 满足 $\zeta_d^{d/n} = \zeta$，并选取一个同态 $\mu : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to k^*$，将 $\frac{1}{d}$ 映射到 ζ_d.。若对于 $\bar{y} \in X_*$， $x = \frac{y}{d'}$（$T/$（$T \cap Z_H$）） 以及 $d' \in \mathbb{Z}$, 则我们定义 $x_\mu \in T/T \cap Z_H$ 为元素 y（μ（$\frac{1}{d'}$）），它与 d' 和 y 的选择无关。简短计算表明，ad $\mu_x \circ \sigma$ 在 $\mathfrak{h}'_i$. 上的作用是乘以 ζ_d^i。由于 ad $\mu_x \circ \sigma$： $\mathfrak{h}' \to \mathfrak{h}'$ 是由 H 的自同构 Ad $\mu_x \circ \sigma$ 诱导的，我们处于 [Vin 76]（在特征零 [3] 中）和 [Lev 09] （在正特征中）的情形。

[3]严格来说， [Vin76] 仅在 $\mathbb{C}$ 上成立，而不适用于一般的特征零代数闭域。不过，我们从 loc.cit. 中使用的结果，其证明并未用到任何 $\mathbb{C}$ 的特有性质。或者，也可以运用标准的勒夫谢茨原理论证，将此命题归约到 $k = \mathbb{C}$ 的情形。

在特征零中，该命题的各部分分别由 [V in 76] 中的命题 1、命题 3、命题 8、定理 7 和定理 3 得出。在正特征中，该命题的第 1、2 和 5 部分由 [Lev 09], 中的推论 2.13 得出，而第 3 部分所依据的论证与 [V in 76] 中命题 8 的证明相同。最后，第 4 部分就是 [Lev 09] 中的定理 2.18。

□

为了使用这个命题，将 $\mathfrak{h}_r$ 中元素的半单性概念转化为适用于 $\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+}$. 的概念会很有帮助。为此，我们可以将 $\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+}$ 认作 $\mathfrak{h}_r$ $((\mathfrak{k}_x))$ 的子空间

$$\bigoplus_{\langle\alpha,x\rangle+i=r} \mathfrak{h}_\alpha^i t^i$$

。这给出了一个映射 $\mathfrak{h}_r \cong \mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+} \to \mathfrak{g}((t))$，我们将其记作 $f_{x,r\cdot}$。这些映射与李括号自然相容，即对于任意 $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$，存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h}_{r_1} \times \mathfrak{h}_{r_2} & \xrightarrow{[-,-]} & \mathfrak{h}_{r_1+r_2} \\ \downarrow{\scriptstyle f_{x,r_1}\times f_{x,r_2}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{x,r_1+r_2}} \\ \mathfrak{g}((t)) \times \mathfrak{g}((t)) & \xrightarrow{[-,-]} & \mathfrak{g}((t)). \end{array}$$

引理 3.11. z 是 $\mathfrak{h}_r$ 中的半单（分别为幂零）元素，当且仅当 $f_{x,r}(z)$ 是 $\mathfrak{g}(t)$ 中的半单（分别为幂零）元素。更一般地，若 z 的若尔当分解为 $z = z_s + z_n$，则 $f_{x,r}(z)$ 的若尔当分解为 $f_{x,r}(z) = f_{x,r}(z_s) + f_{x,r}(z_n)$。

证明。由命题 3.9，我们可以假设 r 是有理的，且其分母不是 $\operatorname{char} k$ 的倍数。半单性、幂零性以及若尔当分解的概念在基域扩张下保持不变。因此，我们可以用某个包含 t^r 的域 $k((t^{\frac{1}{m}}))$ 替换 $k((t))$。将 t 重新标记为$t^{\frac{1}{m}}$，我们可以假设 $m = 1$，从而 r 是一个整数。

元素 z 是半单的，当且仅当伴随作用 z 是 $\mathfrak{h}$ 的半单自同态。由于 r 是整数，伴随作用 z 将每个 $\mathfrak{h}_i$ 映到自身，并且伴随作用 z 是半单的，当且仅当伴随作用 $z|_{\mathfrak{h}^i}$ 的每个限制都是半单的。

作为向量空间，在为每个 $\mathfrak{g}$ 选择一个从 $\mathfrak{g}$ 到 t 的提升后，$\mathfrak{g}((t))$ 同构于

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \mathfrak{h}_i((t)) \tag{4}$$

在为每个 $i \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 选择一个到 $\mathbb{R}$. 的提升后，自同态 $\mathrm{ad} f_{x,\ r}(z)$ 通过 $t^r \cdot (\mathrm{ad}\, z|_{\mathfrak{h}_i} \otimes_k k((t)))$。作用于每个子空间 $\mathfrak{h}_i((t))$。显然，$\mathrm{ad} f_{x,\ r}(z)$ 是半单的，当且仅当每个 $\mathrm{ad}\, z|_{\mathfrak{h}_i}$ 都是半单的，正如所要求的那样。

z 的幂零性同样等价于以下两者同时成立：$\mathrm{ad}\, z$ 是幂零自同态，且 z 属于 $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$. 。与半单性相同的证明表明，$\mathrm{ad}\, z$ 是幂零的，当且仅当 $\mathrm{ad} f_{x,\ r}(z)$ 是幂零的。在 (4) 的同构下，$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}](\!(t)\!)$ 对应于子空间

$$\bigoplus_{i,j\in\mathbb{R}} [\mathfrak{h}_i, \mathfrak{h}_j]((t)).$$

z 属于 $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$，当且仅当 $f_{x,\ r}(z)$ 属于 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}](\!(t)\!)$，因此 z 是幂零的，当且仅当 $f_{x,\ r}(z)$ 是幂零的。

最后，假设我们有一个若尔当分解 $z = z_s + z_n$。由前两部分可知，$f_{x,\ r}(z_s)$ 是半单的，而 $f_{x,\ r}(z_n)$ 是幂零的。要证明这给出了 $f_{x,\ r}(z)$ 的若尔当分解，只需证明 $f_{x,\ r}(z_s)$ 与 $f_{x,\ r}(z_n)$ 可交换。但我们有

$$[f_{x,r}(z_s), f_{x,r}(z_n)] = t^r f_{x,r}([z_s, z_n]) = 0.$$

□

映射 $f_{x,\ r}$ 与 $q_{x,\ r}$ 满足一种自然的相容性，这一点将在后文中发挥作用。

引理 3.12。 存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+} & \xrightarrow{q_{x,r}} & C((t))_{=r} \\ \downarrow{\scriptstyle f_{x,r}} & & \downarrow \\ \mathfrak{g}((t)) & \xrightarrow{q} & C((t)). \end{array}$$

证明。 由定理 3.7，只需证明 q 将

$$\bigoplus_{\langle\alpha,x\rangle+i=r} \mathfrak{h}_\alpha^i t^i$$

到 $C((t))_{=r}$。我们仿照定理 3.7 第 1 部分的证明。同样地，我们可以归约到分裂情形，在该情形下我们希望证明 q 将子空间

$$\bigoplus_{\substack{\alpha\in X^*(T_H)\\ i\in\frac{1}{n}\mathbb{Z}\\ \langle\alpha,y\rangle+i=r}} \mathfrak{h}_\alpha t^i \tag{5}$$

to

$$\bigoplus_{\substack{i\in\mathbb{Z}_+, j\in\frac{1}{n}\mathbb{Z}\\ j=r\cdot i}} (\mathfrak{h}//H)_i t^j.$$

选择证明定理 3.7 中所述的基 $a_{i,j}$ 和 $b_{\alpha,j}$。我们希望证明 $a_i^m{}_{,j}$ 的拉回在 (5) 上与 $m \neq r\cdot i$ 一起消失。固定 $i, j,$ 和 m，并令 $a_{i,j}$ 沿 $\mathfrak{h}\to\mathfrak{h}//H$ 的拉回等于

$$\sum_l c_l b_{\alpha_{l,1},j_{l,1}} b_{\alpha_{l,2},j_{l,2}} \cdots b_{\alpha_{l,i},j_{l,i}}.$$

与定理 3.7 的证明中一样，出现在$a_i^m{}_{,j}$ 的拉回中的每一项$b^{m_1}_{\alpha_l{}_{,1},j_{l,1}} b^{m_2}_{\alpha_l{}_{,2},j_{l,}}{}_2 \cdots b^{m_i}_{\alpha_l{}_{,i},j_{l,i}}$ 都满足

$$\sum_{z=1}^{i} (\langle \alpha_{l,z}, y\rangle + r - m_z) = \langle 0, y\rangle + r\cdot i - m \neq 0.$$

但要使这样的项在 (5) 上非平凡作用，必须对每个 z 都有 $\langle\alpha_{l,z}, y\rangle + r - m_z = 0$，这就产生了矛盾。 □

最后，我们简要指出本节内容的一些直接推论。

命题 3.13。该映射

$$(\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+})//L_x \to C((t))_{=r}$$

由 $q_{x,r}$ 诱导的映射是有限态射。

证明。 我们将使用引理 3.8 中的记号及其前面的讨论。只需证明复合

$$(\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+})//L_x \to \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_+} C_i((t))^{r\cdot i} \to \bigoplus_{\substack{i\in\mathbb{Z}_+, j\in\frac{1}{n}\mathbb{Z}\\ j=r\cdot i}} (\mathfrak{h}//H)_i t^j \to \mathfrak{h}//H \qquad (6)$$

是有限态射，因为 (6) 中最后两个箭头是闭嵌入。引理 3.8 将这一复合识别为自然映射

$$\mathfrak{h}_r//L_x \to \mathfrak{h}//H.$$

选择将 $\mathfrak{c}$ 扩张为 $\mathfrak{h}$ 的嘉当子空间 $\mathfrak{c}_\mathfrak{h}$。那么，上述映射构成如下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{c}_{\mathfrak{h}} & \longrightarrow & \mathfrak{c} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{h}_r//L_x & \longrightarrow & \mathfrak{h}//H. \end{array}$$

竖直箭头是整映射，顶端箭头是闭嵌入。由此即可形式地推出底端箭头是有限态射，正如所需。

□

这个命题有一个重要推论，为理解深度 r 轨迹提供了另一种视角。

推论 3.14. 不稳定轨迹 $(\mathfrak{k}^{\perp}_{x,\ r+}/\mathfrak{k}^{\perp}_{x,\ r})^{\mathrm{us}}$ 可以在集合论意义下与纤维 $q^{-1}_{x\,r,}\ (0)$ 等同。

证明。 根据几何不变理论，不稳定轨迹与 0 上方的集合论纤维重合

$$\mathfrak{k}^{\perp}_{x,r+}/\mathfrak{k}^{\perp}_{x,r} \to (\mathfrak{k}^{\perp}_{x,r+}/\mathfrak{k}^{\perp}_{x,r})//L_x.$$

因此，只需证明 0 上方的集合论纤维

$$(\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+})//L_x \to C((t))_{=r}$$

仅由点 0 构成。

根据命题 3.13，集合论纤维必由有限个点构成。然而，该纤维还必须是 $\mathbb{G}_m$-不变的，因此只能包含 0。

□

3.4 按扭曲 Levi 子群分层

现在我们转向本章的首要目标，即将$\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+}$ 中的每个半稳定 L_x-轨道与某个扭曲 Levi 子群对应的轨道联系起来。我们的出发点是一个简单的观察。

引理 3.15. $k((t))$-点与 $\mathfrak{g}$的半单元素的共轭类一一对应。

证明。 回顾一下，我们有一个 $\mathfrak{g} \to C$ 到 $k((t))$-簇的典范映射。根据定义，该映射将共轭元素映到同一个点。只需证明每个纤维中的半单元素构成一个单独的共轭类。

固定一个 $k((t))$-点 $c \in C.$。首先证明，存在至少一个半单元素 $\mathfrak{g}$，其映到 $c.$。引理 3.5 告诉我们，存在一个截面$C \to \mathfrak{g}$，因此某个 $g \in \mathfrak{g}$ 映到 c。接着，对 g 作若尔当分解，其半单部分 g_{ss} 也映到 c，如所需。

众所周知， $\mathfrak{g} \otimes_{k((t))} k((t))$ 中的两个半单元素共轭，当且仅当它们映到 $C \times_{\operatorname{Spec} k((t))} \operatorname{Spec} k((t))$ 的同一点。由此可知，纤维 c 上的所有半单元素都稳定共轭，即在某个 $k((t))$ 的扩张上变为共轭。取纤维 c 上的一个半单点 a。稳定共轭类 a 中的共轭类集合可与下列集合建立双射（参见例如[Kot82]^4 的第 3 节）：伽罗瓦上同调集之间映射的核

$$H^1(k((t)), Z_G(a)) \to H^1(k((t)), G),$$

其中 a(Z_G) 是 a 的中心化子。根据 Steinberg 定理 [Ste65], ，两个上同调集都消失，因此每个与 a 稳定共轭的元素实际上都与之共轭，这就得到了所需结果。

□

特别地，对于每个 C 的 $k((t))$ 点 c，纤维 c 中任意两个半单元素的中心化子都共轭。由于 $\mathfrak{g} \otimes_{k((t))} k((t))$ 中半单元素的中心化子是 Levi 子群，$\mathfrak{g}$ 中半单元素的中心化子便是扭曲 Levi 子群。对于任意非零点 $p \in C$，令$Z_p \in$TL(G)$^\diamond$ 表示映到 p 的半单元素的中心化子的共轭类。我们还将设 $Z_0 = \diamond \in$TL(G)$^\diamond$.

引理 3.16. 设 G_0 是 $\mathrm{TL}(G)^\diamond$ 的一个元素，并令 X 表示 $q_{x,r}$ 的像，它将是 $C((t))_{=r\cdot}$ 的一个闭子簇。满足 $Z_p \geq G_0$ 的点集 $p \in X$ 构成 X 的 *Zariski* 闭子集。此外，满足 $Z_p = G_0$ 的点集 $p \in X$ 在该子集中是开的。

证明. 轨迹 X 是命题 3.13 中有限态射的像，因此是闭的。此外，当 $G_0 = \diamond$ 时，该陈述显然成立，因此我们可以假设 G_0 属于 TL(G)（因而对应于 G 的一个实际子群。）

对于任意 $g \in G((t))$，关于 x 和 $g \cdot x$ 的引理陈述是等价的，因此我们可以假设 $x \in \mathcal{A}(T)$。回想一下，在命题 3.10 及其前面的讨论中，我们构造了一个由半单元素组成的子空间 $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{k}_{x,\ r}/\mathfrak{k}_{x,\ r+}$

[4]严格来说，[Kot82] 研究的是 G 中元素之间的稳定共轭，而非 $\mathfrak{g}.$ 中的元素。不过，证明同样适用于 $\mathfrak{g}$ 的情形（事实上还更简单，因为 $\mathfrak{g}$ 中半单元素的中心化子总是连通的）。

以及一个作用在 $\mathfrak{c}$ 上的有限群 $W_{\mathfrak{c}}$，使得映射$\mathfrak{c}//W_{\mathfrak{c}} \to (\mathfrak{k}_{x,\ r}/\mathfrak{k}_{x,\ r+})//L_x$ 是一个同构。于是由命题 3.13，复合 $\mathfrak{c} \to \mathfrak{c}//W_{\mathfrak{c}} \to X$ 是有限且满射。

引理 3.12 告诉我们，对于 $\mathfrak{c}$ 中的任意元素 a，$q_{x,r}(a)$ 视为 $C((t))$ 的元素时，等于 $q(f_{x,r}(a))$，因此 $Z_{q_{x,r}}(a)$ 属于 $Z_G(f_{x,r}(a))$ 的共轭类。由于 $f_{x,r}(\mathfrak{c})$ 中的元素彼此交换且为半单（由引理 3.11 可知），$\mathfrak{g} \otimes_{k((t))} k((t))$ 分解为若干一维 $f_{x,r}(\mathfrak{c}) \otimes_k k((t))$-表示 $\mathfrak{g}_i$ 的和。每个 $\mathfrak{g}_i$ 对应于 $(f_{x,r}(\mathfrak{c}) \otimes_k k((t)))^*$ 中的一个元素 β_i；对于任意 $a \in \mathfrak{c}$, $Z_{q_{x,r}}(a)$, $\otimes_{k((t))} k((t))$ 是那些满足 β_i 将 $f_{x,r}(a)$ 映为 0 的 $\mathfrak{g}_i$ 之和。

由此可知，映射 $a \mapsto Z_{\mathfrak{g}}(f_{x,r}(a))$ 是上半连续的，即对于 $\mathfrak{g}$ 中的任意元素 g，$\mathfrak{c}$ 中满足 $Z_{\mathfrak{g}}(f_{x,r}(a))$ 包含 g 的点 a 所成的集合是 $\mathfrak{c}$. 的一个 Zariski 闭子集。由于 $Z_G(f_{x,r}(a))$ 是连通的，函数 $a \mapsto Z_G(f_{x,r}(a))$ 也是上半连续的，因此特别地，它只取有限个值。

在 $Z_G(f(a))$ 的有限多个可能取值中，令 G'_1，G'_2，$\cdots$，G'_m为包含 G_0 的某个共轭的子群。则 $Z_G(f(a))$ 包含 G_0 的某个共轭，当且仅当它包含其中一个 G'_i。由此可知，使 $Z_G(f(a))$ 包含 G_0 的某个共轭的 $a \in \mathfrak{c}$ 的轨迹 $\mathfrak{c}^{\geq G_0}$ 是闭的。类似地，使 $Z_G(f(a))$ 将 G_0 的某个共轭包含为真子群的这类 a 的集合 $\mathfrak{c}^{>G_0}$ 也是闭的，因此 $\mathfrak{c}^{\geq G_0}$ 中 $\mathfrak{c}^{>G_0}$ 的补集在 $\mathfrak{c}^{\geq G_0}$ 中是开的。由于映射 $\mathfrak{c} \to X$ 是有限态射，这些结论对 X 也成立。

□

注 3.17。对于任意固定的 r，存在某个 x，使得 $q_{x,\ r}$ 的像就是整个 $C((t))_{=r\cdot}$。这可以通过选取 x，使其位于某个“泛型”深度 r 半单元素的中心化子的建筑中来实现。我们省略细节，因为下文不会用到。

令 $(\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+})^{\geq G_0}$（分别地，$(\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+})^{=G_0}$）表示满足 $Z_{q_{x,r}}(p) \geq G_0$（分别地，$Z_{q_{x,r}}(p) = G_0$）的点 $p \in \mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+}$ 所构成的轨迹。由引理 3.16，$(\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+})^{\geq G_0}$ 是一个闭子轨迹，其中包含作为开子集的 $(\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+})^{=G_0}$。我们赋予它们诱导的簇结构。由推论 3.14，我们有 $(\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+})^{\geq \diamond} = (\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+})^{=\diamond} = (\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+})^{\mathrm{us}}$.

现在我们可以转向本论文的关键论述。固定 $G_0 \in \mathrm{TL}(G)$。为了关联 G_0 和 G的建筑，我们将 x 提升到扩张建筑 $\mathcal{B}(G)$中的一点 $\tilde{}$（我们也将其记作 x）。。这不会影响本截面中任何先前结果的有效性，因为$\mathfrak{k}_{x,\ r}$

~ ~保持不变。现在，对于 G_0的任意共轭 G_0'，我们可以（并且确实会）通过某个嵌入，将 $\mathcal{B}(G_0')$与其在 $\mathcal{B}(G)$中的像等同起来。

令 G^x 如引理 2.4 中所述，并令 S 为满足 $x \in \mathcal{B}(G_0')$、且与 G_0 在 G 下共轭的子群 $G_0' \subseteq G$ 的 G^x-共轭类~的集合。为每个 $s \in S$选取一个代表元 G_s，并令 N_s 为$\sim G_s$ 在 G中的正规化子。N_s 在 $\mathcal{B}(G_s)$上有一个自然作用；如引理 2.4 中所述，我们可以唯一地构造一个约化子群 $N_s^x \subseteq N_s$，使得 $N_s^x(k((t)))$ 是~ $N_s(k((t)))$ 中 $x \in \mathcal{B}(G_s)$ 的稳定子。

我们希望将 L_x在 $\mathfrak{k}_{x,\,r}/\mathfrak{k}_{x,\,r+}$ 中的轨道与 G_0（或者更准确地说，其共轭元 G_s）对应的类似轨道联系起来。我们将用上标 G_s表示我们关于 G的各个结构中对应于 G_s 的对象。例如，我们有 Moy-Prasad 子空间 $\mathfrak{k}_{x,\,r}^{G_s} \subseteq \mathfrak{g}_s((t))$，轨迹 $(\mathfrak{k}_{x,\,r}^{G_s}/\mathfrak{k}_{x,\,r+}^{G_s})^{=G_1}$（对任意$G_1 \in \mathrm{TL}(G_s)^{\diamond}$，），映射 $q_{x,\,r}^{G_s}:\mathfrak{k}_{x,\,r}^{G_s}/\mathfrak{k}_{x,\,r+}^{G_s} \to C((t))_{=r}$，等等。

对于每个 $s \in S$，存在一个闭嵌入

$$i_s : \mathfrak{k}_{x,r}^{G_s}/\mathfrak{k}_{x,r+}^{G_s} \to \mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+}.$$

我们希望了解此映射如何与本节前面定义的分层相互作用。

引理 3.18。设 p_s 是一个非零的 k-点，属于 $\mathfrak{k}_{x,\,r}^{G_s}/\mathfrak{k}_{x,\,r+}^{G_s}$.则 $Z_{q_{x,\,r}(i_s(p_s))}$包含 $Z_{q_{x\,r}^{G_s}\text{的一个共轭},\,(p_s)}^{G_s}$.

证明。考虑自然映射 $C^{G_s} \cong \mathfrak{g}_s//G_s \to \mathfrak{g}//G \cong C$.

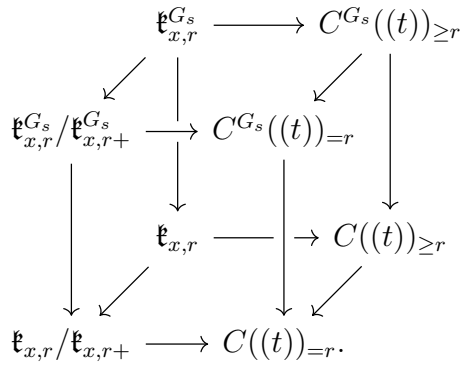
我们断言，诱导映射 $C^{G_s}((t)) \to C((t))$ 将 $C^{G_s}((t))_{\geq r}$ 映射到$C((t))_{\geq r}$，且复合

$$C^{G_s}((t))_{\geq r} \to C((t))_{\geq r} \to C((t))_{\geq r}/C((t))_{>r} \cong C((t))_{=r}$$

经过 $C^{G_s}((t))_{\geq r}/C^{G_s}((t))_{>r} \cong C^{G_s}((t))_{=r}$.分解

由于分量为 $C_i((t))^j$ 的双重分次与 $k((t))$ 的扩张自然相容，因此只需考虑 G_s 和 G 分裂，且 G_s 是 G 内的 Levi 子群的情形。在这种情况下，对于某个 H 的 Levi 子群 L，存在一个将包含映射 $G_s \subseteq G$ 与 $L \times_{\mathrm{Spec}\,k} \mathrm{Spec}\ k((t)) \subseteq H \times_{\mathrm{Spec}\,k} \mathrm{Spec}\ k((t))$ 相识别的映射。于是，映射 $C^{G_s}((t)) \to C((t))$ 可识别为 $(\mathfrak{l}//L)((t)) \to (\mathfrak{h}//H)((t))$，所需结论由简短计算即可得出。

现在，利用定理 3.7，我们得到一个立方体



我们知道这个立方体除前面外的每个面的交换性。由于 $\mathfrak{k}_{x,r}^{G_s} \to \mathfrak{k}_{x,r}^{G_s}/\mathfrak{k}_{x,r+}^{G_s}$ 是一个满同态，因此前面也交换。于是映射 $C^{G_s}((t))_{=r} \to C((t))_{=r}$ 将 $q_{x,r}^{G_s}(p_s)$ 映到 $q_{x,r}(i_s(p_s))$。因此，对于任意半单元素 $g_s \in \mathfrak{g}_s$，若其在 C^{G_s} 中的像等于 $q_{x,r}^{G_s}(p_s)$，映射 $\mathfrak{g}_s \to \mathfrak{g} \to C$ 就将 g_s 映到 $q_{x,r}(i_s(p_s))$。由此可得，$Z_{q_{x,r}(i_s(p_s))}$ 与 $Z_G(g_s)$ 共轭，而 $Z^{G_s}_{q_{x,r}^{G_s}(p_s)}$ 与 $Z_{G_s}(g_s)$ 共轭，这就推出了引理的结论。 □

特别地，i_s 必须将 $(\mathfrak{k}_{x,r}^{G_s}/\mathfrak{k}_{x,r+}^{G_s})^{=G_s}$ 映射到 $(\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+})^{\geq G_0}$. 我们希望找出 $(\mathfrak{k}_{x,r}^{G_s}/\mathfrak{k}_{x,r+}^{G_s})^{=G_s}$ 中映射到 $(\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+})^{=G_0}$ 的子轨迹。令 Z_s 为 G_s 的中心。那么，分解 $\mathfrak{g}_s \cong [\mathfrak{g}_s, \mathfrak{g}_s] \oplus \mathfrak{z}_s$ 诱导出一个分解

$$\mathfrak{k}_{x,r}^{G_s}/\mathfrak{k}_{x,r+}^{G_s} \cong \mathfrak{k}_{x,r}^{[G_s,G_s]}/\mathfrak{k}_{x,r+}^{[G_s,G_s]} \oplus \mathfrak{k}_r^{Z_s}/\mathfrak{k}_{r+}^{Z_s},$$

其中 $\mathfrak{k}_{x,r}^{[G_s,G_s]}$（分别为 $\mathfrak{k}_r^{Z_s}$）是与 $[G_s, G_s]$（分别为 Z_s）相关联的 Moy-Prasad子群。（注意，Z_s 的建筑只是一个点，因此 $\mathfrak{k}_r^{Z_s}$不依赖于 x; 而 $[G_s, G_s]$ 的建筑与 G的建筑重合。）

映射 $q_{x,r}^{G_s}$ 也可分解为以下映射之和

$$q_{x,r}^{[G_s,G_s]} : \mathfrak{k}_{x,r}^{[G_s,G_s]}/\mathfrak{k}_{x,r+}^{[G_s,G_s]} \to C^{[G_s,G_s]}((t))_{=r}$$

and

$$q_{x,r}^{Z_s} : \mathfrak{k}_r^{Z_s}/\mathfrak{k}_{r+}^{Z_s} \to C^{Z_s}((t))_{=r}.$$

此外，展开定义可知，$C^{Z_s}((t))_{\leq r}$ 可以与$\mathfrak{k}_r^{Z_s}$等同，因此$q_{x,\,r}^{Z_s}$ 是一个同构。

$\mathfrak{g}_s$ 的半单元素当且仅当属于 $\mathfrak{z}_s$时，其中心化子为 G_s 。由此可知，$(\mathfrak{k}_{x,\ r}^{G_s}/\mathfrak{k}_{x,\ r+}^{G_s})^{=G_s}$ 可以与

$$(q_{x,r}^{G_s})^{-1}(C^{Z_s}((t))_{=r}) \cong (q_{x,r}^{[G_s,G_s]})^{-1}(0) \oplus (C^{Z_s}((t))_{=r} \backslash 0).$$

令 $C^{Z_s}((t))_{=r,\ \mathrm{gen}}$ 表示点的轨迹 p ，这些点在 $C^{Z_s}((t))_{=r}$ 中的像沿着

$$C^{Z_s}((t))_{=r} \to C^{Z_s}((t)) \cong \mathfrak{z}_s((t)) \to \mathfrak{g}((t))$$

相对于伴随 G-作用有稳定子 G_s 。（由于 p来自Z_s，稳定子必须包含 G_s。）我们断言， $C^{Z_s}((t))_{=r,\ \mathrm{gen}}$ 是 $C^{Z_s}((t))_{=r}$ 中有限个超平面的补集，因而自然是一个开 k-子簇。

为此，注意到对任意正整数 i， $C^{Z_s}((t))_{=r,\ \mathrm{gen}}$ 是 $C^{Z_s}((t))_{=r}$ 与 $C^{Z_s}((t^{\frac{1}{i}}))_{=r,\ \mathrm{gen}}$ 在 $C^{Z_s}((t^{\frac{1}{i}}))_{=r}$中的交。因此，只需在 $k((t))$的一次扩张后证明所需结论。于是我们可以假设 Z_s 是一个分裂环面。

在这种情况下， Z_s 在 $\mathfrak{g}$ 上的伴随作用给出一个分解

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\gamma \in X^*(Z_s)} \mathfrak{g}_\gamma.$$

容易验证， $p \in C^{Z_s}((t))_{=r}$ 属于 $C^{Z_s}((t))_{=r,\ \mathrm{gen}}$ 当且仅当 p 与任何满足 $\mathfrak{g}_\gamma$ 非平凡的非零 $\gamma \in X^*(Z_s)$都不配对为零。对于任何这样的γ，与 γ 配对为零的 $p \in C^{Z_s}((t))_{=r}$ 构成一个超平面，正如所需。

现在将$(q_{x\,r}^{[G_s,G_s]})^{-1}(0) \oplus C^{Z_s}((t))_{=r,\ \mathrm{gen}}$ 记为$(\mathfrak{k}_{x,\ r}^{G_s}/\mathfrak{k}_{x,\ r+}^{G_s})^{=G_s,\ \mathrm{gen}}$。引理 3.18 的证明表明， i_s 将$(\mathfrak{k}_{x,\ r}^{G_s}/\mathfrak{k}_{x,\ r+}^{G_s})^{=G_s,\ \mathrm{gen}}$ 映射到$(\mathfrak{k}_{x,\ r}/\mathfrak{k}_{x,\ r+})^{=G_0}$中。这使我们终于可以陈述本文的主要定理。

定理 3.19。该映射

$$\bigcup_{s \in S} (\mathfrak{k}_{x,r}^{G_s}/\mathfrak{k}_{x,r+}^{G_s})^{=G_s,\mathrm{gen}}/(N_s^x/K_{x,0+}^{G_s}) \to (\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+})^{=G_0}/(G^x/K_{x,0+})$$

是 *Artin* 叠之间的同构。

我们将把证明作为单独的一节给出。

4 定理 3.19 的证明

注意，该定理可以改述为簇之间的映射

$$\Omega : \bigcup_{s\in S}(G^x/K_{x,0+}) \times^{(N_s^x/K_{x,0+}^{G_s})} (\mathfrak{k}_{x,r}^{G_s}/\mathfrak{k}_{x,r+}^{G_s})^{=G_s,\mathrm{gen}} \to (\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+})^{=G_0}$$

是一个同构。这就是我们现在要证明的陈述。

4.1 半单元素上的双射性

我们从以下引理开始，该引理将使我们能够在半单元素上定义 Ω 的逐点逆。

Lemma 4.1. 设 g 为 $\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+}$ 中的任意非零半单元素。则：

1. 存在一个半单元素 $g \in \mathfrak{k}_{x,r}$ 提升 g，使得 $q(g) = q_{x,r}(g)$。

2. 第 (1) 部分中所有如 g 的选择都彼此 $K_{x,0+}$-共轭。

3. 对于任意这样的 g，我们有 $x \in B(Z_G(g))$，且等式

$$\mathfrak{k}_{x,s}/\mathfrak{k}_{x,s+} \cong [g, \mathfrak{k}_{x,s-r}/\mathfrak{k}_{x,(s-r)+}] \oplus \mathfrak{k}_{x,s}^{Z_G(g)}/\mathfrak{k}_{x,s+}^{Z_G(g)} \tag{7}$$

对任意有理数 s 都成立。此外，$\mathfrak{k}_{s}^{Z_G(g)}/\mathfrak{k}_{x}^{Z_G)x,(g)\ ,s+}$ 与 $\mathrm{ad}\, g : \mathfrak{k}_{x,s}/\mathfrak{k}_{x,s+} \to \mathfrak{k}_{x,r+s}/\mathfrak{k}_{x,(r+s)+}$ 的核重合。

证明。首先证明第 (1) 部分。不失一般性，可以假设 $x \in A(T)$. 于是根据引理 3.12，$g = f_{x,r}(g)$ 满足所需性质。

接下来，根据第 (2) 部分，只需证明对于任意这样的 g，第 (3) 部分的条件成立。注意，只需在将 $k((t))$ 扩张后证明这些条件，因为原来的陈述可通过取伽罗瓦作用下的不动点来恢复。

由于 $(\mathfrak{k}_{x,\ r}/\mathfrak{k}_{x,\ r+})$ 含有非零半单元素，因此 r 必须是有理数；在将 $k((t))$ 替换为某个扩张后，我们可以假设 r 是整数且 G 是分裂的（因此可以将其与 $H \times_{\mathrm{Spec}\, k} \mathrm{Spec}\ k((t))$ 视为同一对象）。在这种情况下，$\mathfrak{k}_{x,\ r}/\mathfrak{k}_{x,\ r+}$ 包含 $t^r \cdot \mathfrak{t}[[t]]/t^{r+1} \cdot \mathfrak{t}[[t]]$ 作为嘉当子空间。通过 $L_x \subseteq G^x/K_{x,\ 0+}$ 中的某个元素作用于 g，我们可以

假设 $g \in t^r \cdot \mathfrak{t}[[t]]/t^{r+1} \cdot \mathfrak{t}[[t]]$. 那么可以推出， $Z_G(f_{x,\ r}(g))$ 包含 $T \times_{\mathrm{Spec}\, k} \mathrm{Spec}\ k((t))$，从而 $\mathcal{B}(Z_G(f_{x,\ r}(g)))$ 包含 $\mathcal{A}(T)$，而后者包含 $\bar{x}$，正如所要证明的。

我们来证明这种情况下（7）成立。每一项都是仿射根空间的和。设 $\mathfrak{g}_\alpha t^m$ 是$\mathfrak{k}_{x,s}/\mathfrak{k}_{x,s+}$分解中出现的一个仿射根空间。容易验证，当且仅当 $\mathfrak{t}$ 中与 g 对应的元素与 α 的配对不为零时， $\mathfrak{g}_\alpha t^m$ 才会出现在 $[g, \mathfrak{k}_{x,s-r}/\mathfrak{k}_{x,(s-r)+}]$中。另一方面，当且仅当该配对的值为零时， $\mathfrak{g}_\alpha t^m$ 才会出现在 $\mathfrak{k}^{Z_G}{}_{(s}{}^{g}/\mathfrak{k}_x^{Z_G)x,(g)}{}_{,s+}$ 中，因此得到所需的直和分解。同样的计算表明， $\mathfrak{k}^{Z_G}{}_{(s}{}^{g}/\mathfrak{k}_x^{Z_G)x,(g)}{}_{,s+}$ 等于伴随作用 $\mathrm{ad}\, g$. 的核

最后，我们处理（2）部分。设 g 是 g 的一个提升，满足（1）和（3）两部分的条件（上文已证明这样的元素存在）。设 g_1 是 g 的另一个提升，满足（1）部分的条件。我们断言，存在一个 g_1 的$K_{x,0+}$-共轭元与 g交换。为此，对每个满足$\mathfrak{k}_{x,s} \neq \mathfrak{k}_{x,s+}$的实数 $s \geq r$ ，我们构造一个元素 $g(s) \in K_{x,0+}/K_{x,(s-r)+}$ 。这一系列元素将满足以下两个性质：

1. g_1 在$\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,s+}$ 中的像的 $g(s)$-共轭位于 $\mathfrak{k}^{Z_G}{}_{(r}{}^{g}/\mathfrak{k}_x^{Z_G)x,(g)}{}_{,s+}$ 。
2. 对 $s_2 > s_1$而言， $g(s_1)$是 $g(s_2)$在$K_{x,0+}/K_{x,(s_1-r)+}$中的像。

然后，当我们用诸 $g(s)$的逆极限对 g_1 作共轭时，将得到 $Z_{\mathfrak{g}}(g)$,中的一个元素，正如所期望的那样。

我们可以令 $g(r) = 1$。为构造其余的 $g(s)$，我们使用归纳法。设 $s > r$ 是一个实数，使得$\mathfrak{k}_{x,s} \neq \mathfrak{k}_{x,s+}$，并设 s_1 是小于 s 且满足$\mathfrak{k}_{x,s_1} \neq \mathfrak{k}_{x,s_1+}$的最大数。假设满足这些性质的 $g(s_1)$的一个值已经构造出来。然后选取一个提升 $g(s)_0 \in K_{x,0+}/K_{x,(s-r)+}$ ，它提升 $g(s_1)$。根据归纳假设，我们将有

$$\mathrm{ad}\, g(s)_0(\bar{g}_1) \in \mathfrak{k}_{x,r}^{Z_G(g)}/\mathfrak{k}_{x,s+}^{Z_G(g)} + \mathfrak{k}_{x,s}/\mathfrak{k}_{x,s+},$$

其中，$\bar{g}_1$ 是 g_1 在 $\mathfrak{k}_{x、r}/\mathfrak{k}_{x、s+}$中的像。根据第（3）部分，右端可改写为 $\mathfrak{k}^{Z_G}{}_{(r}{}^{g}/\mathfrak{k}_x^{Z_G)x、(s+}{}^{g} \oplus [g, \mathfrak{k}_{x,s-r}/\mathfrak{k}_{x,(s-r)+}])$ .....。设 $g(s)_1$ 是 $K_{x、s-r}/K_{x、(s-r)+} \cong \mathfrak{k}_{x、s-r}/\mathfrak{k}_{x、(s-r)+}$ 中的一个元素，使得 $[g, g(s)_1]$ 与 $\mathrm{ad}\ g(\bar{s})_0(g_1)$在 $[g, \mathfrak{k}_{x,s-r}/\mathfrak{k}_{x,(s-r)+}]$中的像重合。简短计算表明，$\bar{g}(s) = g(s)_1 g(s)_0$ 满足所需性质。

让我们将 g_1 替换为与 g 交换的其 $K_{x,\ 0+}$-共轭。我们希望证明 $g_1 = g$. 首先，我们断言， g_1 和 g、 分别在 $C^{Z_G(g)} \cong Z_{\mathfrak{g}}(g)//Z_G(g)$ 中的像 c_1 和 c 相同。根据定理 3.7， c_1

并且 c 是 $C^{Z_G(g)\geq r}$ 的元素，它们模 $C^{Z_G(g)>r}$ · 相等。此外，根据假设，c_1 和 c 在 C 中的像等于 $q_{x,r}(g)$。

只需证明，在对 $k((t))$ 进行扩张后，$c_1 = c$，因此我们可以假设 r 是整数，G 和 $Z_G(g)$ 是分裂的，并且 $Z_G(g)$ 是 G 的一个 Levi 子群。那么，$C((t))$ 和 $C^{Z_G(g)}((t))$ 上的双重分次，其分量分别为 $C_i((t))^j$ 和 $C^{Z_G(g)_i}((t))^j$，来自 $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$-作用；映射 $C^{Z_G(g)}((t)) \to C((t))$ 是 $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$-等变的。考虑与余特征 $(r,-1) \in \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \cong X_*(\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m)$ 对应的包含映射 $a: \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$。此作用在 $C((t))$ 上的不动点（分别地，在 $C^{Z_G(g)}((t))$ 上的不动点）为 $C((t))^{=r}$（分别地，为 $C^{Z_G(g)}((t))^{=r}$。）

特别地，对于任意 $z \in \mathbb{G}_m$，$a(z)\cdot c_1$ 和 c 在 $C((t))$ 中的像相同。然而，如果 $c_1 \neq c$，那么 c_1 不可能属于 $C^{Z_G(g)}((t))^{=r}$，因此这就给出了 $C^{Z_G(g)}((t))$ 中无穷多个映到 $C((t))$ 同一点的点。但 $C^{Z_G(g)} \to C$ 是有限态射，因此产生矛盾，故 c_1 必定等于 c。

因此，经过某个 $k((t))$ 的扩张后，g_1 和 g 必定成为 $Z_G(g)$-共轭。但 g 在 $Z_G(g)$ 中是中心的，所以 $g_1 = g$，如所需。

□

引理 4.1 使我们能够将一个元素 s 与任意半单 $g \in (\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+})^{=G_0}$ 关联起来，方法是取满足第 (1) 部分条件的一个提升 g 的中心化子。假设对于 $u \in G^x$，有 $Z_G(g) = uG_s u^{-1}$，并令 u 为 u 在 $G^x/K_{x,0+}$ 中的像。那么 $Z_G(u^{-1}g) = G_s$，所以 $u^{-1}g$ 属于 $\mathfrak{k}_{x,r}^{G_s}$，且其在 $\mathfrak{k}_{x,r}^{G_s}/\mathfrak{k}_{x,r+}^{G_s}$ 中的像等于 $u^{-1}g$。于是，我们对 Ω 的逐点逆将 g 映到

$$(\overline{u}, \overline{u}^{-1}\overline{g}) \in (G^x/K_{x,0+}) \times^{(N_s^x/K_{x,0+}^{G_s})} (\mathfrak{k}_{x,r}^{G_s}/\mathfrak{k}_{x,r+}^{G_s})^{=G_s,\mathrm{gen}}.$$

这是定义良好的，因为 u 在相差一个 N_s^x 中元素的右乘意义下是定义良好的，而且很容易验证，这确实是半单元素上的逐点逆。

最后，我们给出引理 4.1 的一个小推广；本文其余部分不会用到它（但它对某些应用很有用）。

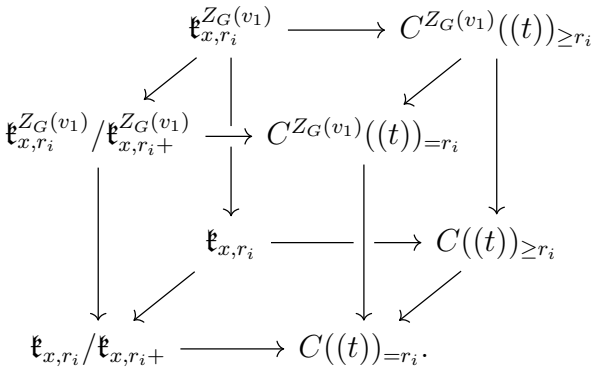
引理 4.2. 设 $v_i \in \mathfrak{k}_{x,r_i}/\mathfrak{k}_{x,r_i+}, i = 1,2,\cdots,m$ 是两两可交换的非零半单元素。那么：

1. 存在 $v_i, i = 1,2,\cdots,m$ 的半单提升 $v_i \in \mathfrak{k}_{x,r_i}$，它们两两可交换，并且对所有 i 都满足 $q(v_i) = q_{x,r_i}(v_i)$。
2. 如第（1）部分所述，所有对 $(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ 的选择彼此 $K_{x,0+}$-共轭。

3. 对于 v_i的任意选择，我们有 $x \in B(Z_G(v_1, v_2, \cdots, v_m))$。

证明。对 m 归纳。对于 $m = 0$，结论显然成立。对于 $m > 0$，引理 4.1 表明，存在一个 v_1 的提升 v_1，使得 $q(v_1) = q_{x,r_1}(v_1)$，并且所有此类提升彼此$K_{x,0+}$-共轭。引理 4.1 的第（3）部分表明 $x \in B(Z_G(v_1))$，且 v_i 可以与 $\mathfrak{k}^{Z_G}(v_1)_{r_i} / \mathfrak{k}^{Z_G}_x, (v_1), r_i+ \cdot$ 中的元素相对应。将群 G 替换为 $Z_G(v_1)$，应用归纳假设，即可得到所需结论；前提是我们知道，对于 v_i 的一个提升 $v_i \in Z_G(v_1)$，$q(v_i) = q_{x,r_i}(v_i)$ 等价于$q^{Z_G(v_1)}(v_i) = q_x^{Z_G(v_1),r_i}(v_i)$。

如同引理 3.18 的证明中那样，我们有一个交换立方体



这个立方体立即表明，若 $q^{Z_G(v_1)}(v_i) = q_x^{Z_G(v_1),r_i}(v_i)$, 则 $q(v_i) = q_{x,r_i}(v_i)$。我们来证明其逆命题。

只需证明 $q^{Z_G(v_1)}(v_i)$落在 $C^{Z_G(v_1)}((t))_{=r_i} \cdot$ 中。由于 $q(v_i) = q_{x,r_i}(v_i)$，我们可以推出 $q^{Z_G(v_1)}(v_i)$在 $C((t))_{\geq r_i}$ 中的像落在$C((t))_{=r_i} \cdot$ 中。因此，我们可以归结为证明 $C((t))_{=r_i}$ 沿 $C^{Z_G(v_1)}((t))_{\geq r_i} \to C((t))_{\geq r_i}$ 的（集合论意义下的）原像等于 $C^{Z_G(v_1)}((t))_{=r_i}$。

再次如引理 3.18 的证明所示，我们可以将底域扩张为$k((t))$，并归结到如下情形：包含映射 $Z_G(v_1) \subseteq G$ 可识别为某个 Levi 子群 $L$of H所对应的包含映射 $L \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} k((t)) \subseteq H \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} k((t))$。于是，映射 $C^{Z_G(v_1)}((t)) \to C((t))$可识别为 $(\mathfrak{l}//L)((t)) \to (\mathfrak{h}//H)((t))$。$(\mathfrak{l}//L)((t))$ 和 $(\mathfrak{h}//H)((t))$ 上的自然双重分次来自 $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$-作用，而映射 $(\mathfrak{l}//L)((t)) \to (\mathfrak{h}//H)((t))$ 是 $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$-等变的。

由于 v_i 非零，由引理3.3可知 r 必为有理。记 $r = \frac{a}{b}$，其中 a 与 b为整数。则$(\mathfrak{h}//H)((t))_{=r}$（相应地，$(\mathfrak{l}//L)((t))_{=r}$）是线性 $\mathbb{G}_m$ 作用在$(\mathfrak{h}//H)((t))$（相应地，$(\mathfrak{l}//L)((t))$）上的不动轨迹

其中 $z \in \mathbb{G}_m$ 通过乘以$z^{b\cdot j - a\cdot i}$作用在$(\mathfrak{h}//H)_i((t))^j$（相应地，$(\mathfrak{l}//L)_i((t))^j$）上。此外，由于 $\mathfrak{l}//L \to \mathfrak{h}//H$ 是有限态射，$(\mathfrak{h}//H)((t))$的任意 k-点 p在$(\mathfrak{l}//L)((t))$中的原像必为有限态射。若 p 位于$(\mathfrak{h}//H)((t))_{=r}$中，则其原像也必为 $\mathbb{G}_m$-不变，因而仅由 $\mathbb{G}_m$-不动轨迹$(\mathfrak{l}//L)((t))_{=r}$，中的点组成，即为所求。

□

4.2 对所有元素的双射性

为了推广上一小节的结果，我们需要了解 $\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+}$ 中 $\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+})^{=G_0}$ 的半单元素的中心化子。我们先~讨论 $x \in \mathcal{A}(T)$ 的情形。

~**引理 4.3**。假设 $x \in \mathcal{A}(T)$，并在 $\mathfrak{h}$ 上赋予由第.....小节中的 $on3.3.x$ 构造的分次。设 g 是 $(\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+})^{=G_0}$ 的一个半单元素，并设 $h \in \mathfrak{h}_r$ 是在同构下与 g 对应的元素

$$\mathfrak{h}_r \cong \mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+}.$$

那么 $\dim_k Z_H(h) = \dim_{k((t))} G_0$.

证明。设 $\mathfrak{c}$ 是包含 h 的 $\mathfrak{h}_r$ 的一个嘉当子空间。于是，如引理 3.16 的证明中那样，将 $\mathfrak{g} \otimes_{k((t))} k((t))$ 写成若干一维 $f_{x,r}(\mathfrak{c}) \otimes_k k((t))$-表示的和 $\mathfrak{g}_i$，并假设 $\mathfrak{g}_i$ 对应于特征 $\beta_i \in (f_{x,r}(\mathfrak{c}) \otimes_k k((t)))^*$. 再次， $Z_g \otimes_{k((t))} k((t))$ 将共轭于满足 $\beta_i(f_{x,r}(h)) = 0$. 的那些 $\mathfrak{g}_i$ 之和。类似地， $\mathfrak{h}$ 分解为若干一维$\mathfrak{c}$-表示的和，其中每个表示都对应于一个特征 $\gamma_i \in \mathfrak{c}^*$.

由于 g 非零且半单，命题 3.3 允许我们假设r 是有理的。我们还可以假设 x 具有有理坐标，即$x \in X_*(T) \otimes \mathbb{Q}$，这将保证 $\mathfrak{h}_s$ 仅在 $s \in \mathbb{Q}$时才可能非零。于是我们可以定义一个李代数同构

$$f : \mathfrak{h} \otimes_k \overline{k((t))} \to \mathfrak{g} \otimes_{k((t))} \overline{k((t))}$$

它在 $\mathfrak{h}_r$上限制为 $t^{-r} \cdot f_{x,\ r}$。

映射 f 在 $\mathfrak{c} \otimes_k k((t))$ 与 $f_{x,r}(\mathfrak{c}) \otimes_k k((t))$ 之间诱导出一个对应关系，在此对应关系下，每个 γ_i 都必须对应于某个 β_j。固定我们的指标，使得 γ_i 对应于 β_i。于是我们看到， $\gamma_i(h) = 0$ 当且仅当 $\beta_i(f(h)) = \beta_i(t^{-r} f_{x,r}(g)) = t^{-r}\beta_i(f_{x,r}(g)) = 0$. 由此可得， $f(Z_{\mathfrak{h}}(h) \otimes_k k((t))) = Z_{\mathfrak{g}}(f_{x,r}(g)) \otimes_{k((t))} k((t))$。所需的维数等式随即成立。

□

推论 4.4。 设 g_s 是 $(\mathfrak{k}_{x,\ r}^{G_s}/\mathfrak{k}_{x,\ r+}^{G_s})^{=G_s,\ \text{生成}} \subseteq \mathfrak{k}_{x,\ r}/\mathfrak{k}_{x,\ r+}$中的一个半单元素。那么，$g_s$ 在 $\mathfrak{k}_{x,\ r}/\mathfrak{k}_{x,\ r+}$中的中心化子等于 $\mathfrak{k}_{x,\ r}^{G_s}/\mathfrak{k}_{x,\ r+}^{G_s}$。

证明。 用 $G(k((t))$ 中的一个元素作平移，我们可以假设 $x \in A(T)$。对任意 $r' \in \mathbb{R}$，.....的核

$$\operatorname{ad} \overline{g}_s : \mathfrak{k}_{x,r'}/\mathfrak{k}_{x,r'+} \to \mathfrak{k}_{x,r+r'}/\mathfrak{k}_{x,(r+r')+} \tag{8}$$

包含 $\mathfrak{k}_{x,\ r'}^{G_s}/\mathfrak{k}_{x,\ r'+}^{G_s}$。 在同构

$$\mathfrak{h} \cong \bigoplus_{r' \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}} \mathfrak{k}_{x,r'}/\mathfrak{k}_{x,r'+}$$

由第 3.3 小节所定义之下， g_s 的中心化子包含

$$\bigoplus_{r' \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}} \mathfrak{k}_{x,r'}^{G_s}/\mathfrak{k}_{x,r'+}^{G_s},$$

其维数为 $\dim G_s = \dim G_0$. 。引理 4.3 告诉我们，这一包含是等式，因此 (8) 的核必等于 $\mathfrak{k}_{x,\ r'}^{G_s}/\mathfrak{k}_{x,\ r'+}^{G_s}$。 令$r' = r$，即得所需结论。 □

设 $(\mathfrak{k}_{x,\ r}/\mathfrak{k}_{x,\ r+})^{=G_0}(k)^{\mathrm{ss}}$ （相应地，$(\mathfrak{k}_{x,\ r}^{G_s}/\mathfrak{k}_{x,\ r+}^{G_s})^{=G_s,\ \mathrm{gen}}(k)^{\mathrm{ss}}$）表示 $(\mathfrak{k}_{x,\ r}/\mathfrak{k}_{x,\ r+})^{=G_0}$ （相应地，$(\mathfrak{k}_{x,\ r}^{G_s}/\mathfrak{k}_{x,\ r+}^{G_s})^{=G_s,\ \mathrm{gen}}$）的半单 k-点集。我们有一个 k-点集的交换方块

$$\begin{array}{ccc}
\bigcup_{s\in S}(G^x/K_{x,0+})(k) \times^{(N_s^x/K_{x,0+}^{G_s})(k)} (\mathfrak{k}_{x,r}^{G_s}/\mathfrak{k}_{x,r+}^{G_s})^{=G_s,\mathrm{gen}}(k) & \xrightarrow{\Omega(k)} & (\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+})^{=G_0}(k) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\bigcup_{s\in S}(G^x/K_{x,0+})(k) \times^{(N_s^x/K_{x,0+}^{G_s})(k)} (\mathfrak{k}_{x,r}^{G_s}/\mathfrak{k}_{x,r+}^{G_s})^{=G_s,\mathrm{gen}}(k)^{\mathrm{ss}} & \longrightarrow & (\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+})^{=G_0}(k)^{\mathrm{ss}},
\end{array}$$

其中竖直箭头表示取半单部分[5]。在上一小节中，我们证明了底部的箭头是一个同构。将这一结论推广到 $\Omega(k)$ 的全部元素并不困难。

[5]先验地，我们并不知道这一运算是否定义了簇之间的映射，因此目前我们只在 k-点的层面上使用上述交换图。

命题 4.5。 映射 Ω在 k-点上是双射。

证明。 由于我们知道底部的箭头是一个同构，只需证明 Ω(k) 在竖直映射的纤维上诱导双射。由于上述方形中的所有映射都是 ($G^x/K_{x,0+}$)(k)-等变的，只需证明，对于任意 $s \in S$ 和半单元素 $g_s \subseteq (\mathfrak{k}_{x,r}^{G_s}/\mathfrak{k}_{x,r+}^{G_s})^{=G_s,\text{生成}}$，Ω 在 $1 \times g_s$. 上方的纤维之间诱导一个双射

左侧的纤维是 $\mathfrak{k}_{x,r}^{G_s}/\mathfrak{k}_{x,r+}^{G_s}$ 中半单部分为 g_s 的元素集合，而右侧的纤维是 $\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+}$ 中半单部分为 g_s，并将其视为 $\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+}$. 的一个元素。由此，只需证明任意一个半单部分等于 g_s 的元素 $g \in \mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+}$ 都属于 $\mathfrak{k}_{x,r}^{G_s}/\mathfrak{k}_{x,r+}^{G_s}$。若尔当分解告诉我们， g 与 g_s 交换。但推论 4.4 随即表明， g 属于 $\mathfrak{k}_{x,r}^{G_s}/\mathfrak{k}_{x,r+}^{G_s}$，如所需。

□

4.3 证明的结尾

将命题 4.5 提升为定理 3.19 所需的代数几何输入如下。

命题 4.6. 映射 Ω 是 *´étale*。

证明。 固定一个元素 $s \in S.$。我们首先证明光滑簇之间的映射

$$(G^x/K_{x,0+}) \times^{(N_s^x/K_{x,0+}^{G_s})} (\mathfrak{k}_{x,r}^{G_s}/\mathfrak{k}_{x,r+}^{G_s}) \to (\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+}) \tag{9}$$

是 ´étale 的，沿着 $(G^x/K_{x,0+}) \times^{(N_s^x/K_{x,0+}^{G_s})} (\mathfrak{k}_{x,r}^{G_s}/\mathfrak{k}_{x,r+}^{G_s})^{=G_s,\text{gen}}$。由于 (9) 不是 ´étale 的点集是一个 G^x-不变闭子集，只需证明对于任意半单元素 $g_s \subseteq (\mathfrak{k}_{x,r}^{G_s}/\mathfrak{k}_{x,r+}^{G_s})^{=G_s,\text{gen}}$，(9) 在 $1 \times g_s$. 处是 ´étale 的。等价地，我们需要证明 Ω 在 $1 \times g_s$ 处诱导一个切空间的同构。但切空间上的诱导映射同构于映射

$$[\mathfrak{p}_x/\mathfrak{k}_{x,0+}, \overline{g}_s] \oplus \mathfrak{k}_{x,r}^{G_s}/\mathfrak{k}_{x,r+}^{G_s} \to \mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+},$$

根据引理 4.1 的第 (3) 部分，这是一个同构。

将 (9) 沿 $(\mathfrak{k}_{x,\ r}/\mathfrak{k}_{x,\ r+})^{=G_0} \to (\mathfrak{k}_{x,\ r}/\mathfrak{k}_{x,\ r+})$ 作基变换，可将其识别为

$$(G^x/K_{x,0+}) \times^{(N_s^x/K_{x,0+}^{G_s})} ((\mathfrak{k}_{x,r}^{G_s}/\mathfrak{k}_{x,r+}^{G_s}) \times_{\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+}} (\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+})^{=G_0}) \to (\mathfrak{k}_{x,r}/\mathfrak{k}_{x,r+})^{=G_0}$$

且必须沿 $(G^x/K_{x,0+}) \times^{(N_s^x/K_{x,0+}^{G_s})} (\mathfrak{k}_{x,r}^{G_s}/\mathfrak{k}_{x,r+}^{G_s})^{=G_s,\text{gen}}$保持 ´étale。该命题现在可由以下引理得出。

引理 4.7. 簇$(\mathfrak{k}_x^{G_s,\,r}/\mathfrak{k}_x^{G_s,\,r+})^{=G_s,\,\mathrm{gen}}$是$(\mathfrak{k}_x^{G_s,\,r}/\mathfrak{k}_x^{G_s,\,r+})^{\times_{\mathfrak{k}_{x,\,r}/\mathfrak{k}_{x,\,r+}}(\mathfrak{k}_{x,\,r}/\mathfrak{k}_{x,\,r+})^{=G_0}}$的一个概形论连通分支。

证明。由于 ´étale态射保持约化性，$(\mathfrak{k}_x^{G_s},_r/\mathfrak{k}_x^{G_s},_{r+})^{\times_{\mathfrak{k}_x,_r/\mathfrak{k}_x,_{r+}}(\mathfrak{k}_x,_r/\mathfrak{k}_x,_{r+})^{=G_0}}$必须沿 $(\mathfrak{k}_x^{G_s},_r/\mathfrak{k}_x^{G_s},_{r+})^{=G_s}$,gen 约化。因此，只需证明 $(\mathfrak{k}_x^{G_s},_r/\mathfrak{k}_x^{G_s},_{r+})^{=G_s}$,gen 在 $(\mathfrak{k}_x^{G_s},_r/\mathfrak{k}_x^{G_s},_{r+})^{\times_{\mathfrak{k}_x,_r/\mathfrak{k}_x,_{r+}}(\mathfrak{k}_x,_r/\mathfrak{k}_x,_{r+})^{=G_0}}$上的扎里斯基拓扑中既是开集又是闭集。闭性源于这样一个事实：$(\mathfrak{k}_x^{G_s},_r/\mathfrak{k}_x^{G_s},_{r+})^{=G_s}$, gen 是 $(\mathfrak{k}_x^{G_s},_r/\mathfrak{k}_x^{G_s},_{r+})^{\times_{\mathfrak{k}_x,_r/\mathfrak{k}_x,_{r+}}(\mathfrak{k}_x,_r/\mathfrak{k}_x,_{r+})^{=G_0}}$ 与 $(\mathfrak{k}_x^{G_s},_r/\mathfrak{k}_x^{G_s},_{r+})^{\geq G_s}$ 的交集。

为了证明其为开集，我们可以假设 $x \in \mathcal{A}(T)$，从而能够使用第 3.3 小节中介绍的分次李代数对应。令$\mathfrak{h}_x,_s \subseteq \mathfrak{h}$ 为由子空间 $\mathfrak{h}_x,_s,_r \cong \mathfrak{k}_x^{G_s},_r/\mathfrak{k}_x^{G_s},_{r+} \subseteq \mathfrak{k}_x,_r/\mathfrak{k}_x,_{r+} \cong \mathfrak{h}_r$. 的直和给出的李子代数。显然，$\dim_k \mathfrak{h}_x,_s = \dim_{k((t))} G_0$。我们将证明，元素 $g \in (\mathfrak{k}_x^{G_s},_r/\mathfrak{k}_x^{G_s},_{r+})^{\times_{\mathfrak{k}_x,_r/\mathfrak{k}_x,_{r+}}(\mathfrak{k}_x,_r/\mathfrak{k}_x,_{r+})^{=G_0}} \subseteq \mathfrak{h}_x,_s,_r$ 属于 $(\mathfrak{k}_x^{G_s},_r/\mathfrak{k}_x^{G_s},_{r+})^{=G_s}$, gen 当且仅当伴随作用$g$在 $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_x,_s$. 上可逆。这将立即推出其为开集。

根据引理 4.3，$\mathrm{ad}\, g_{\mathrm{ss}}$ 的核的维数为 $\dim_{k((t))} G_0 = \dim_k \mathfrak{h}_{x,\ s}$.因此，$\mathrm{ad}\ g$ 在 $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_x$上可逆，$_s$ 当且仅当 $\mathrm{ad}\, g$ 在 $\mathfrak{h}_x$上幂零，$_s$. 但这等价于 g 属于 $(\mathfrak{k}_x^{G_s},_r/\mathfrak{k}_x^{G_s},_{r+})^{\geq G_s}$；如前所述，这又等价于 g 属于 $(\mathfrak{k}_x^{G_s},_r/\mathfrak{k}_x^{G_s},_{r+})^{=G_s,\,\text{生成}}$，证毕。□

□

定理 *3.19* 的证明。 由于 k 是代数闭的，命题 4.5 表明 Ω 是普遍单射的。结合命题 4.6 以及 [Sta26 中的定理 41.14.1、定理 025G]，，我们看到 Ω 必须是一个开浸入。但双射的开浸入是同构，证毕。□

参考文献

[FG06] Edward Frenkel 与 Dennis Gaitsgory。“局部几何朗兰兹对应与仿射 Kac-Moody 代数”。载于：代数几何与数论。第253卷。数学进展丛书。Birkh¨auser Boston，美国马萨诸塞州波士顿，2006，第69–260页。 DOI： 10.1007/978-0-8176-4532-8_3。 URL： https://doi-org.ezp-prod1.hul.harvard.edu/10.1007/978-0-8176-4532-8_3。

[Fin21] Jessica Fintzen。“驯顺 p-进群的类型”。载于：数学年刊（2）193.1（2021），第303–346页。 ISSN：0003-486X,1939-8980。 DOI：10.4007/annals.2021.193.1.4。 URL： https://doi.org/10.4007/annals.2021.193.1.4。[HR08] T. Haines 与 M. Rapoport。“附录：论抛物型子群”。载于：数学进展 219.1（2008），第188–198页。 ISSN：0001-8708。 DOI： https://doi.org/10.1016/j.aim.2008.04.020。 URL： https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870808001333。[Kaw87] Noriaki Kawanaka。“分次半单李代数中幂零元素的轨道与稳定子”。载于：东京大学理学部纪要 IA 数学辑 34.3（1987），第573–597页。 ISSN：0040-8980。[Kos59] Bertram Kostant。“复单李群的主三维子群与贝蒂数”。载于：美国数学杂志 81（1959），第973–1032页。 ISSN：0002-9327,1080-6377。 DOI：10.2307/2372999。 URL： https://doi.org/10.2307/2372999。[Kos63] Bertram Kostant。“多项式环上的李群表示”。载于：美国数学杂志 85（1963），第327–404页。 ISSN：0002-9327,1080-6377。 DOI： 10.2307/2373130。 URL： https://doi.org/10.2307/2373130。[Kot82] Robert E. Kottwitz。“约化群中的有理共轭类”。载于：杜克数学杂志 49.4（1982），第785–806页。 ISSN：0012-7094,1547-7398。 URL： http://projecteuclid.org/euclid.dmj/1077315531。[KP23] Tasho Kaletha 与 Gopal Prasad。Bruhat-Tits 理论——一种新方法。第44卷。新数学专著。剑桥大学出版社，剑桥，2023，第xxx+718页。 ISBN：978-1-108-83196-3。[Lev09] Paul Levy。“正特征下 Vinberg 的 θ-群与 Kostant-Weierstrass 切片”。载于：变换群 14.2（2009），第417–461页。 ISSN：1083-4362,1531-586X。 DOI： 10.1007/s00031-009-9056-y。 URL： https://doi-org.libproxy.mit.edu/10.1007/s00031-009-9056-y。[Mil] J.S. Milne。约化群。 URL： https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/RG.pdf。

[MP94] Allen Moy 和 Gopal Prasad. “ p-进群的未精化极小 K-型”。载于：《数学发明》116.1-3 (1994)，第 393–408 页。 ISSN: 0020-9910。 DOI: 10.1007/BF01231566。 URL: https://doi.org/10.1007/BF01231566.[PR08] G. Pappas 和 M. Rapoport. “扭曲环群及其仿射旗簇”。载于：《数学进展》219.1 (2008)。附录由 T. Haines 和 Rapoport 撰写，第 118–198 页。 ISSN: 0001-8708,1090-2082。DOI: 10.1016/j.aim.2008.04.006。 URL: https://doi.org/10.1016/j.aim.2008.04.006.[Sta26] Stacks计划作者。*Stacks*计划。 https://stacks.math.columbia.edu。2026。[Ste65] Robert Steinberg。“半单代数群的正则元”

载于：高等科学研究所 ´数学出版物25（1965），第49–80页。 ISSN: 0073-8301,1618-1913。 URL: http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1965__25__49_0。[Vin76] `E. B. Vinberg.《分次李代数的Weyl群》。载于：《苏联科学院通报·数学辑》40.3（1976），第488–526页，709。 ISSN: 0373-2436。[Yan21] David Yang. 范畴*Moy-Prasad*理论。2021。 URL: https://arxiv.org/abs/2104.12917。