arXiv:2603.12803v1 [math.AT] 13 Mar 2026

# 实 Hochschild 同调作为等变 Loday 构造

AYELET LINDENSTRAUSS、BIRGIT RICHTER 和 FOLING ZOU

Abstract. 等变 Loday 构造是为等变同调理论提供几何解释的一种手段。它们通常针对一个单纯 $G$-集和一个 $G$-Tambara 函子构造。我们研究这样一些情形：根据单纯 $G$-集中出现的各向同性子群，可以对 $H$-Tambara 函子进行处理，其中的子 $H$ 群属于 $G$。我们将其应用于离散$E_\sigma$-环的实 Hochschild 同调，将其解释为等变 Loday 构造；在此过程中，对于所有 $m \geqslant 1$，我们考察具有几何定义的二面体群 $D_{2m}$ 作用的 $2m$边形。对置换多面体的 1-骨架的对称群作用也给出了具有各向同性群 $C_2$的例子。

## 1. 引言

对于有限群 $G$ 的格林函子和 Tambara 函子，可以考虑若干种同调理论。最简单的一种是等变 Hochschild 同调，即将普通 Hochschild 同调中的张量积替换为 Mackey 函子的盒积；其部分性质可参见例如 [MQS, §4] 。Blumberg-Gerhardt-Hill-Lawson [BGHL19]为 $C_n$-Green 函子提出了这一理论的一个变体，即扭曲循环神经，其中末面映射经群作用扭曲。

实拓扑 Hochschild 同调在 $C_2$-Tambara 函子，或更一般地，在离散 $E_\sigma$-环（例如带有通过反 involution 产生的 $C_2$-作用的结合环的不动点 Tambara 函子）中有一个代数对应物。这种同调可以建模为双边 bar 构造 $B(R,\ N_e^{C_2} i_e^{C_2} R,\ R)$的同伦群，其中 $N_e^{C_2} i_e^{C_2} R$表示 $R$的范数限制。

上述所有同调理论都可以用 [LRZ25] 中定义的等变 Loday 构造来建模： $G$-等变 Loday 构造的输入是一个单纯有限 $G$-集 $X$和一个 $G$-Tambara 函子 $T$。接着，我们构造一个单纯的 $G$-Tambara 函子 $\mathcal{L}_X^G(T)$，其$n$-单形为

$$\mathcal{L}_X^G(\underline{T})_n = X_n \otimes \underline{T}.$$

由于 $X_n$ 是一个有限 $G$-集，因此它具有如下形式： $X_n = \bigsqcup_{i=1}^m G/H_i$ ，其中各向同性子群为 $H_i < G$。Mazur [Maz13] （另见 [HM19, §5]）和 Hoyer [Hoy14] 的工作保证了这一赋值

$$X_n \otimes \underline{T} := N_{H_1}^G i_{H_1}^G \underline{T} \square \ldots \square N_{H_m}^G i_{H_m}^G \underline{T}$$

是良定义的，并且关于 $X_n$ 自然，因此产生一个单纯的 $G$-Tambara 函子。这里， $i_{H_j}^G T$ 表示将 $G$-Tambara 函子 $T$ 限制为一个 $H_j$-Tambara 函子，而$N_{H_j}^G$： $H_j$-Tamb $\to G$-Tamb 是限制的左伴随函子，称为范数。

在适当的情形下，我们说明如何为 $H < G$定义 $H$-Tambara 函子的 $G$-Loday 构造。我们的启发性例子是 [AKGH25定义1.4]意义下的实 Hochschild 同调：对于离散 $E_\sigma$-环$R$ ， $R$ 的实 $D_{2m}$-*Hochschild* 同调是分次 $D_{2m}$-Mackey 函子

$$\pi_* B(N_{D_2}^{D_{2m}} \underline{R}, N_e^{D_{2m}} i_e^{D_2} \underline{R}, N_{\zeta D_2 \zeta^{-1}}^{D_{2m}} c_\zeta(\underline{R})).$$

*Date*: 2026年3月16日。*Key words and phrases.* 实拓扑 Hochschild 同调、等变 Loday 构造、Tambara 函子。

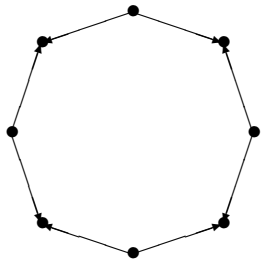
这里， $D_{2m}$ 表示具有 $2m$个元素的二面体群。特别地， $D_2$-Tambara 函子是离散 $E_\sigma$-环的例子。因此，上述同调理论从一个具有$D_2$-对称性的对象出发，并产生一个具有 $D_{2m}$-对称性的输出。

对于具有反 involution Chloe Lewis [Lew 的环谱 $A$ ，定理 3.9] 构造了一个 B¨ okstedt 型谱序列，其 $E^2$ 页由 $A$ 的 $E$ 同调的实 Hochschild 同调群组成，并收敛到 $A$ 的实拓扑 Hochschild 同调的 $E$ 同调：

$$E^2_{*,\star} = \underline{\mathsf{HR}}^{E_\star, D_{2m}}_*((\underline{i^{D_{2m}}_{D_2} E})_\star(A)) \Rightarrow \underline{E}_\star(i^{O(2)}_{D_{2m}}(\mathsf{THR}(A))).$$

这里， $E$ 是一个真正的交换 $D_{2m}$ 环谱，并且需要满足一些平坦性和自由性条件。由于 THR($A$) 是从 $A$ 的 Real K理论到 $KR(A)$ 的迹映射的目标，计算这些群十分重要。

我们通过令 $D_{2m}$ 作用于一个正则 $2m$ 边形 $P_{2m}$（其单纯形模型的 1-骨架），为所有 $m \geqslant 1$ 给出 Real $D_{2m}$-Hochschild 同调的拓扑解释。

$P_8 =$ 

在上述例子中， $P_8$ 中出现的各向同性子群为平凡群 $e$、 $\langle s\rangle$、$\langle r^2 s = sr^2\rangle$、 $\langle rs\rangle$ 和 $\langle r^3 s = sr\rangle$。这里我们用 $s \in D_{2m}$ 表示一个二阶生成元，而 $r$ 的阶为 $m$。我们只需考虑所有 $m$ 下的各向同性子群 $e$、 $\langle s\rangle$ 和 $\langle rs\rangle$ ，便可对相应的单纯集合 $P_{2m}$ 进行建模。原则上，对于 $D_{2m}$-Loday构造，我们需要一个 $D_{2m}$-Tambara 函子；但通过仔细调整我们的 Loday构造，可以扩展其定义，使其接受一个 $D_2$-Tambara 函子作为输入。我们将相应的 Loday构造记为 $\mathcal{L}^{D_{2m};\ {}^{D_2}}_{P_{2m}}(-)$，其中 $D_{2m}$ 表示整体对称群，同时也表示决定所用 Tambara 函子类型的各向同性群（此处为 $D_2$）。由此得到：

**定理** 5.4. 假设 $R$ 是一个 $D_2$-Tambara 函子，并令 $\varphi\colon D_{2m} \cong D_{2m}$ 为由 $\varphi(rs) = s$ 和 $\varphi(r) = r$确定的 $D_{2m}$ 的自同态。那么

$$\mathcal{L}^{D_{2m};D_2}_{P_{2m}}(\underline{R}) \cong B(N^{D_{2m}}_{D_2}\underline{R}, N^{D_{2m}}_e i_e\underline{R}, N^{D_{2m}}_{D_2'}\varphi^*(\underline{R})),$$

其中 $D_2' = \varphi^{-1}(D_2)$，其同伦群同构于 $R$ 作为离散 $E_\sigma$-环、取值于分次 $D_{2m}$-Mackey 函子的 Real ~~$D_{2m}$~~-霍赫希尔德同调 $HR^{D_{2m}}_*(R)$。

我们推广上述结果，并证明 Loday 构造 $\mathcal{L}^{D_{2m};\ {}^{D_2}}_{P_{2m}}(R)$ 实际上可以为离散 $E_\sigma$-环定义（见命题 5.5）。我们还证明，在等变稳定同伦论的框架下， $i^{O(2)}_{D_{2m}}$ THR($A$) 也可以解释为所有带有反 involution 的环谱 $A$的 Loday 构造（命题 5.6）

$$i^{O(2)}_{D_{2m}}\mathsf{THR}(A) \simeq \mathcal{L}^{D_{2m};D_2}_{P_{2m}}(A)$$

并且这在 $\pi_0$ 上给出一个同构，如果 $A$ 是连通的：

$$\underline{\pi}_0^{D_{2m}}(i^{O(2)}_{D_{2m}}\mathsf{THR}(A)) \cong \underline{\pi}_0^{D_{2m}}\mathcal{L}^{D_{2m};D_2}_{P_{2m}}(A) \cong \mathcal{L}^{D_{2m};D_2}_{P_{2m}}(\underline{\pi}_0^{D_2}A).$$

我们首先在第 2 节中说明：如果 $\varphi$ 是 $H$ 与 $H'$ 之间的同构，如何将一个 $H'$-Tambara 函子转换为一个 $H$-Tambara 函子。稍后我们将把这一点应用于以下情形：

$\varphi$ 是某个 $G$ 的自同构的限制。注意，即使对于 $m$，子群 $\langle s\rangle$ 和 $\langle rs\rangle$ 在 $D_{2m}$ 中也不共轭，因此我们特别需要一个 $\varphi$ 不一定是内自同构的情形。

另一个微妙之处涉及范数上的群作用。在 [LRZ25 的注 2.5] 中，我们使用了 $H$ 上的对角 Weyl 群作用，即 $G, W_G(H)$ 在 $N_H^G i_H^G R$ 上的作用；它结合了置换张量因子的作用与逐坐标作用。例如，若 $G = C_2$ 且 $H = e$，则 $N_e^{C_2} i_e^{C_2} R(C_2/e) = R(C_2/e) \otimes R(C_2/e)$；在对角作用下，生成元 $\tau \in C_2$ 将 $a \otimes b$ 送到 $\tau(b) \otimes \tau(a)$。对于 $G$-Tambara 函子的 $G$-Loday 构造，这是一种可能的选择；例如，这种选择给出了扭曲循环神经与等变 Loday 构造之间的一个同一化，见 [LRZ25，命题 7.3]。我们也可以选择 $N_H^G i_H^G R$ 上的 Weyl 群作用，其中 $W_G(H)$ 仅通过置换张量因子来作用。我们称后者为翻转作用。请注意，这只有在调整余单位映射 $N_H^G i_H^G R \to R$ 后才成立：对于对角作用，自由层上的余单位映射就是乘法；而对于翻转作用，增广则更为复杂。对于 $H = e$，将 $T(G/e)^{\otimes G}$ 中的元素 $\bigotimes_{g\in G} t_g$ 送到 $\prod_{g\in G} g(t_g)$。详细讨论见第 3 节。

在第4节中，我们说明如何相对于有限 $G$-单纯集合 $X$ 以及 $H$-Tambara函子 $R$ 来定义 $G$-等变 Loday 构造，前提是出现在 $X$ 的某个模型中的各向同性子群为 $e$ 和 $H$，以及对某个子群 $H < G$ 而言 $H$ 的共轭子群。若 $H$ 在 $G$ 中正规，则将 $G/H$ 的凯莱图的单纯模型视为 $G$-单纯集合，便是一个自然的例子。置换多面体族也给出了一些例子：我们考虑对称群的Loday 构造，其中令 $\Sigma_n$ 作用在 $n$-置换多面体的1-骨架上。在这些情形中，各向同性群由对换生成，因此它们彼此共轭。

我们还将这一结果推广到某些情形，其中各向同性由子群 $e, H, H'$ 及其共轭子群组成。这里我们假设存在 $G$ 的一个自同构 $\varphi$，满足 $H' = \varphi(H)$。这引出了实 Hochschild 同调的例子，并且我们在第5节中证明，对于离散 $E_\sigma$-环，相应的Loday构造与实 Hochschild 同调等同。

致谢。 第一位署名作者获得了西蒙斯基金会的资助（#359565，Ayelet Lindenstrauss）。第二位署名作者感谢剑桥丘吉尔学院的盛情款待。第二位和第三位署名作者感谢剑桥的艾萨克·牛顿数学科学研究所，在“语境中的等变同伦论”项目期间提供支持与款待；本文的相关研究工作正是在此期间开展的。本研究获得英国工程与自然科学研究委员会资助（项目编号 EP/Z000580/1）。

第一位署名作者感谢 Ben Spitz 和 Michael Larsen 提供的宝贵见解。作者感谢 John Rognes 指出了一个多余的假设，也感谢 Mike Hill 指出，范数限制 $N_e^G i_e^G R$ 上两种可能的 $G$-作用是同构的。

## 2. Change of groups for Tambara functors

在 Tambara 函子的语境下，共轭映射的作用已得到充分理解。我们需要一个稍微一般化的性质。以下结果可能早已为人熟知，但我们未能在文献中找到相关出处：

**引理 2.1.** 假设 $H$ 和 $H'$ 是有限群，且 $\varphi\colon H \to H'$ 是一个同构。设 $R$ 是一个 $H'$-*Tambara* 函子。则该赋值

$$(\varphi^* \underline{R})(H/K) := \underline{R}(\varphi H/\varphi K)$$

给出一个 $H$-*Tambara* 函子 $\varphi^* R$。

证明。 我们首先定义 $\varphi^* R$ 的结构映射。

(1) 对于任意 $h \in H$，我们需要定义 $c_h$: $(\varphi^* R)(\underline{H}/K) \to (\varphi^* R)(\underline{H}/hKh^{-1})$，也就是说，我们需要$c_h$: $R(\varphi H/\varphi K) \to R(\varphi H/\varphi(hKh^{-1}))$，并将共轭映射定义为

$$c_h = c_h(\varphi^* \underline{R}) := c_{\varphi(h)}(\underline{R}).$$

(2) 同样，限制 $\mathrm{res}^L_K$: $(\varphi^* R)(H/L) \to (\varphi^* \underline{R})(H/K)$ 必须是从$\underline{R}(\varphi H/\varphi L)$到 $R(\varphi H/\varphi K)$的映射，我们将其定义为

$$\mathrm{res}^L_K = \mathrm{res}^L_K(\varphi^* \underline{R}) := \mathrm{res}^{\varphi L}_{\varphi K}(\underline{R}).$$

(3) 转移 $\mathrm{tr}^L_K$: $(\varphi^* R)(H/K) \to (\varphi^* R)(H/L)$ 定义为 $\mathrm{tr}^L_K = \mathrm{tr}^L_K(\varphi^* R) := \mathrm{tr}^{\varphi L}_{\varphi K}(R)$。(4) 最后但同样重要的是，范数 $\mathrm{norm}^L_K$: $(\varphi^* R)(H/K) \to (\varphi^* R)(H/L)$ 由 $\mathrm{norm}^L_K = \mathrm{norm}^L_K(\varphi^* R) := \mathrm{norm}^{\varphi L}_{\varphi K}(R)$ 给出。

根据这些定义，不难看出 $\varphi^* R$ 满足麦基函子公理与格林函子公理。同样清楚的是，范数映射是乘法幺半群的映射，它们与共轭配合良好，对子群 $L' < L < K$满足传递性，并且服从双陪集公式。

对于指数公式，我们需要说明如何将任意的 $H$-集合 $X$ 转换为 $\varphi H$-集合 $\varphi X$。若将 $X$ 按轨道分解表示为 $X = H/K_1 \sqcup \ldots \sqcup H/K_\ell$，我们知道在 Mackey 函子下，不交并映射为乘积。因此，我们需要证明，对轨道选取不同的代表元会得到相容的 Tambara 函子同构。设 $X = H/H_x \cong Hx$ 是一个轨道。若选择 $y \in Hx$，则对于某个 $h \in H$， $y = hx$ 及 $y$ 的稳定子 $H_y$ 等于 $hH_xh^{-1}$。由此得到

$$\underline{R}(\varphi H/\varphi H_x) = (\varphi^* \underline{R})(H/H_x) = (\varphi^* \underline{R})(H/h^{-1}H_y h) = \underline{R}\big(\varphi H/(\varphi(h))^{-1}\varphi H_y \varphi(h)\big)$$

而后者接收同构

$$c_{\varphi(h)^{-1}} : (\varphi^* \underline{R})(H/H_y) = \underline{R}(\varphi H/\varphi H_y) \to \underline{R}\big(\varphi H/(\varphi(h))^{-1}\varphi H_y \varphi(h)\big).$$

因此，我们遇到的只是定义轨道上的 Tambara 函子时通常会有的歧义，而这可以通过共轭同构 [Hoy14,Corollary 2.4.6] 消除。

若 $f$: $X \to Y$ 是有限 $H$-集合之间的 $H$-等变映射，则定义 $\varphi_\bullet(f)$: $\varphi X \to \varphi Y$ 为 $\varphi_\bullet(f) = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$。那么 $\varphi_\bullet(f)$ 是一个 $\varphi(H)$-等变映射。

假设对于给定的 $f$ 和 $g$

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{g} & A & \xleftarrow{\varepsilon} & X \times_Y \prod_f A \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle pr_2} \\ Y & & \xleftarrow{\quad q \quad} & & \prod_f A \end{array}$$

是一个指数图，其中 $\prod_f A = \{(y,\ s)\ y \in Y,\ s:\ f^{-1}(y) \to A$ 对于所有 $x \in f^{-1}(y)\}$，都有 $g(s(x)) = x$， $\varepsilon(x,\ y,\ s) = s(x)$，且 $q(y,\ s) = y$。我们声称

$$\begin{array}{ccccc} \varphi X & \xleftarrow{\varphi_\bullet(g)} & \varphi A & \xleftarrow{\varphi_\bullet(\varepsilon)} & \varphi X \times_{\varphi Y} \prod_{\varphi_\bullet(f)} \varphi A \\ {\scriptstyle \varphi_\bullet(f)}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_\bullet(pr_2)=pr_2} \\ \varphi Y & & \xleftarrow{\quad \varphi_\bullet(q) \quad} & & \prod_{\varphi_\bullet(f)} \varphi A \end{array}$$

是一个指数图：截面 $s$: $f^{-1}(y) \to A$ 被映射到截面

$$\varphi_\bullet(s) : (\varphi_\bullet(f))^{-1}(\varphi(y)) = (\varphi \circ f \circ \varphi^{-1})^{-1}(\varphi(y)) \to \varphi A$$

因此 $\varphi(\prod_f A) = \prod_{\varphi_\bullet(f)} {}^{\varphi}A$。将 $\varphi$ 应用于有限的 $H$-集合，并将 $\varphi_\bullet$ 应用于 $H$-等变映射，会保持拉回不变。这就证明了该结论。由于 $R$ 是一个 $\varphi H$-Tambara 函子，我们得到关于 $R$的结构映射

$$\mathsf{norm}_{\varphi_\bullet(f)} \circ \mathsf{tr}_{\varphi_\bullet(g)} = \mathsf{tr}_{\varphi_\bullet(q)} \circ \mathsf{norm}_{pr_2} \circ \mathsf{res}_{\varphi_\bullet(\varepsilon)}$$

由此得到

$$\mathsf{norm}_f \circ \mathsf{tr}_g = \mathsf{tr}_q \circ \mathsf{norm}_{pr_2} \circ \mathsf{res}_\varepsilon$$

对于 $\varphi^*\underline{R}$。 □

注 2.2. 拉回 Tambara 函子具有通常的逆变性：若 $\varphi$ 和 $\psi$ 是两个同构，满足 $\varphi(H) = H'$ 和 $\psi(H') = H''$，则对于任意 $H''$-Tambara 函子 $R$，我们得到一个 $H$-Tambara 函子

$$(\psi \circ \varphi)^*(\underline{R}) = \varphi^*(\psi^*(\underline{R})).$$

稍后，若 $\varphi\colon G \to G$ 是 $G$ 的自同构，且其在子群 $H$ 上的限制给出 $H$ 与 $\varphi(H)$ 之间的同构，我们将使用上述引理。

若 $X$ 是一个真正的 $H'$-谱，且 $\varphi\colon H \to H'$ 是一个同构，那么我们可以将 $X$ 拉回到 $\varphi^*X$，此时后者是一个真正的 $H$-谱。$\varphi^*X$ 上的外部 $H$作用定义如下

$$H_+ \wedge \varphi^*X \xrightarrow{\varphi_+ \wedge \mathrm{id}} H'_+ \wedge X \longrightarrow X,$$

其中第二个映射是给定的 $H'$ 对 $X$ 的作用。特别地，对于任意子群 $K < H$，我们有 $(\varphi^*X)^K = X^{\varphi(K)}$。对于每个真正的 $H'$-谱 $X$，$\pi_0^{H'}X$ 是一个 $H'$-Mackey 函子。

**引理 2.3**。如果 $X$ 是一个连通的真正 $H'$-谱，且 $\varphi$ 是有限群 $\varphi\colon H \to H'$ 的同构，那么拉回构造与取 $\pi_0$ 相容：

$$\underline{\pi}_0^H(\varphi^*X) \cong \varphi^*(\underline{\pi}_0^{H'}(X)).$$

证明。根据定义，Mackey 函子 $\pi_0(X)$ 在轨道 $H'/K'$ 上的取值为 $\pi_0(X^{K'})$。因此

$$\varphi^*(\underline{\pi}_0^{H'}(X))(H/K) = \underline{\pi}_0^{H'}(X)(\varphi(H)/\varphi(K)) = \pi_0(X^{\varphi(K)}) = \pi_0((\varphi^*X)^K) = \underline{\pi}_0^H(\varphi^*X)(H/K).$$

□

将 $H'$-谱拉回为 $H$-谱是对称幺半的，因此对于真正的 $H'$-交换环谱和 $H'$-Tambara 函子，也有相应的结论。

## 3. Group actions on norms

如果我们像 [HHR16, A.52, A.57] 那样，使用范数的谱定义，即利用其 Eilenberg–Mac Lane 谱 $HR$ 来定义 $H$-Tambara 函子 $R$（同时略去宇宙变换函子），则

$$N_H^G\underline{R} := \underline{\pi}_0^G\Big(\bigwedge_{G/H} H\underline{R}\Big), \tag{3.1}$$

然后根据函子 $\pi_0$ 的定义

$$N_H^G\underline{R}(G/K) = \underline{\pi}_0^G\Big(\bigwedge_{G/H} H\underline{R}\Big)(G/K) = \pi_0\Big(\Big(\bigwedge_{G/H} H\underline{R}\Big)^K\Big)$$

谱 $\bigwedge_{G/H} HR$ 上的 $G$作用可以在自由层 $G/e$上取值时，在 $\pi_0^{G/H}$ 层面描述：

$$N_H^G\underline{R}(G/e) = \underline{\pi}_0^G\Big(\bigwedge_{G/H} H\underline{R}\Big)(G/e) = \pi_0\Big(\bigwedge_{G/H} H\underline{R}\Big) \cong \bigotimes_{G/H} \underline{R}(H/e).$$

这里，smash 因子上的置换作用体现为相应的张量因子置换作用，而 $H$ 在 $R$ 的 Eilenberg-Mac Lane 谱上的作用对应于对 $R(H/e)$的 $H$作用。因此，下面我们将在自由层描述范数上的 $G$作用。

对于一个 $G$-Tambara 函子 $T$，我们可以考虑它到平凡子群的限制 $i_e^G T$。先验地，这只是一个 $e$-Tambara 函子，因而也是一个交换环，并且

$$i_e^G \underline{T}(e/e) = \underline{T}(G \times_e e/e) \cong \underline{T}(G/e).$$

但 $T$ 的 $G$-Tambara 结构保证 $T(G/e)$ 带有交换$G$-环的结构。这对于范数-限制伴随的余单位很重要

$$\varepsilon \colon N_e^G i_e^G \underline{T} \to \underline{T}.$$

该余单位映射必须是 $G$-Tambara 函子的态射；特别地，在自由层$G/e$ 上我们必须有一个 $G$-映射

$$\varepsilon_e \colon N_e^G i_e^G \underline{T}(G/e) = i_e^G \underline{T}(e/e)^{\otimes G} = \underline{T}(G/e)^{\otimes G} \to \underline{T}(G/e).$$

我们可以考虑 $G$ 在 $N_e^G i_e^G T$ 上的对角作用，其定义为对所有 $\gamma \in G$ 与 $t_g \in T(G/e)$：

$$\gamma(\bigotimes_{g\in G} t_g) = \bigotimes_{\gamma g \in G} \gamma(t_g). \tag{3.2}$$

相比之下，翻转作用定义为

$$\gamma(\bigotimes_{g\in G} t_g) = \bigotimes_{\gamma g \in G} t_g. \tag{3.3}$$

**命题 3.1**。对于带有对角 $G$-作用的 $N_e^G i_e^G T$，在 $G/e$ 层级的余单位映射是交换环 $T(G/e)$的乘法 $\mu$。

如果我们在 $N_e^G i_e^G T$ 上使用翻转作用，那么在 $G/e$ 层级，余单位映射将带有 $t_g \in T(G/e)$ 的 $\bigotimes_{g\in G} t_g$ 发送到 $\prod_{g\in G} g t_g$。

我们将对角作用下的 $N_e^G i_e^G T$ 的余单位映射记为 $\varepsilon^d$，将翻转作用下的余单位映射记为 $\varepsilon^f$。

证明。注意到，范数-限制伴随保证，从 $N_e^G i_e^G T$ 到 $T$ 的 $G$-Tambara 函子的映射，与从 $i_e^G T = T(G/e)$ 到其自身的 $e$-Tambara 函子的映射之间存在自然双射。

首先注意到，$\varepsilon^f$ 和 $\varepsilon^d$ 是 $T(G/e)$ 上恒等映射的伴随映射：恒等映射决定了 $\bigotimes_{g\in G} T(G/e)$ 中 $g = e$-张量因子上的取值。如果我们考虑带有翻转作用的范数-限制，那么可以将任意元素 $\bigotimes_{g\in G} t_g$ 写成

$$\bigotimes_{g\in G} t_g = \prod_{g\in G} g(t_g \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1)$$

从而得到

$$\varepsilon_e^f(\bigotimes_{g\in G} t_g) = \prod_{g\in G} g\varepsilon^f(t_g \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1) = \prod_{g\in G} g t_g.$$

相比之下，对于对角作用，我们必须把 $\bigotimes_{g\in G} t_g$ 写成

$$\bigotimes_{g\in G} t_g = \prod_{g\in G} g(g^{-1} t_g \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1)$$

因此， $\varepsilon^d$ 作为 $T(G/e)$上恒等映射的伴随映射是

$$\begin{aligned}\varepsilon_e^d(\bigotimes_{g\in G} t_g) &= \varepsilon_e^d(\prod_{g\in G} g(g^{-1}t_g\otimes 1\otimes\ldots\otimes 1)) = \prod_{g\in G} g\varepsilon^d(g^{-1}t_g\otimes 1\otimes\ldots\otimes 1)\\ &= \prod_{g\in G} g(g^{-1}t_g) = \prod_{g\in G} t_g.\end{aligned}$$

□

备注 3.2。 $N_e^G i_e^G T$ 上两种不同的 $G$-作用，对应于 $N_e^G i_e^G A$ 上两种不同的 $G$-作用，其中 $A$ 是任意的交换 genuine $G$-环谱，例如 $HT$。一种作用仅对 $\bigwedge_G A$ 中的 smash 因子进行置换，另一种作用则将这一置换作用与 $A$ 上的 $G$-作用结合起来。

**命题 3.3**。 $N_e^G i_e^G T$ （带有翻转 $G$-作用）与 $N_e^G i_e^G T$ （带有对角 $G$-作用）之间存在一个 *$G$-Tambara* 函子同构 $\Psi$，使得交换图

$$\begin{array}{ccc} N_e^G i_e^G \underline{T} & \xrightarrow{\Psi} & N_e^G i_e^G \underline{T} \\ & {\scriptstyle \varepsilon^f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \varepsilon^d} & \\ & \underline{T} & \end{array}$$

可交换。

证明。 根据伴随关系，从 $N_e^G i_e^G T$ 到其自身的 $G$-Tambara 函子映射，与从 $i_e^G T = T(G/e)$ 到 $i_e^G N_e^G i_e^G T = \bigotimes_{g\in G} T(G/e)$ 的 $e$-Tambara 函子态射之间存在自然双射。

我们定义 $\Psi$ 的伴随映射，

$$\mathrm{ad}(\Psi)\colon \underline{T}(G/e) \to \bigotimes_{g\in G} \underline{T}(G/e)$$

as

$$\mathrm{ad}(\Psi)(t) := \bigotimes_{g\in G} t_g \text{ with } t_g = \begin{cases} t, & \text{if } g = e,\\ 1, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

在伴随映射的层面上，我们必须验证复合 $i_e^G\varepsilon^d \circ \mathrm{ad}(\Psi)$ 是恒等映射，而该恒等映射是 $\varepsilon^f$ 的伴随映射，并且确实

$$i_e^G\varepsilon^d \circ \mathrm{ad}(\Psi)(t) = i_e^G\varepsilon^d(t\otimes 1\otimes\ldots\otimes 1) = t.$$

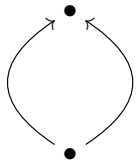
映射 $\Psi$ 本身随后在 $G/e$ 处由

$$\begin{aligned}\Psi(\bigotimes_{g\in G} t_g) &= \Psi(\prod_{g\in G} g(t_g\otimes 1\otimes\ldots\otimes 1))\\ &= \prod_{g\in G} g\mathrm{ad}(\Psi)(t_g)\\ &= \prod_{g\in G} g(t_g\otimes 1\otimes\ldots\otimes 1)\\ &= \bigotimes_{g\in G} gt_g.\end{aligned}$$

这显然是一个同构。 □

由于带有翻转作用的 $N_e^G i_e^G T$ 与带有对角作用的 $N_e^G i_e^G \underline{T}$ 同构，且此同构与余单位映射相容，因此我们可以推导出以下结果。这里，

$S^\sigma$ 是实符号表示的一点紧化的单纯模型，其中 $(S^\sigma)_0 = C_2/C_2 \sqcup C_2/C_2$ 和 $(S^\sigma)_1 = C_2/C_2 \sqcup C_2/e \sqcup C_2/C_2$:

$S^\sigma =$ 

**命题 3.4.** 设 $R$ 是一个_$C_2$-*Tambara* 函子，则存在一个单纯 $C_2$-*Tambara* 函子的同构

$$\mathcal{L}^{C_2,f}_{S^\sigma}(\underline{R}) \cong \mathcal{L}^{C_2}_{S^\sigma}(\underline{R})$$

其中，左侧考虑范数-限制项上的翻转作用，右侧则考虑 [LRZ25] 中的对角作用。

证明。 在 [LRZ25, (7.4)] 中，我们将 $\mathcal{L}^{C_2}_{S^\sigma}(\underline{R})$ 识别为双边 bar 构造 $B(R, N_e^{C_2} i_e^{C_2} R, \underline{R})$，其中范数-限制项带有对角作用。然而，来自命题 3.3 的同构 $\Psi$ 诱导出一个单纯 $C_2$-Tambara 函子的同构

$$B(\mathrm{id}, \Psi, \mathrm{id})\colon B(\underline{R}, N_e^{C_2} i_e^{C_2} \underline{R}, \underline{R}) \to B(\underline{R}, N_e^{C_2} i_e^{C_2} \underline{R}_d, \underline{R})$$

在左侧 bar 构造中对 $N_e^{C_2} i_e^{C_2} R$ 使用翻转作用，在右侧 bar 构造中使用对角作用，因为 $\Psi$ 与增广映射、 $N_e^{C_2} i_e^{C_2} R$ 上的乘法以及单位映射相容。□

上述结果保证，在 $S^\sigma$ 的特定情形下，范数-限制项上的 $C_2$-作用的选择无关紧要。然而，在其他例子中，例如具有 $C_n$-旋转作用的 $S^1$，选择确实会产生影响，例如参见例 4.3。

设 $\underline{R}$ 是一个 $H$-Tambara 函子。在 $N_H^G \underline{R} = \underline{\pi}_0^G(\bigwedge_{G/H} H\underline{R})$ 上考虑张量归纳作用。例如， [Mal, 第 40,41] 页对此有明确描述。对于 $G$ 中 $H$ 的任意横截集 $g_1, \dots, g_n$，以及每个 $g$ 和所有 $G$ 中的 $1 \leqslant i \leqslant n$，存在唯一的 $1 \leqslant j_i \leqslant n$ 满足 $g_{j_i}^{-1} g g_i \in H$，且作用定义为

$$g\big(\bigotimes_{g_i H} r_i\big) = \bigotimes_{g_{j_i} H} (g_{j_i}^{-1} g g_i) \cdot r_i. \tag{3.4}$$

这源于将 $G$ 分解为 $G = \bigsqcup_{g_i H \in G/H} g_i H$，以及以下观察：若 $g_{j_i}^{-1} g g_i \in H$，则 $g \cdot g_i h = g_{j_i}(g_{j_i}^{-1} g g_i h) \in g_{j_i} H$。注意，如果我们选取不同的横截集，那么用第一个横截集构造的范数与用第二个横截集构造的范数之间存在一个明确的同构。

对于任意子群 $e < H < G$，在 $N_e^G i_e^H R$上取张量归纳作用、在 $N_e^H i_e^H R$上取翻转作用，并在 $N_H^G$上取张量归纳作用时，存在一个 $G$-Tambara 函子的同构

$$\xi\colon N_e^G i_e^H \underline{T} \cong N_H^G N_e^H i_e^H \underline{T}. \tag{3.5}$$

在谱的层面上，该同构由重新排列 smash 因子诱导；在自由轨道上求值时，它将 $T(G/e)$ 的 $G$ 重张量积排列为 $\bigotimes_{G/H} \bigotimes_H T(G/e)$。由于我们不考虑对角作用，因此映射 $\xi$ 是等变的。

**例 3.5**。 下面具体说明为何不能在 $N_e^H i_e^H R$上取对角作用：设 $G$ 为 $\Sigma_3$，且 $H$ 为由对换 $\tau = (1,2)$ 生成的子群。我们选取 $g_1 = \mathrm{id}$ $g_2 = (1,3)$ $g_3 = (2,3)$ 作为 $H$ 在 $\Sigma_3$ 中的陪集代表元。

在自由层， $\xi_e$ 是一个映射

$$\xi_e\colon (N_e^{\Sigma_3} i_e^H \underline{R})(\Sigma_3/e) = \bigotimes_{\Sigma_3} \underline{R}(H/e) \to \bigotimes_{\mathrm{id},(1,3),(2,3)} \bigotimes_{\mathrm{id},(1,2)} \underline{R}(H/e) = (N_H^{\Sigma_3} N_e^H i_e^H \underline{R})(\Sigma_3/e)$$

它将生成元 $r_{id}\otimes r_{(1,2)}\otimes r_{(1,3)}\otimes r_{(2,3)}\otimes r_{(1,2,3)}\otimes r_{(1,3,2)}$ 映射到

$$\xi_e(r_{id}\otimes r_{(1,2)}\otimes r_{(1,3)}\otimes r_{(2,3)}\otimes r_{(1,2,3)}\otimes r_{(1,3,2)}) = (r_{id}\otimes r_{(1,2)})\otimes(r_{(1,3)}\otimes r_{(1,2,3)})\otimes(r_{(2,3)}\otimes r_{(1,3,2)}).$$

例如，在项 $N_H^{\Sigma_3}N_e^H i_e^H R(H/e)$ 中对 $N_e^H i_e^H R(H/e)$ 施加对角作用 $(2,3)\circ\xi_e$ 将得到

$$(r_{(2,3)}\otimes r_{(1,3,2)})\otimes(\overline{r}_{(1,2,3)}\otimes\overline{r}_{(1,3)})\otimes(r_{id}\otimes r_{(1,2)}) \tag{3.6}$$

其中 $\bar{a}=\tau(a)$。

另一方面，先应用 (2,3)，再应用 $\xi_e$，将得到

$$\xi_e\circ(2,3)(r_{id}\otimes r_{(1,2)}\otimes r_{(1,3)}\otimes r_{(2,3)}\otimes r_{(1,2,3)}\otimes r_{(1,3,2)}) = (r_{(2,3)}\otimes r_{(1,3,2)})\otimes(r_{(1,2,3)}\otimes r_{(1,3)})\otimes(r_{id}\otimes r_{(1,2)})$$

因为 $i_e^H R$ 不携带任何 $H$-作用。

因此，如果我们使用对角作用，那么映射 $\xi_e$ 就不是等变的，因此 $\xi$ 不是 $G$-Tambara 函子的同构。

即使我们试图记住 $i_e^H R$上的 $H$-作用，将分量 $\sigma$ 中的 $r_\sigma$ 映到分量 $\sigma$ 中的 $r_{(2,3)\sigma}$，然后再映到自身（如果 $(2,3)\sigma=g_i$），而在某个代表元 $g_i$满足 $(2,3)\sigma=g_i(1,2)$ 时映到 $r_{(2,3)\sigma}$，那么我们将得到

$$(2,3)r_{id}\otimes r_{(1,2)}\otimes r_{(1,3)}\otimes r_{(2,3)}\otimes r_{(1,2,3)}\otimes r_{(1,3,2)} = r_{(2,3)}\otimes\overline{r}_{(1,3,2)}\otimes\overline{r}_{(1,2,3)}\otimes r_{\mathrm{id}}\otimes r_{(1,3)}\otimes\overline{r}_{(1,2)}$$

并应用 $\xi_e$，于是得到

$$(r_{(2,3)}\otimes\overline{r}_{(1,3,2)})\otimes(\overline{r}_{(1,2,3)}\otimes r_{(1,3)})\otimes(r_{id}\otimes\overline{r}_{(1,2)}),$$

这与 (3.6) 不同。

对于稍后要构造的 $H$-Tambara 函子的 Loday构造，我们希望将 $N_H^G R$赋给轨道 $G/H$。因此，我们必须证明，$G/H$ 的等变自映射会在 $N_H^G R$上诱导良定义的自映射。

**引理 3.6**。设 $H<G$ 是一个子群，且 $R$ 是一个 *$H$-Tambara* 函子。则 *$G$- Tambara* 函子 $N_H^G R$ 带有一个 $W_G(H)$ - 作用。此作用关于 *Tambara* 函子 $R$ 是自然的。

证明。设 $\gamma\in N_G(H)$，并令 $[\gamma]\in W_G(H)$ 为其魏尔类。我们为 $H$在 $G$中选取一个横截集 $(g_1,\dots,g_n)$。注意，$(g_1\gamma^{-1},\dots,g_n\gamma^{-1})$ 于是也是 $H$在 $G$中的一个横截集。

Weyl 群 $W_G(H)$ 通过将陪集 $gH$ 映至以下对象来作用于 $G/H$：

$$[\gamma](gH)=g\gamma^{-1}H.$$

这会在其上诱导一个作用

$$N_H^G\underline{R}(G/e)=\bigotimes_{g_iH}\underline{R}(H/e)$$

将元素 $\bigotimes_{g_iH} r_i\in\bigotimes_{g_iH}R(H/e)$ 发送到

$$[\gamma](\bigotimes_{g_iH} r_i)=\bigotimes_{g_i\gamma^{-1}H} r_i.$$

我们证明，该作用相对于式 (3.4) 中的张量归纳作用是 $G$-等变的，即，对于所有 $g\in G$ 和 $[\gamma]\in W_G(H)$，下列交换图均可交换：

$$\begin{array}{ccc}
\bigotimes_{g_iH}\underline{R}(H/e) & \xrightarrow{[\gamma]} & \bigotimes_{g_i\gamma^{-1}H}\underline{R}(H/e)\\
\downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle g}\\
\bigotimes_{g_iH}\underline{R}(H/e) & \xrightarrow{[\gamma]} & \bigotimes_{g_i\gamma^{-1}H}\underline{R}(H/e)
\end{array}$$

根据定义

$$[\gamma]\Big(g\Big(\bigotimes_{g_iH} r_i\Big)\Big) = [\gamma]\Big(\bigotimes_{g_{j_i}H}(g_{j_i}^{-1}gg_i)r_i\Big) = \bigotimes_{g_{j_i}\gamma^{-1}H}(g_{j_i}^{-1}gg_i)r_i.$$

这里， $j_i$ 是满足 $gg_iH = g_{j_i}H$的唯一指标。另一方面

$$g\Big([\gamma]\Big(\bigotimes_{g_iH} r_i\Big)\Big) = g\Big(\bigotimes_{g_i\gamma^{-1}H} r_i\Big) = \bigotimes_{g_{k_i}\gamma^{-1}H}(g_{k_i}^{-1}gg_i)r_i,$$

其中， $k_i$ 是关于横截集（$g_1\gamma^{-1}$、……、$g_n\gamma^{-1}$）的唯一指标，满足 $gg_i\gamma^{-1}H = g_{k_i}\gamma^{-1}H$。但此时 $j_i = k_i$。

由于 Weyl 群作用在$N_H^G(R)(G/e)$上是 $G$-等变的，我们得到，在谱层面上，这对应于 $N_H^G HR$ 上的 $G$-等变 Weyl 群作用，而这又在 $G$-Tambara 函子$\pi_0^G N_H^G(HR) = N_H^G(R)$上诱导出一个定义良好的 Weyl 群作用。

为证明自然性，假设 $f\colon S \to R$ 是 $H$-Tambara 函子的一个态射。我们需要证明，对于所有 $[\gamma] \in W_G(H)$，交换图

$$\begin{array}{ccc} N_H^G\underline{S} & \xrightarrow{[\gamma]} & N_H^G\underline{S} \\ {\scriptstyle N_H^G(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle N_H^G(f)} \\ N_H^G\underline{R} & \xrightarrow{[\gamma]} & N_H^G\underline{R} \end{array}$$

可交换。再次使用范数-限制伴随，因此上述要求转化为交换图的交换性

$$\begin{array}{ccc} \underline{S} & \xrightarrow{ad[\gamma]} & i_H^G N_H^G\underline{S} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_H^G N_H^G f} \\ \underline{R} & \xrightarrow{ad[\gamma]} & i_H^G N_H^G\underline{R}. \end{array}$$

John Ullman 证明了 [Ull, 定理 5.2] 从而， $H$-Tambara 函子之间的映射与相应 Eilenberg-MacLane 谱之间的映射一一对应。因此，我们可以在谱层面检验上述交换性；为此，只需在自由层检验 Tambara 函子的这一断言即可。

在 $H/e$ 处取值，上述交换图为

$$\begin{array}{ccc} \underline{S}(H/e) & \xrightarrow{ad[\gamma]} & \bigotimes_{g_iH}\underline{S}(H/e) \\ {\scriptstyle f(H/e)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (i_H^G N_H^G f)(H/e)} \\ \underline{R}(H/e) & \xrightarrow{ad[\gamma]} & \bigotimes_{g_iH}\underline{R}(H/e) \end{array}$$

对于 $G$ 中 $H$ 的一个横截集（$g_1$，……，$g_n$），满足 $g_1 = e$，其中 $ad[\gamma]$ 将一个 $s \in S(H/e)$ 映射到与 $\bigotimes_{g_i\gamma^{-1}H} s_{g_i\gamma^{-1}}$ 的张量积，并且

$$s_{g_i\gamma^{-1}} = \begin{cases} s, & g_i = g_1 \\ 1, & g_i \neq g_1. \end{cases}$$

交换图的交换性由直接检验即可得出。

□

事实证明，引理 3.6 中的 Weyl 群作用来源于对 $N_G(H)$ 的 $G$-作用的限制，因为 $G$ 通过共轭作用于子群$H$的共轭像的集合。正规化子子群 $N_G(H)$ 在该作用下固定 $H$，随后作用于 $G/H$；在此

$N_G(H)$-作用中， $H$ 在 $G/H$ 上平凡作用。类似地， $\gamma N_G(H)\gamma^{-1}$ 固定 $\gamma H\gamma^{-1}$ ，随后作用于$G/\gamma H\gamma^{-1}$; 在此 $\gamma N_G(H)\gamma^{-1}$-作用中， $\gamma H\gamma^{-1}$ 在 $G/\gamma H\gamma^{-1}$ 上平凡作用。这可以升级为我们的 Tambara构造：

**引理 3.7**。 设 $H < G$ 是一个子群， $R$ 是一个 $H$-*Tambara* 函子。那么，任意 $\gamma \in G$ 都定义了一个 $G$-*Tambara* 函子的同构

$$N_H^G \underline{R} \to N_{\gamma H\gamma^{-1}}^G(c_{\gamma^{-1}}^*(\underline{R})).$$

这里，$c_{\gamma^{-1}}$ 是 $G$ 的共轭自同构， $c_{\gamma^{-1}}(g) = \gamma^{-1}g\gamma$ 对所有 $g \in G$ 都成立，因此 $H = c_{\gamma^{-1}}(\gamma H\gamma^{-1})$; *Tambara* 函子的拉回如引理 *2.1* 所述。

证明。 与之前一样，我们为 $H$ 在 $G$ 中选取一个横截集 $(g_1, \dots, g_n)$，并注意到 $(g_1\gamma^{-1}, \dots, g_n\gamma^{-1})$ 是 $\gamma H\gamma^{-1}$ 在 $G$ 中的一个横截集：若 $G = \bigsqcup_{i=1}^n g_i H$，则

$$G = G \cdot \gamma^{-1} = \bigsqcup_{i=1}^{n} g_i H\gamma^{-1} = \bigsqcup_{i=1}^{n} (g_i\gamma^{-1})(\gamma H\gamma^{-1}).$$

那么现在我们映射

$$N_H^G \underline{R}(G/e) = \bigotimes_{g_i H} \underline{R}(H/e)$$

to

$$N_{\gamma H\gamma^{-1}}^G(c_{\gamma^{-1}}^*(\underline{R}))(G/e) = \bigotimes_{(g_i\gamma^{-1})(\gamma H\gamma^{-1})} (c_{\gamma^{-1}}^*(\underline{R}))(\gamma H\gamma^{-1}/e) = \bigotimes_{(g_i\gamma^{-1})(\gamma H\gamma^{-1})} \underline{R}(H/e)$$

将元素 $\bigotimes_{g_i H} r_i \in \bigotimes_{g_i H} R(H/e)$ 映射为

$$\gamma(\bigotimes_{g_i H} r_i) = \bigotimes_{(g_i\gamma^{-1})(\gamma H\gamma^{-1})} r_i.$$

与上文一样，要证明此作用相对于式 (3.4) 中的张量归纳作用是 $G$-等变的，我们需要证明下列交换图对所有 $g, \gamma \in G$ 都交换：

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_{g_i H} \underline{R}(H/e) & \xrightarrow{\gamma} & \bigotimes_{(g_i\gamma^{-1})(\gamma H\gamma^{-1})} (c_{\gamma^{-1}}^*(\underline{R}))(\gamma H\gamma^{-1}/e) \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \bigotimes_{g_i H} \underline{R}(H/e) & \xrightarrow{\gamma} & \bigotimes_{(g_i\gamma^{-1})(\gamma H\gamma^{-1})} (c_{\gamma^{-1}}^*(\underline{R}))(\gamma H\gamma^{-1}/e). \end{array}$$

根据定义

$$\gamma\Big(g\Big(\bigotimes_{g_i H} r_i\Big)\Big) = \gamma\Big(\bigotimes_{g_{j_i} H} (g_{j_i}^{-1} g g_i) r_i\Big) = \bigotimes_{(g_{j_i}\gamma^{-1})(\gamma H\gamma^{-1})} (g_{j_i}^{-1} g g_i) r_i \tag{3.7}$$

其中， $j_i$ 是满足 $gg_i H = g_{j_i} H$ 的唯一指标。另一方面

$$g\Big(\gamma\Big(\bigotimes_{g_i H} r_i\Big)\Big) = g\Big(\bigotimes_{(g_i\gamma^{-1})(\gamma H\gamma^{-1})} r_i\Big) = \bigotimes_{(g_{k_i}\gamma^{-1})(\gamma H\gamma^{-1})} ((g_{k_i}\gamma^{-1})^{-1} g g_i\gamma^{-1}) r_i, \tag{3.8}$$

其中， $k_i$ 是横截集 $(g_1\gamma^{-1}, \dots, g_n\gamma^{-1})$ 中满足下式的唯一指标，该横截集对应于 $\gamma H\gamma^{-1}$

$$g g_i H\gamma^{-1} = g g_i\gamma^{-1}(\gamma H\gamma^{-1}) = g_{k_i}\gamma^{-1}(\gamma H\gamma^{-1}) = g_{k_i} H\gamma^{-1},$$

因此 $j_i = k_i$ 仍成立。注意，在等式 (3.7) 中，我们将 $r_i$ 视为 $R(H/e)$ 中的一个元素，并通过 $g_{j_i}^{-1} g g_i$ 作用于它；而在等式 (3.8) 中，我们将 $r_i$ 视为 $c_{\gamma^{-1}}^*(R)(\gamma H\gamma^{-1}/e)$ 中的一个元素，并通过 $\gamma g_{k_i}^{-1} g g_i\gamma^{-1} = \gamma g_{j_i}^{-1} g g_i\gamma^{-1}$ 作用于它。这与将 $r_i$ 视为 $R(H/e)$ 中的一个元素，并通过 $c_{\gamma^{-1}}(_\ \gamma g_{j_i}^{-1} g g_i\gamma^{-1}) = g_{j_i}^{-1} g g_i$ 作用于它是一致的。

在谱层面上，这对应于一个 $G$-等变映射 $N_H^G HR \to N_{\gamma H\gamma^{-1}}^G H(c_{\gamma^-}^*$，而该映射进一步在 $\pi_0(\underline{R})$) 诱导出所需的映射，正如引理陈述中所断言的那样。

该映射关于 $\gamma$ 是乘法的，因此其逆映射是由 $\gamma^{-1}$ 诱导的映射 $N^G_{\gamma H\gamma^{-1}}(c^*_{\gamma^{-1}}(R)) \to N^G_H R$。□

若我们从引理 2.1 中的一个 $\varphi(H)$-Tambara 函子 $R$ 出发，那么就需要 $N^G_e i_e^{\varphi(H)} R \to N^G_{\varphi(H)} R$ 和 $N^G_e i_e^{\varphi(H)} R \to N^G_H(\varphi^* R)$ 之间的 $G$-Tambara 函子态射。映射 $N^G_e i_e^{\varphi(H)} R \to N^G_{\varphi(H)} R$ 是以下复合

$$N^G_e i_e^{\varphi(H)} \underline{R} \xrightarrow{\xi} N^G_{\varphi(H)} N_e^{\varphi(H)} i_e^{\varphi(H)} \underline{R} \xrightarrow{N^G_{\varphi(H)}(\varepsilon^f)} N^G_{\varphi(H)} \underline{R}, \tag{3.9}$$

而映射 $N^G_e i_e^{\varphi(H)}(R) \to N^G_H(\varphi^* R)$ 是以下复合

$$N^G_e i_e^{\varphi(H)} \underline{R} \xrightarrow{\xi} N^G_H N_e^H i_e^{\varphi(H)} \underline{R} \xrightarrow{N^G_H(\varepsilon^f_\varphi)} N^G_H \varphi^* \underline{R}. \tag{3.10}$$

这里，$\varepsilon^f_\varphi \colon N_e^H i_e^{\varphi(H)}(R) \to \varphi^* R$ 由其伴随映射 $i_e^{\varphi(H)}(R) \to i_e^H \varphi^* \underline{R}$ 确定

$$\mathrm{ad}(\varepsilon^f_\varphi) \colon i_e^{\varphi(H)} \underline{R} = \underline{R}(\varphi(H)/e) \to i_e^H \varphi^* \underline{R} = (\varphi^* \underline{R})(H/e) = \underline{R}(\varphi(H)/e),$$

$R(\varphi(H)/e)$ 上的恒等映射。

## 4. Loday constructions for Tambara functors with respect to isotropysubgroups

我们的目标是降低对 Tambara 函子的要求，使得有限 $G$-单纯集合的等变 Loday 构造仍然有定义。

**4.1. 平凡各向同性。** 我们从一个极端情形开始:

**命题 4.1.** 假设 $X$ 是有限的单纯自由 $G$-集，即，每个 $X_n$ 都具有某个 $1 \leqslant m_n < \infty$ 所对应的形式 $\bigsqcup_{i=1}^{m_n} G/e$ 。则 $\mathcal{L}_X^{G;e}(R)$ 可以对每个交换 $G$-环 $R$ 定义，并且 $(N_e^G R)(G/e)$ 上的 $G$-作用可以选择为对角作用或翻转作用。

证明。 由于 $X$ 如上所述以 $X_n$ 为自由，我们可以令

$$\mathcal{L}_X^{G;e}(R)_n := \square_{i=1}^{m_n} N_e^G R.$$

此处， $N_e^G R$ 是一个 $G$-Tambara 函子；在此情形下，我们可以选择仅使用 $G$ 在 $N_e^G R$ 上的翻转作用，或使用 $N_e^G R$ 上的对角 $G$-作用，其中 $G$ 置换范数中的盒积因子，并在 $R$ 的张量因子上逐坐标作用。

对于每个 $f\colon [m] \to [n] \in \Delta$ 唯一可能的诱导映射 $X(f)\colon X_n \to X_m$ 均由包含映射 $\varnothing \to G/e$、折叠映射、直和项的置换以及 $G/e$ 的等变自映射构成。

包含映射 $\varnothing \hookrightarrow G/e$ 插入 $G$-Tambara 函子 $N_e^G R$ 的单位元 $A \to N_e^G R$，折叠映射在 $N_e^G R$ 上诱导乘法，置换产生盒积因子的置换，而 $G/e$ 的等变自映射则在 $N_e^G R$ 上诱导一个 $G$-作用。无论我们在 $N_e^G R$ 上选择对角作用还是翻转作用，其余所有结构都与任一选择相容。因此，我们只需要交换 $G$-环 $R$ ，即可定义等变 Loday 构造 $\mathcal{L}_X^{G;e}(R)$。□

注记 4.2. 注意，我们允许在 $R$ 上采用平凡的 $G$-作用，因此任意交换环都可以。

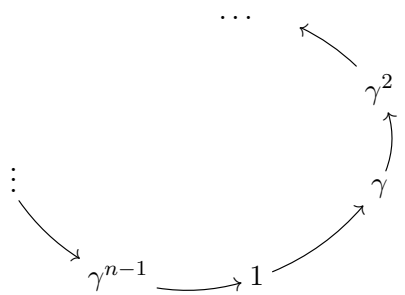
在上述结果中，我们将 $N_e^G R$ 指定给一个自由轨道 $G/e$。在通常的等变 Loday 构造中，若 $T$ 是一个 $G$-Tambara 函子，我们会将其记为 $G/e \otimes T = N_e^G i_e^G T$。但在这里，输入是一个 $e$-Tambara 函子（它不过是一个交换环），或者是一个带有 $G$-作用的交换环。在这种设定下，诸如

$$G \otimes_e R := N_e^G R$$

这样更合适，也更能清楚地展现输入的结构。

在自由情形下，我们可以自由选择翻转作用或对角作用。不过，由此得到的 Loday 构造可能有所不同：

**例 4.3.** 考虑一个阶为 $n$、$C_n = \langle \gamma \mid \gamma^n = e \rangle$ 的循环群，以及带有旋转作用 $S^1_{rot}$ 的 $S^1$ 的一个单纯模型：




相应的单纯集合 $S^1_{rot}$ 在每个次数上都是自由的，我们在 [LRZ25, §7.1] 中确定了它的结构。设 $R$ 是一个 $C_n$-Tambara 函子。若在 $N_e^{C_n} i_e^{C_n} R$ 上取对角作用，则 $\mathcal{L}^{C_n}_{S^1_{rot}}(R)$ 同构于 $N_e^{C_n} i_e^{C_n}(R)$ 的扭曲循环神经，这里采用 [BGHL19] 中的定义。

另一方面，仅施加翻转作用则得到 $\mathcal{L}^{C_n, \ f}_{S^1_{rot}}(R)(C_n/e) \cong \mathrm{sd}_n \mathcal{L}_{S^1}(R(C_n/e))$，其中后者是交换环 $R(C_n/e)$ 的循环 bar 构造的 $n$ 重细分。特别地，在这个单纯对象中，末面映射并未扭曲，其同伦群是 $R(C_n/e)$ 的通常 Hochschild 同调群。我们在 [LRZ25, 定理 7.4] 中讨论了这一情形。

由命题 4.1，我们可以为每个 $C_n$-交换环 $R$ 定义 $\mathcal{L}^{C_n, \ e}_{S^1_{rot}}(R)$。如果 $C_n$ 在 $R$ 上的作用非平凡，那么在 $N_e^{C_n}(R)$ 上采用对角作用的 Loday构造不同于采用翻转作用的 Loday构造。

上述例子是凯莱图的一个特例。设 $G$ 是一个有限且有限表示的群，其形式为 $G = \langle s_1, \ldots, s_n \mid r_1, \ldots, r_m \rangle$，其中对所有 $i$ 都有 $s_i \neq e$。按照通常的记号滥用，我们将 $G$ 关于此表示的凯莱图记为 $\mathcal{C}_G$。这里，我们取完整的 $G$ 凯莱图：也就是说，对于对应于对合的长度为二的环，我们不将其简化为无向边，而是保留该环。按照这一约定，我们可以考虑凯莱图的一个单纯模型；再次滥用记号，将这个有限的单纯 $G$-集也记为 $\mathcal{C}_G$。于是 $G$ 在 $\mathcal{C}_G$ 上的作用是自由的：凯莱图的顶点对应于群 $G$ 中的元素 $g$，而群从左侧作用

在顶点上。因此 $(\mathcal{C}_G)_0 = G/e$。一条边 $g \xrightarrow{\cdot} gs_j$ 在凯莱图中对应于一个1-单形，相应的轨道同样是自由的。$\mathcal{C}_G$中所有更高维的单形都是退化的。

命题 4.1 的一个直接推论是如下结果。

**推论 4.4.** 设 $\mathcal{C}_G$ 为如上所选有限表示的有限群的凯莱图的单纯模型。则 $G$-*Loday*构造 $\mathcal{L}^{G;e}_{\mathcal{C}_G}(R)$ 可对所有交换 $G$-环 $R$定义。

**4.2. 一个非平凡各向同性群（及其共轭子群）。** 我们现在考虑有限单纯 $G$-集 $X$ 具有非平凡各向同性的情形。

如果 $e \neq H < G$ 是点 $x \in X$的各向同性子群，那么 $gHg^{-1}$ 就是$g \cdot x$的各向同性群。因此，如果我们有一个与 $G/gHg^{-1}$同构的轨道 $G \cdot y$，就可以选取另一个代表元，并将其视为 $x = g^{-1} \cdot y$ 的轨道，进而认为该轨道与 $G/H$同构。这并不奇怪，因为 $G/H \cong G/gHg^{-1}$ 作为 $G$-集合是如此。因此，一方面，一旦我们得到 $H$ 作为各向同性群，它的所有共轭子群也都是各向同性群；另一方面，处理轨道 $G/H$ 就涵盖了所有这些各向同性情形。

此外，如果我们有两个 $G$-集合 $G/H \to G/gHg^{-1}$ 之间的映射，并且我们将 $G/gHg^{-1} \cong G/H$ 视为同一对象，那么就可以把这个映射看作一个 $G$-映射 $G/H \to G/H$；这些映射由 Weyl 群的作用给出。

**定理 4.5.** 设 $H \neq e$ 是 $G$ 的一个子群，并假设有限单纯 $G$-集 $X$ 中各元素的各向同性子群只有 $e$、$H$ 及其共轭子群 $gHg^{-1}$、$g \in G$。那么根据上述说明，每个 $X_n$ 都可以写成

$$X_n = \bigsqcup_{i \in E_e} G/e \sqcup \bigsqcup_{x \in E_H} G/H$$

其中 $E_e$ 和 $E_H$ 是有限集。设 $R$ 是一个 $H$-*Tambara* 函子。那么

$$\mathcal{L}_X^{G;H}(\underline{R})_n := \left(\square_{i \in E_e} N_e^G i_e^H \underline{R}\right) \square \left(\square_{x \in E_H} N_H^G \underline{R}\right)$$

若在范数-限制项 $N_e^H i_e^H R$ 上使用翻转作用，则可得到一个定义良好的单纯 $G$-*Tambara* 函子 $\mathcal{L}_X^{G;H}(R)$。

证明。再次，我们必须描述单纯结构映射的作用，并证明 t
单纯 恒等式成立。

对于每个 $f\colon [m] \to [n] \in \Delta$ 可能诱导的映射 $X(f)\colon X_n \to X_m$ 由包含映射 $\varnothing \to G/e$ 和 $\varnothing \to G/H$、折叠映射 $G/e \sqcup G/e \to G/e$ 和 $G/H \sqcup G/H \to G/H$、直和项的置换、$G/e$ 上的等变自映射 $G/H$ 以及等变满射 $G/e \to G/H$ 构成。

由于所有等变映射 $G/e \to G/H$ 都可以分解为 $G/e$ 上的一个 $G$-自映射与标准投影 $\pi\colon G/e \to G/H$ 的复合，因此我们只讨论标准投影的情形。注意，退化映射诱导的单射通常不是同构，而面映射诱导的满射通常也不是同构，因此这些映射都是由折叠映射和投影 $\pi$ 与同构复合而成。

包含映射 $j_e\colon \varnothing \to G/e$ 和 $j_H\colon \varnothing \to G/H$ 诱导交换环 $R(G/e)$ 和 $R(G/H)$ 的单位映射，而折叠映射则在这些环中诱导乘法映射。等变自映射在 $R(G/e)$ 上诱导 $G$-作用，并在 $R(G/H)$ 上诱导 $W_G(H)$-作用，如引理 3.6 中所述。

投影映射 $\pi\colon G/e \to G/H$ 诱导出映射

$$N_H^G(\varepsilon^f) \circ \xi\colon N_e^G i_e^H \underline{R} \cong N_H^G N_e^H i_e^H \underline{R} \to N_H^G \underline{R}$$

这正是我们需要对范数使用翻转作用的关键之处。

折叠映射 $\nabla$ 的自然性确保交换图

$$\begin{array}{ccc} G/e \sqcup G/e & \xrightarrow{\pi \sqcup \pi} & G/H \sqcup G/H \\ \downarrow{\scriptstyle \nabla_e} & & \downarrow{\scriptstyle \nabla_H} \\ G/e & \xrightarrow{\pi} & G/H \end{array}$$

交换。因此，折叠映射与投影的更高次迭代也同样交换，例如

$$\begin{array}{ccc} G/H \sqcup G/e \sqcup G/e & \xrightarrow{\mathrm{id} \sqcup \pi \sqcup \pi} & G/H \sqcup G/H \sqcup G/H \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \sqcup \nabla_e} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \sqcup \nabla_H} \\ G/H \sqcup G/e & & G/H \sqcup G/H \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \sqcup \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \nabla_H} \\ G/H \sqcup G/H & \xrightarrow{\nabla_H} & G/H \end{array}$$

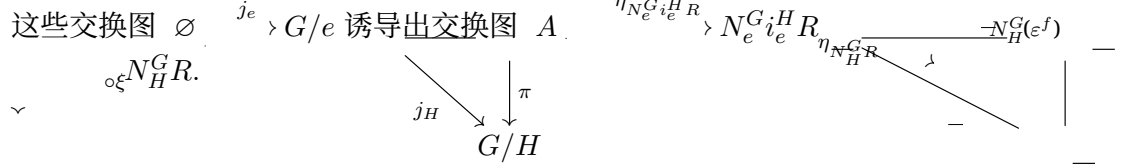
以及以 $G/e$ 的三个副本为起点的相应交换图。这一点与折叠映射的结合性确保两个面映射的复合满足单纯恒等式。

退化映射的复合对应于如下的迭代包含

$$\varnothing \xrightarrow{j_k} G/K = G/K \sqcup \varnothing \xrightarrow{\mathrm{id} \sqcup j_U} G/K \sqcup G/U$$

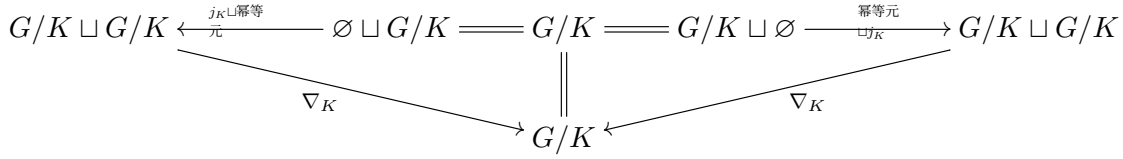
带有 $K, U \in \{e, H\}$，因此它们满足单纯恒等式。

这些交换图 $\varnothing \xrightarrow{j_e} G/e$ 诱导出交换图 $A \xrightarrow{\eta_{N_e^G i_e^H R}} N_e^G i_e^H R \xrightarrow{N_H^G(\varepsilon^f)} N_H^G R$，




这是交换的，因为Burnside Tambara 函子 $A$ 是$G$-Tambara 函子范畴中的始对象。

最后但同样重要的是，该交换图




对 $K \in \{e, H\}$ 诱导出一个 $G$-Tambara 函子的交换图，它表达了环 $N_e^G i_e^H R$ 和 $N_H^G R$ 中的乘法分别具有右单位和左单位。因此，混合单纯恒等式成立。

□

**例 4.6**。 如果有限单纯 $G$-集合 $X$ 的各向同性子群为 $e$ 和 $H$，且 $H$ 是 $G$ 的正规子群，那么我们无需为每个轨道挑选合适的代表元。我们可以任意选择代表元，且出现的轨道类型只有 $G/e$ 和 $G/H$。此类 $G$-单纯集合的例子包括将凯莱图视为有限单纯 $G$-集合，其中 $G/H$ 。因此

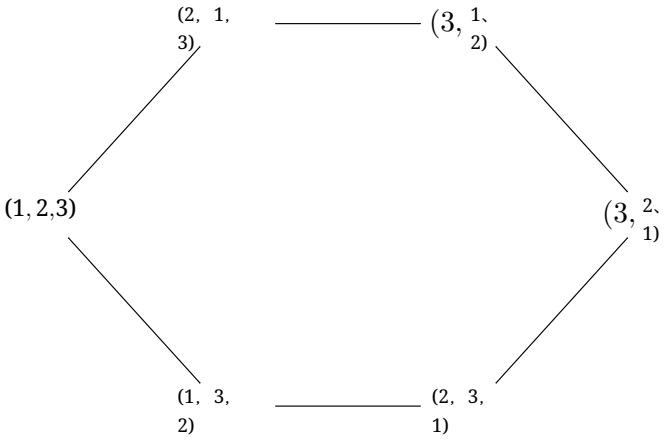
$$\mathcal{L}^{G;H}_{\mathcal{C}_{G/H}}(\underline{R})$$

当 $H$ 是 $G$ 的正规子群时，对所有 $H$-Tambara 函子 $R$ 都可以定义。

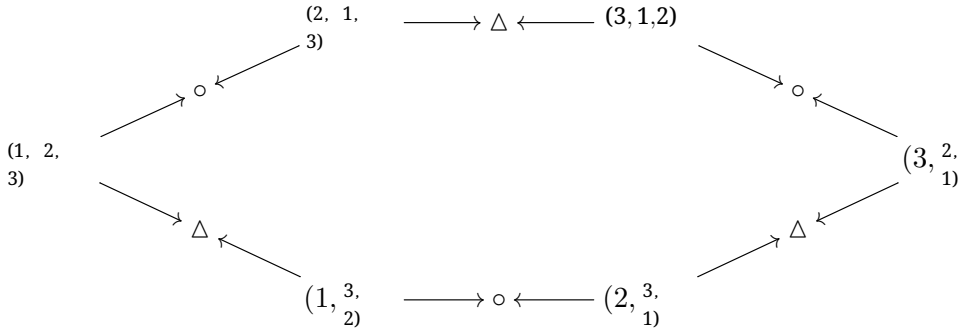
**4.3. 有限 $\Sigma_n$-单纯集合对所有 $n \geqslant 2$ 均具有小各向同性**。 第 $n$ 个置换多面体是一个 $(n-1)$ 维多胞体，定义为向量 $\sigma(1, 2, \ldots\ldots, n)$ $\sigma \in \Sigma_n$ 的凸包。对称群 $\Sigma_n$ 通过置换坐标作用于第 $n$ 个置换多面体。连接那些向量在两个坐标上的值相差 1 的顶点的边。

对于 $n = 2$，这给出了 $\mathbb{R}^2$ 中点 (1，2) 和 (2，1) 之间的线段；对于 $n = 3$，我们得到一个六边形；对于 $n = 4$ ，则得到一个截角八面体，其面由四个正方形和八个六边形组成。

下面我们将考虑 $n$ 阶置换多面体的 1-骨架的单纯模型，并将其称为 $P_{\Sigma_n}$。对于 $n=3$，其 1-骨架为




$n$置换多面体的顶点构成一个自由轨道 $\Sigma_n/e$，而边的中点的稳定子由对换生成，因此定理 4.5 对所有 $n$ 都适用。在 $n=3$ 的例子中，对上述模型进行重心剖分，得到一个 3 维置换多面体 1-骨架的单纯模型，因此 $P_{\Sigma_3}$ 的相关部分如下所示




其中，标记为 $(i,\ j,\ k)$ 的顶点对应于 $i,\ j,\ k \in \{1,2,3\}$，构成一个自由轨道 $\Sigma_3/e$。若我们选择线段中的点作为各轨道的代表元

$$(1, 2.5, 2.5) = \triangle \longleftarrow (1,2,3) \longrightarrow \circ = (1.5, 1.5, 3),$$

那么，标记为 $\circ$ 的顶点构成一个 $\Sigma_3/\langle(1,\ 2)\rangle$-轨道，而 $\triangle$-顶点则组成一个 $\Sigma_3/\langle(2,\ 3)\rangle$-轨道。半边在单纯形次数 1 时分解为两个自由轨道，因此总共有

$$\Sigma_3/\langle(2,3)\rangle \sqcup \Sigma_3/e \sqcup \Sigma_3/e \sqcup \Sigma_3/e \sqcup \Sigma_3/\langle(1,2)\rangle$$

在一次次数下。上述结构从单纯形次数 1 推广到更高的单纯形次数，由此得到的 $\Sigma_3$-Tambara 函子 $T$ 在单纯形次数 $k$ 下的 Loday构造为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\Sigma_3}_{P_{\Sigma_3}}(\underline{T})_k &= (\Sigma_3/\langle(2,3)\rangle \sqcup \Sigma_3/e^{\sqcup k} \sqcup \Sigma_3/e \sqcup \Sigma_3/e^{\sqcup k} \sqcup \Sigma_3/\langle(1,2)\rangle) \otimes \underline{T} \\ &= N^{\Sigma_3}_{\langle(2,3)\rangle} i^{\Sigma_3}_{\langle(2,3)\rangle}\underline{T} \square \Big(\square_{i=1}^{k} N_e^{\Sigma_3} i_e^{\Sigma_3}\underline{T}\Big) \square N_e^{\Sigma_3} i_e^{\Sigma_3}\underline{T} \square \Big(\square_{i=1}^{k} N_e^{\Sigma_3} i_e^{\Sigma_3}\underline{T}\Big) \square N^{\Sigma_3}_{\langle(1,2)\rangle} i^{\Sigma_3}_{\langle(1,2)\rangle}\underline{T}\end{aligned}$$

而单纯结构则由两个粘合在一起的双边 bar 构造组成

$$B(N^{\Sigma_3}_{\langle(2,3)\rangle} i^{\Sigma_3}_{\langle(2,3)\rangle}\underline{T}, N_e^{\Sigma_3} i_e^{\Sigma_3}\underline{T}, N_e^{\Sigma_3} i_e^{\Sigma_3}\underline{T}) \square_{N_e^{\Sigma_3} i_e^{\Sigma_3}\underline{T}} B(N_e^{\Sigma_3} i_e^{\Sigma_3}\underline{T}, N_e^{\Sigma_3} i_e^{\Sigma_3}\underline{T}, N^{\Sigma_3}_{\langle(1,2)\rangle} i^{\Sigma_3}_{\langle(1,2)\rangle}\underline{T}).$$

定理 4.5 确保，对每个$C_2 := \langle(1,2)\rangle$-Tambara 函子 $R$，都存在一个良定义的 $\underline{\Sigma}_n$-Loday 构造 $\mathcal{L}^{\Sigma_n}_{;P_{\Sigma_n}{}^{C_2}}(R)$，因此特别地，我们可以为这样的 $R$ 定义 $\mathcal{L}^{\Sigma_3}_{;P_{\Sigma_3}{}^{C_2}}(R)$。我们

可以从一个 $\langle(1,2)\rangle$-Tambara 函子 $R$ 出发，并使用 $\Sigma_3$ 的、由 (1,3) 作共轭所给出的内自同构 $c_{(1,3)}$，从而得到 $(c_{(1,3)})^*R$ 是一个 $\langle(2,3)\rangle$-Tambara 函子，且

$$(c_{(1,3)})^*\underline{R}(\langle(2,3)\rangle/K) = \underline{R}(\langle(1,3)(2,3)(1,3)\rangle/(1,3)K(1,3)) = \underline{R}(\langle(1,2)\rangle/(1,3)K(1,3)).$$

$R$ 和 $P_{\Sigma_3}$ 的 $\Sigma_3$-Loday构造为

$$\mathcal{L}^{\Sigma_3;C_2}_{P_{\Sigma_3}}(\underline{R}) = B(N^{\Sigma_3}_{\langle(2,3)\rangle}(c_{(1,3)})^*\underline{R}, N^{\Sigma_3}_e i_e^{C_2}\underline{R}, N^{\Sigma_3}_e i_e^{C_2}\underline{R})\square_{N^{\Sigma_3}_e i_e^{C_2}\underline{R}} B(N^{\Sigma_3}_e i_e^{C_2}\underline{R}, N^{\Sigma_3}_e i_e^{C_2}\underline{R}, N^{\Sigma_3}_{C_2}\underline{R}).$$

**4.4. 正规各向同性子群及其子群。** 现在假设有限 $G$-单纯集合 $X$ 的各向同性子群具有如下形式：$H \lhd G$，其中 $H$ 是 $G$ 的正规子群，且其某些子群 $K_i < H$ 满足至少一个 $K_i \neq e$。在这种情况下，所有 $K_i$的共轭子群也都包含在 $H$中。若考虑一个轨道 $G/K_i$，并希望将其与一个 $H$-Tambara函子合并，那么将其定义为 $N^G_{K_i} i^H_{K_i} R$ 会有问题，因为我们无法控制同构 $\xi$与增广映射 $\varepsilon$的组合：$N^H_{K_i} i^H_{K_i} R \to R$。我们采用另一种定义：

**定义 4.7。** 若 $R$ 是一个 $H$-Tambara函子，且 $X$ 是一个有限 $G$-集合，其各向同性子群如上所述，并且 $X_n = \bigsqcup_{E_H} G/H \sqcup \bigsqcup_i \bigsqcup_{E_{K_i}} G/K_i$ 适用于某些有限指标集 $E_H$ 和 $E_{K_i}$，则定义

$$\mathcal{L}^{G;H}_X(\underline{R})_n := \Big(\square_{E_H} N^G_H \underline{R}\Big)\square\Big(\square_i \square_{E_{K_i}} N^G_H N^H_{K_i} i^H_{K_i}\underline{R}\Big).$$

注记 4.8。特别地，对于轨道 $G/K$，若其具有 $K < H$，并且给定任意 $H$-Tambara 函子$R$，我们赋予其值 $N^G_H N^H_K i^H_K R$。我们将其解释为

$$N^G_H N^H_K i^H_K \underline{R} = G \otimes_H (H/K \otimes \underline{R}).$$

这里，$H/K \otimes \underline{R}$ 是有限 $H$-集合 $H/K$ 与 $H$-Tambara 函子 $R$的张量积，它利用了 $H$-Tambara 函子的 $H$-交换幺半群结构；随后，外层的 $G\otimes_H(-)$ 取所得的 $H$-Tambara 函子，并将其张量到 $G$。

按照定义 4.7，当 $H$ 是 $G$中的正规子群，且唯一其他的各向同性子群是平凡子群时，会产生些许歧义。因此我们明确排除了这种情形。但即使在这种情形下，该定义也只会因应用同构$\xi$：$N^G_e i^H_e R \cong N^G_H N^H_e i^H_e R$而有所不同。

我们将范围限制在正规子群 $H \lhd G$，因为否则可能出现这样的情况：$K < H$，但对于某个 $g \in G$，$gKg^{-1} \not< H$。当然，$gK_ig^{-1} < gHg^{-1}$，但此时给定的 $K$ 可以被视为 $H$ 的不同共轭子群的子群，而先验地 并不存在规范的选择。

**命题 4.9。** 上述定义给出了良定义的 $G$-*Loday*构造。

证明。 我们需要证明上述定义的函子性。投影的复合$G/K_j \to G/K_i \to G/H$ 必须诱导出映射

$$N^G_H N^H_{K_j} i^H_{K_j}\underline{R} \to N^G_H N^H_{K_i} i^H_{K_i}\underline{R} \to N^G_H \underline{R}$$

对于标准投影 $\pi^{K_i}_{K_j}$：$K_j < K_i$ 下的 $G/K_j \to G/K_i$，我们使用复合映射

$$N^G_H N^H_{K_j}\underline{R} \xrightarrow{N^G_H(\xi)} N^G_H N^H_{K_j} N^{K_j}_{K_i} i^{K_i}_{K_j} i^H_{K_i}\underline{R} \xrightarrow{N^G_H N^H_{K_j}(\varepsilon^f)} N^G_H N^H_{K_i} i^H_{K_i}\underline{R}.$$

将其与第二个标准投影 $\pi^H_{K_i}$ 的作用复合，可得到与其复合

$$N^G_H(\varepsilon^f)\colon N^G_H N^H_{K_i} i^H_{K_i}\underline{R} \to N^G_H \underline{R}.$$

范数 $N^G_H$ 的自然性随后保证，这与直接使用标准投影 $\pi^H_{K_j}$是一致的。

正如我们在引理 3.6 中所证明的，$W_G(H) = G/H$ 在范数 $N^G_H$ 上的 Weyl 群作用关于 $H$-Tambara变量是自然的，因此我们可以限制到标准投影。

同样的论证保证等变映射 $G/K_j \to G/K_i \to G/K_\ell$的复合在 Loday 构造上产生相容的映射。由于折叠映射诱导乘法，这保证面映射满足单纯恒等式。退化映射由包含映射$\varnothing \hookrightarrow G/K_i$ 或 $\varnothing \hookrightarrow G/H$ 构成，由此得到的单位映射在复合方面如前一样配合良好。混合单纯形恒等式涉及单位映射与乘法的复合，或单位映射与投影作用的复合。对于第二类复合，请注意这涉及如下形式的复合

$$\varnothing \hookrightarrow G/K_j \to G/K_i,$$

因此，它们的作用是一个复合

$$\underline{A} \xrightarrow{\eta} N_H^G N_{K_j}^H i_{K_j}^H \underline{R} \xrightarrow{N_H^G(\xi)} N_H^G N_{K_i}^H N_{K_j}^{K_i} i_{K_j}^{K_i} i_{K_i}^H \underline{R} \xrightarrow{N_H^G N_{K_i}^H(\varepsilon^f)} N_H^G N_{K_i}^H i_{K_i}^H \underline{R}.$$

这里，$\underline{A}$ 表示群 $G$对应的 Burnside Tambara 函子。我们将其记为 $A_G$ ，并注意到 $N_H^G A_{H} \cong A_G$。那么，上述复合对应于交换图

$$\begin{array}{ccccc} N_H^G \underline{A}_H & \xrightarrow{N_H^G(\eta_{N_{K_j}^H i_{K_j}^H \underline{R}})} & N_H^G(N_{K_j}^H i_{K_j}^H \underline{R}) & \xrightarrow{N_H^G(\xi)} & N_H^G(N_{K_i}^H N_{K_j}^{K_i} i_{K_j}^{K_i} i_{K_i}^H \underline{R}) \\ & \searrow^{N_H^G(\eta_{N_{K_i}^H i_{K_i}^H \underline{R}})} & & & \downarrow{\scriptstyle N_H^G(N_{K_i}^H(\varepsilon^f))} \\ & & & & N_H^G(N_{K_i}^H i_{K_i}^H \underline{R}). \end{array}$$

自然性有限 $H$-集合与 $H$-Tambara 函子的张量积的自然性保证了 at

$$\eta_{N_{K_i}^H i_{K_i}^H \underline{R}} = N_{K_j}^H(\varepsilon^f) \circ \xi \circ \eta_{N_{K_j}^H i_{K_j}^H \underline{R}})$$

因此交换图

$$\begin{array}{ccc} \varnothing & \longrightarrow & G/K_j \\ & \searrow & \downarrow \\ & & G/K_i \end{array}$$

得出一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \underline{A}_G \cong N_H^G(\underline{A}_H) & \longrightarrow & G \otimes_H (H/K_j \otimes \underline{R}) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & G \otimes_H (H/K_i \otimes \underline{R}). \end{array}$$

□

**4.5. 两个非平凡各向同性群（及其共轭子群）**。在实 Hochschild 同调的情形下，我们需要以下设定：假设在 $X$ 的一个选定轨道分解中出现的各向同性子群为 $e$、 $H$ 和 $H'$。假设存在一个 $G$ 的自同构 $\varphi$ ，使得 $\varphi(H) = H'$。

那么，如果 $\varphi$ 只是由 $g$ 中的一个元素诱导的共轭，我们就可以根据定理 4.5，为每个 $H'$-Tambara 函子 $R$ 定义 $\mathcal{L}_X^{G;H'}(R)$。但是对于实 Hochschild 同调，我们希望统一处理这种情形和 $\varphi$ 是一般自同构的情形；在后一种情形中，我们希望将轨道识别为 $G/H$ 或 $G/H'$ ，并确保我们的 $G$-单纯复形中的单纯结构映射不会在这些轨道之间映射。如果 $H$ 和 $H'$ 不共轭，这一条件就会自动成立，因为此时不存在 $G$-等变映射 $G/H \to G/H'$！当子群共轭时，为了得到统一的构造，我们作出了一个非平凡的假设。不过，如果选取一个特定的共轭映射 $\varphi$ ，将 $H$ 映到 $H'$，我们就可以利用引理 3.7，将此处所作的构造与定理

4.5 中的构造对应起来。如果我们希望允许一般的 $G$-映射作为单纯结构映射，那么直接使用该定理即可。

我们将证明，如果所有轨道都以如下方式与 $G/e$、 $G/H$和 $G/H'$ 等同，使得 $X$ 中的结构映射都不把直和项 $G/H$ 映到 $G/H'$ ，反之亦然，那么对每个 $H'$-Tambara函子 $R$，我们都可以定义$\mathcal{L}_X^{G;H'}(R)$。

显然存在子群 $H$ 与 $H'$ 的例子，它们经由 $G$ 的一个外自同构 $\varphi$ 同构，并且此外还存在一个等变映射 $G/H \to G/H'$ （例如$H = H'$，因而 $G/H$ 确实等变地映到 $G/H'$）。于是，在单纯 $G$-集中不把 $G/H$映到 $G/H'$ 这一条件是必要的。下面的例子说明了这一现象。

**例 4.10.** 设 $G$ 为四个字母上的交错群 $A_4$。则其外自同构群同构于 $C_2$ ，并由任意奇置换 $\sigma \in \Sigma_4$的共轭生成。我们考虑 $\varphi\colon\ A_4 \to A_4$ ，它通过对换(12)作共轭。于是 $\varphi$ 在克莱因四元群上诱导一个非平凡自同构，

$$K_4 = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\},$$

它固定单位元和元素 (12)(34)，并交换另外两个元素。然而， $K_4$ 上的这个自同构并非由 $A_4$ 中的共轭诱导。在这种情况下，$K_4 = H = H'$，且 $K_4$ 是 $A_4$的正规子群。因此，当然存在非平凡的等变自映射 $A_4/K_4 \to A_4/K_4$，但它们并非由 $\varphi$诱导。

与第 4.2 节开头的讨论一样，我们将采用一个有限 $G$-单纯集合 $X$的选定轨道分解。下文中，我们将 $X_n$ 中的每个轨道视为 $G/e$、$G/H$或 $G/H'$。

**定理 4.11**。 设 $X$ 是一个有限单纯 $G$-集合，使得 $X$ 的一个选定轨道分解中的各向同性子群具有 $e$、 $H$ 和 $H'$ 的形式，其中 $H$ 和 $H'$ 是 $G$的真子群。假设存在 $G$ 的一个自同构 $\varphi$ ，使得 $\varphi(H) = H'$ ，并且 $X$ 中的结构映射都不会将轨道 $G/H$ 映射到轨道 $G/H'$ ，反之亦然。则对于任意 $H'$-*Tambara* 函子 $R$， $\mathcal{L}_X^{G;H'}(R)$ 均有定义

证明。 每个 $X_k$ 都具有如下形式

$$\Big(\bigsqcup_{J_H} G/H\Big) \sqcup \Big(\bigsqcup_{I_e} G/e\Big) \sqcup \Big(\bigsqcup_{J_{H'}} G/H'\Big)$$

对于有限指标集 $I_e$， $J_H$， $J_{H'}$。我们设

$$(\mathcal{L}_X^{G;H'}\underline{R})_k := \Big(\square_{J_H} N_H^G \varphi^*(\underline{R})\Big) \square \Big(\square_{I_e} N_e^G i_e^{H'}\underline{R}\Big) \square \Big(\square_{J_{H'}} N_{H'}^G \underline{R}\Big).$$

回想一下，如引理 2.1 中所述， $\varphi^* R$ 是一个 $H$-Tambara 函子。

在全文中，我们使用第 3 节讨论的范数上的翻转作用。我们需要定义单纯结构映射。有限 $G$-集之间的等变单射非同构映射是轨道包含，因此基本构件具有如下形式： $\varnothing \to G/K$ ，其中 $K = e$， $H'$ 或 $H$。这类映射诱导出 $G$-Tambara 函子 $N_e^G i_e^{H'} R$、 $N_{H'}^G(R)$ 和 $N_H^G \varphi^* R$ 的单位映射 $A \to N_e^G i_e^{H'} R$、 $A \to N_{H'}^G R$和 $A \to N_H^G \varphi^* R$。

同构由直和项的置换和等变自映射构成。置换会置换 $\square$-因子。 $G/e$、 $G/H$ 或 $G/H'$ 的等变自映射来自相应的 Weyl 群作用，其对我们的 Tambara 构造产生的影响已在引理 3.6 中说明。根据我们的假设， $G/H$ 与 $G/H'$ 之间的等变映射不会出现在单纯结构映射中。。

折叠映射会诱导乘法。轨道上的非同构满射必须涉及投影 $G/e \to G/H$ 或 $G/e \to G/H'$。

对于 $G/e \to G/H'$，我们使用映射

$$N_e^G i_e^{H'} \underline{R} \xrightarrow{\xi} N_{H'}^G N_e^{H'} i_e^{H'} \underline{R} \xrightarrow{N_{H'}^G(\varepsilon^f)} N_{H'}^G \underline{R}$$

由 (3.9) 可得；对于 $G/e \to G/H$，我们使用来自 (3.10) 的映射

$$N_e^G i_e^{H'} \underline{R} \xrightarrow{\xi} N_H^G N_e^H i_e^{H'} \underline{R} \xrightarrow{N_H^G(\varepsilon_\varphi^f)} N_H^G(\varphi^* \underline{R}).$$

单纯结构中的面映射会诱导折叠映射，并与轨道上的满射相结合。

退化映射会诱导单位映射的插入。随后，可以像定理 4.5 的证明中那样，通过直接论证验证单纯恒等式。

□

**例 4.12.** 对于 $m \geqslant 1$，令 $D_{2m}$ 为具有 $2m$ 个元素的二面体群。我们将使用以下表示

$$\begin{aligned} D_{2m} &= \langle r, s \mid s^2 = e = r^m, sr^{m-1} = rs \rangle \\ &= \langle r, s \mid s^2 = e = r^m, srs = r^{-1} \rangle. \end{aligned}$$

我们考虑二阶子群 $D_2 = \langle s \mid s^2 = e \rangle$ 和 $D_2' = \langle rs \mid (rs)^2 = e \rangle$。我们将考虑 $\varphi$：由 $\varphi(rs) = s$ 和 $\varphi(r) = r$ 定义的 $D_{2m} \to D_{2m}$。那么 $\varphi(D_2') = D_2$。如果 $m = 2n+1$，那么 $D_2$ 和 $D_2'$ 在 $D_{4n+2}$ 中实际上是共轭的，因为在这种情况下

$$r^{-n} s r^n = r^{-2n} s = rs.$$

因此，当 $m$ 为奇数时，$\varphi$ 是内自同构。若 $m$ 为偶数，则子群 $D_2$ 和 $D_2'$ 在 $D_{2m}$ 中不共轭，此时 $\varphi$ 表示一个外自同构。在 [AKGH25] 中，作者在所有情况下仍使用记号 $c_\zeta$ 表示 $D_2$ 与 $D_2'$ 之间的同构。

## 5. Real Hochschild homology

实 Hochschild 同调在 [AKGH25，定义 4.7] 中针对离散 $E_\sigma$-环 $R$ 定义。具体而言，这种离散 $E_\sigma$-环可描述如下 [AKGH25，引理 4.8]

(1) 它是一个 $D_2$-Mackey 函子 $\underline{R}$，并且在 $R(D_2/e)$ 上具有结合环结构，其中 $\underline{D_2}$-作用作为反 involution。(2) $R$ 上有一个 $\tilde{N}_e^{D_2} i_e^* R$-模结构，它与 $R(D_2/e)$ 上的标准 $R(D_2/e) \otimes R(D_2/e)^{op}$-模结构一致。(3) 存在一个元素 $1 \neq R(D_2/D_2)$，其限制 res(1) 是单位元 $1 \in R(D_2/e)$。

这里，$N$ 表示 Mackey 范数函子。

当然，$D_2$-Tambara 函子满足这些性质；例如，对于带有反 involution 的结合环 $R$，形如 $R^{\mathrm{fix}}$ 的 Mackey 函子也满足这些性质。

于是，$E_\sigma$-环 $R$ 的实 $D_{2m}$-Hochschild 同调定义为双边 bar 构造的同伦群：

$$\underline{HR}_*^{D_{2m}}(\underline{R}) := \pi_* B(N_{D_2}^{D_{2m}} \underline{R}, N_e^{D_{2m}} i_e^* \underline{R}, N_{D_2'}^{D_{2m}} c_\zeta^*(\underline{R})).$$

为了通过等变 Loday 构造来刻画实 Hochschild 同调，我们首先必须为所有 $m \geqslant 1$ 找到具有 $D_{2m}$-作用的合适单纯集合：

**命题 5.1**。对于所有 $m \geqslant 1$，具有 $2m$ 个元素的二面体群 $D_{2m}$ 都作用在正则 $2m$ 边形的1骨架上。

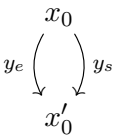
我们将这个 1-骨架记为 $P_{2m}$。

证明。 对于 $m \geqslant 1$ 和 $D_{2m}$， $P_{2m}$ 的非退化单形包括零次的两个轨道 $D_{2m}\cdot\{x_0\} = \{x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}\} \cong D_{2m}/\{e, s\}$ 和 $D_{2m}\cdot\{x'_0\} = \{x'_0, x'_1, \ldots, x'_{m-1}\} \cong D_{2m}/\{e, rs\}$, 以及一次的一个自由轨道 $D_{2m} \cdot \{y_e\} = \{y_g \mid g \in D_{2m}\}$。面映射由下式确定:

$$\begin{aligned} d_0 : D_{2m}/e\{y_e\} &\to D_{2m}/\{e, rs\}\{x'_0\}, \\ y_{r^k} &\mapsto x'_k, \\ y_{r^k s} &\mapsto x'_{k-1}; \\ d_1 : D_{2m}/e\{y_e\} &\to D_{2m}/\{e, s\}\{x_0\}, \\ y_{r^k} &\mapsto x_k, \\ y_{r^k s} &\mapsto x_k. \end{aligned}$$

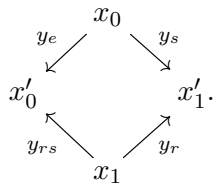
□

我们画出低维的几个基本情形：对于 $m = 1$ ，我们得到一个 2-边形的 1-骨架，它可以与 $S^\sigma$ 等同；后者是实符号表示的一点紧化的单纯模型:



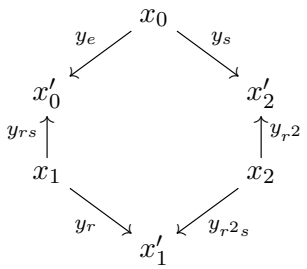

这里， $x_0$ 和 $x'_0$ 具有平凡作用，对应于 $D_2$-集 $D_2/D_2$ ； 而 1-单形构成一个自由的 $D_2$轨道 $D_2/e$。

对于 $m = 2$ ，群 $D_4$ 作用于



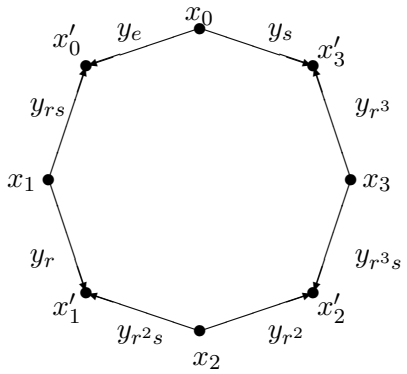

沿竖直轴的反射 $s$ 固定 $x_0$ 和 $x_1$ ，但交换 $x'_0$ 和 $x'_1$ ； 而旋转 180 度的轨道为 $\{x_0, x_1\} \cong D_4/\langle s\rangle$ 和 $\{x'_0, x'_1\} \cong D_4/\langle rs\rangle$。注意，在这种情况下$rs = sr$ 。1-单形构成一个自由的 $D_4$轨道。

对于 $m = 3$ ，由三个元素组成的对称群，也称为 $D_6$ ，作用于正六边形的 1-骨架



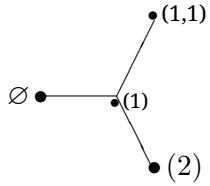

旋转 120 度 $r$ 在零胞腔上的轨道为 $\{x_0, x_1, x_2\}$ 和 $\{x'_0, x'_1, x'_2\}$，而关于竖直轴的反射固定了 $x_0$ 和 $x'_1$，但具有非平凡轨道$\{x'_0, x'_2\}$ 和 $\{x_1, x_2\}$。因此，零胞腔构成两个 $D_6$-轨道， $D_6x_0 = \{x_0, x_1, x_2\}$ 和 $D_6x'_0 =\{x'_0, x'_1, x'_2\}$。同样，1-单形构成一个自由的 $D_6$-轨道。

对于 $D_8$ ，情况变得更加有趣。我们考虑正八边形的 1-骨架:

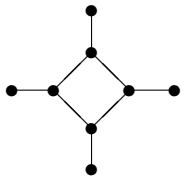



这里， $x_0$的轨道是 $\{x_0, x_1, x_2, x_3\} \cong D_8/\langle s\rangle$，而 $x_0'$的轨道是 $\{x_0', x_1', x_2', x_3'\} \cong D_8/\langle sr^3 = rs\rangle$。请注意，例如， $x_1$ 和 $x_3$ 的稳定子是 $\langle r^2 s = sr^2\rangle$，因此存在多种选择。对于另一个轨道，类似地，我们得到 $x_1'$ 和 $x_3'$的稳定子为 $\langle r^3 s = sr\rangle$。

注记 5.2。还有一类优美的图，群 $D_{2m}$ 在其上作用。感谢 Imma G´alvez 提醒我们注意到这些图。Ruedi Suter 描述了杨格格的哈斯图的一个子图，适用于所有 $n \geqslant 3$：该子图由凸包包含在大小为 $n$ 的阶梯图中的杨图构成。对于 $n = 3$，得到的图为




$D_6$ 中的旋转作用是顺时针旋转 120 度。反射作用是关于 $x$ 轴反射，将分拆 (1，1) 与 (2) 互换。对于 $n = 4$，得到的图为



内部顶点对应于分拆 (1)、(1，1)、(2，1) 和 (2)，外部顶点对应于∅、(1，1，1)、(2，2) 和 (3)。$D_8$ 中的旋转作用是顺时针旋转 90 度，而反射将分拆 $\lambda$ 映射为其转置 $\lambda^t$。与之相关的单纯 $D_8$-集是一个带有 4 个尖刺的八边形；由于外部边可以收缩，它等价于 $P_8$。

当 $n$ 为奇数时，中心总会有一个平凡轨道，对应于大小为一半的阶梯图。当 $n$ 为偶数时，各向同性子群会随着 $n$增大。对于 $n = 6$，我们已经有一个阶为 6 的稳定子，作用于 $D_{12}$。你可以在02]Sut02]中找到旋转作用的明确描述，以及 $n$ 不超过 8 时的图示。

由于 $P_{2m}$ 是一个渐进单纯 $D_{2m}$-集合，我们可以定义任意 $D_{2m}$-Tambara 函子 $T$ 关于 $P_{2m}$的普通 $D_{2m}$-等变Loday构造：

$$\mathcal{L}_{P_{2m}}^{D_{2m}}(\underline{T})$$

**引理 5.3.** 对于任意 $D_{2m}$-*Tambara* 函子 $T$，存在单纯 $D_{2m}$-*Tambara* 函子的同构

$$\mathcal{L}_{P_{2m}}^{D_{2m}}(\underline{T}) \cong B(N_{D_2}^{D_{2m}} i_{D_2}^{D_{2m}} \underline{T}, N_e^{D_{2m}} i_e^{D_{2m}} \underline{T}, N_{D_2'}^{D_{2m}} i_{D_2'}^{D_{2m}} \underline{T}).$$

证明. $P_{2m}$ 的轨道结构确保我们对每个固定的单纯次数 $n$都得到一个同构:

$$\mathcal{L}^{D_{2m}}_{P_{2m}}(\underline{T})_n \cong B_n(N^{D_{2m}}_{D_2} i^{D_{2m}}_{D_2}\underline{T}, N^{D_{2m}}_{e} i^{D_{2m}}_{e}\underline{T}, N^{D_{2m}}_{D'_2} i^{D_{2m}}_{D'_2}\underline{T}).$$

$\mathcal{L}^{D_{2m}}_{P_{2m}}(T)$ 中以及双边 bar 构造中的面映射由乘法余单位映射 $N^{D_2}_e i^{D_2}_e i^{D_{2m}}_{D_2} T \to i^{D_{2m}}_{D_2} T$与 $N^{D'_2}_e i^{D'_2}_e i^{D_{2m}}_{D'_2} T \to i^{D_{2m}}_{D'_2} T$的范数以及折叠映射诱导。退化映射由两个单纯 Tambara 函子中相同位置的单位插入给出。□

作为定理 4.11 的推论，我们得到如下结果:

**定理 5.4.** 假设 $R$ 是一个 $D_2$-*Tambara* 函子，并令 $\varphi\colon D_{2m} \cong D_{2m}$ 为由 $\varphi(rs) = s$ 与 $\varphi(r) = r$ 定义的自同构。则

$$\mathcal{L}^{D_{2m};D_2}_{P_{2m}}(\underline{R}) \cong B(N^{D_{2m}}_{D_2}\underline{R}, N^{D_{2m}}_{e} i_e\underline{R}, N^{D_{2m}}_{D'_2}\varphi^*(\underline{R}))$$

并且这同构于 $R$ 的实 $D_{2m}$-*Hochschild* 同调 $HR^{D_{2m}}_*(R)$ ，其中 $\underline{R}$ 被视为取值于分次 $D_{2m}$-*Mackey* 函子的离散 $E_\sigma$-环。

通常需要交换性，也就是 Tambara 函子，才能定义等变 Loday 构造。在带有 $D_{2m}$-作用的正则 $2m$边形的 1-骨架这一情形中，我们只需要一个离散的 $E_\sigma$-环 $R$。

**命题 5.5**。 设 $R$ 是一个离散的 $E_\sigma$-环。那么 $\mathcal{L}^{D_{2m};\ D_2}_{P_{2m}}(R)$ 对所有 $m \geqslant 1$ 都有定义，并且与 $R$的 ***Real*** $D_{2m}$-霍赫希尔德同调重合。

证明。 对于 $m = 1$，我们已经在 [LR, §9] 中证明，$\mathcal{L}^{D_2}_{P_2}(\underline{R}) = \mathcal{L}^{D_2}_{S^\sigma}(\underline{R})$ 可以为与结合环相关联的不动点函子定义，其中 $D_2$ 通过反 involution 作用。离散 $E_\sigma$-环的一般情形类似：我们将 $D_2 \otimes_e R$ 定义为 $\tilde{N}^{D_2}_e i^{D_2}_e R$，并令 $D_2 \otimes_{D_2} R := R$。由于 $S^\sigma$ 由 $\Delta(=,\ [1])$ 的两个副本组成，并在端点处粘合在一起， $\Delta(-,\ [1])$ 中单形的线性序确保 $\tilde{N}^{D_2}_e i^{D_2}_e R$ 的结合律和 $R$ 上的 $\tilde{N}^{D_2}_e i^{D_2}_e R$-双模结构足以定义 $\mathcal{L}^{D_2}_{S^\sigma}(\underline{R})$: 在单纯层 $n$ 中，我们得到

$$(S^\sigma)_n \otimes \underline{R} = (D_2/D_2 \sqcup D_2/e^{\sqcup n} \sqcup D_2/D_2) \otimes \underline{R} = \underline{R} \square \Big(\square_{i=1}^n \tilde{N}^{D_2}_e i^{D_2}_e \underline{R}\Big) \square \underline{R}.$$

退化映射仅插入单位，而面映射则在 $\tilde{N}^{D_2}_e i^{D_2}_e R$ 中诱导乘法，或在 $R$ 上诱导 $\tilde{N}^{D_2}_e i^{D_2}_e R$-双模作用。

对于 $m > 1$ ，我们注意到， $P_{2m}$ 的单纯结构由 $P_{2m}$ 的 0-单形和 1-单形决定。在零次时，我们有两个轨道

$D_{2m}\cdot\{x_0\} = \{x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}\} \cong D_{2m}/\{e, s\}$ 和 $D_{2m}\cdot\{x'_0\} = \{x'_0, x'_1, \ldots, x'_{m-1}\} \cong D_{2m}/\{e, rs\}$, 而非退化1-单形构成一个自由轨道 $D_{2m} \cdot \{y_e\} = \{y_g \mid g \in D_{2m}\}$。由于面映射由

$$\begin{aligned} d_0 : D_{2m}/e\{y_e\} &\to D_{2m}/\{e, rs\}\{x'_0\}, \\ y_{r^k} &\mapsto x'_k, \\ y_{r^k s} &\mapsto x'_{k-1}; \\ d_1 : D_{2m}/e\{y_e\} &\to D_{2m}/\{e, s\}\{x_0\}, \\ y_{r^k} &\mapsto x_k, \\ y_{r^k s} &\mapsto x_k, \end{aligned}$$

我们只需要 $R$ 上的 $\tilde{N}^{D_2}_e i^{D_2}_e R$-双模结构来定义这些。同样，在高次中，构成自由轨道的边带有线性序，因为每条边都对应于 $\Delta(-,\ [1])$ 的一个副本。高次中的面映射会在 $\tilde{N}^{D_2}_e i^{D_2}_e R$ 上诱导乘法，并在 $R$ 上诱导 $\tilde{N}^{D_2}_e i^{D_2}_e R$-双模结构。□

在等变稳定同伦论的框架下，我们可以像处理 Tambara 函子那样，定义相对于各向同性子群的等变 Loday 构造：使用谱的楔积而非盒积，使用来自 [HHR16] 的 Hill-Hopkins-Ravenel 范数，而非 Tambara 函子或 Mackey 函子的范数，并像引理 2.3 中那样使用群变换拉回。因此，若 $B$ 是一个真正的交换 $H'$ 环谱，而 $X$ 是有限单纯 $G$-集，使得在选定的轨道分解中只出现轨道类型 $G/e$、$G/H$ 和 $G/H'$，且满足上述的 $H$，$H'$，那么我们可以令 $G\otimes_e B := N_e^G i_e^H B$、$G\otimes_{H'} B := N_{H'}^G B$，以及 $G\otimes_H B := N_H^G \varphi^* B$，其中 $\varphi$ 是 $G$ 的一个自同构，满足 $\varphi(H) = H'$。于是，定理 4.11 有一个谱的类比；作为推论，我们得到实拓扑 Hochschild 同调的 $O(2)$-谱的所有 $D_{2m}$-限制的一个辨认。还有一种 $E_\sigma$-环谱的概念（参见 [AKGH25，推论 2.2]）。任何由 $D_2$ 以反 involution 方式作用的真正环谱，都是一个例子 [AKGH25，例 2.3]。

**命题 5.6。** 若 $A$ 是一个 $E_\sigma$-环谱，则

$$i_{D_{2m}}^{O(2)}\mathsf{THR}(A) \simeq \mathcal{L}_{P_{2m}}^{D_{2m};D_2}(A).$$

此外，若 $A$ 是连通的，则这给出了 $\pi_0$ 上单纯 $D_{2m}$-*Mackey* 函子的一个同构

$$\underline{\pi}_0^{D_{2m}}(i_{D_{2m}}^{O(2)}\mathsf{THR}(A)) \cong \underline{\pi}_0^{D_{2m}}\mathcal{L}_{P_{2m}}^{D_{2m};D_2}(A) \cong \mathcal{L}_{P_{2m}}^{D_{2m};D_2}(\underline{\pi}_0^{D_2}A).$$

*证明。* 我们证明关于零阶同伦群的断言。在 [LRZ25 的命题 6.2] 中，我们证明了存在一个单纯 $G$-Tambara 函子的同构

$$\underline{\pi}_0^G(\mathcal{L}_X^G(R)) \cong \mathcal{L}_X^G(\underline{\pi}_0^G(R))$$

若 $X$ 是有限的 $G$-单纯集合，且 $R$ 是连通的真交换 $G$ 环谱，而 $\pi_0^G(R)$ 是相应的 $G$-Tambara 函子。证明基于以下事实：对于连通的 $R$，$R$ 的 Hill-Hopkins-Ravenel 范数也连通，并且 $\pi_0^G(N_H^G i_H^G R) \cong N_H^G i_H^G(\pi_0^G(R))$，以及 $\pi_0^G$ 将谱的楔积转化为盒积。

在我们的情形中，我们有 $(P_{2m})_n = D_{2m}/D_2 \sqcup \left(\bigsqcup_{i=1}^n D_{2m}/e\right) \sqcup D_{2m}/D_2'$，因此

$$\mathcal{L}_{P_{2m}}^{D_{2m};D_2}(A)_n = N_{D_2}^{D_{2m}}(A) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^n N_e^{D_{2m}} i_e^{D_2} A\right) \wedge N_{D_2'}^{D_{2m}} \varphi^* A.$$

应用 $\pi_0$，结合引理 2.3，得到

$$\begin{aligned}\underline{\pi}_0^{D_{2m}}\left(\mathcal{L}_{P_{2m}}^{D_{2m};D_2}(A)_n\right) &= \underline{\pi}_0^{D_{2m}}\left(N_{D_2}^{D_{2m}}(A) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^n N_e^{D_{2m}} i_e^{D_2} A\right) \wedge N_{D_2'}^{D_{2m}} \varphi^* A\right) \\ &\cong N_{D_2}^{D_{2m}}(\underline{\pi}_0^{D_2}(A)) \square \left(\square_{i=1}^n N_e^{D_{2m}} i_e^{D_2} \underline{\pi}_0^{D_2}(A)\right) \square N_{D_2'}^{D_{2m}} \varphi^* \underline{\pi}_0^{D_2}(A).\end{aligned}$$

因此，我们在每个单纯层都得到一个同构。由于 $\pi_0$ 是强对称幺半函子，这些逐层同构合起来给出一个单纯 Mackey 函子之间的同构。□

注记 5.7。 我们希望上述结果有助于在 Chloe Lewis 的 B¨okstedt 型谱序列上建立额外结构，类似于 Angeltveit 和 Rognes [AR05] 为普通 B¨okstedt 谱序列建立的 Hopf 代数结构。例如，Lewis 证明了，如果 $A$ 是交换的，那么 THR($A$) 的 $D_2$-限制在 $D_2$-等变稳定同伦范畴中具有 Hopf 代数胚结构 [Lew, 定理 5.11]。利用模型 $i_{D_2}^{O(2)}$ THR($A$) $\simeq \mathcal{L}_{S^\sigma}^{D_2}(A)$，借助在 $S^\sigma$（的细分）上几何定义的映射（如捏映射和折叠映射），这一点相对容易看出。当然，对于 $m > 1$ 的 $D_{2m}$-限制，情况更加复杂，但我们计划在未来的工作中研究其上的额外结构。

注记 5.8。由于 $O(2) \cong S^1 \cup S^1\rho$，其中 $\rho$ 是关于 $x$-轴的反射（例如参见 [AKMP, §5]），因此还有另一个与 $O(2)$ 相关的自然出现的 Loday构造： $O(2)$ 的标准单纯模型以 $D_{2n+2}$ 作为 $n$-单形，并且由于 $D_{2n+2}$ 是$C_{n+1}$ 与 $D_2$ 的半直积，我们可以在次数 $n$ 中将 $S^1 \cup S^1\rho$ 建模为一个正则$n+1$边形的 1-骨架的两个副本， $P'_{n+1}$ 其中 $D_2$ 交换这两个副本。注意，$P'_{n+1}$ 中边的方向由 $C_{n+1}$ 在 $P'_{n+1}$上的旋转作用决定。我们也将相应的单纯$D_{2m+2}$集合记作 $P'_{n+1} \sqcup P'_{n+1}$。注意，这个单纯集合的不交并在等变意义下并非不交。

然而，相应的 Loday 构造 $\mathcal{L}^{D_{2n+2}}_{P'_{n+1}\sqcup P'_{n+1}}(R)$ 与定理 5.4 中的构造截然不同：在每个单纯形次数 $k$，我们都有 $(P'_{n+1} \sqcup P'_{n+1})_k$ 是自由轨道的不交并。特别是，这个 Loday 构造与实 *Hochschild* 同调无关。

## References


[AKGH25] Gabriel Angelini-Knoll、Teena Gerhardt 和 Michael Hill, *Real topological Hochschild homology via the norm and Real Witt vectors* **482** 2025 110568 , 《Adv. Math.》 (), A 部分，论文编号 .[AKMP] Gabriel Angelini-Knoll、Mona Merling 和 Maximilien P´eroux, *Topological $\Delta G$ homology of rings with twisted $G$-action* 2409 18187 . 预印本: arXiv: . .[AR05] Vigleik Angeltveit 和 John Rognes, *Hopf algebra structure on topological Hochschild homology*, 《Algebr. Geom. Topol.》5（2005），1223–1290。[BGHL19] Andrew J. Blumberg、Teena Gerhardt、Michael A. Hill 和 Tyler Lawson, *The Witt vectors for Green functors* **537** 2019 197 244 , 《J. Algebra》 (), – .[HHR16] M. A. Hill、M. J. Hopkins 和 D. C. Ravenel, *On the nonexistence of elements of Kervaire invariant one* 2 **184** 2016 1, 1 262 , 《Ann. of Math.》 () (), 第 – 期。[HM19] Michael A. Hill 和 Kristen Mazur, *An equivariant tensor product on Mackey functors*, 《J. Pure Appl. Algebra》223（2019），第 12 期，5310–5345。[Hoy14] Rolf Hoyer, *Two topics in stable homotopy theory*, 2014 年。芝加哥大学博士论文。[Lew] Chloe Lewis, *Computational tools for Real topological Hochschild homology*。预印本：arXiv:2408.07188。[LR] Ayelet Lindenstrauss 和 Birgit Richter, *Reflexive homology and involutive Hochschild homology asequivariant Loday constructions*, 《爱丁堡皇家学会学报 A 辑：数学》, DOI https://doi.org/10.1017/prm.2025.10093。已在线发表。[LRZ25] Ayelet Lindenstrauss、Birgit Richter 和 FOLING ZOU, *Loday Constructions of Tambara functors*, 《J. Algebra》683（2025），278–306。[Mal] Cary Malkiewich, *A user's guide to $G$-spectra*。笔记见 https://people.math.binghamton.edu/malkiewich/G_spectra.pdf。[Maz13] Kristen Mazur, *On the structure of Mackey functors and Tambara functors*, 2013 年。弗吉尼亚大学博士论文。[MQS] David Mehrle、J.D. Quigley 和 Michael Stahlhauer, *Koszul Resolutions over Free Incomplete Tambara Functors for Cyclic p-Groups* 2407 18382 。预印本 arXiv: . .[Sut02] Ruedi Suter, *Young's lattice and dihedral symmetries*, 《European J. Combin.》23（2002），第 2 期，233–238。[Ull] John Ullman, *Tambara Functors and Commutative Ring Spectra*。预印本 arXiv:1304.4912v2。



Mathematics Department, Indiana University, 831 East Third Street, Bloomington, IN 47405, USA*Email address*: alindens@iu.edu

Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg, Bundesstrasse 55, 20146 Hamburg, Germany *Email address*: birgit.richter@uni-汉堡.de

Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, 55 East Zhong-guancun Road, Beijing, 100190, China*Email address*: zoufoling@amss.ac.cn