arXiv:2603.12818v1 [math.SG] 13 Mar 2026

再论 $\mathbb{R}$ 中梯度树与$T^*\mathbb{R}$中全纯凸四边形之间的显式对应

Hidemasa Suzuki

Abstract. 对于 M上给定的光滑函数（$f_1, \ldots, f_n$），Fukaya 与 Oh 证明了 T^*M 中由拉格朗日截面 $\{L_i^\epsilon = 图(\epsilon df_i)\}$ 所界定的伪全纯圆盘模空间微分同胚于 M中由 $\{f_i - f_j\}$ 的梯度曲线构成的梯度树模空间。当伪全纯圆盘 w_ϵ 的像是 $\mathbb{C} \simeq T^*\mathbb{R}$中的一个多边形时，我们可以用施瓦茨-克里斯托费尔映射来描述 w_ϵ 。在[16], 中，我们证明了当 w_ϵ 的像是一般凸四边形时，伪全纯圆盘 w_ϵ 在极限 $\epsilon \to +0$ 下收敛到该梯度树。在本文中，我们通过研究非一般情形，证明了对任意凸四边形都存在这样的收敛。

Contents

1. 引言. 1 2. 预备知识. 4 2.1. 梯度树与伪全纯圆盘. 4 2.2. 施瓦茨-克里斯托费尔映射、超几何函数及其性质. 7 2.3. 凸多边形的内角. 9 2.4. 四边形的共形模. 10 2.5. 在 $M = \mathbb{R}, k = 4$ 12 情形下的梯度树与全纯圆盘 3. 主要结果及其证明. 12 3.1. 主要结果. 12 3.2. 全纯圆盘的幂级数表示. 17 3.3. $z_{4,\epsilon}$ 与树的行为. 22 3.4. 定理 3.1 的证明. 31 3.5. 定理 3.2 的证明. 36 参考文献 38

1. Introduction.

本文是对 [16], 的延续。在该文中，我们研究了 $T^*\mathbb{R}$ 中的伪全纯圆盘与 $\mathbb{R}$ 中的梯度树之间的对应关系，其中伪全纯圆盘的像是由 $T^*\mathbb{R}$的仿射拉格朗日截面围成的一般凸四边形。我们的目标是将这项研究推广到任意凸四边形。

Fukaya 和 Oh 证明，对于充分小的 $\epsilon > 0$（[9]），由黎曼流形 M 上的函数$\vec{f} =$（f_1，f_2，.....，f_k）构造的梯度树模空间 $\mathcal{M}_g$（M；$\vec{f}$，$\vec{p}$），与余切丛 T^*M 中由拉格朗日截面 $\vec{L^\epsilon} =$（L_1^ϵ，L_2^ϵ，.....，L_k^ϵ）围成的伪全纯圆盘模空间 $\mathcal{M}_J$（T^*M；$\vec{L^\epsilon}$，$\vec{x^\epsilon}$）微分同胚。这里，L_i^ϵ定义为：对 $i = 1$，2，.....，k，$L_i^\epsilon :=$ graph（ϵdf_i）。伪全纯圆盘是从单位圆盘 D^2到 T^*M的伪全纯映射。Fukaya 和 Oh 首先在 T^*M 中近似构造了这些圆盘，并证明在近似解的邻域内存在精确解。由于本文假设 $M = \mathbb{R}$，伪全纯圆盘是从 D^2出发的全纯映射。下文将 $\mathcal{M}_J$（$T^*\mathbb{R}$；$\vec{L^\epsilon}$，$\vec{x^\epsilon}$）的元素称为全纯圆盘。为便于后续分析，本文将全纯圆盘视为从上半平面闭包 $\mathbb{H}$ 而非 D^2 出发的映射。当 $T^*\mathbb{R} \simeq \mathbb{C}$ 的拉格朗日截面为仿射时，全纯圆盘可以用施瓦茨-克里斯托费尔映射描述。这里，施瓦茨-克里斯托费尔映射是从 $\mathbb{H}$ 到 $\mathbb{C}$中某个多边形域的共形映射。另一方面，梯度树是从树到 M的连续映射，并将每条边映到 $f_i - f_j$（$i \neq j$）的梯度曲线上。由于$T^*\mathbb{R}$ 的每个拉格朗日截面 L_i^ϵ 都是仿射的，每个函数 f_i 都可表示为$i = 1$时，f_i（x）$= a_i x^2 + b_i x + c_i$（a_i，b_i，$c_i \in \mathbb{R}$），其中$i = 1$，2，.....，k。本文将全纯圆盘和梯度树明确地描述出来，并在 $M = \mathbb{R}$ 和 $k = 4$的情形下证明梯度树与伪全纯圆盘之间的对应关系。特别地，我们证明下文所考虑的全纯圆盘 w_ϵ 收敛到该梯度树。

在 $M = \mathbb{R}$、$k = 4$ 的情形下，我们首先设定 f_1、f_2、f_3、f_4，使得存在一个凸四边形 $x_1^\epsilon x_2^\epsilon x_3^\epsilon x_4^\epsilon$，其顶点 x_1^ϵ、x_2^ϵ、x_3^ϵ、x_4^ϵ 按逆时针顺序排列。在这种情况下，我们验证了在 [16] 中存在唯一的梯度树。设 w_ϵ 为从带有四个标记点 z_1、z_2、z_3、z_4 的上半平面映射到凸四边形 $x_1^\epsilon x_2^\epsilon x_3^\epsilon x_4^\epsilon$ 的施瓦茨-克里斯托费尔映射，使得对于 $i = 1$、2、3，有 $w_\epsilon(z_i) = x_i^\epsilon$。这里，我们固定 $z_1 = 1$、$z_2 = \infty$、$z_3 = 0 \in \mathbb{R}$，并且随着 ϵ 的变化，z_4、$_\epsilon \in$ 在 (0, 1) 中移动。

在 [16], 中，我们研究了凸四边形 $x_1^\epsilon x_2^\epsilon x_3^\epsilon x_4^\epsilon$ 处于一般位置的情形，即 $L_i \cap L_j \neq \emptyset$, $L_i \neq L_j (i \neq j)$且 $p_1 \neq p_3$，$p_2 \neq p_4$。在这种情况下，全纯圆盘在0，$z_{4,\ \epsilon}$，1，∞的邻域内由阿佩尔超几何级数 F_1 描述。我们还发现，全纯圆盘 w_ϵ 在区域 $\{z \in \mathbb{H} \mid z_{4,\epsilon} < |z| < 1\}$内由霍恩超几何级数 G_2 描述。为证明这一点，我们使用了 F_1的解析延拓公式。随后，我们通过研究$z_{4,\ \epsilon}$的行为，适当地划分了上半平面。我们使用了四边形的共形不变量——共形模，以及凸四边形$x_1^\epsilon x_2^\epsilon x_3^\epsilon x_4^\epsilon$中的比值$|x_1^\epsilon - x_2^\epsilon| \,/\, |x_3^\epsilon - x_4^\epsilon|$ 或$|x_2^\epsilon - x_3^\epsilon| \,/\, |x_4^\epsilon - x_1^\epsilon|$。我们利用称为 Rengel 不等式的不等式来估计共形模。该不等式通过四边形的面积以及连接四边形相对两边的 Jordan 弧的下确界长度来表示共形模。另一方面，我们用两种方法计算了对边长度之比。首先，我们使用 $\mathbb{R}^2$的欧几里得度量；其次，我们使用施瓦茨-克里斯托费尔映射的积分表示。采用后一种方法时，该比值可用伽马函数和超几何函数表示。

本文研究其余的非一般情形。首先，在 $p_1 = p_3$ 或$p_2 = p_4$的情况下，我们无法用与 [16]中相同的方法充分计算共形模的极限值。例如，当伪全纯圆盘的像是平行四边形时，由 Rengel 不等式得到的共形模上界趋于正无穷，而下界在 $\epsilon \to +0$时趋于零。本文通过应用一些说明共形模单调性的引理，证明极限值存在。随后，利用由两种不同方法计算平行四边形邻边之比所导出的方程，确定该极限值。由此可得，共形模的极限为1，这意味着$z_{4,\ \epsilon}$ 收敛到 $1/2$。当伪全纯圆盘的像不是平行四边形时，我们使用单调性引理，将其共形模上下界分别夹在某些平行四边形的共形模之间。根据夹逼定理，我们再次得到共形模的极限为1，从而$z_{4,\ \epsilon}$ 收敛到 $1/2$。根据上述讨论，我们需要修改 [16]中上半平面的划分方法。我们将在第3.1小节详细介绍该方法。

其次，当凸四边形有一对平行的对边时，存在两个主要问题。第一个问题是， [16] 中所用的 F_1 的连接公式在某些情形下不能直接应用。这是因为连接公式中伽马函数之商的分子，其辐角可能与 $\epsilon > 0$无关地为零。在本文中，我们利用高斯超几何函数 ${}_2F_1$ 的著名连接公式，推导出 F_1 的连接公式。由此得到的公式包含含有对数和双伽马函数的项。我们将在第 3.2 小节给出该公式的细节。第二个问题是，$z_{4,\epsilon}$ 的极限无法用 [16] 中的方法确定。在 [16], 中，我们用两种方法计算了对边长度之比，并推导出一个方程。当我们使用施瓦茨–克里斯托费尔映射的积分表示时，会出现$z_{4,\epsilon}$ 的一个实数幂。通过对该幂求解方程并取极限，我们得到了$\log z_{4,\epsilon}$ 或$\log(1 - z_{4,\epsilon})$的性态。然而，在非一般情形中，指数可能与 ϵ无关地变为零。在本文中，我们通过以两种不同方式推导 F_1 的连接公式并比较系数，从而修正 [16]中的方程，据此计算$\log z_{4,\epsilon}$ 或$\log(1 - z_{4,\epsilon})$的性态。我们将在第3.3小节给出细节。由此，我们完成了所有非一般情形。

本文的结构如下。在第2节中，我们首先回顾梯度树和伪全纯圆盘的定义；这些定义也曾在我们之前的论文 [16]中给出。这是因为本文不展示梯度树的显式形式。为了明确描述伪全纯圆盘，接下来我们解释施瓦茨-克里斯托费尔映射的概念。随后，我们准备超几何函数，以便将施瓦茨-克里斯托费尔映射展开为幂级数，并描述四边形的边长之比。施瓦茨-克里斯托费尔映射通过对幂函数进行积分来表示。我们还准备了超几何函数的一个连接公式，以描述在远离多边形顶点原像的区域中的伪全纯圆盘

。接下来，我们回顾四边形的共形模概念；对于带有标记点的单位圆盘（或上半平面）而言，共形模是共形量。我们还讨论一个关于共形模的不等式，并利用它计算$z_{4,\epsilon}$的极限值。在本节末尾，我们回顾 [16]中证明的关于梯度树和伪全纯圆盘的一些结果。在第3节中，我们首先解释如何将上半平面划分为若干区域，并给出条带与这些区域之间的共形变换。此后，在$M = \mathbb{R}, k = 4$ 的情形下，且四边形处于一般位置之外时，我们给出主要定理。为了证明这些主要定理，我们首先利用超几何函数的积分表示和连接公式，研究伪全纯圆盘的幂级数表示。然后，在凸四边形处于一般位置之外的情形下，我们研究$z_{4,\epsilon}$ 的极限值以及$z_{4,\epsilon}$ 在 $\epsilon \to +0$ 处的主部，以了解如何将上半平面划分为若干区域。**致谢**。 作者感谢导师Hiroshige Kajiura分享他的见解并给予宝贵建议。本研究得到JST SPRING（项目编号：JPMJSP2109）的支持。

2. Preliminaries.

2.1. 梯度树与伪全纯圆盘。 在本小节中，我们回顾两个与我们相关的模空间；一个是梯度树的模空间，另一个是伪全纯圆盘的模空间（见 [9]）。梯度树模空间由度量带状树的模空间Gr_k 定义。

定义 2.1 ([9])。 一个带状树 是由一棵树 T和一个嵌入 i 组成的二元组（T， i）： $T \to D^2 \subset \mathbb{C}$ ，并满足以下条件：(1) T 的任何顶点都没有 2 条边。(2) 如果 $v \in T$ 是一个只有一条边的顶点，则 $i(v) \in \partial D^2$。(3) $i(T) \cap \partial D^2$ 由只有一条边的顶点组成。

如果 T和 T'是等距的，且 i和 i'是同伦的，我们就将二元组（T， i）和（T'， i'）视为相同。令 G_k为所有三元组（T， i， v_1）的集合，其中（T， i）如上所述， $v_1 \in T \cap \partial D^2$和 $T \cap \partial D^2$由 k 个点组成。我们指出，选择 $v_1 \in T \cap \partial D^2$ 等价于选择 $T \cap \partial D^2$ 的一个次序，该次序与 ∂D^2的循环次序相容。

定义 2.2 ([9])。 如果一个顶点连接的边多于两条，我们称其为内部顶点 ；否则称其为外部顶点 。如果一条边的两个顶点都位于内部，我们称其为内部边；否则称其为外边 。

对于每个 $\mathfrak{t} = (T, i, v_1) \in G_k$，令 $C^1_{int}(T)$ 表示 T 的所有内部边的集合，并令 $Gr(\mathfrak{t})$ 表示所有映射 $l : C^1_{int}(T) \to \mathbb{R}^+$ 的集合。记 $Gr_k = \bigcup_{\mathfrak{t} \in G_k} Gr(\mathfrak{t})$。设 $(T, i, v_1, l) \in Gr_k$ 为一棵带状树。我们通过嵌入 i 将 T 与 $i(T)$ 等同。在本文中，如果外边 e_i 的一个顶点是 v_i，我们就称其为.....。我们在 T 上定义一个度量，使得外边 $e_i\,(i = 1, \ldots, k-1)$ 与 $(-\infty, 0]$等距，外边 e_k 与 $[0, \infty$等距，而内边 e 与 $[0, l(e)]$等距。我们称 $l(e)$ 为内边 e 的长度。单位圆盘 D^2 被分成 k 个连通分支，

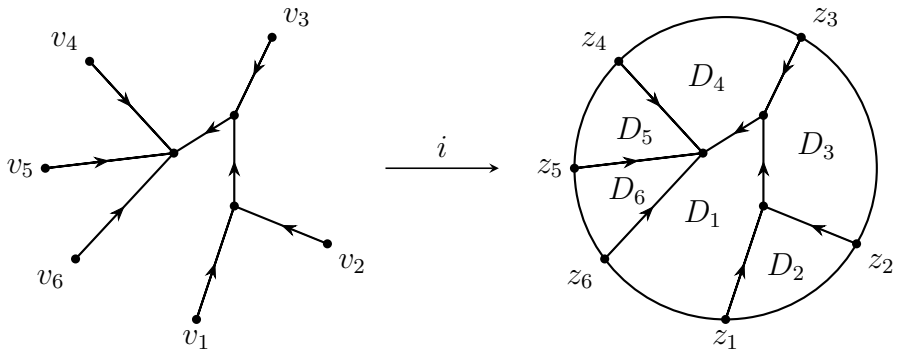

FIGURE 1. 带状树（$k = 6$）（转载自 [16]）。

$i(T)$。我们将 $D^2 \setminus i(T)$ 的一个连通分支记作 D_i，若其闭包 $\bar{D}_i$ 包含 v_i 和 v_{i+1}。注意，对于每条边 e，存在两个子集 D_i, D_j，使得其闭包包含 e。我们定义整数 $lef(e)$ 和 $rig(e)$，使得 $D_{lef(e)}$ 的闭包包含 e，且相对于 e 和 $\mathbb{R}^2$ 的定向，$D_{lef(e)}$ 位于 e 的左侧。我们以与定义 $lef(e)$ 相同的方式定义 $rig(e)$。在本文中，我们将边 e 的定向定义为使得 $lef(e) = \min\{i, j\}, rig(e) = \max\{i, j\}$。为了以与其他外边类似的方式定义外边 e_k 上的梯度曲线，我们考虑 e_k 的定向，使得 $lef(e_k) = k, rig(e_k) = 1$，并定义其度量，使得 e_k 与 $(-\infty, 0]$ 等距。现在我们回顾梯度树模空间。

定义 2.3（[9]）。设 M 为黎曼流形，并在 M上固定一个黎曼度量 g。设 f_1、$\cdots$、f_k为 M上的 C^∞函数，使得对于每个 $i = 1$、$\cdots$、k，$f_{i+1} - f_i$都是 Morse函数。这里令 $f_{k+1} = f_1$。设 p_i为 $f_{i+1} - f_i$ 的一个临界点。梯度树模空间 $\mathcal{M}_g$（M、$\vec{f}$、$\vec{p}$）中的一个元素，是一对（（T、i、v_1、l） I），其中包含一个（T、i、v_1、l） $\in Gr_k$ 以及一个映射 I： $T \to M$，并满足以下条件：（）

1 I 是连续的，$I_{(v_i)} = p_i$。

（2）对于每条外部边 e_i，令 $e_i \simeq$ （$-\infty$， 0]，我们有

$$\frac{dI|_{e_i}}{dt} = -\operatorname{grad}_g(f_{i+1} - f_i).$$

（3）对于每条内边 e，识别 $e \simeq [0, l(e)]$，，然后

$$\frac{dI|_e}{dt} = -\operatorname{grad}_g(f_{rig(e)} - f_{lef(e)}).$$

我们称模空间 $\mathcal{M}_g(M; \vec{f}, \vec{p})$ 的一个元素 $((T, i, v_1, l)\ I)$ 或映射 I 为梯度树。*Morse*函数 是指其临界点均为非退化的函数（见 [3]）。接下来，我们回顾伪全纯圆盘的模空间。该模空间由具有 k 个标记点的圆盘的模空间 $\mathfrak{T}_{0,k}$ 定义，具体如下：

$$\mathfrak{T}_{0,k} \coloneqq \left\{ (z_1, \cdots, z_k) \in (\partial D^2)^k \;\middle|\; \begin{array}{l} z_i \neq z_j (i \neq j), \\ z_1, \cdots, z_k \text{ respects the cyclic order of } \partial D^2 \end{array} \right\} \Big/ \sim .$$

这里，我们对 ∂D^2 使用逆时针循环次序。此外，当且仅当存在双全纯映射 $\varphi\colon D^2 \to D^2$ 使得$\varphi(z_i) = z_i'$ 时，我们记 $(z_1, \cdots, z_n) \sim (z_1', \cdots, z_n')$。接下来，我们给出伪全纯圆盘的定义。

定义 2.4 ([9])。设 (M, g) 是一个黎曼流形。设 ω 为余切流形 T^*M 上的标准辛形式，J 为与 ω 相容的 T^*M 上的近复结构。设 $L_1, \cdots, L_k$ 是 T^*M 的拉格朗日子流形，且 x_i 是 L_i 与 L_{i+1} 的一个交点。这里，我们令 $L_{k+1} = L_1$。伪全纯圆盘的模空间 $\mathcal{M}_J(T^*M, \vec{L}, \vec{x})$ 中的一个元素，是由元素 $[z_1, \cdots, z_k] \in \mathfrak{T}_{0,k}$ 和光滑映射 $w\colon D^2 \to T^*M$ 构成的一对 $([z_1, \cdots, z_k], w)$，并满足以下条件：

(1) $w(z_i) = x_i$ (2) 记 ∂_i 为 $\partial D^2 \setminus \{z_1, \cdots, z_k\}$ 中顶点为 z_{i-1} 和 z_i 的连通分支。那么，$w(\partial_i) \subset L_i$。(3) 记 j 为 D^2 的典范复结构。那么，w 的微分映射与 J 和 j 相容，也就是说 $J \circ dw = dw \circ j$。

我们将模空间 $\mathcal{M}_J(T^*M; \vec{L}, \vec{x})$ 的元素 $([z_1, \cdots, z_k], w)$ 本身称为伪全纯圆盘。我们将恰当拉格朗日子流形 L_i 记为 df_i的图，即

$$L_i = \operatorname{graph}(df) := \{(p, df_i(p)) : p \in M\}.$$

此处，我们记 $L_i^\epsilon :=$ 图(ϵdf_i)，并将 x_i^ϵ 记为 $L_i^\epsilon \cap L_{i+1}^\epsilon$ 的点之一。两个模空间之间存在一个对应。

定理 2.1 ([9])**.** 设 π 为余切丛 $\pi\colon T^*M \to M$。我们令 $p_i = \pi(x_i^\epsilon)$。设 $J = J_g$ 为 T^*M 上与 M 上的度量g 相关联的典范近复结构。对每个一般位置的[1] $\vec{f} = (f_i)$ 以及充分小的 ϵ，我们有保向微分同胚 $\mathcal{M}_g(M\colon \vec{f}, \vec{p}) \simeq \mathcal{M}_J(T^*M\colon \vec{L^\epsilon}, \vec{x^\epsilon})$。

本文将构造 $M = \mathbb{R}$ 情形下且拉格朗日截面为仿射时的梯度树和伪全纯圆盘。随后，我们将讨论它们之间的对应关系。众所周知，单位圆盘与上半平面共形等价。设 $[z_1, z_2, \ldots, z_n] \in \mathfrak{T}_{0,n}$ 为带有 n 个点的单位圆盘。设 φ 为从单位圆盘到上半平面的共形映射，满足 $\varphi(z_1) = 1, \varphi(z_2) = \infty, \varphi(z_3) = 0$。当 $n \geq 4$时，我们令 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-3} \in \mathbb{R}$ 满足：对 $i = 1, 2, \ldots, n-3$，有 $\varphi(z_{i+3}) = \xi_i$。因此，在本文中，我们将单位圆盘上带有 n个标记点$z_1, z_2, \ldots, z_n$ 的伪全纯圆盘 w ，与上半平面上带有标记点 $1, \infty, 0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-3}$ 的全纯映射 $w \circ \varphi^{-1}$ 视为同一对象。下文中，我们将此类映射 w 称为全纯圆盘，而不称为伪全纯圆盘，因为本文所研究的伪全纯圆盘都是全纯的。

[1]本句中的术语“一般位置”指的是与梯度流相关联的不稳定流形的横截性。因此，它不同于我们用来指伪全纯圆盘之像的术语“一般位置”。

2.2. 施瓦茨-克里斯托费尔映射、超几何函数及其性质。由于我们研究的拉格朗日截面是仿射的，因此我们研究将上半平面映射到有界多边形域的全纯圆盘。

定理 2.2 ([5],[1],[14]等)。设 P 为多边形 Γ 的内部，其顶点为w_1、w_2、.....、w_n，内角为 $\alpha_1\pi$、$\alpha_2\pi$、.....、$\alpha_n\pi$，按逆时针顺序排列。设 f为从上半平面 H^+ 到 P的共形映射，且 $f(\infty) = w_n$。于是我们得到

$$f(z) = A + B\int^z \prod_{k=1}^{n-1}(\zeta - z_k)^{\alpha_k - 1}d\zeta$$

对某些复常数 A与 B，其中对 $k = 1$、.....、$n-1$，有 $w_k = f(z_k)$。此处我们在每个 $i = 1$、2、.....、$n-1$ 处取 $(\zeta - z_i)^{\alpha_i}$的分支，使得

$$(\zeta - z_i)^{\alpha_i} = \begin{cases} (\zeta - z_i)^{\alpha_i}\,(\zeta \in \mathbb{R}, \zeta > z_i) \\ |\zeta - z_i|^{\alpha_i}\, e^{\pi\alpha_i i}\,(\zeta \in \mathbb{R}, \zeta < z_i) \end{cases}.$$

该映射 f 称为从上半平面出发的施瓦茨-克里斯托费尔映射 。正如我们在第 3.2 小节所述，我们可以用幂级数局部描述施瓦茨-克里斯托费尔映射 f 。现在，我们来研究超几何级数（及函数）的积分表示与连接公式。在情形 $k = 4$ 下，我们使用阿佩尔的 F_1 函数。阿佩尔超几何函数 F_1 定义如下。

定义 2.5 ([7],[13] 等)。*Appell* 的超几何函数 F_1 是 Appell 超几何级数的解析延拓

$$F_1(a, b_1, b_2, c; x, y) = \sum_{m,n\geq 0} \frac{(a)_{m+n}(b_1)_m(b_2)_n}{(c)_{m+n}m!n!}x^m y^n, |x| < 1, |y| < 1$$

wh其中 a， b_1， b_2， c 为复数，且 c 不是负整数或零 .

该超几何函数 F_1 具有如下积分表示。

命题 2.1 ([7],[13] 等)。设 a、b_1、b_2、c为满足 $0 <$实部 $a <$实部c的复数。则可得

$$F_1(a, b_1, b_2, c; x, y) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-xt)^{-b_1}(1-yt)^{-b_2}\,dt$$

当 $|x| < 1$、$|y| < 1$时。

当 $(x,\ y)$ 不满足 $|x| < 1,\ |y| < 1$时，我们需要其他幂级数。这可以通过 F_1 和 G_2的连接公式实现。我们首先回顾 Horn 的超几何函数 G_2。

定义 2.6 ([15],[13] 等)。设 α， β， γ， δ为复数。*Horn* 超几何函数 G_2 是以下超几何级数的解析延拓

$$G_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta; x, y) \coloneqq \sum_{m,n\geq 0} (\alpha)_m(\beta)_n(\gamma)_{n-m}(\delta)_{m-n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}, |x| < 1, |y| < 1,$$

其中 $(a)_{m-n} = \Gamma(a+m-n)/\Gamma(a)$。

以下公式是用于 [16 中 F_1 的连接公式].

引理 2.1 ([15],[13] 等)。 若 $\gamma, \beta-\alpha, \beta-\gamma \notin \mathbb{Z}$，则以下结论成立：

$$\begin{aligned} &F_1(\alpha,\beta',\beta,\gamma;y,x) \\ &= \frac{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}(-x)^{-\alpha}F_1\left(\alpha,1+\alpha-\gamma,\beta',1+\alpha-\beta;\frac{1}{x},\frac{y}{x}\right) \\ &+ \frac{\Gamma(\alpha-\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}(-x)^{-\beta}G_2\left(\beta,\beta',\alpha-\beta,1+\beta-\gamma;-\frac{1}{x},-y\right). \end{aligned}$$

这里，将因子$(-x)^*$ 和 $(-y)^*$ 中 $-x$ 和 $-y$ 的辐角在实数区域 $\infty < x < y < 0$ 上取为零（见 [13]）。

在非一般情形下，该公式中伽马函数的商可能有一个分子，其辐角为零。这意味着，当 $\beta-\alpha$ 和 $\gamma-\beta$ 为零或负整数时，我们应讨论 $F_1(\alpha,\ \beta,\ \beta',\ \gamma;\ x,\ y)$ 的解析延拓。我们将在第 3.2 小节中利用高斯超几何函数 ${}_2F_1$ 的连接公式推导修正后的公式。高斯超几何函数 ${}_2F_1(a,\ b,\ c;\ x)$ 定义如下。

定义 2.7 ([2] 等)。 高斯超几何函数 ${}_2F_1(a,b,c;\ x)$ 由下列级数定义

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}x^n \quad \left((a)_n \coloneqq \begin{cases} a(a+1)\cdots(a+n-1)\ (n\geq 1) \\ 1\ (n=0) \end{cases}\right)$$

当 $|x|<1$ 时成立，在其他情况下则通过解析延拓定义。这里 a,b,c 是复数，并且 c 不是负整数或零。

我们将在第 3.2 小节中使用以下公式。

引理 2.2 ([8] 等)。 设 a 是满足 $a \neq 0,-1,-2,\ldots$ 且 l,m,n 为非负整数的复数。那么，我们得到

$$\begin{aligned} &{}_2F_1(\alpha,\alpha+m,\alpha+m+l+1;z)\cdot\frac{\Gamma(\alpha+m)}{\Gamma(\alpha+m+l+1)} \\ =&(-1)^{m+l+1}(-z)^{-a-m}\sum_{n=l+1}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(n-l-1)!}{(n+m)!n!}z^{-n}+(-z)^{-\alpha}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(m-n-1)!(\alpha)_n}{(m+l-n)!n!}z^{-n} \\ &+\frac{(-z)^{-\alpha-m}}{(l+m)!}\sum_{n=0}^{l}\frac{(\alpha)_{n+m}(-m-l)_{n+m}}{(n+m)!n!}z^{-n}\left[\log(-z)+h'_n\right] \end{aligned}$$

这里，右侧的第二项在 $m=0$ 时为0，因此我们有

$$h'_n = \psi(1+m+n)+\psi(1+n)-\psi(\alpha+m+n)-\psi(l+1-n),$$

并且 $\psi(z)$ 是伽马函数的对数导数，即

$$\psi(z) \coloneqq \frac{d}{dz}\log\Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

在本小节最后，我们回顾超几何函数 ${}_2F_1$ 的积分表示。

命题 2.2 ([2] 等）。若 $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$，则

$${}_2F_1(a,b,c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}\,dt$$

在沿实轴从 1 到 ∞ 切开的 x 平面上。这里约定 $\arg t = \arg(1-t) = 0$ 和 $(1-xt)^{-a}$ 取主值。

我们将在第 3.3 小节中使用此公式计算四边形的边长之比。我们还将使用以下关于 ${}_2F_1$ 的连接公式。

命题2.3 ([8] 等）。设 a、b 为复数，满足 a、$b \neq 0$、-1、-2、.....，且 m 为正整数。则有

$$\begin{aligned}
&{}_2F_1(a,b,a+b+m;z)/\Gamma(a+b+m)\\
&= \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(a+m)\Gamma(b+m)}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(a)_n(b)_n}{(1-m)_n n!}(1-z)^n\\
&+ \frac{(1-z)^m(-1)^m}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+m)_n(b+m)_n}{(n+m)!n!}\left[h_n'' - \log(1-z)\right](1-z)^n.
\end{aligned}$$

这里，当 $m=0$ 时，右端的第一项为0 。我们有

$$h_n'' = \psi(n+1) + \psi(n+m+1) - \psi(a+n+m) - \psi(b+n+m).$$

2.3. 凸多边形的内角。为了讨论全纯圆盘 w_ϵ的收敛性，我们先给出角度 $\pi\alpha_i^\epsilon$ 在 x_i^ϵ 处的显式公式及其性质。本小节中的论证都是初等的。

引理 2.3 ([16]). 设 k 为正整数。设 $L_i^\epsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (a_i x + b_i)\epsilon\}$为 $\mathbb{R}^2$ 中的直线，其中 $i = 1, 2, \ldots, k$。假设对于 $i = 1,2, \ldots, k$，有 $L_i^\epsilon \cap L_{i+1}^\epsilon \neq \emptyset, L_i^\epsilon \neq L_{i+1}^\epsilon, L_i^\epsilon \cap L_{i+1}^\epsilon \cap L_{i+2}^\epsilon = \emptyset$。记 $x_i^\epsilon = (p_i, q_i)$ 为 L_i^ϵ与 L_{i+1}^ϵ的交点。设 P_ϵ 为一个凸多边形，其顶点 $x_1^\epsilon, x_2^\epsilon, \ldots, x_k^\epsilon$ 按逆时针顺序排列，且设 $\pi\alpha_i^\epsilon$ 为在 x_i^ϵ处的内角。于是得到

$$\begin{aligned}
\pi\alpha_i^\epsilon &= \left|\arctan a_{i+1}\epsilon - \arctan a_i\epsilon\right| \quad \textit{if } (p_{i+1}-p_i)(p_{i-1}-p_i) > 0,\\
\pi\alpha_i^\epsilon &= \pi - \left|\arctan a_{i+1}\epsilon - \arctan a_i\epsilon\right| \quad \textit{if } (p_{i+1}-p_i)(p_{i-1}-p_i) < 0.
\end{aligned}$$

推论 2.1 ([16])。我们假设引理 *2.3* 中的情形。于是得到

$$\lim_{\epsilon\to+0}\alpha_i^\epsilon = 0,\ \lim_{\epsilon\to+0}\frac{\pi\alpha_i^\epsilon}{\epsilon\left|a_{i+1}-a_i\right|} = 1,\ \lim_{\epsilon\to+0}\epsilon\Gamma(\alpha_i^\epsilon) = \frac{\pi}{\left|a_{i+1}-a_i\right|}$$

在 $(p_{i+1}-p_i)(p_{i-1}-p_i)\ >0$ 的情况下，并且

$$\lim_{\epsilon\to+0}\alpha_i^\epsilon=1,\ \lim_{\epsilon\to+0}\frac{\pi(1-\alpha_i^\epsilon)}{\epsilon\left|a_{i+1}-a_i\right|}=1,\ \lim_{\epsilon\to+0}\epsilon\Gamma(1-\alpha_i^\epsilon)=\frac{\pi}{\left|a_{i+1}-a_i\right|}$$

在$(p_{i+1}-p_i)(p_{i-1}-p_i)\ <0$的情况下。

由于 反正切 $x-x$ 是单调递减的，我们得到以下引理。

引理 2.4 ([16])。 若假设引理 *2.3* 中的设定，则在$(p_{i+1}-p_i)(p_{i-1}-p_i)\ >0$的情况下，我们得到 $\pi\alpha_i^\epsilon\ -|(a_{i+1}-a_i)\epsilon|<0$ 。

我们利用引理 2.4 证明，在树的外边处，全纯圆盘一致收敛到梯度树。

2.4. 四边形的共形模。 本小节回顾一种称为共形模的共形不变量，它适用于一般的四边形。我们还将讨论该不变量的一些单调性性质。

定义 2.8 ([11] 等**)**。一个四边形是一个系统 **(**Q**;** a_1，a_2，a_3，a_4**)**，其中 Q 是一个若尔当区域，且 a_i 是 Q 边界上的四个互不相同的点，按参数值递增的顺序排列。

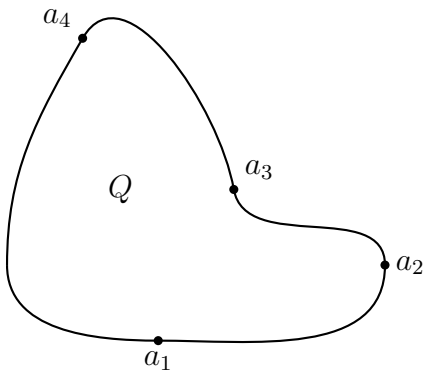

FIGURE 2. 四边形（转载自 [16]）。

“quadrilateral”一词通常指由四条直线围成的多边形。由于我们在第3节中将四边形 **(**Q**;** a_1,a_2,a_3,a_4**)**视为多边形，因此仅在本小节中按上述含义使用“quadrilateral”一词。该四边形的共形模定义如下。

定义 2.9（[11] 等）。设 **(**Q; a,b,c,d**)** 是一个四边形。设 $w=f(z)$ 是从区域 Q 到矩形 $0<u<1,0<v<M$ **(**$w=u+iv$**)** 的一一共形映射，它分别将 a,b,c,d 映射到 0、1、$1+iM$、iM。数值 M 称为四边形 **(**Q; a,b,c,d**)** 的共形模，记作 M**(**Q; a,b,c,d**)**。

注意， $M(Q; a, b, c, d) = 1/M(Q; b, c, d, a)$。关于共形模，有一些众所周知的不等式如下。

命题 2.4 ([11] 等)。 设$(Q; a, b, c, d)$ 是一个四边形，设$(Q; a', b, c, d)$ 是将点 a 沿着 Q 的边界朝 d方向移动后得到的四边形。分别记这两个四边形的模数为 μ 和 μ'，则有 $\mu > \mu'$。

命题 2.5 ([11] 等)。 设$(Q; a, b, c, d)$ 和$(Q; a, b, c, d)$ 是两个四边形，它们共有边界线段 (b, c) 和(d, a)，但满足 $Q \subset Q'$。分别记这两个四边形的模数为 μ 和 μ'，则有 $\mu < \mu'$。

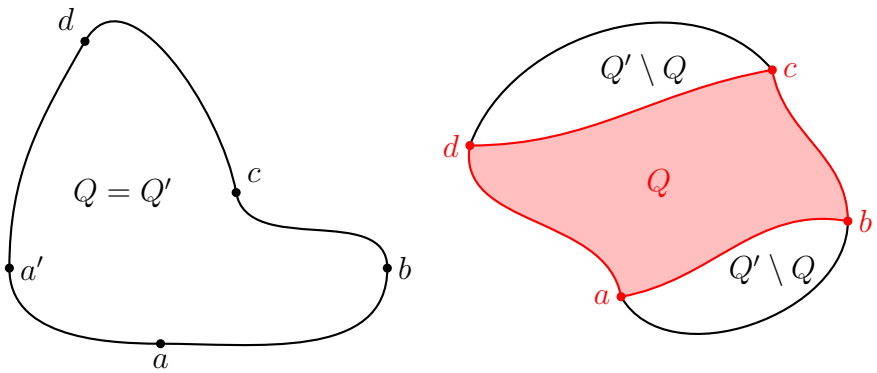

FIGURE 3. 命题 2.4 和命题 2.5 的情形。

利用命题 2.4 和命题 2.5，我们还可以得到以下性质。

命题2.6 ([6])。 设 $(Q; a, b, c, d)$ 是一个多边形四边形，即其边为（线性）区间的四边形。若四边形 $(Q; a, b, c, d)$ 是凸的，且点$a', a' \neq a$ 位于一个闭凸集内，该闭凸集的边界由边 (a, b) 以及边 (d, a) 和 (b, c) 分别经过点 a, b 作线性延长线，直至它们的交点（交点可能是 ∞）所构成，则

$$M(Q; a, b, c, d) < M(Q'; a', b, c, d).$$

本文利用这些不等式来计算多边形四边形的共形模。本节最后，我们将展示特殊情形下的一些结果。

引理 2.5 ([11])。 每个对称四边形的模数均为 *1*。若存在某些 $i = 1,2、3、4$ 满足以下两个条件，则称四边形$(Q; x_1, x_2, x_3, x_4)$ 为对称四边形。

- 该区域 Q 关于经过 x_i 和 x_{i+2}的直线 Λ 对称。
- 点 x_{i+1} 和 x_{i+3} 关于 Λ 对称。

由此引理可知，带有四个标记点 1， i， -1， $-i$ 的单位圆盘的模数为 1。当我们将 φ 设为从单位圆盘到上半平面的共形映射，使得

$$\varphi(-i)=0,\varphi(i)=1,\varphi(-1)=\infty,$$

我们得到

$$\varphi(z)=\frac{z+i}{z+1}\frac{1-i}{2}$$

以及 $\varphi(1)=1/2$。因此，有如下引理。

引理 2.6. 四边形 $(Q;\ a,b,c,d)$ 的模数为 *1*，当且仅当四边形$(Q;\ a,b,c,d)$ 与上半平面 $(\mathbb{H};\ 0,1/2,\ 1,\infty)$ 共形等价，且带有四个标记点 $0,1/2$,1, ∞。

我们用该引理讨论非一般情形中的共形模。

2.5. 情形 $M=\mathbb{R},k=4$ 中的梯度树与全纯圆盘。 本文仅考虑情形 $M=\mathbb{R},k=4$，且拉格朗日截面为仿射的。我们首先回顾 $T^*\mathbb{R}$ 的四个仿射拉格朗日截面 L_1,L_2,L_3,L_4 构成凸四边形的条件。

引理 *2.7*（[16]）。设 L_1、L_2、L_3、L_4 是 $T^*\mathbb{R}$ 中满足 $L_i\cap L_{i+1}\neq\emptyset$、$L_i\neq L_{i+1}$ 的仿射拉格朗日截面，其中 $i=1$ 取 *2*、*3*、*4*。通过将 $T^*\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}^2$ 进行同一视，我们将每个 L_i 表示为直线 $\{(x、\ y)\ |\ y=a_ix+b_i\}$，其中 a_i 和 b_i 是实数。设 $x_i=(p_i、\ q_i)$ 是 L_i 与 L_{i+1} 之间的交点。那么，x_1、x_2、x_3、x_4 构成一个四边形，当且仅当 p_1、p_2、p_3、p_4 满足表 *1* 中（B）的某个条件。此外，四边形 $x_1x_2x_3x_4$ 为凸四边形，且其顶点 x_1、x_2、x_3、x_4 按逆时针顺序排列，当且仅当 a_1、a_2、a_3、a_4 满足表 *1* 中（A）的某个条件。这里，表 *1* 中的（a、b）是一个开区间；若 $a\geq b$ 成立，则我们令（a、b）$=\emptyset$。

我们可以通过初等计算证明引理 2.7。设 f_1、f_2、f_3、f_4 是满足 $L_i=\mathrm{graph}(df_i)$（其中 $i=1$，2，3，4）的函数。接下来，我们研究 $\mathcal{M}_g(\mathbb{R};\ \vec{f}、\ \vec{p})$ 的模空间，其中 L_1、L_2、L_3、L_4 满足表 4 中的某个条件。根据带状树的定义，带状树 $(T、\ i)$ 属于 Gr_4，当且仅当 T 与图 4 中以下某棵树等距。

引理 2.8 ([16])。梯度树的模空间 $\mathcal{M}_g(\mathbb{R};\ \vec{f},\vec{p})$ 是一个单点集。该梯度树由一棵与表 *1* 中列(C)所示的树同构的树构造而成。这里，(a)、(b)、(c) 对应于图 *4*。

3. Main results and their proofs.

3.1. 主要结果。 设 f_1,f_2,f_3,f_4是定义在 $\mathbb{R}$上的函数，满足表 1。记 p_i为 $f_{i+1}-f_i$的临界点，记 x_i^ϵ为 L_i^ϵ与 L_{i+1}^ϵ的交点。令w_ϵ 为从上半平面到四边形 $x_1^\epsilon x_2^\epsilon x_3^\epsilon x_4^\epsilon$的施瓦茨-克里斯托费尔映射，使得 $w_\epsilon(0)=x_3^\epsilon,w_\epsilon(1)=x_1^\epsilon,w_\epsilon(\infty)=x_2^\epsilon$。定义 $z_{4,\epsilon}\in(0,1)$ 为 $z_{4,\epsilon}=w_\epsilon^{-1}(x_4^\epsilon)$。根据引理 2.8，梯度树的模空间 $\mathcal{M}_g(\mathbb{R};\ f,\vec{p})$ 是一个单点集。我们

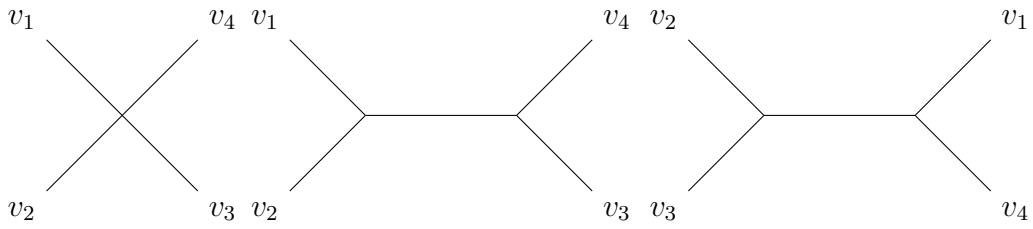

FIGURE 4. 带状树的树 T 的候选（$T,\ i$） $\in Gr_4$ （据 [16]重新制作）。

(A)	(B)	(C)
$a_2, a_4 \in (a_1, a_3)$	$p_4 < p_1 < p_2 < p_3$ $p_3 < p_2 < p_1 < p_4$	(c)
$a_2, a_4 \in (a_3, a_1)$	$p_1 < p_4 < p_3 < p_2$ $p_2 < p_3 < p_4 < p_1$	(c)
$a_1, a_3 \in (a_2, a_4)$	$p_1 < p_2 < p_3 < p_4$ $p_4 < p_3 < p_2 < p_1$	(b)
$a_1, a_3 \in (a_4, a_2)$	$p_3 < p_4 < p_1 < p_2$ $p_2 < p_1 < p_4 < p_3$	(b)
最大值$\{a_1, a_3\} <$ 最小值$\{a_2, a_4\}$	$p_4 < p_1 < p_3 < p_2$ $p_2 < p_3 < p_1 < p_4$	(c)
	$p_4 < p_3 < p_1 < p_2$ $p_2 < p_1 < p_3 < p_4$	(b)
	$p_4 < p_1 = p_3 < p_2$ $p_2 < p_3 = p_1 < p_4$	(a)
最大$\{a_2, a_4\} <$ 最小$\{a_1, a_3\}$	$p_1 < p_4 < p_2 < p_3$ $p_3 < p_2 < p_4 < p_1$	(c)
	$p_3 < p_4 < p_2 < p_1$ $p_1 < p_2 < p_4 < p_3$	(b)
	$p_1 < p_4 = p_2 < p_3$ $p_3 < p_2 = p_4 < p_1$	(a)

TABLE 1. 获得唯一梯度树的所有条件（由从 [16] 归纳得出）。

将 $(I, (T, i, v_1, l))$ 记为 $\mathcal{M}_g(\mathbb{R};\ \vec{f}, \vec{p})$ 的唯一元素。根据树的定义，$T \in Gr_4$ 至多有一条内部边。因此，我们将 $l \geq 0$ 视为 T的内部边的长度。在 [16], 中，我们假设 $L_i^\epsilon \cap L_j^\epsilon \neq \emptyset$ 以及 $L_i^\epsilon \neq L_j^\epsilon (i \neq j)$ 和 $p_1 \neq p_3,\ p_2 \neq p_4$。我们将这样的四边形称为一般四边形。当相应的四边形为一般四边形时，我们也称 (f_1, f_2, f_3, f_4) 为一般位置 。在 [16],中，我们给出了伪全纯圆盘的像为

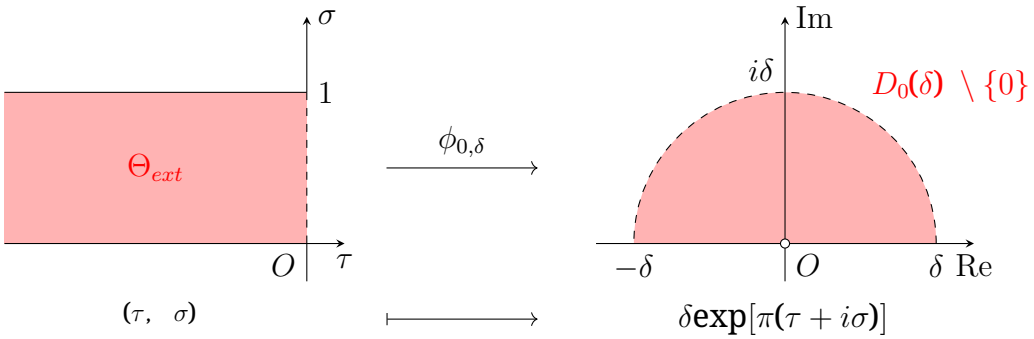

FIGURE 5. 变换$\phi_{0,\delta}$(转载自 [16])。

一般四边形 $\mathbb{C} \simeq T^*\mathbb{R}$。本文将给出伪全纯圆盘的像为 $T^*\mathbb{R}$ 中的凸四边形时所有情况的完整论述。这里定义 $p \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 的邻域 $D_p(\delta)$，以及从条带 $\Theta_{ext} := \{(\tau, \sigma) \in (-\infty, 0) \times [0,1]\}$ 到 $D_p(\delta) \setminus \{p\}$ 的变换 $\phi_{p,\delta}$，如下所示。

$$D_p(\delta) := \begin{cases} \{|z-p| < \delta \mid \mathrm{Im} z \geq 0\} \, (p \in \mathbb{R}) \\ \{|z|^{-1} < \delta \mid \mathrm{Im} z \geq 0\} \, (p = \infty) \end{cases} (\delta > 0)$$

$$\phi_{p,\delta}(\tau, \sigma) := \begin{cases} p + \delta \exp[\pi(\tau + i\sigma)] \, (p \neq \infty) \\ -\delta^{-1} \exp[-\pi(\tau + i\sigma)] \, (p = \infty) \end{cases}$$

为了将 $z_{4,\epsilon}$ 视为 z_1，z_2，z_3，我们有时会省略 ϵ 中的 $z_{4,\epsilon}$。现在讨论梯度树与全纯圆盘之间的对应关系。我们首先考虑情形 $(p_3 - p_1)(p_4 - p_2) \neq 0$。在这种情况下，我们将上半平面划分为七个区域，如图6所示。这里按照以下方式定义区域 $D^\epsilon_{z_i}(\delta)$，以及从 Θ_{ext} 到$D^\epsilon_{z_i}(\delta)$ 的变换 $\phi^\epsilon_{z_i,\delta}$，

$$D^\epsilon_{z_i}(\delta) := \begin{cases} D_{z_i}(\delta) \, (i = 1, 2) \\ D_{z_i}(z_{4,\epsilon}\delta) \, (i = 3, 4) \end{cases}, \phi^\epsilon_{z_i,\delta} := \begin{cases} \phi_{z_i,\delta} \, (i = 1, 2) \\ \psi_\epsilon^{-1} \circ \phi_{\psi_\epsilon(z_i),\delta} \, (i = 3, 4) \end{cases}, \psi_\epsilon(z) := z / z_{4,\epsilon},$$

以及条带 $\Theta^\epsilon_{int}(\delta)$和从 $\Theta^\epsilon_{int}(\delta)$出发的变换 ϕ_{int}

$$\phi_{int}(\tau, \sigma) := \exp\left[-\pi\tau + i\pi(1 - \sigma)\right]$$

$$\Theta^\epsilon_{int}(\delta) := \left\{ (\tau, \sigma) \,\middle|\, \tau \in \left(-\frac{1}{\pi} \log \delta, -\frac{1}{\pi} \log z_{4,\epsilon} + \frac{1}{\pi} \log \delta \right), \sigma \in [0,1] \right\}.$$

区域与变换的像见图7和图8。然后我们得到如下定理。

定理 3.1。设 $\delta > 0$ 为一个实数，使得 $D_i(\delta) \cap D_j(\delta)$ 对于 $i \neq j$ 和 $i, j \in \{0, 1, \infty\}$成立。点 $p_0 \in \mathbb{R}$ 或者是 p_1，或者是 p_2，且 p_0 的莫尔斯指标为零；点 $p_0' \in \mathbb{R}$ 或者是 p_3，或者是 p_4，并满足与 p_0 相同的条件。我们将 I_i 设为

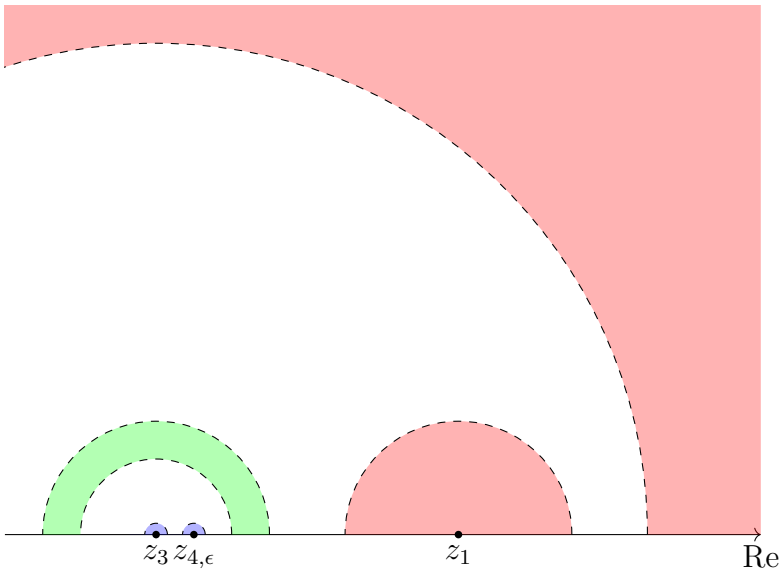

FIGURE 6. 上半平面在情形（$p_3 - p_1$）（$p_4 - p_2$）下被划分为七个区域的图 > 0（转载自 [16]）。

I 在 T的外边 e_i 上的限制，并将 I_{int} 设为 I 在 T的内部边上的限制。如果 $(p_3 - p_1)($ $p_4 - p_2) > 0$，则得到

$$\lim_{\epsilon \to +0} \sup_{z \in D(\delta)} |w_\epsilon(z) - p_0| = 0, \tag{1}$$

$$\lim_{\epsilon \to +0} \sup_{z \in D(\delta)} \left| w_\epsilon \circ \psi_\epsilon^{-1}(z) - p_0' \right| = 0, \tag{2}$$

$$\lim_{\epsilon \to +0} \sup_{(\tau,\sigma) \in \Theta_{ext}} \left| w_\epsilon \circ \phi^\epsilon_{z_i,\delta}(\tau,\sigma) - I_i(\epsilon\tau) \right| = 0 \, (i = 1,2,3,4), \tag{3}$$

$$\lim_{\epsilon \to +0} \sup_{(\tau,\sigma) \in \Theta^\epsilon_{int}(\delta)} |w_\epsilon \circ \phi_{int}(\tau,\sigma) - I_{int}(\epsilon\tau)| = 0. \tag{4}$$

注3.1. 正如我们在 [16], 中提到的，式（4）中的收敛并非一致收敛，因为定义域 Θ^ϵ_{int}（δ）会随着 $\epsilon > 0$ 的变化而移动。

由于我们已在 [16], 中证明了定理的一般位置情形，因此将在第 3.4 小节证明非一般情形；这一情形与 [16] 中的情形截然不同。关键区别在于是否可以应用引理 2.1。引理 2.1 用于计算 w_ϵ 的解析延拓。然而，在上述非一般情形中，我们不得不将分子中的伽马函数取为负整数或零。因此，我们必须使用 F_1 解析延拓的另一公式。接下来，我们将利用命题2.3推导出这一公式。

接下来考虑情形 $(p_3 - p_1)(p_4 - p_2) = 0$。在这种情形下，利用命题 2.4、2.5、2.6 和引理 2.2，我们得到 $z_{4,\ \epsilon} \to 1/2$ as$\epsilon \to +0$ 。我们将在第 4.3 小节中证明这一点。然后将上半平面划分为以下五个区域（见图9）。

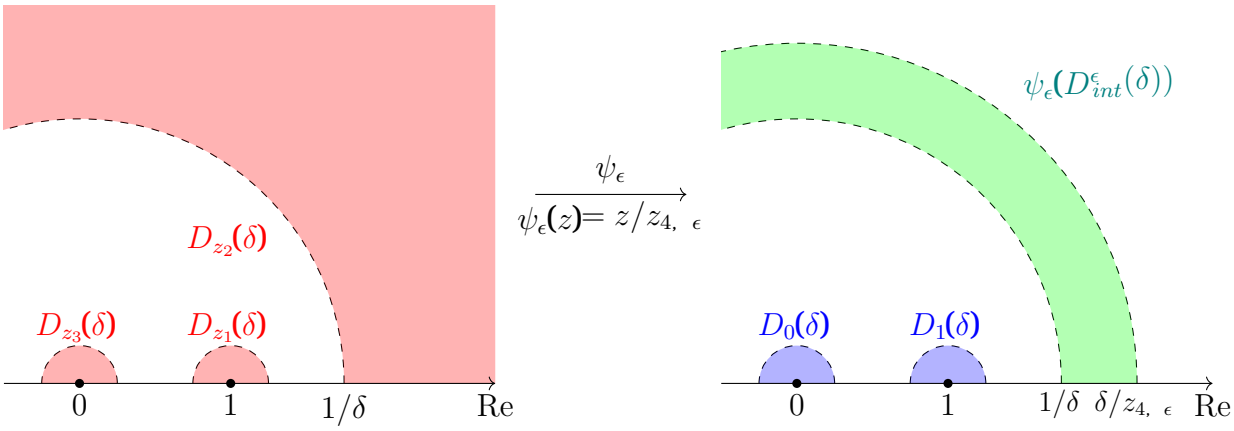

FIGURE 7. 上半平面中邻近 0 的图，情形$z_{4,\epsilon} \to 0 (\epsilon \to +0)$（转载自 [16]）。

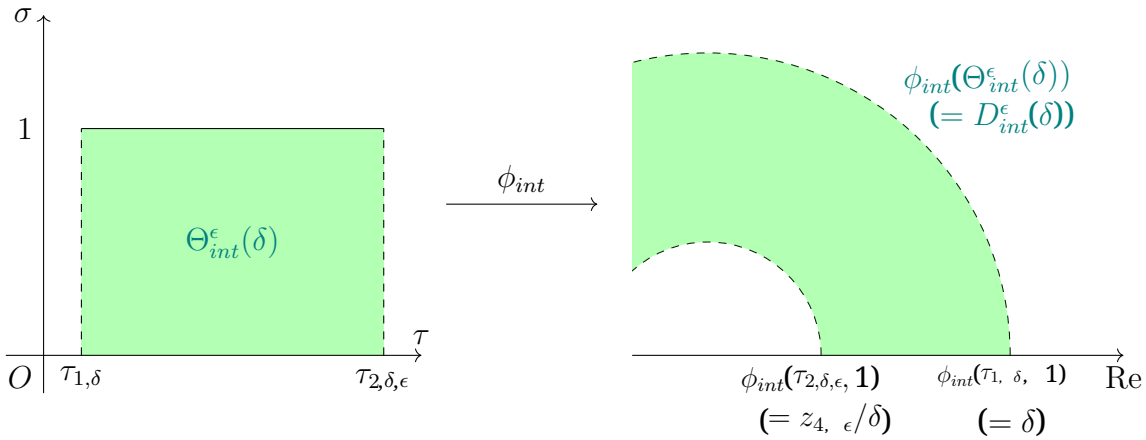

FIGURE 8. ϕ_{int} 和$D^\epsilon_{int}(\delta)$ 在 $z_{4,\epsilon} \to +0$ 情况下的图。（其中，$\tau_{1,\epsilon} := -(\log \delta)/\pi$ 和 $\tau_{2,\delta,\epsilon} := -(\log(z_{4,\epsilon}/\delta))/\pi$）（转载自 [16]）。

$$\overline{\mathbb{H}} = D_{z_3}(\delta) \cup D_{z_{4,\epsilon}}(\delta) \cup D_{z_1}(\delta) \cup D_{z_2}(\delta) \cup D_\epsilon(\delta).$$

我们可以取一个正实数 $\delta > 0$，使得对于 $i, j \in \{1,2,3,4\}$, $i \neq j$，有 $D_{z_i}(\delta) \cap D_{z_j}(\delta) = \emptyset$。集合 $D_\epsilon(\delta)$ 则由下式给出

$$D_\epsilon(\delta) := \overline{\mathbb{H}} \setminus (D_{z_3}(\delta) \cup D_{z_{4,\epsilon}}(\delta) \cup D_{z_1}(\delta) \cup D_{z_2}(\delta)).$$

图9中的四个区域 $D_{z_1}(\delta)$ $D_{z_2}(\delta)$ $D_{z_3}(\delta)D_{z_4,\epsilon}(\delta)$ 为红色区域，这些区域分别对应树的各条外部边。图9中的白色区域为 $D_\epsilon(\delta)$，对应内部顶点。我们给出条纹与

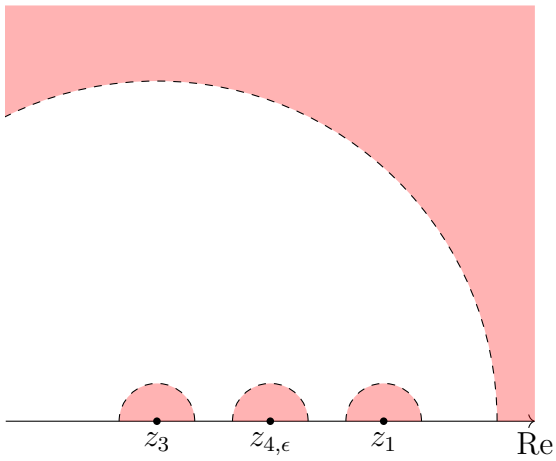

FIGURE 9. 上半平面被划分为五个区域时的图，其中情形为 $(p_3 - p_1)(p_4 - p_2) = 0$。

区域 Θ_{ext} 和区域 $D_{z_i}(\delta)$ 之间的变换，如 $\phi_{z_i,\ \delta}$ 所示。以下定理给出了情形 $(p_3 - p_1)(p_4 - p_2) = 0$ 下的结果。

定理 3.2。设 $\delta > 0$ 为一个实数，使得 $D_{z_4,\ \epsilon}(\delta) \cap D_{z_j}(\delta) = \emptyset$，当 $\epsilon > 0$ 和 $j = 1$充分小时，2、3。点 $p_0 \in \mathbb{R}$ 是 p_1、p_2、p_3 或 p_4 之一，且 p_0 的莫尔斯指标为零。我们将 I_i 定义为 I 在 T的外边 e_i 上的限制。若 $(p_3 - p_1)(p_4 - p_2) = 0$，则得到

$$\lim_{\epsilon \to +0} \sup_{z \in D_\epsilon(\delta)} |w_\epsilon(z) - p_0| = 0, \tag{5}$$

$$\lim_{\epsilon \to +0} \sup_{(\tau,\sigma) \in \Theta_{ext}} |w_\epsilon \circ \phi_{z_i,\delta}(\tau, \sigma) - I_i(\epsilon\tau)| = 0 \ (i = 1, 2, 3, 4). \tag{6}$$

3.2. 全纯圆盘的幂级数表示。本文研究从上半平面到凸四边形的施瓦茨-克里斯托费尔映射的幂级数表示。令 P 为凸四边形 $x_1x_2x_3x_4$ 的内部，其顶点为x_1、x_2、x_3、x_4，按逆时针顺序排列，且 $\pi\alpha_1$、$\pi\alpha_2$、$\pi\alpha_3$、$\pi\alpha_4$ 为相应的内角。我们将 w 定义为从上半平面到 P的施瓦茨-克里斯托费尔映射，使得 $w(0) = x_1$、$w(1) = x_3$、$w(\infty) = x_4$。我们将 $\xi \in (0, 1)$设为 $\xi = w^{-1}(x_2)$。在 [16], 的引理 4.3 中，我们假设对 $i = 1$（其中 $i = 1$ 为 2、3、4），$\alpha_i + \alpha_{i+1} \neq 1$ 成立。当某个 $i = 1$（其中 $i = 1$ 为 2、3、4）满足 $\alpha_i + \alpha_{i+1} = 1$ 时，(iii) 不成立，尽管在 [16, 的引理 4.3]中仍有 (i)、(ii)、(iv)。不过，只有在 $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$的情形下，(iii) 才不成立。我们首先在此情形下重新表述 (iii)。

引理 3.1。　当 $\alpha_1+\alpha_2=1$ 成立时，我们得到关于 $\{z\in\mathbb{H}\mid \xi<|z|<\overline{1}\}$的如下结果:

$$w(z)=x_1+\frac{\sin\pi\alpha_1}{\pi}\frac{x_2-x_1}{{}_2F_1(\alpha_1,1-\alpha_3,1;\xi)}\left[-e^{\pi\alpha_1 i}\sum_{\substack{k,l\geq 0\\ k\neq l}}\frac{(\alpha)_k(1-\alpha_3)_l}{k!l!}\frac{1}{k-l}\left(\frac{z}{\xi}\right)^{-k}z^l\right.$$
$$\left.+e^{\pi\alpha_1 i}\sum_{n\geq 0}\left[\psi(n+1)-\psi(\alpha_1+n)+\log\left(-\frac{z}{\xi}\right)\right]\frac{(\alpha_1)_n(1-\alpha_3)_n}{n!n!}\xi^n\right].$$

证明。 由引理 4.3 (i) [16], 可得

$$w(z)=x_1+\frac{1}{\Gamma(\alpha_1+1)\Gamma(1-\alpha_1)}\frac{x_2-x_1}{{}_2F_1(\alpha_1,1,1-\alpha_3;\xi)}\left(\frac{z}{\xi}\right)^{\alpha_1}$$
$$\cdot F_1\left(\alpha_1,\alpha_1,1-\alpha_3,\alpha_1+1;\frac{z}{\xi},z\right). \tag{7}$$

在此证明中，我们考虑式 (7) 中 F_1 的解析延拓。首先有

$$\begin{aligned}
&F_1\left(\alpha_1,1-\alpha_2,1-\alpha_3,\alpha_1+1;\frac{z}{\xi},z\right)\\
&=\sum_{m,n\geq 0}\frac{(\alpha_1)_{m+n}(1-\alpha_2)_m(1-\alpha_3)_n}{(\alpha_1+1)_{m+n}m!n!}\left(\frac{z}{\xi}\right)^m z^n\\
&=\sum_{n\geq 0}\frac{(\alpha_1)_n(1-\alpha_3)_n}{(\alpha_1+1)_n n!}\cdot\left(\sum_{m\geq 0}\frac{(\alpha_1+n)_m(1-\alpha_2)_m}{(\alpha_1+1+n)_m m!}\left(\frac{z}{\xi}\right)^m\right)z^n\\
&=\sum_{n\geq 0}{}_2F_1\left(\alpha_1+n,1-\alpha_2,\alpha_1+1+n;\frac{z}{\xi}\right)\cdot\frac{(\alpha_1)_n(1-\alpha_3)_n}{(\alpha_1+1)_n n!}z^n.
\end{aligned}$$

我们在此设 $\alpha_2=1-\alpha_1$。由引理 2.2，我们有

$$\begin{aligned}
&{}_2F_1\left(\alpha_1+n,\alpha_1,\alpha_1+1+n;\frac{z}{\xi}\right)\cdot\frac{\Gamma(\alpha_1+n)}{\Gamma(\alpha_1+n+1)}\\
=&(-1)^{n+1}\left(-\frac{z}{\xi}\right)^{-\alpha_1-n}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{j+n}(j-1)!}{(j+n)!j!}\left(\frac{z}{\xi}\right)^{-j}+\left(-\frac{z}{\xi}\right)^{-\alpha_1}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n-j-1)!(\alpha_1)_j}{(n-j)!j!}\left(\frac{z}{\xi}\right)^{-j}\\
&+\left(-\frac{z}{\xi}\right)^{-\alpha_1-n}\frac{1}{n!}\frac{(\alpha_1)_n(-n)_n}{n!}\left[\log\left(-\frac{z}{\xi}\right)+h_0'\right]\\
=&(-1)^{n+1}\left(-\frac{z}{\xi}\right)^{-\alpha_1-n}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{j+n}(j-1)!}{(j+n)!j!}\left(\frac{z}{\xi}\right)^{-j}+\left(-\frac{z}{\xi}\right)^{-\alpha_1}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n-j-1)!(\alpha_1)_j}{(n-j)!j!}\left(\frac{z}{\xi}\right)^{-j}\\
&+(-1)^n\left(-\frac{z}{\xi}\right)^{-\alpha_1-n}\frac{(\alpha_1)_n}{n!}\left[\log\left(-\frac{z}{\xi}\right)+\psi(n+1)-\psi(\alpha_1+n)\right]
\end{aligned}$$

f或 $|z|<1<|z/\xi|$，即 $\xi<|z|<1$，以及 $|\arg(-z/\xi)|<\pi$。因此，我们得到

$$
\begin{aligned}
&F_1\left(\alpha_1,\alpha_1,1-\alpha_3,\alpha_1+1;\frac{z}{\xi},z\right)\\
&=\sum_{n\geq 0}\ {}_2F_1\left(\alpha_1+n,\alpha_1,\alpha_1+1+n;\frac{z}{\xi}\right)\cdot\frac{(\alpha_1)_n(1-\alpha_3)_n}{(\alpha_1+1)_n n!}z^n\\
&=\sum_{n\geq 0}\frac{\Gamma(\alpha_1+n+1)}{\Gamma(\alpha_1+n)}\left[(-1)^{n+1}\left(-\frac{z}{\xi}\right)^{-\alpha_1-n}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{j+n}(j-1)!}{(j+n)!j!}\left(\frac{z}{\xi}\right)^{-j}\right.\\
&+\left(-\frac{z}{\xi}\right)^{-\alpha_1}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n-j-1)!(\alpha_1)_j}{(n-j)!j!}\left(\frac{z}{\xi}\right)^{-j}\\
&\left.+(-1)^n\left(-\frac{z}{\xi}\right)^{-\alpha_1-n}\frac{(\alpha_1)_n}{n!}\left[\log\left(-\frac{z}{\xi}\right)+\psi(n+1)-\psi(\alpha_1+n)\right]\right]\cdot\frac{(\alpha_1)_n(1-\alpha_3)_n}{(\alpha_1+1)_n n!}z^n.
\end{aligned}
$$

我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 0}\sum_{j\geq 1}\frac{\Gamma(\alpha_1+n+1)}{\Gamma(\alpha_1+n)}(-1)^{n+1}\left(-\frac{z}{\xi}\right)^{-\alpha_1-n}\frac{(\alpha_1)_{j+n}(j-1)!}{(j+n)!j!}\left(\frac{z}{\xi}\right)^{-j}\frac{(\alpha_1)_n(1-\alpha_3)_n}{(\alpha_1+1)_n n!}z^n\\
&=-\left(-\frac{z}{\xi}\right)^{-\alpha_1}\sum_{n\geq 0}\sum_{j\geq 1}\frac{\Gamma(\alpha_1+n+1)}{\Gamma(\alpha_1+n)}\frac{(\alpha_1)_{j+n}(j-1)!}{(j+n)!j!}\frac{(\alpha_1)_n(1-\alpha_3)_n}{(\alpha_1+1)_n n!}\left(\frac{z}{\xi}\right)^{-j-n}z^n\\
&=-\alpha_1\left(-\frac{z}{\xi}\right)^{-\alpha_1}\sum_{n\geq 0}\sum_{j\geq 1}\frac{(\alpha_1)_{j+n}(1-\alpha_3)_n}{(j+n)!n!}\frac{1}{j}\left(\frac{z}{\xi}\right)^{-j-n}z^n\\
&=-\alpha_1\left(-\frac{z}{\xi}\right)^{-\alpha_1}\sum_{l\geq 0}\sum_{k\geq l+1}\frac{(\alpha_1)_k(1-\alpha_3)_l}{k!l!}\frac{1}{k-l}\left(\frac{z}{\xi}\right)^{-k}z^l
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 0}\frac{\Gamma(\alpha_1+n+1)}{\Gamma(\alpha_1+n)}\left(-\frac{z}{\xi}\right)^{-\alpha_1}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n-j-1)!(\alpha_1)_j}{(n-j)!j!}\left(\frac{z}{\xi}\right)^{-j}\frac{(\alpha_1)_n(1-\alpha_3)_n}{(\alpha_1+1)_n n!}z^n\\
&=\alpha_1\left(-\frac{z}{\xi}\right)^{-\alpha_1}\sum_{n\geq 0}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(\alpha_1)_j(1-\alpha_3)_n}{j!n!}\frac{1}{n-j}\left(\frac{z}{\xi}\right)^{-j}z^n
\end{aligned}
$$

and

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 0}\frac{\Gamma(\alpha_1+n+1)}{\Gamma(\alpha_1+n)}(-1)^n\left(-\frac{z}{\xi}\right)^{-\alpha_1-n}\frac{(\alpha_1)_n}{n!}\\
&\qquad\qquad\cdot\left[\log\left(-\frac{z}{\xi}\right)+\psi(n+1)-\psi(\alpha_1+n)\right]\frac{(\alpha_1)_n(1-\alpha_3)_n}{(\alpha_1+1)_n n!}z^n\\
&=\alpha_1\left(-\frac{z}{\xi}\right)^{-\alpha_1}\sum_{n\geq 0}\left[\log\left(-\frac{z}{\xi}\right)+\psi(n+1)-\psi(\alpha_1+n)\right]\frac{(\alpha_1)_n(1-\alpha_3)_n}{n!n!}\xi^n.
\end{aligned}$$

当 $\xi<|z|<1$ 成立时，这些级数同时绝对收敛。于是我们有

$$\begin{aligned}
&F_1\left(\alpha_1,\alpha_1,1-\alpha_3,\alpha_1+1;\frac{z}{\xi},z\right)\\
=&-\alpha_1\left(-\frac{z}{\xi}\right)^{-\alpha_1}\sum_{\substack{k,l\geq 0\\ k\neq l}}\frac{(\alpha_1)_k(1-\alpha_3)_l}{k!l!}\frac{1}{k-l}\left(\frac{z}{\xi}\right)^{-k}z^l\\
&+\alpha_1\left(-\frac{z}{\xi}\right)^{-\alpha_1}\sum_{n\geq 0}\left[\log\left(-\frac{z}{\xi}\right)+\psi(n+1)-\psi(\alpha_1+n)\right]\frac{(\alpha_1)_n(1-\alpha_3)_n}{n!n!}\xi^n.
\end{aligned}$$

这里，如果 z 是满足 $-\infty<z/\xi<z<0$ 的实数，则将因子 $(-z/\xi)^*$ 的 $-z/\xi$ 的辐角指定为零。由于当 z 是正实数且 $0<z<z/\xi<\infty$ 成立时，我们有 $\arg z=\arg(z/\xi)=0$，因此设 $-z/\xi=\exp[-i\pi]\cdot z/\xi$。我们

最终得到

$$
\begin{aligned}
w(z) = x_1 &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1+1)\Gamma(1-\alpha_1)} \frac{x_2-x_1}{{}_2F_1(\alpha_1,1,1-\alpha_3;\xi)} \left(\frac{z}{\xi}\right)^{\alpha_1} \\
&\cdot \Bigg[-\alpha_1 \left(\frac{z}{\xi}e^{-\pi i}\right)^{-\alpha_1} \sum_{\substack{k,l\geq 0 \\ k\neq l}} \frac{(\alpha)_k(1-\alpha_3)_l}{k!l!} \frac{1}{k-l} \left(\frac{z}{\xi}\right)^{-k} z^l \\
&\qquad + \alpha_1 \left(\frac{z}{\xi}e^{-\pi i}\right)^{-\alpha_1} \sum_{n\geq 0} \left[\psi(n+1) - \psi(\alpha_1+n) + \log\left(\frac{z}{\xi}e^{-\pi i}\right)\right] \frac{(\alpha_1)_n(1-\alpha_3)_n}{n!n!}\xi^n \Bigg] \\
&= x_1 + \frac{\sin\pi\alpha_1}{\pi} \frac{x_2-x_1}{{}_2F_1(\alpha_1,1,1-\alpha_3;\xi)} \\
&\cdot \Bigg[-e^{\pi\alpha_1 i} \sum_{\substack{k,l\geq 0 \\ k\neq l}} \frac{(\alpha)_k(1-\alpha_3)_l}{k!l!} \frac{1}{k-l} \left(\frac{z}{\xi}\right)^{-k} z^l \\
&\qquad + e^{\pi\alpha_1 i} \sum_{n\geq 0} \left[\psi(n+1) - \psi(\alpha_1+n) + \log z - \log\xi - \pi i\right] \frac{(\alpha_1)_n(1-\alpha_3)_n}{n!n!}\xi^n \Bigg].
\end{aligned}
$$

□

若设 $w'(z) := w(z/\xi)$，则得到施瓦茨-克里斯托费尔映射 w'，它分别将 0、1、$1/\xi$、∞ 映射到 x_1、x_2、x_3、x_4。

引理 3.2. 设 w 是从上半平面到与引理 *3.1* 中相同的凸四边形 $x_1x_2x_3x_4$ 的施瓦茨-克里斯托费尔映射，并且 w 分别将0、1、ξ、∞ 映射到 x_1、x_2、x_3、x_4。这里，设 $\xi = w^{-1}(x_3) \in (1,\ \infty)$。若 $\alpha_1+\alpha_2 = 1$ 成立，则 w 可表示为关于 $\{z\in\mathbb{H} \mid 1<|z|<\xi\}$的以下幂级数:

$$
\begin{aligned}
w(z) = x_1 + \frac{\sin\pi\alpha_1}{\pi} \frac{x_2-x_1}{{}_2F_1(\alpha_1,1-\alpha_3,1;1/\xi)} &\Bigg[-e^{\pi\alpha_1 i} \sum_{\substack{k,l\geq 0 \\ k\neq l}} \frac{(\alpha)_k(1-\alpha_3)_l}{k!l!} \frac{1}{k-l} z^{-k} \left(\frac{z}{\xi}\right)^l \\
&+ e^{\pi\alpha_1 i} \sum_{n\geq 0} \left[\psi(n+1) - \psi(\alpha_1+n) + \log(-z)\right] \frac{(\alpha_1)_n(1-\alpha_3)_n}{n!n!}\xi^{-n} \Bigg].
\end{aligned}
$$

我们在第3.5小节中使用 $z=\xi$ 的邻域上的 w 幂级数表示。

引理 3.3。 在 $\{z \in \mathbb{H} \mid |\xi^{-} z| < \text{最小值}\{\xi, 1-\xi\}\}$ 上，我们得到

$$w(z) = x_2 + \frac{\Gamma(\alpha_2+\alpha_3)}{\Gamma(\alpha_2+1)\Gamma(\alpha_3)} \frac{x_3 - x_2}{{}_2F_1(\alpha_3, 1-\alpha_1, \alpha_2+\alpha_3; 1-\xi)} \xi^{\alpha_1-1} \cdot \left(\frac{z-\xi}{1-\xi}\right)^{\alpha_2} F_1\left(\alpha_2, 1-\alpha_3, 1-\alpha_1, \alpha_2+1; \frac{z-\xi}{1-\xi}, -\frac{z-\xi}{\xi}\right).$$

我们可以用与 [16] 中引理 4.3 相同的方法证明这个引理。

3.3. 、及树的行为。 我们首先研究 z_4、ϵ 的极限值。在 [16], 中，我们计算了情形 (p_3-p_1) $(p_4-p_2) \neq 0$ 下的这个值。

引理 3.4 ([16])。 如果$(p_3-p_1)(p_4-p_2) > 0$ （分别地，$(p_3-p_1)(p_4-p_2) < 0$）成立，那么我们有

$$\lim_{\epsilon \to +0} z_{4,\epsilon} = z_3 \ (resp.\ z_1).$$

在本节 中，我们计算情形 $(p_3-p_1)(p_4-p_2) = 0$ 下 z_4、ϵ 的极限值。

引理 3.5。 如果$(p_3-p_1)(p_4-p_2) = 0$ 成立，那么我们有

$$\lim_{\epsilon \to +0} z_{4,\epsilon} = 1/2.$$

我们先证明以下引理，以证明引理 3.5。

引理 *3.6.* 设 $L_1^\epsilon, L_2^\epsilon, L_3^\epsilon, L_4^\epsilon$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中满足 $L_i^\epsilon \cap L_{i+1}^\epsilon \neq \emptyset$ 和 $L_i^\epsilon \neq L_{i+1}^\epsilon$ 的直线，其中 $i = 1$ 为 *2, 3,4*。令 $L_i^\epsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y = \epsilon(a_i x + b_i)\}$ $(a_i, b_i \in \mathbb{R})$，其中 $i = 1$ 为 *2, 3,4*。设 $x_i^\epsilon = (p_i, q_j^\epsilon)$ 是 L_i^ϵ 与 L_{i+1}^ϵ 的交点。假设 $L_1^\epsilon, \ldots, L_4^\epsilon$ 构成平行四边形 $(Q_\epsilon; x_1^\epsilon, x_2^\epsilon, x_3^\epsilon, x_4^\epsilon)$。若 $(p_3-p_1)(p_4-p_2) = 0$ 成立，则有

$$\lim_{\epsilon \to +0} M(Q_\epsilon; x_1^\epsilon, x_2^\epsilon, x_3^\epsilon, x_4^\epsilon) = 1.$$

证明。 对于任意 $\epsilon > 0$，都唯一存在 $\xi_\epsilon \in (0, 1)$，使得当 f_ϵ 是从上半平面到满足以下条件的平行四边形 Q_ϵ 的施瓦茨-克里斯托费尔映射时，有 $f_\epsilon(\xi_\epsilon) = x_2^\epsilon$,

$$f_\epsilon(0) = x_1^\epsilon, \ f_\epsilon(1) = x_3^\epsilon, \ f_\epsilon(\infty) = x_4^\epsilon.$$

我们有 $M(Q; x_1, x_2, x_3, x_4) = 1$，当且仅当四边形 $(Q; x_1, x_2, x_3, x_4)$ 与正方形共形等价。因此，只需证明 $\xi_\epsilon \to 1/2$，因为 $\epsilon \to +0$。由于我们有

$$M(Q_\epsilon; x_1^\epsilon, x_2^\epsilon, x_3^\epsilon, x_4^\epsilon) = 1/M(Q_\epsilon; x_2^\epsilon, x_3^\epsilon, x_4^\epsilon, x_1^\epsilon),$$

不失一般性，令 $L_1^\epsilon, \ldots, L_4^\epsilon$ 为

$$L_1^\epsilon = \{(x, \epsilon a_1 x) : x \in \mathbb{R}\}, \ L_2^\epsilon = \{(x, \epsilon a_2 x) : x \in \mathbb{R}\},$$
$$L_3^\epsilon = \{(x, \epsilon(a_1 x + b)) : x \in \mathbb{R}\}, \ L_4^\epsilon = \{(x, \epsilon(a_2 x + b)) : x \in \mathbb{R}\},$$

并假设 $p_4 < 0 < p_2$ 和 $b > 0$。现在我们考虑 $0 \leq a_1 < a_2$ 的情形。首先证明 ξ_ϵ 的极限存在。这里令 $\epsilon_1 > \epsilon_2 > 0$，并比较 $M(Q_{\epsilon_1}; x_1^{\epsilon_1}, x_2^{\epsilon_1}, x_3^{\epsilon_1}, x_4^{\epsilon_1})$ 和 $M(Q_{\epsilon_2}; x_1^{\epsilon_2}, x_2^{\epsilon_2}, x_3^{\epsilon_2}, x_4^{\epsilon_2})$。我们取平行四边形 $(Q'_{\epsilon_2}; x_1^{\epsilon_2}, y_2^{\epsilon_2}, x_3^{\epsilon_2}, y_4^{\epsilon_2})$

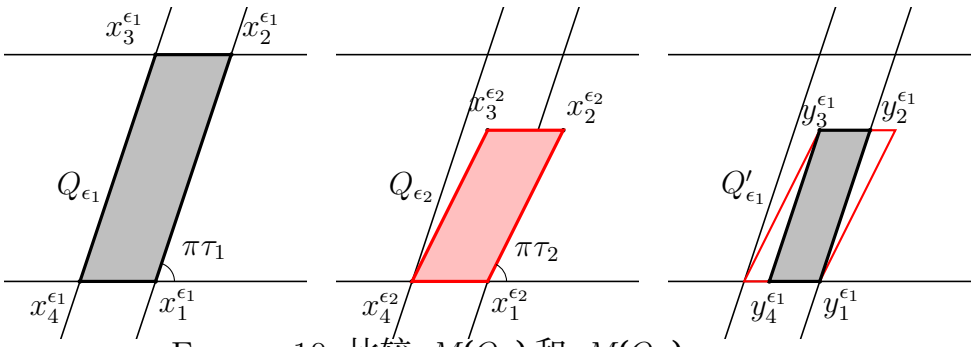

FIGURE 10. 比较 $M(Q_{\epsilon_1})$ 和 $M(Q_{\epsilon_2})$。

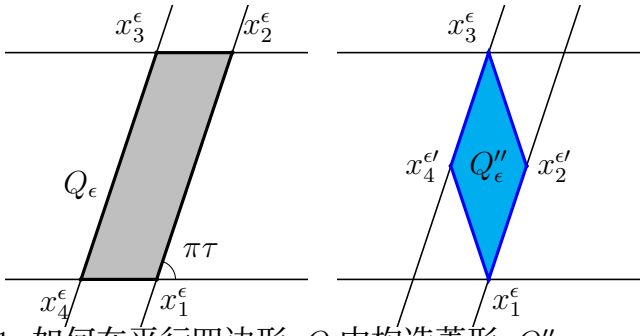

FIGURE 11. 如何在平行四边形 Q_ϵ中构造菱形 Q''_ϵ。

它与平行四边形 $(Q_{\epsilon_2};\ x_1^{\epsilon_2}, x_2^{\epsilon_2}, x_3^{\epsilon_2}, x_4^{\epsilon_2})$ 相似。将 $T^*\mathbb{R}$ 视为复平面 $\mathbb{C}$时，我们有

$$\operatorname{Re} y_2^{\epsilon_2} > \operatorname{Re} x_2^{\epsilon_2}, \operatorname{Im} y_2^{\epsilon_2} < \operatorname{Im} x_2^{\epsilon_2}, \operatorname{Re} y_4^{\epsilon_2} < \operatorname{Re} x_4^{\epsilon_2}, \operatorname{Im} y_4^{\epsilon_2} > \operatorname{Im} x_4^{\epsilon_2}.$$

由命题2.6可得

$$M(Q_{\epsilon_1}; x_1^{\epsilon_1}, x_2^{\epsilon_1}, x_3^{\epsilon_1}, x_4^{\epsilon_1}) < M(Q'_{\epsilon_2}; x_1^{\epsilon_2}, y_2^{\epsilon_2}, x_3^{\epsilon_2}, y_4^{\epsilon_2}) = M(Q_{\epsilon_2}; x_1^{\epsilon_2}, x_2^{\epsilon_2}, x_3^{\epsilon_2}, x_4^{\epsilon_2}).$$

将 $(Q_\epsilon;\ x_4^\epsilon,\ x_1^\epsilon,\ x_2^\epsilon,\ x_3^\epsilon)$ 的共形模记为 $M(Q_\epsilon)$ 时，$M(Q_\epsilon)$ 随着 ϵ 的减小而单调递增。这等价于 ξ_ϵ 随着 ϵ 的减小而单调递减。此外，ξ_ϵ 有上界，因此 ξ_ϵ 的极限值存在。这里记 $\xi_0 := \lim_{\epsilon\to+0}\xi_\epsilon$。另一方面，对于任意 $\epsilon > 0$，存在菱形 $M(Q''_\epsilon; x_4^{\epsilon\prime},\ x_1^\epsilon,\ x_2^{\epsilon\prime},\ x_3^\epsilon)$，使得

$$M(Q_\epsilon; x_4^\epsilon, x_1^\epsilon, x_2^\epsilon, x_3^\epsilon) < M(Q''_\epsilon; x_4^{\epsilon\prime}, x_1^\epsilon, x_2^{\epsilon\prime}, x_3^\epsilon) = 1.$$

于是我们有 $\lim_{\epsilon\to+0} M(Q_\epsilon) \le 1$ 和 $\xi_0 \in [1/2, 1)$。接下来计算 ξ_0。由施瓦茨-克里斯托费尔映射的积分表示可得

$$\frac{|x_4^\epsilon - x_1^\epsilon|}{|x_2^\epsilon - x_1^\epsilon|} = \left|\int_{-\infty}^{0} \zeta^{-\theta^\epsilon}(\zeta-\xi_\epsilon)^{\theta^\epsilon-1}(\zeta-1)^{-\theta^\epsilon}\,d\zeta\right| \Big/ \left|\int_{0}^{\xi_\epsilon} \zeta^{-\theta^\epsilon}(\zeta-\xi_\epsilon)^{\theta^\epsilon-1}(\zeta-1)^{-\theta^\epsilon}\,d\zeta\right|.$$

我们在此设定

$$\theta^\epsilon := \theta_2^\epsilon - \theta_1^\epsilon, \theta_1^\epsilon = \arctan a_1\epsilon, \theta_2^\epsilon = \arctan a_2\epsilon.$$

我们还有

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{0}\zeta^{-\theta^\epsilon}(\zeta-\xi_\epsilon)^{\theta^\epsilon-1}(\zeta-1)^{-\theta^\epsilon}\,d\zeta\right| &= \int_0^1 s^{\theta^\epsilon-1}(1-s)^{-\theta^\epsilon}(1-(1-\xi_\epsilon)s)^{\theta^\epsilon-1}\,ds\\ &= B(\theta^\epsilon,1-\theta^\epsilon)\ {}_2F_1(\theta^\epsilon,1-\theta^\epsilon,1;1-\xi_\epsilon)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\left|\int_{0}^{\xi_\epsilon}\zeta^{-\theta^\epsilon}(\zeta-\xi_\epsilon)^{\theta^\epsilon-1}(\zeta-1)^{-\theta^\epsilon}\,d\zeta\right| &= \int_0^1 s^{-\theta^\epsilon}(1-s)^{\theta^\epsilon-1}(1-\xi_\epsilon s)^{-\theta^\epsilon}\,ds\\ &= B(\theta^\epsilon,1-\theta^\epsilon)\ {}_2F_1(1-\theta^\epsilon,\theta^\epsilon,1;\xi_\epsilon).\end{aligned}$$

由于 $x_4^\epsilon,\ \ x_1^\epsilon\in L_1^\epsilon$ 且 $x_1^\epsilon,\ \ x_2^\epsilon\in L_2^\epsilon$, 因此有

$$\frac{|x_4^\epsilon-x_1^\epsilon|}{|x_2^\epsilon-x_1^\epsilon|}=\frac{|p_4-p_1|}{\cos\theta_1^\epsilon}\Big/\frac{|p_1-p_2|}{\cos\theta_2^\epsilon}=\frac{\cos\theta_2^\epsilon}{\cos\theta_1^\epsilon}.$$

于是得到

$$\cos\theta_2^\epsilon\ {}_2F_1(1-\theta^\epsilon,\theta^\epsilon,1;\xi_\epsilon)-\cos\theta_1^\epsilon\ {}_2F_1(\theta^\epsilon,1-\theta^\epsilon,1;1-\xi_\epsilon)=0.$$

由引理 2.3 可得

$$\begin{aligned}&{}_2F_1(\theta^\epsilon,1-\theta^\epsilon,1;\xi_\epsilon)\\ &=\frac{1}{\Gamma(\theta^\epsilon)\Gamma(1-\theta^\epsilon)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\theta^\epsilon)_n(1-\theta^\epsilon)_n}{n!n!}(1-\xi_\epsilon)^n\\ &\qquad\cdot\{2\psi(n+1)-\psi(\theta^\epsilon+n)-\psi(1-\theta^\epsilon+n)-\log(1-\xi_\epsilon)\}\\ &=-\frac{\log(1-\xi_\epsilon)}{\Gamma(\theta^\epsilon)\Gamma(1-\theta^\epsilon)}\ {}_2F_1(\theta^\epsilon,1-\theta^\epsilon,1;1-\xi_\epsilon)+\frac{1}{\Gamma(\theta^\epsilon)\Gamma(1-\theta^\epsilon)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\theta^\epsilon)_n(1-\theta^\epsilon)_n}{n!n!}(1-\xi_\epsilon)^n\\ &\qquad\cdot\{2\psi(n+1)-\psi(\theta^\epsilon+n)-\psi(1-\theta^\epsilon+n)\}\end{aligned}$$

于是我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{\cos\theta_2^\epsilon}{\Gamma(\theta^\epsilon)\Gamma(1-\theta^\epsilon)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\theta^\epsilon)_n(1-\theta^\epsilon)_n}{n!n!}(2\psi(n+1)-\psi(\theta^\epsilon+n)-\psi(1-\theta^\epsilon+n))(1-\xi_\epsilon)^n\\ &\quad-\frac{\cos\theta_2^\epsilon\log(1-\xi_\epsilon)}{\Gamma(\theta^\epsilon)\Gamma(1-\theta^\epsilon)}\ {}_2F_1(\theta^\epsilon,1-\theta^\epsilon,1;1-\xi_\epsilon)-\cos\theta_1^\epsilon\ {}_2F_1(\theta^\epsilon,1-\theta^\epsilon,1;1-\xi_\epsilon)=0.\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\log(1-\xi_\epsilon) =&\frac{1}{{}_2F_1(\theta^\epsilon,1-\theta^\epsilon,1;1-\xi_\epsilon)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\theta^\epsilon)_n(1-\theta^\epsilon)_n}{n!n!}(2\psi(n+1)-\psi(1-\theta^\epsilon+n))(1-\xi_\epsilon)^n\\ &-\frac{1}{{}_2F_1(\theta^\epsilon,1-\theta^\epsilon,1;1-\xi_\epsilon)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\theta^\epsilon)_n(1-\theta^\epsilon)_n}{n!n!}\psi(\theta^\epsilon+n)(1-\xi_\epsilon)^n\\ &+\frac{1}{\theta^\epsilon\ {}_2F_1(\theta^\epsilon,1-\theta^\epsilon,1;1-\xi_\epsilon)}-\frac{\cos\theta_1^\epsilon}{\theta^\epsilon\cos\theta_2^\epsilon}\Gamma(\theta^\epsilon+1)\Gamma(1-\theta^\epsilon)\\ &-\frac{\psi(\theta^\epsilon+1)}{{}_2F_1(\theta^\epsilon,1-\theta^\epsilon,1;1-\xi_\epsilon)}.\end{aligned}$$

由于有 $\theta_1^\epsilon,\ \theta_2^\epsilon,\ \theta^\epsilon\to 0\ (\epsilon\to+0)$，最右侧的前三项在 $\epsilon\to+0$ 时趋于零。因此，我们在此计算其极限值

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\theta^\epsilon\ {}_2F_1(\theta^\epsilon,1-\theta^\epsilon,1;1-\xi_\epsilon)}-\frac{\cos\theta_1^\epsilon}{\theta^\epsilon\cos\theta_2^\epsilon}\Gamma(\theta^\epsilon+1)\Gamma(1-\theta^\epsilon)\\ &=\frac{1}{\cos\theta_2^\epsilon\ {}_2F_1(\theta^\epsilon,1-\theta^\epsilon,1;1-\xi_\epsilon)}\\ &\qquad\cdot\frac{\cos\theta_2^\epsilon-\cos\theta_1^\epsilon\Gamma(\theta^\epsilon+1)\Gamma(1-\theta^\epsilon)\ {}_2F_1(\theta^\epsilon,1-\theta^\epsilon,1;1-\xi_\epsilon)}{\theta^\epsilon}\end{aligned}$$

首先得到

$$\lim_{\epsilon\to+0}\frac{1}{\cos\theta_2^\epsilon\ {}_2F_1(\theta^\epsilon,1-\theta^\epsilon,1;1-\xi_\epsilon)}=1. \tag{8}$$

有

$$\begin{aligned}&\frac{\cos\theta_2^\epsilon-\cos\theta_1^\epsilon\Gamma(\theta^\epsilon+1)\Gamma(1-\theta^\epsilon)\ {}_2F_1(\theta^\epsilon,1-\theta^\epsilon,1;1-\xi_\epsilon)}{\theta^\epsilon}\\ &=\frac{\cos\theta_2^\epsilon-\cos\theta_1^\epsilon\Gamma(\theta^\epsilon+1)\Gamma(1-\theta^\epsilon)}{\theta^\epsilon}-\cos\theta_1^\epsilon\Gamma(\theta^\epsilon+1)\Gamma(1-\theta^\epsilon)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\theta^\epsilon+1)_{n-1}(1-\theta^\epsilon)_n}{n!n!}(1-\xi_\epsilon)^n.\end{aligned} \tag{9}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to+0}\cos\theta_1^\epsilon\Gamma(\theta^\epsilon+1)\Gamma(1-\theta^\epsilon)\sum_{n=1}^{\infty}&\frac{(\theta^\epsilon+1)_{n-1}(1-\theta^\epsilon)_n}{n!n!}(1-\xi_\epsilon)^n\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(1-\xi_0)^n=-\log\xi_0.\end{aligned} \tag{10}$$

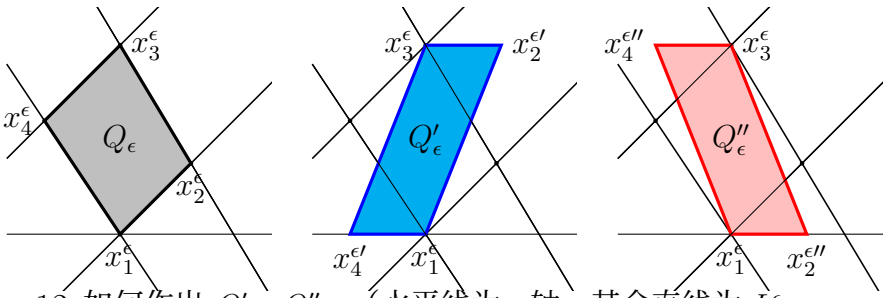

FIGURE 12. 如何作出 Q'_ϵ, Q''_ϵ。（水平线为 x轴，其余直线为 L_1^ϵ，……，L_4^ϵ。）

此外还有

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos\theta_2^\epsilon - \cos\theta_1^\epsilon\Gamma(\theta^\epsilon+1)\Gamma(1-\theta^\epsilon)}{\theta^\epsilon}\\
&= \frac{\cos^2\theta_2^\epsilon - \cos^2\theta_1^\epsilon(\Gamma(\theta^\epsilon+1)\Gamma(1-\theta^\epsilon))^2}{\theta^\epsilon}\frac{1}{\cos\theta_2^\epsilon + \cos\theta_1^\epsilon\Gamma(\theta^\epsilon+1)\Gamma(1-\theta^\epsilon)}\\
&= \left\{\frac{1-\Gamma(\theta^\epsilon+1)^2\Gamma(1-\theta^\epsilon)^2}{\theta^\epsilon} - \left(\frac{\sin\theta_2^\epsilon}{\theta_2^\epsilon}\right)^2\left(\frac{\theta_2^\epsilon}{\epsilon}\right)^2\frac{\epsilon^2}{\theta^\epsilon} + \left(\frac{\sin\theta_1^\epsilon}{\theta_1^\epsilon}\right)^2\left(\frac{\theta_1^\epsilon}{\epsilon}\right)^2\frac{\epsilon^2}{\theta^\epsilon}\right\}\\
&\qquad\cdot\frac{1}{\cos\theta_2^\epsilon + \cos\theta_1^\epsilon\Gamma(\theta^\epsilon+1)\Gamma(1-\theta^\epsilon)} \qquad (11)
\end{aligned}$$

函数 $g(x) = 1-\Gamma(x+1)^2\Gamma(1-x)^2$ $(x\in\mathbb{R})$在$x=0$ 的邻域内是光滑的，并且满足 $g(0)=0$。于是我们得到

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to+0}\frac{1-\Gamma(\theta^\epsilon+1)^2\Gamma(1-\theta^\epsilon)^2}{\theta^\epsilon} = \frac{dg}{dx}(0)\\
&= \left(-2\Gamma(x+1)\Gamma(1-x)^2 + 2\Gamma(1-x)\Gamma(x+1)^2\right)\Big|_{x=0} = 0. \qquad (12)
\end{aligned}$$

由(8)-(12)，我们最终得到

$$\lim_{\epsilon\to+0}\left(\frac{1}{\theta^\epsilon\ {}_2F_1(\theta^\epsilon, 1-\theta^\epsilon, 1; 1-\xi_\epsilon)} - \frac{\cos\theta_1^\epsilon}{\theta^\epsilon\cos\theta_2^\epsilon}\Gamma(\theta^\epsilon+1)\Gamma(1-\theta^\epsilon)\right) = \log\xi_0.$$

因此我们得到$\log(1-\xi_0) = \log\ \xi_0$，由此可得 $\xi_0 = 1/2$。我们也可以用类似的方法考虑 $a_1 < a_2 \le 0$的情形。当 $a_1 < 0 < a_2$ 成立时，我们可以取两个平行四边形（Q'_ϵ；x_1^ϵ，$x_2^{\epsilon\prime}$，x_3^ϵ，$x_4^{\epsilon\prime}$）和（Q''_ϵ；x_1^ϵ，$x_2^{\epsilon\prime\prime}$，$x_3^\epsilon$，$x_4^{\epsilon\prime\prime}$），其边平行于 x轴，使得

$$M(Q'_\epsilon; x_1^\epsilon, x_2^{\epsilon\prime}, x_3^\epsilon, x_4^{\epsilon\prime}) < M(Q_\epsilon; x_1^\epsilon, x_2^\epsilon, x_3^\epsilon, x_4^\epsilon) < M(Q''_\epsilon; x_1^\epsilon, x_2^{\epsilon\prime\prime}, x_3^\epsilon, x_4^{\epsilon\prime\prime})$$

利用命题2.6。平行四边形 Q'_ϵ 和 Q''_ϵ的共形模的极限值为 1，这一点我们已在 $a_1 < a_2 \le 0$ 或 $0 \le a_1 < a_2$的情形中讨论过。因此，我们得到$M(Q_\epsilon; x_1^\epsilon, x_2^\epsilon, x_3^\epsilon, x_4^\epsilon) \to 1$，当 $\epsilon\to+0$时成立。□

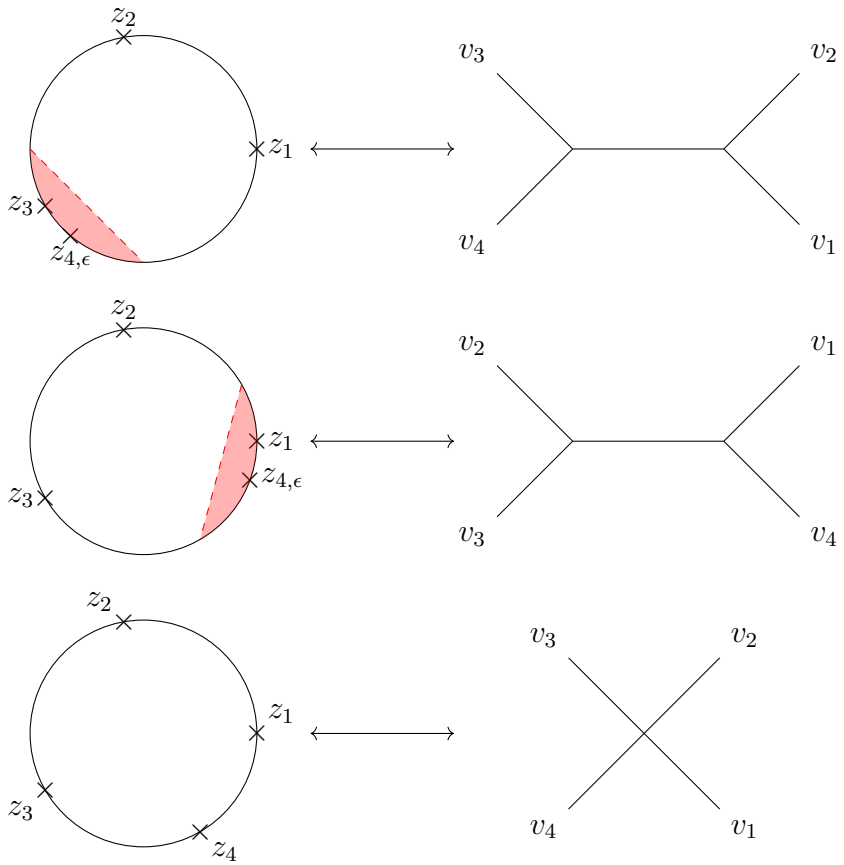

FIGURE 13. 边界碰撞与树之间的对应关系（第一行和第二行转载自 [16]）。

利用引理 3.6，我们可以证明 $(p_3 - p_1)(p_4 - p_2) = 0$ 时的引理 3.5。这里我们假设 $p_1 = p_3$。我们可以取两个平行四边形 $(Q'_\epsilon;\ x_1^\epsilon, x_2^{\epsilon\prime}, x_3^\epsilon, x_4^{\epsilon\prime})$ 和 $(Q''_\epsilon;\ x_1^\epsilon, x_2^{\epsilon\prime\prime}, x_3^\epsilon, x_4^{\epsilon\prime\prime})$，使得

$$M(Q'_\epsilon; x_1^\epsilon, x_2^{\epsilon\prime}, x_3^\epsilon, x_4^{\epsilon\prime}) < M(Q_\epsilon; x_1^\epsilon, x_2^\epsilon, x_3^\epsilon, x_4^\epsilon) < M(Q''_\epsilon; x_1^\epsilon, x_2^{\epsilon\prime\prime}, x_3^\epsilon, x_4^{\epsilon\prime\prime})$$

由引理 3.6，我们得到

$$\lim_{\epsilon\to+0} M(Q_\epsilon; x_1^\epsilon, x_2^\epsilon, x_3^\epsilon, x_4^\epsilon) = 1,$$

由此得到引理 3.5。类似地，我们也可以讨论 $p_2 = p_4$ 的情形。这里令 $z_4 = 1/2$，并将上半平面与单位圆盘等同起来。若 $z_{4,\ \epsilon}$ 趋于 z_3 或 z_1，则会发生边界碰撞，并从带有四个标记点的单位圆盘 $[z_1, z_2, z_3, z_{4,\epsilon}]$ 中产生平坦气泡。众所周知，这些边界碰撞对应于图 13 所示的树。另一方面，单位圆盘 $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ 对应于图 13 所示的树（见 [4]）。通过比较表 1 以及引理 3.4 和 3.5 中的结果，我们得到以下引理。

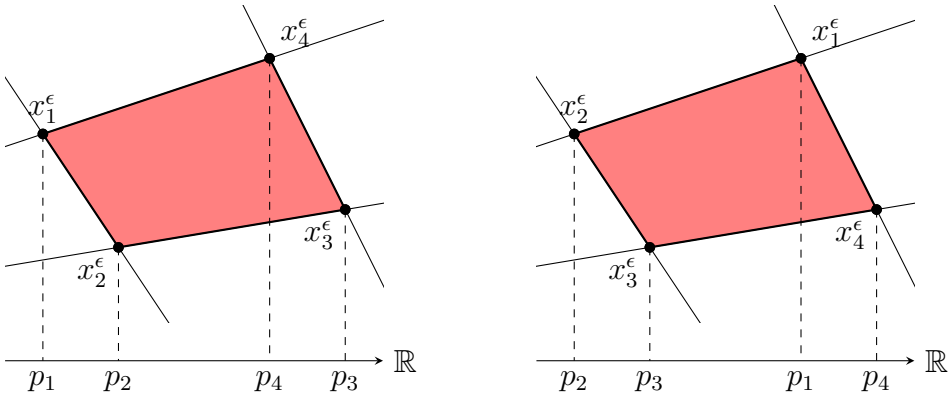

FIGURE 14. 与情形（p_3-p_1）（p_4-p_2）（左侧）和（p_3-p_1）（p_4-p_2）（右侧）相对应的四边形图。（转载自 [16]。）

引理3.7。 设 f_1、 f_2、 f_3、 f_4 是函数，使得$(f_1$、 f_2、 f_3、 $f_4)$ 不是一般位置。那么，与由 $\epsilon \to +0$ 对具有四个点z_1、 z_2、 z_3、$z_{4,\epsilon}$ 的上半平面进行变形相对应的树，与用于构造梯度树 $I \in \mathcal{M}_g(\mathbb{R};\, \vec{f}$、 $\vec{p})$的树同构。

接下来，我们研究情形 $(p_3-p_1)(p_4-p_2) \neq 0$ 中内部边的长度 $l>0$。在[16], 中，我们假设 $(f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4)$ 处于一般位置，并在引理4.7中通过考察 $z_{4,\ \epsilon}$ 的行为证明了长度 l 是由此诱导的。本节中，我们证明，即使凸四边形 $x_1^\epsilon x_2^\epsilon x_3^\epsilon x_4^\epsilon$ 有一对平行的对边， [16] 中的引理4.7仍然成立。

引理 3.8。 我们假设$(f_1$、 f_2、 f_3、 $f_4)$ 不是一般位置。若$(p_3-p_1)(p_4-p_2)>0$（分别地，若 $(p_3-p_1)(p_4-p_2)<0$）成立，则有

$$\log z_{4,\epsilon} \sim -\frac{\pi l}{\epsilon} \ \left(resp.\ \log(1-z_{4,\epsilon}) \sim -\frac{\pi l}{\epsilon} \right)\ (\epsilon \to +0).$$

证明。 我们只证明 $(p_3-p_1)(p_4-p_2)>0$ 的情形。当 $\alpha_1^\epsilon+\alpha_2^\epsilon \neq 1$ 成立时，也就是说，四边形 $x_1^\epsilon x_2^\epsilon x_3^\epsilon x_4^\epsilon$ （图14左侧）的两条边 $x_1^\epsilon x_4^\epsilon$ 和 $x_2^\epsilon x_3^\epsilon$ 平行时，即使 $x_1^\epsilon x_2^\epsilon$ 和 $x_4^\epsilon x_3^\epsilon$ 是.....，我们也可以像 [16] 中那样证明引理 3.8。

平行。T 因此，我们只讨论 $\alpha_1^\epsilon + \alpha_2^\epsilon = 1$ 的情形。根据引理 3.1，我们有

$$
\begin{aligned}
w(z) = x_1 + \frac{\sin \pi\alpha_1}{\pi} \frac{x_2 - x_1}{{}_2F_1(\alpha_1, 1, 1-\alpha_3; \xi)} \\
\cdot \Bigg[-e^{\pi\alpha_1 i} \sum_{\substack{k,l\geq 0 \\ k\neq l}} \frac{(\alpha)_k (1-\alpha_3)_l}{k!l!} \frac{1}{k-l} \left(\frac{z}{\xi}\right)^{-k} z^l \\
+ e^{\pi\alpha_1 i} \sum_{n\geq 0} \left[\psi(n+1) - \psi(\alpha_1 + n) + \log z - \log \xi - \pi i\right] \frac{(\alpha_1)_n (1-\alpha_3)_n}{n!n!} \xi^n \Bigg].
\end{aligned} \tag{13}
$$

对于 $\xi < |z| < 1$ 和 $|\arg(-z/\xi)| < \pi$。结合引理 2.2 和引理 4.3（[16]），我们还可得

$$
\begin{aligned}
w(z) = x_4 + e^{\pi(\alpha_3 - 1)i} \frac{\sin \pi\alpha_3}{\pi} \frac{x_3 - x_4}{{}_2F_1(\alpha_1, 1-\alpha_3, 1; \xi)} \Bigg[-\sum_{\substack{k,l\geq 0 \\ k\neq l}} \frac{(1-\alpha_3)_k (\alpha_1)_l}{k!l!} \frac{1}{k-l} \left(\frac{1}{z}\right)^{-k} \left(\frac{\xi}{z}\right)^l \\
+ \sum_{n\geq 0} \left[\psi(n+1) - \psi(1-\alpha_3+n) + \log\left(-\frac{1}{z}\right)\right] \frac{(\alpha_1)_n (1-\alpha_3)_n}{n!n!} \xi^n \Bigg].
\end{aligned}
$$

对于 $\xi < |z| < 1$和 $|\arg(-1/z)| < \pi$。这里，当 $-\infty < 1/z < \xi/z < 0$ 时，$\arg(-1/z) = 0$ 成立；当 $0 < \xi/z < 1/z < \infty$ 时，$\arg(1/z) = 0$ 也成立。于是，我们有$-1/z = 1/z \cdot \exp[\pi i]$。因此，我们得到

$$
\begin{aligned}
w(z) = x_4 + e^{\pi(\alpha_3 - 1)i} \frac{\sin \pi\alpha_3}{\pi} \frac{x_3 - x_4}{{}_2F_1(\alpha_1, 1-\alpha_3, 1; \xi)} \\
\cdot \Bigg[-\sum_{\substack{k,l\geq 0 \\ k\neq l}} \frac{(1-\alpha_3)_k (\alpha_1)_l}{k!l!} \frac{1}{k-l} \left(\frac{1}{z}\right)^{-k} \left(\frac{\xi}{z}\right)^l \\
+ \sum_{n\geq 0} \left[\psi(n+1) - \psi(1-\alpha_3+n) - \log z + \pi i\right] \frac{(\alpha_1)_n (1-\alpha_3)_n}{n!n!} \xi^n \Bigg].
\end{aligned}
$$

我们还有

$$
\begin{aligned}
(x_2 - x_1) e^{\pi\alpha_1 i} \sin \pi\alpha_1 &= |x_2 - x_1| \sin \pi\alpha_1 \frac{x_4 - x_1}{|x_4 - x_1|} \\
&= |x_4 - x_3| \sin \pi\alpha_3 \frac{x_4 - x_1}{|x_4 - x_1|} \\
&= (x_4 - x_3) e^{\pi(\alpha_3 - 1)i} \sin \pi\alpha_3 e^{-\pi\alpha_1 i}.
\end{aligned}
$$

于是得到如下结果:

$$w(z) = x_4 - e^{\pi\alpha_1 i}\frac{\sin\pi\alpha_1}{\pi}\frac{x_2-x_1}{{}_2F_1(\alpha_1,1-\alpha_3,1;\xi)} \cdot \left[-\sum_{\substack{k,l\geq 0\\ k\neq l}}\frac{(1-\alpha_3)_k(\alpha_1)_l}{k!l!}\frac{1}{k-l}\left(\frac{1}{z}\right)^{-k}\left(\frac{\xi}{z}\right)^{l} + \sum_{n\geq 0}\left[\psi(n+1)-\psi(1-\alpha_3+n)-\log z+\pi i\right]\frac{(\alpha_1)_n(1-\alpha_3)_n}{n!n!}\xi^n\right]. \tag{14}$$

施瓦茨-克里斯托费尔映射 w 定义在上半平面上，即 $0 \leq \arg z \leq \pi$。此外，当 $0 < \arg z < \pi$ 时，(13) 和 (14) 也成立。因此，我们得到

$$x_1 + \frac{\sin\pi\alpha_1}{\pi}\frac{x_2-x_1}{{}_2F_1(\alpha_1,1,1-\alpha_3;\xi)}e^{\pi\alpha_1 i}\sum_{n\geq 0}\left[\psi(n+1)-\psi(\alpha_1+n)-\log\xi\right]\frac{(\alpha_1)_n(1-\alpha_3)_n}{n!n!}\xi^n$$
$$= x_4 - e^{\pi\alpha_1 i}\frac{\sin\pi\alpha_1}{\pi}\frac{x_2-x_1}{{}_2F_1(\alpha_1,1-\alpha_3,1;\xi)}\sum_{n\geq 0}\left[\psi(n+1)-\psi(1-\alpha_3+n)\right]\frac{(\alpha_1)_n(1-\alpha_3)_n}{n!n!}\xi^n.$$

由此可得:

$$-\frac{\epsilon}{\pi}\log\xi = \frac{x_4-x_1}{x_2-x_1}e^{-\pi\alpha_1 i}\frac{\epsilon}{\sin\pi\alpha_1} - \frac{\epsilon}{\pi}\sum_{n\geq 0}\frac{2\psi(n+1)-\psi(\alpha_1+n)-\psi(1-\alpha_3+n)}{{}_2F_1(\alpha_1,1-\alpha_3,1;\xi)}\frac{(\alpha_1)_n(1-\alpha_3)_n}{n!n!}\xi^n.$$

这里假设 $\alpha_1 \to 0$, $\alpha_3 \to 1$。只有两种情况

$$p_1 < p_2 < p_3 < p_4,\ a_2 < a_1 = a_3 < a_4$$
$$p_1 > p_2 > p_3 > p_4,\ a_2 < a_1 = a_3 < a_4$$

满足这些条件。由引理 2.1 可得

$$\lim_{\epsilon\to+0}\frac{\epsilon}{\sin\pi\alpha_1} = \lim_{\epsilon\to+0}\frac{\pi\alpha_1}{\sin\pi\alpha_1}\frac{\epsilon}{\pi\alpha_1} = \frac{1}{a_1-a_2}.$$

根据 ψ 函数的性质

$$\lim_{z\to 0} z\psi(z) = \lim_{z\to 0}(z\psi(z+1)-1) = -1,$$

我们还有

$$\lim_{\epsilon\to+0}\epsilon\psi(\alpha_1) = \lim_{\epsilon\to+0}\left(\frac{\epsilon}{\alpha_1}\cdot\alpha_1\psi(\alpha_1)\right) = -\frac{\pi}{a_1-a_2},\ \lim_{\epsilon\to+0}\epsilon\psi(1-\alpha_3) = -\frac{\pi}{a_4-a_1}.$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to+0} -\frac{\epsilon}{\pi}\log\xi = \frac{p_4-p_1}{p_2-p_1}\frac{1}{a_1-a_2} - \frac{1}{a_1-a_2} - \frac{1}{a_4-a_1} \\
&= (p_4-p_1)\Big/\left\{\left(-\frac{b_3-b_2}{a_1-a_2}+\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}\right)\cdot(a_1-a_2)\right\} - \frac{1}{a_1-a_2} - \frac{1}{a_4-a_1} \\
&= -\frac{p_4-p_1}{b_3-b_1} - \frac{1}{a_1-a_2} - \frac{1}{a_4-a_1}
\end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$I_{int}(t) = -(b_3-b_1)t + p_2,$$

其中， I_{int} 是梯度树 I 在内部边上的限制。存在唯一的正实数 $l>0$ ，使得 $I_{int}(l) = p_3$。于是，我们得到

$$\begin{aligned}
l &= -\frac{p_3-p_2}{b_3-b_1} = -\left(-\frac{b_4-b_3}{a_4-a_1}+\frac{b_3-b_2}{a_1-a_2}\right)\cdot\frac{1}{b_3-b_1} \\
&= -\left(p_4 - \frac{b_1-b_3}{a_4-a_1} - p_1 + \frac{b_3-b_1}{a_1-a_2}\right)\cdot\frac{1}{b_3-b_1} \\
&= -\frac{p_4-p_1}{b_3-b_1} - \frac{1}{a_4-a_1} - \frac{1}{a_1-a_2} = \lim_{\epsilon\to+0} -\frac{\epsilon}{\pi}\log\xi.
\end{aligned}$$

其他情形的证明与上述类似。 □

3.4. 定理 3.1 的证明。我们这里只证明定理 3.1 在 $a_2 < a_1 = a_3 < a_4$, $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$ 的情形，因为其他情形的证明方法类似。**(3)**也可以用 [16]中的相同方法证明。我们先证明**(1)**。我们有

$$\begin{aligned}
w_\epsilon(z) = x_3^\epsilon + e^{\pi(2-\alpha_4^\epsilon-\alpha_1^\epsilon)}&\frac{x_4-x_3}{{}_2F_1(\alpha_3^\epsilon, 1-\alpha_1^\epsilon, 1; z_{4,\epsilon})}\frac{1}{\Gamma(\alpha_3^\epsilon)\Gamma(\alpha_4^\epsilon)} \\
&\cdot\int_0^z \zeta^{\alpha_3^\epsilon-1}(\zeta-z_{4,\epsilon})^{\alpha_4^\epsilon-1}(\zeta-1)^{\alpha_1^\epsilon-1}\,d\zeta
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_{4,\epsilon}}&\int_0^z \zeta^{\alpha_3^\epsilon-1}(\zeta-z_{4,\epsilon})^{\alpha_4^\epsilon-1}(\zeta-1)^{\alpha_1^\epsilon-1}\,d\zeta \\
&= e^{\alpha_4^\epsilon+\alpha_1^\epsilon-2}\Gamma(\alpha_3^\epsilon)\Gamma(\alpha_4^\epsilon)\,{}_2F_1(\alpha_3^\epsilon, 1-\alpha_1^\epsilon, 1; z_{4,\epsilon}).
\end{aligned}$$

当 $z \in \mathbb{H}$ 满足 $z \in D(\delta)$ 和 $|z| \leq 1$时，我们得到

$$
\begin{aligned}
&|w_\epsilon(z) - p_2| \\
&< \left| x_3^\epsilon - p_2 + e^{\pi(1+\alpha_3^\epsilon-\alpha_1^\epsilon)} \frac{x_4 - x_3}{{}_2F_1(\alpha_3^\epsilon, 1-\alpha_1^\epsilon, 1; z_{4,\epsilon})} \frac{1}{\Gamma(\alpha_3^\epsilon)\Gamma(1-\alpha_3^\epsilon)} \right. \\
&\qquad \left. \cdot \int_0^{\delta z/|z|} \zeta^{\alpha_3^\epsilon - 1} (\zeta - z_{4,\epsilon})^{-\alpha_3^\epsilon} (\zeta - 1)^{\alpha_1^\epsilon - 1} \, d\zeta \right| \qquad (15) \\
&+ \left| \frac{x_4 - x_3}{{}_2F_1(\alpha_3^\epsilon, 1-\alpha_1^\epsilon, 1; z_{4,\epsilon})} \frac{1}{\Gamma(\alpha_3^\epsilon)\Gamma(1-\alpha_3^\epsilon)} \right. \\
&\qquad \left. \cdot \int_{\delta z/|z|}^{z} \zeta^{\alpha_3^\epsilon - 1} (\zeta - z_{4,\epsilon})^{-\alpha_3^\epsilon} (\zeta - 1)^{\alpha_1^\epsilon - 1} \, d\zeta \right| .
\end{aligned}
$$

由引理 3.1，得

$$
\begin{aligned}
&x_3^\epsilon + e^{\pi(1+\alpha_3^\epsilon-\alpha_1^\epsilon)} \frac{x_4 - x_3}{{}_2F_1(\alpha_3^\epsilon, 1-\alpha_1^\epsilon, 1; z_{4,\epsilon})} \frac{1}{\Gamma(\alpha_3^\epsilon)\Gamma(1-\alpha_3^\epsilon)} \\
&\qquad \cdot \int_0^{\delta z/|z|} \zeta^{\alpha_3^\epsilon - 1} (\zeta - z_{4,\epsilon})^{-\alpha_3^\epsilon} (\zeta - 1)^{\alpha_1^\epsilon - 1} \, d\zeta \\
=& x_3 + \frac{\sin \pi\alpha_3}{\pi} \frac{x_4 - x_3}{{}_2F_1(\alpha_3, 1-\alpha_1, 1; \xi)} \left[-e^{\pi\alpha_3 i} \sum_{\substack{k,l \geq 0 \\ k \neq l}} \frac{(\alpha)_k (1-\alpha_1)_l}{k! l!} \frac{1}{k-l} \left(\frac{\delta z}{\xi \, |z|} \right)^{-k} \left(\delta \frac{z}{|z|} \right)^{l} \right. \\
&\qquad \left. + e^{\pi\alpha_3 i} \sum_{n \geq 0} \left[\psi(n+1) - \psi(\alpha_3 + n) + \log\left(-\frac{\delta z}{\xi \, |z|} \right) \right] \frac{(\alpha_3)_n (1-\alpha_1)_n}{n! n!} \xi^n \right] .
\end{aligned}
$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}
&\left| x_3^\epsilon - p_2 + e^{\pi(1+\alpha_3^\epsilon-\alpha_1^\epsilon)} \frac{x_4-x_3}{{}_2F_1(\alpha_3^\epsilon, 1-\alpha_1^\epsilon, 1; z_{4,\epsilon})} \frac{1}{\Gamma(\alpha_3^\epsilon)\Gamma(1-\alpha_3^\epsilon)} \right. \\
&\qquad\qquad \left. \cdot \int_0^{\delta z/|z|} \zeta^{\alpha_3^\epsilon-1}(\zeta - z_{4,\epsilon})^{-\alpha_3^\epsilon}(\zeta-1)^{\alpha_1^\epsilon-1}\, d\zeta \right| \\
\leq &\left| x_3^\epsilon - p_2 + \frac{\sin\pi\alpha_3}{\pi} \frac{x_4-x_3}{{}_2F_1(\alpha_3, 1-\alpha_1, 1; \xi)} e^{\pi\alpha_3 i} \right. \\
&\qquad \left. \cdot \sum_{n\geq 0} \left[\psi(n+1) - \psi(\alpha_3+n) - \log\xi\right] \frac{(\alpha_3)_n(1-\alpha_1)_n}{n!n!}\xi^n \right| \\
&\quad + \left| \frac{\sin\pi\alpha_3}{\pi} \frac{x_4-x_3}{{}_2F_1(\alpha_3, 1-\alpha_1, 1; \xi)} \sum_{\substack{k,l\geq 0 \\ k\neq l}} \frac{(\alpha_3)_k(1-\alpha_1)_l}{k!l!} \frac{1}{k-l} \left(\frac{\delta z}{\xi\,|z|}\right)^{-k} \left(\delta\frac{z}{|z|}\right)^{l} \right| \\
&\qquad + \left| \frac{\sin\pi\alpha_3}{\pi}(x_4-x_3)\log\left(-\frac{\delta z}{\xi\,|z|}\right) \right|
\end{aligned} \tag{16}$$

这里记作

$$\begin{aligned}
M_{0,\epsilon,1} \coloneqq &\left| x_3^\epsilon - p_2 + \frac{\sin\pi\alpha_3}{\pi} \frac{x_4-x_3}{{}_2F_1(\alpha_3, 1-\alpha_1, 1; \xi)} e^{\pi\alpha_3 i} \right. \\
&\qquad \left. \cdot \sum_{n\geq 0} \left[\psi(n+1) - \psi(\alpha_3+n) - \log\xi\right] \frac{(\alpha_3)_n(1-\alpha_1)_n}{n!n!}\xi^n \right|.
\end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{\substack{k,l\geq 0 \\ k\neq l}} \frac{(\alpha_3)_k(1-\alpha_1)_l}{k!l!} \frac{1}{k-l} \left(\frac{\delta z}{\xi\,|z|}\right)^{-k} \left(\delta\frac{z}{|z|}\right)^{l} \right| \leq \sum_{\substack{k,l\geq 0 \\ k\neq l}} \frac{(\alpha_3)_k(1-\alpha_1)_l}{k!l!} \left(\frac{\delta}{\xi}\right)^{-k} \delta^l \\
&\qquad = F_1\left(\alpha_3, 1-\alpha_1, 1, 1; \frac{\xi}{\delta}, \delta\right) - {}_2F_1(\alpha_3, 1-\alpha_1, 1; \xi).
\end{aligned} \tag{17}$$

我们在此提出

$$M_{0,\epsilon,2} \coloneqq \left| \frac{\sin\pi\alpha_3}{\pi} \frac{x_4-x_3}{{}_2F_1(\alpha_3, 1-\alpha_1, 1; \xi)} \left[F_1\left(\alpha_3, 1-\alpha_1, 1, 1; \frac{\xi}{\delta}, \delta\right) - {}_2F_1(\alpha_3, 1-\alpha_1, 1; \xi) \right] \right|.$$

我们还有

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sin\pi\alpha_3}{\pi}(x_4-x_3)\log\left(-\frac{\delta z}{|z|}\right)\right| &= \left|\frac{\sin\pi\alpha_3}{\pi}(x_4-x_3)\left(\log\delta+\log\left(-\frac{z}{|z|}\right)\right)\right| \\ &\le \left|\frac{\sin\pi\alpha_3}{\pi}(x_4-x_3)\right|\cdot|\log\delta-\pi i|\,.\end{aligned} \tag{18}$$

这里令

$$M_{0,\epsilon,3} \coloneqq \left|\frac{\sin\pi\alpha_3}{\pi}(x_4-x_3)\right|\cdot|\log\delta-\log\xi-\pi i|\,.$$

我们还有

$$\begin{aligned}\int_{\delta z/|z|}^{z}\zeta^{\alpha_3^\epsilon-1}(\zeta-z_{4,\epsilon})^{-\alpha_3^\epsilon}(\zeta-1)^{\alpha_1^\epsilon-1}\,d\zeta &< \int_{\delta}^{|z|}s^{\alpha_3^\epsilon-1}\left|\frac{z}{|z|}s-z_{4,\epsilon}\right|^{-\alpha_3^\epsilon}\left|\frac{z}{|z|}s-1\right|^{\alpha_1^\epsilon-1}ds \\ &<\delta^{\alpha_3^\epsilon-1}(\delta-z_{4,\epsilon})^{-\alpha_3^\epsilon}\delta^{\alpha_1^\epsilon-1}(|z|-\delta) \\ &<\delta^{\alpha_3^\epsilon-1}(\delta-z_{4,\epsilon})^{-\alpha_3^\epsilon}\delta^{\alpha_1^\epsilon-1}(1-\delta).\end{aligned} \tag{19}$$

由 (15)-(19)，可得

$$\begin{aligned}|w_\epsilon(z)-p_1| \le\ & M_{0,\epsilon,1}+M_{0,\epsilon,2}+M_{0,\epsilon,3} \\ &+M_{0,\epsilon,4}\delta^{\alpha_3^\epsilon-1}(\delta-z_{4,\epsilon})^{\alpha_4^\epsilon-1}\delta^{\alpha_1^\epsilon-1}(1-\delta),\end{aligned} \tag{20}$$

其中

$$M_{0,\epsilon,4} \coloneqq \left|\frac{x_4-x_3}{{}_2F_1(\alpha_3^\epsilon,1-\alpha_1^\epsilon,\alpha_3^\epsilon+\alpha_4^\epsilon;z_{4,\epsilon})}\frac{\sin\pi\alpha_3}{\pi}\right|.$$

由推论 2.1，我们有 $M_{0,\epsilon,j}\to 0$，其中 $\epsilon\to+0$ 对于 $j=2,3,4$。可得

$$\begin{aligned}M_{0,\epsilon,1} = \Bigg|& x_3^\epsilon-p_2-\log\xi\cdot\frac{\sin\pi\alpha_3}{\pi}(x_4-x_3)e^{\pi\alpha_3 i} \\ &+\frac{\sin\pi\alpha_3}{\pi}\frac{x_4-x_3}{{}_2F_1(\alpha_3,1-\alpha_1,1;\xi)}e^{\pi\alpha_3 i}\sum_{n\ge0}\left[\psi(n+1)-\psi(\alpha_3+n)\right]\frac{(\alpha_3)_n(1-\alpha_1)_n}{n!n!}\xi^n\Bigg|.\end{aligned}$$

由引理 2.4，可得

$$\lim_{\epsilon\to+0}\frac{\sin\pi\alpha_3}{\pi}\frac{x_4-x_3}{{}_2F_1(\alpha_3,1-\alpha_1,1;\xi)}e^{\pi\alpha_3 i}\sum_{n\ge0}\left[\psi(n+1)-\psi(\alpha_3+n)\right]\frac{(\alpha_3)_n(1-\alpha_1)_n}{n!n!}\xi^n=0$$

and

$$\lim_{\epsilon\to+0}\frac{\sin\pi\alpha_3}{\epsilon}=\lim_{\epsilon\to+0}\frac{\sin\pi(1-\alpha_3)}{\pi(1-\alpha_3)}\frac{\pi(1-\alpha_3)}{\epsilon}=a_4-a_1.$$

根据引理 3.8，我们还可以得到

$$\lim_{\epsilon\to+0}\left(-\frac{\epsilon}{\pi}\log\xi\right)=\frac{p_3-p_2}{b_1-b_3}.$$

这就得到以下结论：

$$\lim_{\epsilon\to+0}\left(-\log\xi\cdot\frac{\sin\pi\alpha_3}{\pi}(x_4-x_3)\right)=\frac{p_3-p_2}{b_1-b_3}\cdot(a_4-a_1)(p_4-p_3)=p_3-p_2.$$

因此我们　　得到 $M_{0,\ \epsilon,\ 1}\to 0$ $(\epsilon\to+0)$，从而得到 (1)。另一方面，我们有

$$w_\epsilon(z)=x_2^\epsilon-\frac{x_1^\epsilon-x_2^\epsilon}{{}_2F_1(1-\alpha_1^\epsilon,\alpha_3^\epsilon,1;z_{4,\epsilon})}\frac{1}{\Gamma(\alpha_1^\epsilon)\Gamma(1-\alpha_1^\epsilon)}\cdot\int_\infty^z\zeta^{\alpha_3^\epsilon-1}(\zeta-z_{4,\epsilon})^{-\alpha_3^\epsilon}(\zeta-1)^{\alpha_1^\epsilon-1}\,d\zeta$$

由于

$$\lim_{z\to1}\int_\infty^z\zeta^{\alpha_3^\epsilon-1}(\zeta-z_{4,\epsilon})^{-\alpha_3^\epsilon}(\zeta-1)^{\alpha_1^\epsilon-1}\,d\zeta=-\Gamma(\alpha_1^\epsilon)\Gamma(1-\alpha_1^\epsilon)\,{}_2F_1(1-\alpha_1^\epsilon,\alpha_3^\epsilon,1;z_{4,\epsilon}).$$

接下来讨论 $z\in D(\delta)$ 和 $|z|\geq1$ 的情形。在这种情况下，我们可以按照 [16] 中的证明，以同样的方式证明 (1)。于是得到 (1)。利用引理 3.2，我们也可以用类似的方法证明 (2)。接下来证明 (3)，但我们可以按照 [16] 中的证明，以同样的方式进行。然后证明 (4)。首先，我们有

$$w_\epsilon(z)=x_3+\frac{\sin\pi\alpha_3}{\pi}\frac{x_4-x_3}{{}_2F_1(\alpha_3,1-\alpha_1,1;\xi)}\left[-e^{\pi\alpha_3 i}\sum_{\substack{k,l\geq0\\k\neq l}}\frac{(\alpha)_k(1-\alpha_1)_l}{k!l!}\frac{1}{k-l}\left(\frac{\delta z}{\xi\,|z|}\right)^{-k}\left(\delta\frac{z}{|z|}\right)^l\right.$$
$$\left.+e^{\pi\alpha_3 i}\sum_{n\geq0}\left[\psi(n+1)-\psi(\alpha_3+n)+\log\left(-\frac{\delta z}{\xi\,|z|}\right)\right]\frac{(\alpha_3)_n(1-\alpha_1)_n}{n!n!}\xi^n\right].$$

当$z_{4,\epsilon}/\delta<|z|<\delta$ 且 $|\arg(-z/\xi)|<\pi$ 成立时。根据梯度树的定义，我们还有 $I_{int}(\tau)=p_2-(b_3-b_1)\tau$。由此我们得到

$$\begin{aligned}&|w_\epsilon(z)-I_{int}(\epsilon\tau)|\\&\leq\left|x_3^\epsilon-p_2+\frac{\sin\pi\alpha_3}{\pi}\frac{x_4-x_3}{{}_2F_1(\alpha_3,1-\alpha_1,1;\xi)}e^{\pi\alpha_3 i}\right.\\&\qquad\left.\cdot\sum_{n\geq0}\left[\psi(n+1)-\psi(\alpha_3+n)-\log\xi\right]\frac{(\alpha_3)_n(1-\alpha_1)_n}{n!n!}\xi^n\right|\\&\qquad+\left|\frac{\sin\pi\alpha_3}{\pi}\frac{x_4-x_3}{{}_2F_1(\alpha_3,1-\alpha_1,1;\xi)}\sum_{\substack{k,l\geq0\\k\neq l}}\frac{(\alpha_3)_k(1-\alpha_1)_l}{k!l!}\frac{1}{k-l}\left(\frac{\delta z}{\xi\,|z|}\right)^{-k}\left(\delta\frac{z}{|z|}\right)^l\right|\\&\qquad\qquad+\left|\frac{\sin\pi\alpha_3}{\pi}(x_4-x_3)e^{\pi\alpha_3 i}\log\left(-\frac{\delta z}{|z|}\right)+(b_3-b_1)\epsilon\tau\right|\end{aligned}\tag{21}$$

这等价于

$$|w_\epsilon(z) - I_{int}(\epsilon\tau)| \le M_{0,\epsilon,1} + M_{0,\epsilon,2} + \left|\frac{\sin\pi\alpha_3}{\pi}(x_4-x_3)e^{\pi\alpha_3 i}\log\left(-\frac{\delta z}{|z|}\right) + (b_3-b_1)\epsilon\tau\right|.$$

当我们代入 $z = \exp[-\pi\tau + i\pi(1-\sigma)]$, 时，得到

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\sin\pi\alpha_3}{\pi}(x_4-x_3)e^{\pi\alpha_3 i}\log\left(-\frac{\delta z}{|z|}\right) + (b_3-b_1)\epsilon\tau\right| \\
=&\left|\frac{\sin\pi\alpha_3}{\pi}(x_4-x_3)e^{\pi\alpha_3 i}(\log\delta - \pi\tau - i\pi\sigma) + (b_3-b_1)\epsilon\tau\right| \\
\le&\left|\frac{\sin\pi\alpha_3}{\pi}(x_4-x_3)e^{\pi\alpha_3 i}\right||\log\delta - i\pi\sigma| + \left|-\frac{\sin\pi\alpha_3}{\epsilon}(x_4-x_3)e^{\pi\alpha_3 i} + (b_3-b_1)\right||\epsilon\tau| \\
\le&\left|\frac{\sin\pi\alpha_3}{\pi}(x_4-x_3)e^{\pi\alpha_3 i}\right||\log\delta - i\pi| \\
&\qquad + \left|-\frac{\sin\pi\alpha_3}{\pi}(x_4-x_3)e^{\pi\alpha_3 i} + (b_3-b_1)\right|\left|-\frac{\epsilon}{\pi}\log\xi + \frac{\epsilon}{\pi}\log\delta\right|.
\end{aligned}$$

由推论 2.1，得

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to+0}\left(-\frac{\sin\pi\alpha_3}{\pi}(x_4-x_3)e^{\pi\alpha_3 i}\right) &= (a_4-a_1)(p_4-p_3) \\
&= (a_4-a_1)\left(-\frac{b_1-b_4}{a_1-a_4} + \frac{b_4-b_3}{a_4-a_1}\right) \\
&= b_1 - b_3.
\end{aligned}$$

由于 $M_{0,\epsilon,1}$，$M_{0,\epsilon,2} \to 0$ $(\epsilon \to +0)$ 成立，我们得到 (4)。

3.5. 定理 3.2 的证明。我们可以用与定理 3.1 (3) 类似的方法证明 (6)。这里我们只证明 (5)。这里假设 $p_4 < p_1 = p_3 < p_2$，且 $\max\{a_1,a_3\} < \max\{a_2,a_4\}$。由引理 3.5，我们可以取 $\delta > 0$，使得 $\delta \cdot z/|z|$ 与 z 之间的线段包含于 $D_\epsilon(\delta)$ 中，其中

$$z \in D_\epsilon(\delta) \setminus (D_0(z_{4,\epsilon}) \cup D_{z_{4,\epsilon}}(\min\{z_{4,\epsilon}, 1-z_{4,\epsilon}\}) \cup D_1(1-z_{4,\epsilon}) \cup D_\infty(1))(=: D_\epsilon(\delta)')$$

以及充分小的 $\epsilon > 0$。这一事实可用初等几何证明。通过采用定理 3.1 证明中的类似论证并使用引理 3.3，存在正实数 $M_{\epsilon,1}$，$M_{\epsilon,2}$，$M_{\epsilon,3}$，$M_{\epsilon,4}$，它们依赖于 ϵ，并满足

$$\begin{aligned}
M_{\epsilon,1} \ge \max_{z\in D_\epsilon(\delta)\cap D_0(\delta)}|w_\epsilon(z)-p_1|,\ M_{\epsilon,2} \ge \max_{z\in D_\epsilon(\delta)\cap D_{z_{4,\epsilon}}(\min\{z_{4,\epsilon},1-z_{4,\epsilon}\})}|w_\epsilon(z)-p_1|, \\
M_{\epsilon,3} \ge \max_{z\in D_\epsilon(\delta)\cap D_1(1-z_{4,\epsilon})}|w_\epsilon(z)-p_1|,\ M_{\epsilon,4} \ge \max_{z\in D_\epsilon(\delta)\cap D_\infty(1)}|w_\epsilon(z)-p_1|
\end{aligned} \tag{22}$$

且 $M_{1,\epsilon}$，$M_{2,\epsilon}$，$M_{3,\epsilon}$，$M_{4,\epsilon} \to 0$ 如 $\epsilon \to +0$。当

$$z \in D_\epsilon(\delta) \setminus (D_0(z_{4,\epsilon}) \cup D_{z_{4,\epsilon}}(\min\{z_{4,\epsilon}, 1-z_{4,\epsilon}\}) \cup D_1(1-z_{4,\epsilon}) \cup D_\infty(1))(=: D_\epsilon(\delta)'$$

成立时， z与 $\delta \cdot z/|z|$之间的线段包含于 $\mathbb{H} \setminus (D_0(\delta) \cup D_{z_{4,\epsilon}}(\overline{\delta}) \cup D_1(\delta) \cup D_\infty(\delta))$。于是我们有

$$\begin{aligned} |w_\epsilon(z) - p_1| \leq & \left| x_3^\epsilon - p_1 + e^{\pi(2-\alpha_4^\epsilon-\alpha_1^\epsilon)} \frac{x_4 - x_3}{{}_2F_1(\alpha_3^\epsilon, 1-\alpha_1^\epsilon, 1; z_{4,\epsilon})} \frac{\Gamma(\alpha_3^\epsilon + \alpha_4^\epsilon)}{\Gamma(\alpha_3^\epsilon)\Gamma(\alpha_4^\epsilon)} \right. \\ & \left. \cdot \int_0^{\delta z/|z|} \zeta^{\alpha_3^\epsilon - 1} (\zeta - z_{4,\epsilon})^{\alpha_4^\epsilon - 1} (\zeta - 1)^{\alpha_1^\epsilon - 1} d\zeta \right| \\ & + \left| \frac{x_4 - x_3}{{}_2F_1(\alpha_3^\epsilon, 1-\alpha_1^\epsilon, 1; z_{4,\epsilon})} \frac{\Gamma(\alpha_3^\epsilon + \alpha_4^\epsilon)}{\Gamma(\alpha_3^\epsilon)\Gamma(\alpha_4^\epsilon)} \right| \\ & \cdot \left| \int_{\delta z/|z|}^{z} \zeta^{\alpha_3^\epsilon - 1} (\zeta - z_{4,\epsilon})^{\alpha_4^\epsilon - 1} (\zeta - 1)^{\alpha_1^\epsilon - 1} d\zeta \right|. \end{aligned} \tag{23}$$

通过采用定理 3.1 证明中的类似讨论，我们还得到正实数 $M_{5,\epsilon}$，它依赖于 ϵ，使得

$$\begin{aligned} M_{5,\epsilon} \geq & \left| x_3^\epsilon - p_1 + e^{\pi(2-\alpha_4^\epsilon-\alpha_1^\epsilon)} \frac{x_4 - x_3}{{}_2F_1(\alpha_3^\epsilon, 1-\alpha_1^\epsilon, 1; z_{4,\epsilon})} \frac{\Gamma(\alpha_3^\epsilon + \alpha_4^\epsilon)}{\Gamma(\alpha_3^\epsilon)\Gamma(\alpha_4^\epsilon)} \right. \\ & \left. \cdot \int_0^{\delta z/|z|} \zeta^{\alpha_3^\epsilon - 1} (\zeta - z_{4,\epsilon})^{\alpha_4^\epsilon - 1} (\zeta - 1)^{\alpha_1^\epsilon - 1} d\zeta \right| \end{aligned}$$

且 $M_{5,\epsilon} \to 0$，当 $\epsilon \to +0$ 时。我们还得到

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\delta z/|z|}^{z} \zeta^{\alpha_3^\epsilon - 1} (\zeta - z_{4,\epsilon})^{\alpha_4^\epsilon - 1} (\zeta - 1)^{\alpha_1^\epsilon - 1} d\zeta \right| \\ & = \left| \int_\delta^{|z|} \left(\frac{z}{|z|} t \right)^{\alpha_3^\epsilon - 1} \left(\frac{z}{|z|} t - z_{4,\epsilon} \right)^{\alpha_4^\epsilon - 1} \left(\frac{z}{|z|} t - 1 \right)^{\alpha_1^\epsilon - 1} \frac{z}{|z|} \, dt \right| \\ & \leq \delta^{\alpha_3^\epsilon - 1} \delta^{\alpha_4^\epsilon - 1} \delta^{\alpha_1^\epsilon - 1} (|z| - \delta) \leq \delta^{\alpha_3^\epsilon - 1} \delta^{\alpha_4^\epsilon - 1} \delta^{\alpha_1^\epsilon - 1} (1 - \delta). \end{aligned}$$

由于

$$\lim_{\epsilon \to +0} \alpha_3^\epsilon = 1, \ \lim_{\epsilon \to +0} \alpha_4^\epsilon = 0$$

由推论 2.1 可知成立，因此我们得到

$$M_{6,\epsilon} \geq \max_{z \in D_\epsilon(\delta)'} |w_\epsilon(z) - p_1|, \ \lim_{\epsilon \to +0} M_{6,\epsilon} = 0, \tag{24}$$

其中记

$$M_{6,\epsilon} := M_{5,\epsilon} + \delta^{\alpha_3^\epsilon + \alpha_4^\epsilon + \alpha_1^\epsilon - 3} (1 - \delta) \left| \frac{x_4 - x_3}{{}_2F_1(\alpha_3^\epsilon, 1-\alpha_1^\epsilon, 1; z_{4,\epsilon})} \frac{\Gamma(\alpha_3^\epsilon + \alpha_4^\epsilon)}{\Gamma(\alpha_3^\epsilon)\Gamma(\alpha_4^\epsilon)} \right|.$$

由 (22) 和 (24)，得到

$$\max_{z \in D_\epsilon(\delta)} |w_\epsilon(z) - p_1| \leq \max\{M_{1,\epsilon}, M_{2,\epsilon}, M_{3,\epsilon}, M_{4,\epsilon}, M_{6,\epsilon}\}$$

并且（5）成立。

References

[1] Lars V. Ahlfors。《复分析》。纯粹与应用数学国际丛书。McGraw-Hill Book Co.，纽约，第三版，1978年。关于单复变量解析函数理论的导论。[2] George E. Andrews、Richard Askey 和 Ranjan Roy。《特殊函数》，数学及其应用百科全书第71卷。剑桥大学出版社，剑桥，1999年。[3] Mich`ele Audin 和 Mihai Damian。《莫尔斯理论与 Floer 同调》。Universitext。施普林格，伦敦；EDP Sciences，莱于利，2014年。由 Reinie Ern´e 根据2010年法文原版译出。[4] Satyan L. Devadoss、Benjamin Fehrman、Timothy Heath 和 Aditi Vashist。《带标记点的 Poincar´e 圆盘的模空间》。载于《结合子多面体、Tamari格及相关结构》，数学进展第299卷，第99–117页。Birkh¨auser/施普林格，巴塞尔，2012年。[5] Tobin A. Driscoll 和 Lloyd N. Trefethen。《施瓦茨–克里斯托费尔映射》，剑桥应用与计算数学专著第8卷。剑桥大学出版社，剑桥，2002年。[6] V.N. Dubinin 和 M Vuorinen。论多边形四边形的共形模。《以色列数学杂志》，171：111–125，2009年。[7] A. Erd´elyi。二元超几何函数。《数学学报》，83：131–164，1950年。[8] Arthur Erd´elyi、Wilhelm Magnus、Fritz Oberhettinger 和 Francesco G. Tricomi。《高等超越函数》。第I、II卷。McGraw-Hill Book Co., Inc.，纽约-多伦多-伦敦，1953年。部分依据 Harry Bateman 留下的笔记编写。[9] Kenji Fukaya 和 Yong-Geun Oh。余切丛中的零圈开弦与莫尔斯同伦。《亚洲数学杂志》，1(1)：96–180，1997年。[10] M. Gromov。辛流形中的伪全纯曲线。《数学发明》，82(2)：307–347，1985年。[11] Peter Henrici。《应用与计算复分析》。第3卷。纯粹与应用数学（纽约）。John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1986年。离散傅里叶分析——柯西积分——共形映射的构造——单叶函数，Wiley-Interscience出版物。[12] Dusa McDuff 和 Dietmar Salamon。 J-全纯曲线与辛拓扑，美国数学会讨论班出版物第52卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2004年。[13] Katsuhisa Mimachi。与 Appell 超几何函数 F_1相关的连接公式。PoS，MA2019：010，2022年。[14] Zeev Nehari。《共形映射》。多佛出版社，纽约，1975年。1952年版的重印本。[15] Per O. M. Olsson。超几何函数F_1 和 F_D 的偏微分方程组的积分，涉及两个及更多变量。《数学物理杂志》，5：420–430，1964年。[16] Hidemasa Suzuki。 $\mathbb{R}$ 中的梯度树与$T^*\mathbb{R}$中的全纯圆盘之间的显式对应。《分析与数学物理》，15(5)：127，2025年。

Department of Mathematics and Informatics, Graduate School of Science and Engi-neering, Chiba University, Yayoicho 1-33, Inage, Chiba, 263-8522 Japan.电子邮件地址: hsuzuki@g.math.s.chiba-u.ac.jp