arXiv:2603.12825v1 [math.CA] 13 Mar 2026

高维球面上的多项式曲波

Frederic Schoppert*

数学研究所，吕贝克大学，Ratzeburger Allee 160，23562，吕贝克，德国

摘要

本文介绍并研究球面上的多项式曲波，它们构成了 $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$，$d \geq 3$ 的一类 Parseval 框架。所提出的构造提供了方向敏感的多尺度分解，并为球面数据提供了稀疏表示。作为主要结果，我们推导出了一个精确的逐点局部化界，表明框架元素远离其质心时会迅速衰减，使其成为基于位置的分析的有力工具。与以往的构造不同，多项式曲波的方向分辨率不受限制。因此，本文建立的框架在分析局部化各向异性特征（例如边缘）时尤其强大。为说明这一点，我们展示了：给定一个合适的测试信号，该信号在球冠 $A \subset \mathbb{S}^{d-1}$ 的边界∂A 处具有（高阶）不连续性，当分析函数在位置和方向上都与边界 ∂A 的某一段相匹配时，相应的曲波系数会恰好达到峰值。否则，系数会迅速衰减。

关键词： 曲波；球面；方向性；Parseval 框架；局部化；边缘检测。

1 引言

在近期的一篇文章中，[14], 我们为 $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ 构造了$d \geq 3$一类一般性的多项式框架。这一类框架包括成熟的 зонal（各向同性）系统，有时也称为球面小波（例如参见 [1, 10, 11, 13, 18, 19, 20, 22, 24, 25, 26]），但也为各种新的各向异性（非 зонal）设计铺平了道路。基于这一新建立的框架，我们为 $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ 构造了$d \geq 3$一族高度定向且局部化的 Parseval 框架。这些框架扩展了[9], 中提出的第二代曲波的二维构造，并为球面数据的位置-频率分析提供了工具，在每个尺度和位置上提供额外的方向分辨率。不同于以往的构造，我们证明，本文定义的多项式曲波在方向敏感性方面并不受限；它们不仅能够精确识别局部化特征（如边缘）的位置，还能确定其方向。

在二维球面上，此前已构造出局部化方向多项式框架，其形式包括所谓的方向小波 [16, 17, 35] 和第二代曲波 [9]。由于具有出色的空间局部化能力和方向敏感性，这两种系统已广泛应用于球面随机场的分析（例如 [2, 15, 16,27, 28, 36]），且常与宇宙学问题相关。其他相关领域还包括

*f.schoppert@uni-luebeck.de

稀疏重建（例如 [33]）、图像分割（例如 [8]），以及信号中（高阶）间断点的检测 [29, 31]。

在 [14] 中建立的一般框架将上述方向小波和第二代曲波作为特例，并且还使我们能够将这些系统推广到高维球面。关于方向小波，[30]，研究了向 $\mathbb{S}^{d-1}$、$d \geq 3$ 的推广，由此得到一类在 $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ 上具有良好局部化性质的 Parseval 框架，其方向敏感性可调节（但有限）。在这里，相应的框架由一列多项式 $\Psi^j \in \Pi_{2^j}(\mathbb{S}^{d-1})$、$j \in \mathbb{N}_0$ 生成，这些多项式高度集中于北极 e^d。具体而言，已有结果表明

$$|\Psi^j(\eta)| \leq \frac{c_q 2^{j(d-1)}}{(1+2^j \operatorname{dist}(\eta, e^d))^q}, \qquad \eta \in \mathbb{S}^{d-1}, \tag{1}$$

对于每个 $q \geq 1$ [30, 定理 4。1]。对于相应的带状框架函数（通常称为球面小波），这类局部化界是众所周知的（参见 [7, 11, 25, 26]）。此外，在特殊情形 $d = 3$下，估计式（1）最早由 [31] 针对 $\mathbb{S}^2$上的方向小波证明；此前，[16]还给出了一个稍弱的版本。

本文中，我们将[9] 中引入的二维第二代曲波推广到高维球面，并遵循 [14]中的一般构造。具体而言，对于 $d \geq 3$，我们定义多项式曲波的初始序列$(\Psi^j \mathrm{C})_{j=0}^{\infty}$，使其对每个 $j \in \mathbb{N}$ 满足 $\Psi^0 \mathrm{C} \equiv 1$与 $\Psi^j \mathrm{C} \in \Pi_{2^j}(\mathbb{S}^{d-1})$。通过使用由球多项式的正求积公式导出的适当旋转矩阵$g_{j,r} \in SO(d)$及其相应权重$\mu_{j,r} > 0$（见第 3 节中的讨论），我们得到 $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$的如下形式的紧（Parseval）框架

$$\mathcal{X}[(\Psi_{\mathrm{C}}^j)_{j=0}^{\infty}] = \{\sqrt{\mu_{j,r}}\, \Psi_{\mathrm{C}}^j(g_{j,r}^{-1}\cdot),\ r = 1, \ldots, r_j,\ j \in \mathbb{N}_0\}.$$

因此，每个 $f \in L^2(\mathbb{S}^{d-1})$均可展开为多项式曲波 $\Psi^j{}_{\mathrm{C}}(g_j^{-1}{}_{,r}\,\cdot)$，其方式为

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{r_j} \mu_{j,r} \langle f, \Psi_{\mathrm{C}}^j(g_{j,r}^{-1}\cdot)\rangle_{\mathbb{S}^{d-1}} \Psi_{\mathrm{C}}^j(g_{j,r}^{-1}\cdot).$$

事实上，我们证明：只要 f 属于相应的Banach空间，该框架展开便在 $L^p(\mathbb{S}^{d-1})$、$1 \leq p < \infty$ 以及$C(\mathbb{S}^{d-1})$中快速收敛。

作为本文研究工作的主要结果，我们证明了多项式曲波满足方向相关局部化界

$$|\Psi_{\mathrm{C}}^j(x)| \leq \frac{c_q 2^{j(3d-2)/4} |x_d + \mathrm{i}x_{d-1}|^{2^{j-1}}}{(1+2^j |\operatorname{Arg}(x_d + \mathrm{i}x_{d-1})|)^q}, \qquad x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{S}^{d-1}, \tag{2}$$

对每个 $q \in \mathbb{N}$。这里，对于 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，Arg($z$) 表示 $(-\pi, \pi]$ 中满足 $z = |z|\exp(\mathrm{i}\operatorname{Arg}(z))$ 的唯一元素。(2) 中的上界尤其意味着，函数 $\Psi^j{}_{\mathrm{C}}$ 在北极 e^d 处高度局部化。对于二维曲波 [9], ，即在 $d = 3$ 的情形下，这一估计此前已在 [29, 命题 2.4] 中得到证明。

与针对 $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ 的其他多项式框架不同，本文构造的多项式曲波与二维情形 [9, 29]，一样，其方向敏感性不受限制。为进一步说明这一点，我们推导了自相关函数的显式公式

$$SO(d-1) \to \mathbb{C}, \qquad h \mapsto \langle \Psi_{\mathrm{C}}^j, \Psi_{\mathrm{C}}^j(h^{-1}\cdot)\rangle_{\mathbb{S}^{d-1}}, \qquad j \in \mathbb{N}_0,$$

我们发现，该函数在大尺度 j 下高度集中于单位矩阵处。这里，我们将 $SO(d-1)$ 视为 $SO(d)$ 的子群 $\{h \in SO(d) : he^d = e^d\}$。获得更高方向分辨率所付出的代价是计算成本增加。具体而言，每个尺度 j 所需的旋转次数按 $2^{j(2d-3)}$ 增长，而此前研究的多项式框架通常按 $2^{j(d-1)}$ 增长。

最后，我们展示多项式曲波在检测边缘和高阶奇异性方面的有效性。这里，我们考虑一类测试信号 f，它们除了沿某个球冠 $A \subset \mathbb{S}^{d-1}$ 的边界∂A 存在（高阶）间断外，都是光滑的。在最简单的情形下，f 只是 A的示性函数，即 $f = \mathbf{1}_A$。随后我们证明，当旋转后的分析函数 Ψ^j C$(g^{-1}\cdot)$ 在位置和方向上与边界 ∂A 的某一段相匹配时，框架系数 $\langle f, \Psi^j$ C$(g^{-1}\cdot)\rangle_{\mathbb{S}^{d-1}}$, $g \in SO(d)$ 会达到峰值。如果 Ψ^j C$(g^{-1}\cdot)$ 位于 ∂A之外，或者 Ψ^j C$(g^{-1}\cdot)$的方向与最近边缘片段的方向不匹配，内积就会迅速衰减。后者也说明了曲波表示具有（预期的）稀疏性。我们指出，在二维情形下，即对于 $d = 3$，所呈现的结果此前已在 [29]中得到证明。

本文其余部分安排如下。在第 2 节中，我们简要回顾 $\mathbb{S}^{d-1}$上的调和分析基础知识，这些内容对我们的研究至关重要。由多项式曲波组成的帕塞瓦尔框架的构造将在第 3 节中完成。在第 4 节中，我们证明框架元素满足式（2）中的方向相关局部化界。在第 5 节中，我们推导多项式曲波相关自相关函数的显式表达式，这些表达式表明其方向敏感性特别强。最后，在第 6 节中，我们展示多项式曲波框架在边缘检测问题上的强大能力。

2 预备知识

令 $d \geq 3$。我们考虑欧几里得空间 $\mathbb{R}^d$，其配备通常的内积$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$，以及相应的诱导范数$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}$。$\mathbb{R}^d$ 的标准基向量为 $e^j = (\delta_{i,j})_{i=1}^d$, $j = 1, \ldots, d$，其中

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

与通常一样，$\mathbb{R}^d$ 中的单位球面记作 $\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\|_2 = 1\}$，并将 e^d 称为 $\mathbb{S}^{d-1}$的北极。$\mathbb{S}^{d-1}$ 上的标准度量由测地距离给出

$$\operatorname{dist}(\eta, \nu) = \arccos\left(\langle \eta, \nu\rangle\right), \qquad \eta, \nu \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

集合

$$C(z, \phi) = \left\{x \in \mathbb{S}^{d-1} : \operatorname{dist}(x, z) < \phi\right\}$$

构成一个球冠，其中心为 $z \in \mathbb{S}^{d-1}$，张角为 $\phi \in (0, \pi)$。有时，采用球坐标 $\theta_1 \in (-\pi, \pi]$来参数化 $\mathbb{S}^{d-1}$ 会更方便，

$\theta_2, \ldots, \theta_{d-1} \in [0, \pi]$，通过

$$\eta(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{d-1}) = \begin{pmatrix} \sin\theta_{d-1} \ldots \sin\theta_2 \sin\theta_1 \\ \sin\theta_{d-1} \ldots \sin\theta_2 \cos\theta_1 \\ \sin\theta_{d-1} \ldots \sin\theta_3 \cos\theta_2 \\ \vdots \\ \sin\theta_{d-1} \cos\theta_{d-2} \\ \cos\theta_{d-1} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

下文将回顾一些与$\mathbb{S}^{d-1}$上的傅里叶分析相关的著名概念。关于这一主题的更多信息，请参阅 [3, 11, 23, 32]。令 ω_{d-1} 表示 $\mathbb{S}^{d-1}$ 上的通常旋转不变测度，并将其归一化，使得

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathrm{d}\omega_{d-1} = 1.$$

用球坐标表示（3），

$$\mathrm{d}\omega_{d-1} = \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{2\pi^{d/2}} \sin^{d-2}\theta_{d-1} \ldots \sin\theta_2 \,\mathrm{d}\theta_1 \ldots \mathrm{d}\theta_{d-1}.$$

关于此测度，空间 $L^p(\mathbb{S}^{d-1})$、 $0 < p < \infty$ 定义如下：

$$L^p(\mathbb{S}^{d-1}) = \{f \colon \mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{C} \mid f \text{ is measurable and } \|f\|_{L^p(\mathbb{S}^{d-1})} < \infty\},$$

其中

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{S}^{d-1})} = \left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |f|^p \,\mathrm{d}\omega_{d-1} \right)^{1/p}.$$

为方便记号，我们用符号 $L^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$ 表示连续函数空间 $f\colon \mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{C}$，并赋予其上确界范数

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{d-1})} = \sup_{\eta \in \mathbb{S}^{d-1}} |f(\eta)|.$$

本文的大多数研究依赖于希尔伯特空间 $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ 中可用的傅里叶方法，其中内积定义为

$$\langle f_1, f_2 \rangle_{\mathbb{S}^{d-1}} = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f_1 \overline{f_2} \,\mathrm{d}\omega_{d-1}.$$

特别地，我们将使用一种特定的球谐函数标准正交基（见 [32,第 466]页），它可以方便地用Gegenbauer多项式表示

$$C_m^\lambda(t) = \frac{(-1)^m \Gamma(\lambda + 1/2)\Gamma(m + 2\lambda)}{2^m \Gamma(m + \lambda + 1/2) m!} (1 - t^2)^{1/2-\lambda} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} (1 - t^2)^{m+\lambda-1/2}, \quad \lambda > -1/2.$$

关于球坐标（3），令

$$Y_k^{d,n}(\theta_1, \ldots, \theta_{d-1}) = A_k^n \prod_{j=0}^{d-3} C_{k_j - |k_{j+1}|}^{\frac{d-j-2}{2} + |k_{j+1}|}(\cos\theta_{d-j-1}) \sin^{|k_{j+1}|}(\theta_{d-j-1}) \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{d-2}\theta_1}, \tag{4}$$

其中 $k_0 = n \in \mathbb{N}_0$和 $k = （k_1, ..., k_{d-2}）\in \mathcal{I}_n^d$满足

$$\mathcal{I}_n^d = \{(k_1, \dots, k_{d-2}) \in \mathbb{N}_0^{d-3} \times \mathbb{Z} : n \geq k_1 \geq \cdots \geq k_{d-3} \geq |k_{d-2}|\}.$$

归一化常数 $A_k^n > 0$ 在（4）中定义为

$$(A_k^n)^2 = \frac{2^{(d-4)(d-2)}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \prod_{j=0}^{d-3} \frac{2^{2|k_{j+1}|-j}(k_j - |k_{j+1}|)!(2k_j + d - j - 2)\Gamma^2(\frac{d-j-2}{2} + |k_{j+1}|)}{\sqrt{\pi}\Gamma(k_j + |k_{j+1}| + d - j - 2)}. \quad (5)$$

对于 $n \in \mathbb{N}_0$ 和 $k \in \mathcal{I}_n^d$，上文定义的函数 $Y^{d,\ n}_{\ k} \in L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ 是 n 次球谐函数。此外，族 $\{Y^{d,\ n}_{\ k}，\ k \in \mathcal{I}_n^d,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ 构成了 $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ 的一组标准正交基。球谐子空间 $\mathcal{H}_n^d =$ 张成$\{Y^{d,\ n}_{\ k}，\ k \in \mathcal{I}_n^d\}$ 是有限维的，其维数为

$$\dim \mathcal{H}_n^d = \frac{(2n + d - 2)(n + d - 3)!}{(d - 2)!n!}. \quad (6)$$

By

$$\Pi_N(\mathbb{S}^{d-1}) = \bigoplus_{n=0}^{N} \mathcal{H}_n^d$$

我们将 $N \in \mathbb{N}_0$ 次球多项式的集合记为。根据上述记号，每个信号 $f \in L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ 都可以用其傅里叶级数表示为

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathcal{I}_n^d} f(n, k) Y_k^{d,n},$$

其对应的傅里叶系数为 $f(n,\ k) = \langle f,\ Y^{d,\ n}_{\ k} \rangle_{\mathbb{S}^{d-1}}$。

球谐函数满足著名的加法定理

$$\sum_{k \in \mathcal{I}_n^d} \overline{Y_k^{d,n}(\nu)} Y_k^{d,n}(\eta) = \frac{2n + d - 2}{d - 2} C_n^{\frac{d-2}{2}}(\langle \nu, \eta \rangle), \quad \nu, \eta \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad (7)$$

这揭示了球面 $\mathbb{S}^{d-1}$ 上的调和分析与区间$[-1, 1]$上的调和分析之间的联系。事实上，对于每个固定的 λ，族 $\{C_n^\lambda,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ 构成希尔伯特空间 $L^2([-1, 1],\ w_\lambda)$ 的完备正交系，其加权内积为

$$\langle f_1, f_2 \rangle_{[-1,1], w_\lambda} = \int_{-1}^{1} f_1(t) \overline{f_2(t)} w_\lambda(t)\, \mathrm{d}t, \qquad f_1, f_2 \in L^2([-1, 1], w_\lambda),$$

where $w_\lambda(t) = (1 - t^2)^{\lambda - 1/2}$。其中，Gegenbauer多项式经过归一化，使得 t

$$\int_{-1}^{1} |C_n^\lambda(t)|^2 w_\lambda(t)\, \mathrm{d}t = \frac{\pi\Gamma(n + 2\lambda)}{2^{2\lambda-1} n!(n + \lambda)\Gamma^2(\lambda)}.$$

因此，每个 $f \in L^2([-1, 1],\ w_\lambda)$ 都具有如下形式的展开式

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^\lambda(f) C_n^\lambda, \quad (8)$$

其中

$$b_n^\lambda(f) = \frac{2^{2\lambda-1} n!(n+\lambda)\Gamma^2(\lambda)}{\pi\Gamma(n+2\lambda)} \int_{-1}^{1} f(t) C_n^\lambda(t) w_\lambda(t)\,\mathrm{d}t. \tag{9}$$

令 $SO(d) = \{g \in \mathbb{R}^{d\times d} : g^\top = g^{-1}, \det g = 1\}$ 为特殊正交群。对于$g \in SO(d)$，我们考虑旋转算子 $T^d(g)$: $L^2(\mathbb{S}^{d-1}) \to L^2(\mathbb{S}^{d-1})$，其定义为

$$T^d(g)f = f(g^{-1}\cdot).$$

事实上，$g \mapsto T^d(g)$ 定义了 $SO(d)$ 在 $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ 上的酉群表示，并且在每个球谐子空间 $\mathcal{H}_n^d$上都是不可约的。不过，除了第 5 节中的一些计算之外，我们不会明确提及这一性质，尽管它在本文的背景中发挥着至关重要的作用。实际上，与表示 T^d 相关的调和分析理论所提供的工具，构成了 [14], 中若干核心结果的基础，我们将以此为基础进行构造。本文附录总结了第 5 节研究所需的材料。关于与旋转算子 $T^d(g)$,$g \in SO(d)$相关的 $SO(d)$ 上调和分析的更多细节，请参见 [32], 以及我们近期在 [14, 30]中的讨论。

下文中，对于 $m \in \{2, 3, \ldots\ldots, d-1\}$，我们不区分 $SO(m)$ 与子群 $\{h \in SO(d): he^j = e^j$ 对于 $j = m+1, \ldots\ldots, d\} \subset SO(d)$。特别地， $SO(d-1)$ 被视为 $SO(d)$ 中所有保持北极 e^d 不动的元素所构成的子群。对于 $\nu \in \mathbb{S}^{d-1}$，符号 g_ν 始终表示 $SO(d)$ 中满足 $g_\nu e^d = \nu$ 的任意旋转矩阵。类似地，如果 $\nu' \in \mathbb{S}^{d-2}$，我们用 $h_{\nu'}$ 表示 $SO(d-1)$ 中满足 $h_{\nu'}e^{d-1} = (\nu', 0) \in \mathbb{S}^{d-1}$ 的任意旋转矩阵。

全文中，所有常数 c, c_0, c_1, ... 仅依赖于维数 d 以及所注明的参数。此外，它们的具体取值可能因出现位置不同而变化。对于两个非负数列 $(a_j)_{j=0}^\infty$ 和 $(b_j)_{j=0}^\infty$，我们用 $a_j \sim b_j$ 表示存在常数 $0 < c_1 \le c_2$ 使得

$$c_1 a_j \le b_j \le c_2 a_j, \qquad \text{for each } j \in \mathbb{N}_0.$$

3 多项式曲波的构造

本章所介绍的多项式框架的构造受到文章[9], 的启发；文中作者在二维球面上定义了高度方向性的分析函数，即所谓的第二代曲波。具体而言，利用[14], 中最近发展的一般框架，我们将 [9] 中所考虑的系统推广到高维球面。我们将把我们的框架元素称为多项式曲波。

设 $\phi \in C^q([0,\infty))$, $q \in \mathbb{N}$，为一个实值非增函数，使得当 $t \in [0, 1/2]$ 时 $\phi(t) = 1$，且当 $t \ge 1$时 $\phi(t) = 0$。则

$$\kappa(t) = \sqrt{\phi^2(t/2) - \phi^2(t)}, \qquad 0 \le t < \infty,$$

定义了一个窗函数 $\kappa \in C^q([0,\infty))$，其 $\mathrm{supp}(\kappa) \subset [1/2, 2]$。特别地，由此可得

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left|\kappa\Big(\frac{n}{2^{j-1}}\Big)\right|^2 = 1, \quad \text{for each } n \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

此外，我们考虑如下形式的方向性分量

$$\zeta_k^{d,n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} 1, & \text{if } |k_{d-2}| = n, \\ 0, & \text{else,} \end{cases} \qquad k = (k_1, \ldots k_{d-2}) \in \mathcal{I}_n^d, \quad n \in \mathbb{N}.$$

显然，

$$\sum_{k \in \mathcal{I}_n^d} |\zeta_k^{d,n}|^2 = 1, \quad \text{for each } n \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

利用上述定义的窗函数 κ 和方向性分量 $\zeta^{d,n}_k$，现在我们通过以下方式定义一个多项式曲波初始序列 $(\Psi^j)_{j=0}^\infty$

$$\Psi^0 \equiv 1, \qquad \Psi^j = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathcal{I}_n^d} \sqrt{\dim \mathcal{H}_n^d}\, \kappa\Big(\frac{n}{2^{j-1}}\Big)\, \zeta_k^{d,n}\, Y_k^{d,n}, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

注意，在二维情形，即 $d = 3$时，该构造（本质上）给出了 [9]中的第二代曲波。

根据式（4）中给出的球谐函数定义，我们有

$$Y^{d,n}_{(n,\ldots,n,\pm n)}(x) = A^n_{(n,\ldots,n)}(x_2 \pm \mathrm{i}x_1)^n, \qquad \text{for } x = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

因此，上述定义的多项式曲波可写为

$$\begin{aligned} \Psi^j(x) &= \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\dim \mathcal{H}_n^d}\, \kappa\Big(\frac{n}{2^{j-1}}\Big)\, A^n_{(n,\ldots,n)} \Re\{(x_2 + \mathrm{i}x_1)^n\} \\ &= \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\dim \mathcal{H}_n^d}\, \kappa\Big(\frac{n}{2^{j-1}}\Big)\, A^n_{(n,\ldots,n)} |x_2 + \mathrm{i}x_1|^n \cos(n \operatorname{Arg}(x_2 + \mathrm{i}x_1)), \qquad j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

这里，$\Re\{z\}$ 和 $\operatorname{Arg}(z)$分别表示 $z \in \mathbb{C}$的实部和辐角主值。具体而言，若 $z \neq 0$，则 $\operatorname{Arg}(z)$ 是 $(-\pi, \pi]$ 中满足$z = |z| \exp(\mathrm{i} \operatorname{Arg}(z))$ 的唯一元素。从这一显式表示可明显看出，在大尺度下j，函数 Ψ^j 在 e^2处局部化良好。然而，如二维情形中所述[9]，，人们可能更倾向于使用一个初始序列，其中每个元素都集中在北极 e^d。因此，对于任意旋转矩阵 $g_0 \in SO(d)$，其中 $g_0 e^1 = e^{d-1}$ 且 $g_0 e^2 = e^d$，我们考虑旋转后的序列 $(\Psi^j{}_{\mathrm{C}})_{j=0}^\infty \subset \Pi(\mathbb{S}^{d-1})$，其中

$$\Psi^j_{\mathrm{C}} = T^d(g_0)\Psi^j, \qquad j \in \mathbb{N}_0. \tag{13}$$

显然，多项式曲波 $\Psi^j{}_{\mathrm{C}}$ 满足

$$\begin{aligned} \Psi^j_{\mathrm{C}}(x) &= \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\dim \mathcal{H}_n^d}\, \kappa\Big(\frac{n}{2^{j-1}}\Big)\, A^n_{(n,\ldots,n)} \Re\{(x_d + \mathrm{i}x_{d-1})^n\} \\ &= \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\dim \mathcal{H}_n^d}\, \kappa\Big(\frac{n}{2^{j-1}}\Big)\, A^n_{(n,\ldots,n)} |x_d + \mathrm{i}x_{d-1}|^n \cos(n \operatorname{Arg}(x_d + \mathrm{i}x_{d-1})), \end{aligned} \tag{14}$$

这意味着每个 $\Psi^j{}_{\mathrm{C}}$ 集中在 e^d，其中局部化随 j增强。此外，（14）表明

$$T^d(h)\Psi^j_{\mathrm{C}} = \Psi^j_{\mathrm{C}}, \quad \text{for each } h \in SO(d-2),$$

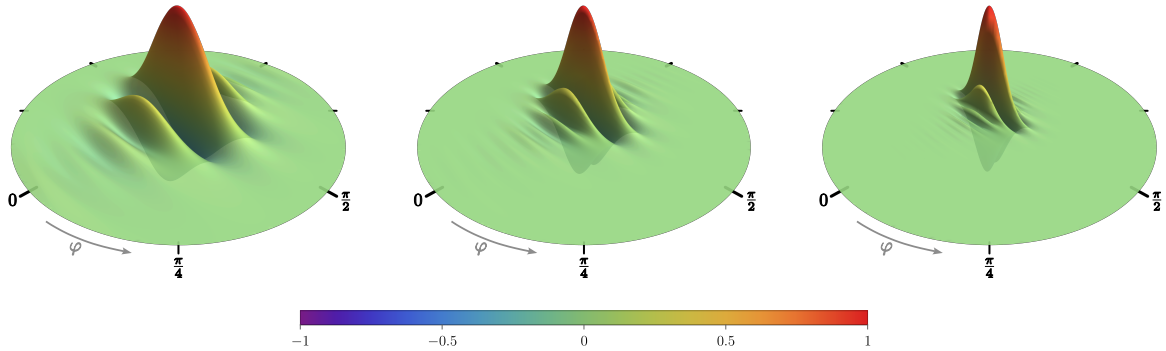


图 1： 重新缩放的多项式曲波 $\psi^j{}_{\mathrm{C}}(t,\varphi)$, $(t,\varphi) \in [0,1]\times[0,2\pi)$, 对于 $j = 5, 6, 7$，从左到右

由于 $\Psi^j{}_{\mathrm{C}}$（x_1，x_2，……，x_d）仅依赖于 x_{d-1}和 x_d。按照 [14],的术语，序列（$\Psi^j{}_{\mathrm{C}}$）$_{j=0}^{\infty}$是 SO（$d-2$）-不变的。因此，如 [14],中所讨论的，我们可以用这些函数来说明我们的多项式曲波

$$\psi^j_{\mathrm{C}}(t,\varphi) = \Psi^j_{\mathrm{C}}(\cos t\, e^d + \sin t(\cos\varphi\, e^{d-1} + \sin\varphi\,(0,0,\eta))), \quad (t,\varphi)\in[0,\pi]\times[0,2\pi), \quad (15)$$

它们与 $\eta \in \mathbb{S}^{d-3}$ 无关。对于 $\varphi \in [0,2\pi)$，映射 $t \mapsto \psi^j\,\mathrm{C}(t,\varphi)$ 表示函数 $\Psi^j\,\mathrm{C}$ 沿测地线（单位速度）曲线 v 的取值：$[0,\pi] \mapsto \mathbb{S}^{d-1}$ 其中 $v(0) = e^d$,$v(\pi) = -e^d$，且 $v'(0) = \cos\varphi e^{d-1} + \sin\varphi(0,0,\eta)$。特别地，由于 (15) 右侧的表达式不依赖于 η，因此只要 φ 固定，多项式曲波 $\Psi^j\,\mathrm{C}$ 沿这些路径 $t \mapsto v(t)$ 都表现出相同的行为。因此，我们可以在 (15) 中用 e^{d-2} 替换 $(0,0,\eta)$。

在图 1 中，对于 $d = 4$，即 $\Psi^j\,\mathrm{C} \in \Pi_{2j}(\mathbb{S}^3)$ 的情形，我们将函数 $\psi^j\,\mathrm{C}$ 可视化；其中选择 κ 为支集为 $\mathrm{supp}(\kappa) = [1/2,2]$ 、定义于 [16] 中的 C^∞ 窗函数。为清晰起见，这里将每幅图像重新缩放，使其取值仅位于$[-1,1]$中。除了在北极 e^d 附近具有良好的局部化性质外，我们还观察到，曲波 $\Psi^j\,\mathrm{C}$ 沿方向 $\pm e^{d-1}$衰减最快；这些方向在图 1 中对应于 $\varphi \in \{0,\pi\}$，而沿方向 $(0,0,\eta'')$，$\eta'' \in \mathbb{S}^{d-3}$ 衰减最慢，这些方向对应于 $\varphi \in \{\pi/2, 3\pi/2\}$。

按照 [14], 中的一般方法，序列 $(\Psi^j{}_{\mathrm{C}})_{j=0}^{\infty} \subset \Pi(\mathbb{S}^{d-1})$ 可用于为 $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ 生成框架，具体如下。对于每个 $j \in \mathbb{N}$，我们要求形如以下形式的正求积公式

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} f\,\mathrm{d}\omega_{d-1} = \sum_{r=1}^{r_j} \omega_{j,r} f(\eta_{j,r}), \qquad \text{if } f \in \Pi_{2j+1}(\mathbb{S}^{d-1}), \tag{16}$$

and

$$\int_{\mathbb{S}^{d-2}} f\,\mathrm{d}\omega_{d-2} = \sum_{s=1}^{s_j} \omega'_{j,s} f(\eta'_{j,s}), \qquad \text{if } f \in \Pi_{2j+1}(\mathbb{S}^{d-2}), \tag{17}$$

点为 $\eta_{j,\,r} \in \mathbb{S}^{d-1}$，$\eta'_{j,\,s} \in \mathbb{S}^{d-2}$，相应的权重为 $\omega_{j,\,r}$，$\omega'_{j,\,s} > 0$。有关球面求积规则及其构造的详细信息，请参阅 [4, 5, 6, 12, 21, 25]及其中的参考文献。特别地，我们可以假设（例如参见 [21]），(16) 和 (17) 中的采样点数满足

$$r_j \sim 2^{j(d-1)}, \qquad s_j \sim 2^{j(d-2)}. \tag{18}$$

如 [14, 第 4.5 节3] 所建议的，对于 $SO(d-2)$-不变序列的情形，我们考虑系统

$$\mathcal{X}[(\Psi_{\mathrm{C}}^{j})_{j=0}^{\infty}] = \left\{ \sqrt{\omega_{j,r}\omega'_{j,s}}\, T^{d}(g_{\eta_{j,r}} h_{\eta'_{j,s}})\Psi_{\mathrm{C}}^{j},\ r=1,\dots,r_j,\ s=1,\dots,s_j,\ j\in\mathbb{N}_0 \right\}, \tag{19}$$

其中 $r_0 = s_0 = 1$，并且 $\eta_{0,\,1} \in \mathbb{S}^{d-1}$, $\eta'_{0,\,1} \in \mathbb{S}^{d-2}$ 可以任意选取。这里，使用简写记号

$$\Psi_{\mathrm{C}}^{j,r,s} = \sqrt{\omega_{j,r}\omega'_{j,s}}\, T^{d}(g_{\eta_{j,r}} h_{\eta'_{j,s}})\Psi_{\mathrm{C}}^{j}, \quad r=1,\dots,r_j,\ s=1,\dots,s_j,\ j\in\mathbb{N}_0,$$

我们将 $\mathcal{X}[(\Psi^{j}{}_{\mathrm{C}})_{j=0}^{\infty}]$ 与以下按（规范）顺序排列的序列

$$(\Psi_{\mathrm{C}}^{0,1,1}, \Psi_{\mathrm{C}}^{1,1,1}, \dots, \Psi_{\mathrm{C}}^{1,1,s_1}, \Psi_{\mathrm{C}}^{1,2,1} \dots, \Psi_{\mathrm{C}}^{1,2,s_1}, \dots\dots, \Psi_{\mathrm{C}}^{1,r_1,s_1}, \Psi_{\mathrm{C}}^{2,1,1}, \dots\dots).$$

注意，根据（18），在每个尺度 j （19）处的旋转数量按$2^{j(2d-3)}$增长。相比之下，对于球面小波和方向多项式小波等以往的构造，这一数量通常按 $2^{j(d-1)}$缩放，这可以视为其有限方向敏感性的体现（有关更多细节，请参见 [14]）。

命题 3.1
系统 $\mathcal{X}[(\Psi \quad j)_{j=0}^{\infty}]$ 是 $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ </style>上的 *Parseval* 框架。特别地，

$$f = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{r_j}\sum_{s=1}^{s_j} \langle f, \Psi_{\mathrm{C}}^{j,r,s}\rangle_{\mathbb{S}^{d-1}} \Psi_{\mathrm{C}}^{j,r,s}$$

在 $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ 中无条件收敛，对每个 $f \in L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ 均成立。

证明。 根据 [14, 命题 3.1] ，只需证明

$$\delta_{n,0} + (\dim \mathcal{H}_n^d)^{-1} \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k\in\mathcal{I}_n^d} |\Psi_{\mathrm{C}}^{j}(n,k)|^2 = 1, \qquad \text{for each } n\in\mathbb{N}_0. \tag{20}$$

根据构造，我们有 $\Psi^{j}{}_{\mathrm{C}} = T^{d}(g_0)\Psi^{j}$, $j\in\mathbb{N}_0$，其中 Ψ^{j} 由 (12) 定义。因此，$\Psi^{j}(n,k)$ 和 $\Psi^{j}{}_{\mathrm{C}}(n,k) = \langle \Psi^{j}, T^{d}(g_0^{-1})Y^{d}{}_{,k}{}^{n}\rangle_{\mathbb{S}^{d-1}}$ 都表示 Ψ^{j} 关于标准正交基 $\{Y^{d}{}_{,k}{}^{n},\ k\in\mathcal{I}_n^d\}$ 和 $\{T^{d}(g_0^{-1})Y^{d}{}_{,k}{}^{n},\ k\in\mathcal{I}_n^d\}$ 的傅里叶系数。因此，

$$\sum_{k\in\mathcal{I}_n^d} |\Psi_{\mathrm{C}}^{j}(n,k)|^2 = \sum_{k\in\mathcal{I}_n^d} |\Psi^{j}(n,k)|^2$$

因此 (20) 可化为

$$\delta_{n,0} + \sum_{j=1}^{\infty} \left|\kappa\Big(\frac{n}{2^{j-1}}\Big)\right|^2 \sum_{k\in\mathcal{I}_n^d} |\zeta_k^{d,n}|^2 = 1, \qquad \text{for each } n\in\mathbb{N}_0.$$

现在由（10）和（11）即可轻易推出该断言。 □

作为本节的总结，我们指出，曲波展开在空间$L^p(\mathbb{S}^{d-1})$中快速收敛，其中 $1 \le p \le \infty$，这里回顾一下，按照我们的约定，符号 $L^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$表示 $\mathbb{S}^{d-1}$上的连续函数巴拿赫空间。对于每个 $J \in \mathbb{N}_0$，令 Λ_J: $L^1(\mathbb{S}^{d-1}) \to \Pi_{2^J}(\mathbb{S}^{d-1})$为如下定义的线性算子

$$\Lambda_J f = \sum_{j=0}^{J} \sum_{r=1}^{r_j} \sum_{s=1}^{s_j} \langle f, \Psi_{\mathrm{C}}^{j,r,s} \rangle_{\mathbb{S}^{d-1}} \Psi_{\mathrm{C}}^{j,r,s}.$$

此外，令

$$E_m(f)_p = \inf_{P \in \Pi_m(\mathbb{S}^{d-1})} \|f - P\|_{L^p(\mathbb{S}^{d-1})}, \qquad m \in \mathbb{N}_0, \quad 1 \le p \le \infty,$$

表示 $f \in L^p(\mathbb{S}^{d-1})$ 在 $\Pi_m(\mathbb{S}^{d-1})$ 中关于 $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{S}^{d-1})}$ 的最佳逼近误差。于是得到以下结果。为简便起见，我们假设本节开头所用的函数 ϕ 是无穷次可微的，即$\phi \in C^\infty([0,\infty))$.

命题 3.2
设 $1 \le p \le \infty$。则

$$\|f - \Lambda_J f\|_{L^p(\mathbb{S}^{d-1})} \le c_p E_{2^{J-1}}(f)_p, \qquad for\ each\ f \in L^p(\mathbb{S}^{d-1}).$$

证明。 与 [30,引理 5。1], 的证明完全相同，简单计算可得

$$\Lambda_J f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathcal{I}_n^d} \phi^2\Big(\frac{n}{2^J}\Big) \langle f, Y_k^{d,n} \rangle_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_k^{d,n}.$$

换言之， $\Lambda_J f = f * \Phi^J$，其中

$$f * \Phi^J(\eta) = \langle f, T^d(g_\eta)\Phi^J \rangle_{\mathbb{S}^{d-1}}, \qquad \eta \in \mathbb{S}^{d-1},$$

表示 f 与纬向尺度函数的标准球面卷积

$$\Phi^J = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathcal{I}_n^d} \phi^2\Big(\frac{n}{2^J}\Big) \overline{Y_k^{d,n}(e^d)}\, Y_k^{d,n}. \tag{21}$$

对于这样的核（21），众所周知，$\|f * \Phi^J\|_{L^p(\mathbb{S}^{d-1})} \le c_p \|f\|_{L^p(\mathbb{S}^{d-1})}$。后者的证明可见于 [11,定理 2.6。3]

显然，对于每个 $f \in \Pi_{2^{J-1}}(\mathbb{S}^{d-1})$，都有 $\Lambda_J f = f$。因此，如果 $P \in \Pi_{2^{J-1}}(\mathbb{S}^{d-1})$ 是 f 在 $\Pi_{2^{J-1}}(\mathbb{S}^{d-1})$ 中关于 $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{S}^{d-1})}$ 的最佳逼近，那么

$$\|f - \Lambda_J f\|_{L^p(\mathbb{S}^{d-1})} \le \|f - P\|_{L^p(\mathbb{S}^{d-1})} + \|\Lambda_J(P - f)\|_{L^p(\mathbb{S}^{d-1})} \le c_p E_{2^{J-1}}(f)_p.$$

□

4 局部化

下面我们推导多项式曲波的局部化界。这里，与球面小波 [7, 11, 25, 26]和方向多项式小波 [30, 31], 的已有估计（1）不同，上界呈现出依赖方向的衰减，这表明其具有特别强的方向敏感性。注意，对于 $d = 3$，我们的框架基本上与 [9], 中的第二代曲波重合，以下局部化估计此前已在 [29, 命题 24]中得到证明。

定理 4.1
设 Ψ_{C}^j，$j \in \mathbb{N}_0$，如第 3 节 中所定义，且 $\kappa \in C^q([0,\infty))$ 对某个 $q \in \mathbb{N}$成立。我们假设存在某个 $t_0 \in (1/2,\ 2)$ 使得 $\kappa^{(q)}(t) \neq 0$ 对每个 $t \in (1/2,\ t_0)$均成立。则

$$|\Psi_{\mathrm{C}}^j(x)| \le \frac{c_q 2^{j(3d-2)/4} |x_d + \mathrm{i}x_{d-1}|^{2^{j-2}}}{(1 + 2^j |\mathrm{Arg}(x_d + \mathrm{i}x_{d-1})|)^q}, \qquad x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

这里，$c_q > 0$ 是一个常数，它仅取决于 κ、q 和 d。

证明。我们的证明采用了与二维情形中类似的论证 [29, 命题 2。4]。我们从式（14）给出的表示出发，即

$$\Psi_{\mathrm{C}}^j(x) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\dim \mathcal{H}_n^d}\, \kappa\Big(\frac{n}{2^{j-1}}\Big)\, A^n_{(n,\ldots,n)} |x_d + \mathrm{i}x_{d-1}|^n \cos(n\,\mathrm{Arg}(x_d + \mathrm{i}x_{d-1})).$$

利用伽马函数的倍乘公式，归一化常数$A^n_{(n,\ldots,n)}$ 由（5）定义，可以写成如下形式

$$A^n_{(n,\ldots,n)} = \frac{2^{(2-d)/2}}{\sqrt{\Gamma(\frac{d}{2})}} \prod_{j=0}^{d-3} \sqrt{\frac{(2n + d - j - 2)\Gamma(n + \frac{d-j-2}{2})}{\Gamma(n + \frac{d-j-1}{2})}}. \tag{22}$$

由（6）和（22），容易验证存在常数 c_0，c_1，……，c_{q-1} 使得

$$\sqrt{\dim \mathcal{H}_n^d}\, A^n_{(n,\ldots,n)} = n^{3(d-2)/4} \left(\sum_{p=0}^{q-1} c_p n^{-p} + \mathcal{O}(n^{-q}) \right), \qquad n \to \infty.$$

因此，

$$\Psi_{\mathrm{C}}^j(x) = R_j(x) + \sum_{p=0}^{q-1} c_p \sum_{n=0}^{\infty} \kappa\Big(\frac{n}{2^{j-1}}\Big)\, n^{3(d-2)/4-p} |x_d + \mathrm{i}x_{d-1}|^n \cos(n\,\mathrm{Arg}(x_d + \mathrm{i}x_{d-1}))$$

其中，由于$\mathrm{supp}(\kappa) \subset [1/2, 2]$,

$$|R_j(x)| \le c_q 2^{j((3d-2)/4-q)} |x_d + \mathrm{i}x_{d-1}|^{2^{j-2}}.$$

为完成证明，只需证明

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \kappa\Big(\frac{n}{N}\Big)\, n^{3(d-2)/4-p} z^n \cos(n\varphi) \right| \le \frac{c_p z^{N/2} N^{(3d-2)/4}}{(1 + N\varphi)^q},$$

对每个 $N \in \mathbb{N}$、 $z \in [0,1]$ 和 $\varphi \in [0,\pi]$ 均成立。为此，我们首先注意到

$$\kappa\Big(\frac{n}{N}\Big)\, n^{3(d-2)/4-p} z^n = N^{3(d-2)/4-p} h_{z,N}\Big(\frac{n}{N}\Big),$$

其中 $h_{z,N}(t) = \kappa(t) t^{3(d-2)/4-p} z^{Nt}$。显然，$h_{z,N} \in C^q([0,\infty))$ 的支集 $\operatorname{supp}(h_{z,N}) \subset [1/2, 2]$。因此，只需证明估计式

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\infty} h_{z,N}\Big(\frac{n}{N}\Big) \cos(n\varphi) \right| \le \frac{c_q z^{N/2}}{(1+N\varphi)^q}. \tag{23}$$

应用 [22, 引理 5], 可得

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\infty} h_{z,N}\Big(\frac{n}{N}\Big) \cos(n\varphi) \right| \le \left| \int_0^2 h_{z,N}(t) \cos(Nt\varphi)\, \mathrm{d}t \right| + \frac{c_q V(h_{z,N}^{(q-1)})}{N^q}, \tag{24}$$

其中

$$V(h_{z,N}^{(q-1)}) = \int_0^2 |h_{z,N}^{(q)}(t)|\, \mathrm{d}t, \qquad h_{z,N}^{(q)}(t) = \frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}t^q} h_{z,N}(t).$$

这里，$V(h_{z,N}^{(q-1)}) \le c_q z^{N/2}$，验证如下。根据莱布尼茨法则，$h_{z,N}^{(q)}(t)$ 是如下形式函数的线性组合

$$\kappa^{(q-\ell)}(t) \frac{\mathrm{d}^{\ell-k}}{\mathrm{d}t^{\ell-k}} \left(t^{3(d-2)/4-p} \right) (\ln z^N)^k z^{Nt}, \qquad 0 \le k \le \ell \le q.$$

因此，只需证明估计式

$$|\ln(z^N)|^k \int_{1/2}^2 z^{Nt} |\kappa^{(q-\ell)}(t)|\, \mathrm{d}t \le c_q z^{N/2}. \tag{25}$$

根据 κ 的定义，有 $\kappa^{(m)}(1/2) = \kappa^{(m)}(2) = 0$ 对于 $0 \le m \le q$。此外，根据假设，存在某个 $t_0 \in (1/2,\ 2)$，使得 $\kappa^{(q)}$ 在 $(1/2,\ t_0)$ 中不为零。因此，中值定理意味着，对于所有 $t \in (1/2,\ t_0)$，$0 \le m \le q$，都有 $\kappa^{(m)}(t) \ne 0$。从而

$$\int_{1/2}^2 z^{Nt} |\kappa^{(q-\ell)}(t)|\, \mathrm{d}t = \left| \int_{1/2}^{t_0} z^{Nt} \kappa^{(q-\ell)}(t)\, \mathrm{d}t \right| + \int_{t_0}^2 z^{Nt} |\kappa^{(q-\ell)}(t)|\, \mathrm{d}t.$$

反复分部积分可得

$$\int_{1/2}^{t_0} z^{Nt} \kappa^{(q-\ell)}(t)\, \mathrm{d}t = z^{Nt_0} \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\kappa^{(q-\ell+1)}(t_0)}{(\ln z^N)^{r+1}} + \frac{(-1)^k}{(\ln z^N)^k} \int_{1/2}^{t_0} z^{Nt} \kappa^{(q-\ell+k)}(t)\, \mathrm{d}t.$$

因此，由于 $s^\delta \ln(s)^m \to 0$ 当 $s \to 0^+$ 时，对于所有 $\delta > 0$ 和所有 $m \in \mathbb{N}$，现在很容易看出，(25) 成立。因此，$V(h_{z,N}^{(q-1)}) \le c_q z^{N/2}$，如所声称的。事实上，通过同样的论证可得，对于每个 $0 \le m \le q-1$，$V(h_{z,N}^{(m)}) \le c_q z^{N/2}$。

最后，我们对（24）右侧的积分推导出一个估计。在这里，反复应用分部积分，并利用以下事实：对于 $V(h_{z,N}^{(m)}) \le c_q z^{N/2}$，

$0 \le m \le q-1$，我们得到

$$\begin{aligned}\left|\int_0^2 h_{z,N}(t)\cos(Nt\varphi)\,\mathrm{d}t\right| &\le \left|\int_0^2 h_{z,N}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Nt\varphi}\,\mathrm{d}t\right| \\ &= \left|\int_0^2 h_{z,N}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(1+N\varphi)}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\le \frac{c_q z^{N/2}}{(1+N\varphi)^q}.\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

定理 4.1 可用于研究当 j 变大时，$\|\Psi^j{}_{\mathrm{C}}\|_{L^p(\mathbb{S}^{d-1})}$ 的行为。具体而言，我们有以下结果。

推论 4.2
令 Ψ^j，$j\in\mathbb{N}_0$，定义如第 3 节所述，并对 $\kappa\in C^q([0,\infty))$作与定理 4.1中相同的假设。若 $0<p<\infty$ 且 $q>1/p$，则

$$\|\Psi^j_{\mathrm{C}}\|_{L^p(\mathbb{S}^{d-1})} \sim 2^{j((3d-2)/4-d/(2p))}.$$

此外，（只要 $q\ge 1$）就有

$$\|\Psi^j_{\mathrm{C}}\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{d-1})} = |\Psi^j_{\mathrm{C}}(e^d)| \sim 2^{j(3d-2)/4}.$$

这里，等价常数仅依赖于 κ、q、p 和 d。

证明。 我们紧密遵循 [24] 中针对分区设置给出的论证。在某些情况下，使用由 (12) 给出的函数 $\Psi^j = T(g_0^{-1})\Psi^j{}_{\mathrm{C}}$，而非曲波 $\Psi^j{}_{\mathrm{C}}$ 本身，会更为方便。当然，由于曲面测度 ω_{d-1} 在 $\mathbb{S}^{d-1}$ 上具有旋转不变性，使用后者也不会造成任何问题。

对于 $p=2$，表示式 (12) 立即给出

$$\|\Psi^j\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})} = \sum_{n=0}^{\infty} \dim \mathcal{H}^d_n \left|\kappa\Big(\frac{n}{2^{j-1}}\Big)\right|^2.$$

因此，利用 (6)，不难验证 $\|\Psi^j\|_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})} \sim 2^{j(d-1)/2}$。

在一般情形下 $p\in(0,\infty)$，我们可以利用 定理 4.1，它根据球坐标 (3) 给出了如下估计

$$|\Psi^j(\theta_1,\dots,\theta_{d-1})| \le \frac{c_q\left(\prod_{m=2}^{d-1}\sin\theta_m\right)^{2^{j-2}} 2^{j(3d-2)/4}}{(1+2^j|\theta_1|)^q}.$$

利用此估计，经过直接计算可得

$$\|\Psi^j\|^p_{L^p(\mathbb{S}^{d-1})} \le c_q 2^{j(p(3d-2)/4-1)}\left(\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2^{j-2}p}\,\mathrm{d}\theta\right)^{d-2},$$

在满足 $q>1/p$ 的条件下。根据众所周知的公式

$$\int_0^{\pi/2}\sin^m\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{m+1}{2})}{2\Gamma(\frac{m+2}{2})} \le cm^{-1/2},$$

现在可以得到

$$\|\Psi^j\|_{L^p(\mathbb{S}^{d-1})} \le c2^{j((3d-2)/4-d/(2p))}.$$

估计式 $\|\Psi^j{}_{\mathrm{C}}\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{d-1})} = |\Psi^j{}_{\mathrm{C}}(e^d)| \le c2^{j(3d-2)/4}$ 是由（14）和定理 4.1直接推出的。由于 $0 < p < 2$，它可用于得到相应情形下的下界

$$\|\Psi^j_{\mathrm{C}}\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})} \le \|\Psi^j_{\mathrm{C}}\|^{2-p}_{L^\infty(\mathbb{S}^{d-1})}\|\Psi^j_{\mathrm{C}}\|^p_{L^p(\mathbb{S}^{d-1})}.$$

对于 $2 < p \le \infty$，下界估计可由上述结果和 Hölder 不等式推出。具体而言，我们有

$$\|\Psi^j_{\mathrm{C}}\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})} \le \|\Psi^j_{\mathrm{C}}\|_{L^p(\mathbb{S}^{d-1})}\|\Psi^j_{\mathrm{C}}\|_{L^q(\mathbb{S}^{d-1})}, \quad q = \frac{p}{p-1},$$

以及

$$\|\Psi^j_{\mathrm{C}}\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})} \le \|\Psi^j_{\mathrm{C}}\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{d-1})}\|\Psi^j_{\mathrm{C}}\|_{L^1(\mathbb{S}^{d-1})}.$$

证明至此完成。 □

我们注意到渐近行为

$$\|\Psi^j_{\mathrm{C}}\|_{L^p(\mathbb{S}^{d-1})} \sim 2^{j((3d-2)/4-d/(2p))}, \qquad 0 < p \le \infty, \tag{26}$$

在 推论 4.2中得到的结果，与此前研究的多项式框架的 -范数的典型尺度规律有所不同。具体而言，若 $(\tilde\Psi^j)_{j=0}^\infty$ 表示球面小波或方向多项式小波在 $\mathbb{S}^{d-1}$上的一个初始序列，那么根据 [24] 和 [30]，

$$\|\tilde\Psi^j\|_{L^p(\mathbb{S}^{d-1})} \sim 2^{j(d-1)(1-1/p)}, \qquad 0 < p \le \infty. \tag{27}$$

显然，(26) 和 (27) 仅在 $p = 2$ 的情况下相同。

5 方向敏感性

暂且设 $(\Psi^j)_{j=0}^\infty$ 是一个任意的球多项式序列 $\Psi^j \in \Pi_{2^j}(\mathbb{S}^{d-1})$。我们假设这些多项式都以某种方式集中在北极 e^d。在这种情况下，函数

$$T^d(h)\Psi^j, \qquad h \in SO(d-1),$$

也集中在 e^d，我们称它们为 Ψ^j 的取向。按照二维情形 [35]，中的做法，可以使用自相关函数来衡量 Ψ^j 的方向性

$$SO(d-1) \to \mathbb{C}, \qquad h \mapsto \langle T^d(h)\Psi^j, \Psi^j\rangle_{\mathbb{S}^{d-1}},$$

该函数以其各种取向检验 Ψ^j。在此背景下， Ψ^j 的方向敏感性较高，意味着其自相关函数在单位矩阵 $\mathrm{I}_d \in SO(d-1)$ 处具有良好的局部化特性。

以初始序列 $(\Psi^j)_{j=0}^\infty$ 构造局部多项式框架的既有方法，包括球面小波 [1, 10, 11, 13, 18, 19, 20, 22, 24, 25, 26]，、方向小波 [16, 17, 30, 35]，和第二代曲波 [9, 29]，，其方向性程度差异很大

。具体而言，若 $(\Psi^{j}{}_{\mathrm{N}})_{j=0}^{\infty}$ 表示球面小波的初始序列，则

$$\langle T^{d}(h)\Psi^{j}_{\mathrm{N}},\Psi^{j}_{\mathrm{N}}\rangle_{\mathbb{S}^{d-1}}=\|\Psi^{j}_{\mathrm{N}}\|^{2}_{L^{2}(\mathbb{S}^{d-1})},\qquad \text{for each } h\in SO(d-1).$$

因此，相应的自相关函数是常数，相关框架完全不表现出任何方向性。如果 $(\Psi^{j}{}_{\mathrm{W}\,\kappa})_{j=0}^{\infty}$ 表示 $\mathbb{S}^{2}$上的方向小波初始序列，如 [16, 35], 中所定义，其中 $K\in\mathbb{N}_{0}$ 是控制各向异性程度的某个固定参数，那么

$$\langle T^{3}(h(\gamma))\Psi^{j}_{\mathrm{W},K},\Psi^{j}_{\mathrm{W},K}\rangle_{\mathbb{S}^{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\dim\mathcal{H}^{3}_{n}\left|\kappa\Big(\frac{n}{2^{j-1}}\Big)\right|^{2}\cos^{K_{n}}\gamma,\qquad \gamma\in[0,2\pi),\tag{28}$$

其中 $K_{n}=\min(K,\ n)$，而 $h(\gamma)\in\mathbb{R}^{3\times3}$是经过 γ正向旋转后位于（x_{1}，x_{2}）平面中的旋转。最近，我们针对高维球面引入了方向多项式小波 $\Psi^{j}{}_{\mathrm{W}\,K}\in\Pi_{2j}(\mathbb{S}^{d-1})$（见 [30]）。在此，我们证明了

$$\langle T^{d}(h)\Psi^{j}_{\mathrm{W},K},\Psi^{j}_{\mathrm{W},K}\rangle_{\mathbb{S}^{d-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\dim\mathcal{H}^{d}_{n}\left|\kappa\Big(\frac{n}{2^{j-1}}\Big)\right|^{2}(\langle e^{d-1},he^{d-1}\rangle)^{K_{n}},\qquad h\in SO(d-1).\tag{29}$$

公式（28）和（29）表明，与球面小波不同，只要 K选取得足够大，方向多项式小波就能表现出很强的方向敏感性。然而，由于 K 是一个必须预先固定的参数，方向性不会随着 j而增强。具有这一性质的框架也称为可转向框架（见 [14, 16, 17, 30, 34, 35]）。

在此前考察的局部多项式框架构造中，定义在 $\mathbb{S}^{2}$ 上的第二代曲波（由 [9], 引入）尤为突出，因为其方向分辨率不受限制。事实上，这一性质也适用于 第 3 节 中定义的高维多项式曲波。具体而言，有如下结果。

命题 5.1
设 Ψ^{j}_{C} 如 第 3 节 中所定义。对于 $d=3$,

$$\langle T^{3}(h(\gamma))\Psi^{j}_{\mathrm{C}},\Psi^{j}_{\mathrm{C}}\rangle_{\mathbb{S}^{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\dim\mathcal{H}^{3}_{n}\left|\kappa\Big(\frac{n}{2^{j-1}}\Big)\right|^{2}\Big(\cos^{2n}\frac{\gamma}{2}+\sin^{2n}\frac{\gamma}{2}\Big),\quad \gamma\in[0,2\pi),\tag{30}$$

其中 $h(\gamma)\in\mathbb{R}^{3\times3}$ 是在$(x_{1},\ x_{2})$平面内的正向旋转，旋转角为 γ。若 $d\geq4$，则

$$\begin{aligned}&\langle T^{d}(h)\Psi^{j}_{\mathrm{C}},\Psi^{j}_{\mathrm{C}}\rangle_{\mathbb{S}^{d-1}}\\&\quad=2\sum_{n=0}^{\infty}\dim\mathcal{H}^{d}_{n}\left|\kappa\Big(\frac{n}{2^{j-1}}\Big)\right|^{2}\sum_{\substack{m=0\\ m\ even}}^{n}|c(d,n,m)|^{2}\frac{\Gamma(d-3)m!}{\Gamma(m+d-3)}C_{m}^{\frac{d-3}{2}}(\langle he^{d-1},e^{d-1}\rangle),\end{aligned}\tag{31}$$

对每个 $h\in SO(d-1)$，其中

$$c(d,n,m)=A^{n}_{(m,0,\dots,0)}A^{n}_{(n,\dots,n)}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{d}{2})\binom{n}{m}\Gamma(m+d-3)(-\mathrm{i})^{m}}{2^{m+d-4}(n+\frac{d-2}{2})\Gamma(\frac{d-2}{2})\Gamma(\frac{d-3}{2})\Gamma(m+\frac{d-2}{2})}.$$

证明。 对于 $d=3$，分析函数 $\Psi^{j}{}_{\mathrm{C}}$ （本质上）与 [9],中的第二代曲波一致，并且（30）由 [29,命题 2.3]得出。

现在，我们考虑 $d \geq 4$的情形。以下证明依赖于与酉群表示 T^d相关的矩阵函数的基本性质。这些性质概述于本文的 附录 中。由（13），可得

$$\Psi_{\mathrm{C}}^{j} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\dim \mathcal{H}_n^d}\, \kappa\Big(\frac{n}{2^{j-1}}\Big) \left(T^d(g_0) Y_{(n,\dots,n)}^{d,n} + T^d(g_0) Y_{(n,\dots,n)^-}^{d,n} \right),$$

其中 $(n,\dots,n,n)^- = (n,\dots,n,-n)$。因此，由（A.2）中矩阵函数的定义可得

$$\langle T^d(h)\Psi_{\mathrm{C}}^{j}, \Psi_{\mathrm{C}}^{j} \rangle_{\mathbb{S}^{d-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \dim \mathcal{H}_n^d \left| \kappa\Big(\frac{n}{2^{j-1}}\Big) \right|^2 L_n(h),$$

其中

$$L_n(h) = \frac{1}{2}\Big(t^{d,n}_{(n,\dots,n),(n,\dots,n)}(g_0^{-1}hg_0) + t^{d,n}_{(n,\dots,n)^-,(n,\dots,n)}(g_0^{-1}hg_0) + t^{d,n}_{(n,\dots,n),(n,\dots,n)^-}(g_0^{-1}hg_0) + t^{d,n}_{(n,\dots,n)^-,(n,\dots,n)^-}(g_0^{-1}hg_0) \Big). \tag{32}$$

这里，利用（A.6）和（A.8），得到

$$t^{d,n}_{(n,\dots,n),(n,\dots,n)}(g_0^{-1}hg_0) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{k,\ell \in \mathcal{I}_m^{d-1}} t^{d,n}_{(n,\dots,n),(m,k)}(g_0^{-1})\, t^{d-1,m}_{k,\ell}(h)\, t^{d,n}_{(m,\ell),(n,\dots,n)}(g_0). \tag{33}$$

（32）中的其他矩阵函数也有类似表达式。

显然，L_n是（A.10）中定义的多项式子空间 $\mathcal{M}_n^1(SO(d-1))$的一个元素。此外，由（14），$\Psi^j{}_{\mathrm{C}}$在保持 e^d和 e^{d-1}不变的旋转下是不变的，即，

$$T^d(k)\Psi_{\mathrm{C}}^{j} = \Psi_{\mathrm{C}}^{j}, \qquad \text{for each } k \in SO(d-2). \tag{34}$$

事实上，（34）直接源于球谐函数$T^d(g_0)Y^{d}{}_{,n\,(n,\dots,n)}$和 $T^d(g_0)Y^{d}{}_{,n\,(n,\dots,n)^-}$的 $SO(d-2)$不变性。因此，L_n具有如下对称性

$$L_n(k_1 h k_2) = L_n(h), \qquad \text{for } k_1, k_2 \in SO(d-2),\ h \in SO(d-1). \tag{35}$$

对称性（35）意味着 L_n 是矩阵函数$t^{d-1}{}_{,0\,0}{}^{m}$、的线性组合，下面我们将对此进行证明。令 $m \in \mathbb{N}_0$ 且 $r,\ s \in \mathcal{I}_m^{d-1}$。由（A.1）和（A.6），可得

$$\begin{aligned} \langle L_n, t_{r,s}^{d-1,m} \rangle_{SO(d-1)} &= \int_{\mathbb{S}^{d-2}} \int_{SO(d-2)} L_n(h_\eta k)\, \overline{t_{r,s}^{d-1,m}(h_\eta k)}\, \mathrm{d}\mu_{d-2}(k)\, \mathrm{d}\omega_{d-2}(\eta) \\ &= \int_{\mathbb{S}^{d-2}} L_n(h_\eta) \int_{SO(d-2)} \overline{\sum_{q \in \mathcal{I}_m^{d-1}} t_{r,q}^{d-1,m}(h_\eta) t_{q,s}^{d-1,m}(k)}\, \mathrm{d}\mu_{d-2}(k)\, \mathrm{d}\omega_{d-2}(\eta). \end{aligned}$$

根据 (A.8)，对于每个 $k \in SO(d-2)$ 和 $d \geq 5$，有 $t^{d-1}{}_{,q\,s}{}^{m}{}_{,}(k) = \delta_{q_1,s_1} t^{d-2}{}_{,s_1\,(q_2,\dots,q_{d-2}),(s_2,\dots,s_{d-2})}(k)$。对于 $d = 4$，由 (A.9) 得 $t^{3}{}_{,q\,s}{}^{m}{}_{,}(k(\gamma)) = \delta_{q,s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\gamma}$，其中 $k(\gamma) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ 是一个

在 (x_1, x_2) 平面内绕 γ 进行的正向旋转。因此，由于矩阵函数的正交性，且由于 $t^{d-2}{}_{,0\,0,\,0} \equiv 1$，对于 $d \geq 5$，我们得到

$$\langle L_n, t^{d-1,m}_{r,s}\rangle_{SO(d-1)} = \delta_{s,0}\langle L_n, t^{d-1,m}_{r,0}\rangle_{SO(d-1)}.$$

此时，我们确认 L_n 可以写成矩阵函数 $t^{d-1}{}_{,r\,0}{}^{m}$ 的线性组合，其中 $r \in \mathcal{I}^{d-1}_m$、$0 \leq m \leq n$。特别地，利用（A.7），由$F_n$: $\mathbb{S}^{d-2} \to \mathbb{C}$ 定义的函数 $F_n(\eta) = L_n(h_\eta)$ 构成了一个次数为 n 的多项式，定义于 $\mathbb{S}^{d-2}$ 上，即 $F_n \in \Pi_n(\mathbb{S}^{d-2})$。由（35），

$$F_n(k\eta) = L_n(kh_\eta) = L_n(h_\eta) = F_n(\eta), \qquad \text{for each } k \in SO(d-2),\ \eta \in \mathbb{S}^{d-2}.$$

由于 $Y^{d-1}{}_{,\,0}{}^{m}$ 是 $\mathcal{H}^{d-1}_m$ 中唯一的、在群 $SO(d-2)$ 作用下保持不变的元素（除标量倍数外；例如参见 [11, 引理 1.7.1]），因此可得

$$F_n = \sum_{m=0}^{n} \langle F_n, Y_0^{d-1,m}\rangle_{\mathbb{S}^{d-2}} Y_0^{d-1,m}.$$

因此，由关系 $L_n(h) = F_n(he^{d-1})$ 以及（A.7），我们得到

$$\langle L_n, t^{d-1,m}_{r,s}\rangle_{SO(d-1)} = \delta_{s,0}\delta_{r,0}\langle L_n, t^{d-1,m}_{0,0}\rangle_{SO(d-1)}. \tag{36}$$

现在，我们考虑（32）中给出的 L_n 表示。按照（33）展开其中涉及的矩阵函数，并利用（36），可得

$$\begin{aligned} L_n(h) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n} t^{d-1,m}_{0,0}(h)\big(&t^{d,n}_{(n,\dots,n),(m,0,\dots,0)}(g_0^{-1})t^{d,n}_{(m,0,\dots,0),(n,\dots,n)}(g_0) \\ &+ t^{d,n}_{(n,\dots,n)^-,(m,0,\dots,0)}(g_0^{-1})t^{d,n}_{(m,0,\dots,0),(n,\dots,n)}(g_0) + t^{d,n}_{(n,\dots,n),(m,0,\dots,0)}(g_0^{-1})t^{d,n}_{(m,0,\dots,0),(n,\dots,n)^-}(g_0) \\ &+ t^{d,n}_{(n,\dots,n)^-,(m,0,\dots,0)}(g_0^{-1})t^{d,n}_{(m,0,\dots,0),(n,\dots,n)^-}(g_0)\big). \end{aligned}$$

此外，对称性（A.3）和（A.4）可得

$$\begin{aligned} L_n(h) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n} t^{d-1,m}_{0,0}(h)\Big(&\Big|t^{d,n}_{(n,\dots,n),(m,0,\dots,0)}(g_0^{-1})\Big|^2 + \Big|t^{d,n}_{(n,\dots,n)^-,(m,0,\dots,0)}(g_0^{-1})\Big|^2 \\ &+ 2\Re\Big\{\big(t^{d,n}_{(n,\dots,n)^-,(m,0,\dots,0)}(g_0^{-1})\big)^2\Big\}\Big). \end{aligned}$$

这里，利用（A.7），不难验证

$$t^{d-1,m}_{0,0}(h) = \frac{\Gamma(d-3)m!}{\Gamma(m+d-3)} C_m^{\frac{d-3}{2}}(\langle he^{d-1}, e^{d-1}\rangle).$$

关于此公式的明确出处，请参见 [32, 第 471]页。

为了证明（31），还需证明

$$t^{d,n}_{(n,\dots,n),(m,0,\dots,0)}(g_0^{-1}) = c(d,n,m). \tag{37}$$

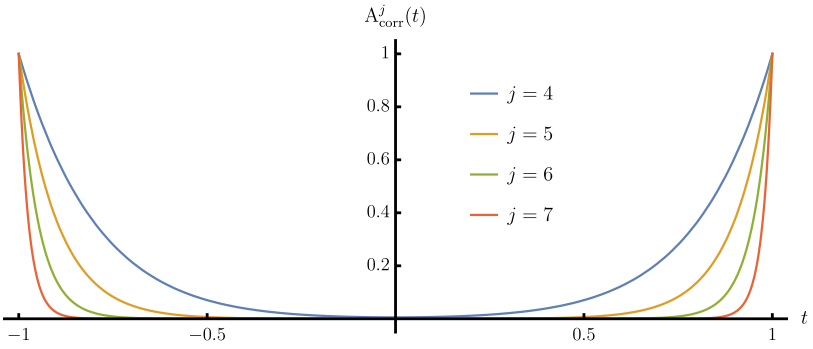


图2： 自相关函数 $\mathrm{A}^j_{\mathrm{corr}}$ （ $j=4$，5，6，7）

我们有

$$\begin{aligned} t^{d,n}_{(n,\dots,n),(m,0,\dots,0)}(g_0^{-1}) &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} Y^{d,n}_{(m,0,\dots,0)}(x)\,\overline{T^d(g_0)Y^{d,n}_{(n,\dots,n)}(x)}\,\mathrm{d}\omega_{d-1}(x) \\ &= A^n_{(m,0,\dots,0)}A^n_{(n,\dots,n)}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} C_{n-m}^{\frac{d-2}{2}+m}(x_d)(1-x_d^2)^{m/2} \\ &\quad\times C_m^{\frac{d-3}{2}}\!\left(\frac{x_{d-1}}{\sqrt{1-x_d^2}}\right)(x_d-\mathrm{i}x_{d-1})^n\,\mathrm{d}\omega_{d-1}(x). \end{aligned}$$

用球坐标表示（3），

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{S}^{d-1}} C_{n-m}^{\frac{d-2}{2}+m}(x_d)(1-x_d^2)^{m/2}C_m^{\frac{d-3}{2}}\!\left(\frac{x_{d-1}}{\sqrt{1-x_d^2}}\right)(x_d-\mathrm{i}x_{d-1})^n\,\mathrm{d}\omega_{d-1}(x) \\ &\qquad = c(d)\int_0^\pi C_{n-m}^{\frac{d-2}{2}+m}(\cos\theta_{d-1})H_{n,m}(\theta_{d-1})(\sin\theta_{d-1})^{m+d-2}\,\mathrm{d}\theta_{d-1}, \end{aligned}$$

其中 $c(d)=\Gamma(\frac{d}{2})/(\pi\Gamma(\frac{d-2}{2}))$ 且

$$H_{n,m}(\theta_{d-1}) = \int_0^\pi C_m^{\frac{d-3}{2}}(\cos\theta_{d-1})(\cos\theta_{d-1}-\mathrm{i}\cos\theta_{d-2}\sin\theta_{d-1})^n\sin^{d-3}\theta_{d-2}\,\mathrm{d}\theta_{d-2}.$$

Gegenbauer多项式的一个著名表示公式（例如参见 [32, 第 483] 页）给出

$$H_{n,m}(\theta) = \frac{2^{m+1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{d-2}{2}+m)n!\Gamma(m+d-3)}{m!\Gamma(\frac{d-3}{2})\Gamma(n+m+d-2)\mathrm{i}^m}\sin^m\theta\,C_{n-m}^{\frac{d-2}{2}+m}(\cos\theta).$$

此外，如 [32,第 462], 页所示

$$\int_0^\pi |C_{n-m}^{\frac{d-2}{2}+m}(\cos\theta)|^2(\sin\theta)^{2m+d-2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi\Gamma(n+m+d-2)}{2^{2m+d-3}(n-m)!(n+\frac{d-2}{2})\Gamma^2(m+\frac{d-2}{2})}.$$

结合以上所有结果，可以验证公式（37），因此（31）的证明完成。

□

在图2中，展示了归一化自相关函数

$$\mathrm{A}^j_{\mathrm{corr}}(t) = \frac{\langle T^d(h)\Psi^j_{\mathrm{C}},\Psi^j_{\mathrm{C}}\rangle_{\mathbb{S}^{d-1}}}{\|\Psi^j_{\mathrm{C}}\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})}}, \qquad t=\langle he^{d-1},e^{d-1}\rangle,$$

在 $d=4$中进行了可视化，即在 $\Psi^j{}_{\mathrm{C}} \in \Pi_{2j}(\mathbb{S}^3)$的情况下，以及不同尺度 j下。这里，$\langle T^d(h)\Psi^j{}_{\mathrm{C}}, \Psi^j{}_{\mathrm{C}}\rangle_{\mathbb{S}^{d-1}}$作为 $t=\langle he^{d-1}$的函数的表示 $e^{d-1}\rangle$ 由（31）给出，并且我们选择 κ 为 C^∞ 支撑集为$\mathrm{supp}(\kappa) = [1/2,2]$ 中构造的窗函数 [16]。

6 奇异性检测

最后，我们将展示多项式曲波在需要对各向异性特征进行局部分析的应用中的潜力。这里，我们重点讨论如何通过曲波系数的渐近衰减来识别边缘和高阶奇异性。具体而言，我们将推导二维情形 [29, 定理 3.3] 先前结果的高维版本。

对于 $z \in \mathbb{S}^{d-1}$，$r \in (0,\pi)$ 和 $\tau \in \mathbb{N}_0$，我们考虑各向同性／纬向测试信号$f_{z,r,\tau}$: $\mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{R}$ 定义为

$$f_{z,r,\tau}(\eta) = \tilde{f}_{\cos r,\tau}(\langle \eta, z\rangle), \quad \tilde{f}_{t_0,\tau}(t) := \begin{cases} (t-t_0)^\tau, & t\in[t_0,1], \\ 0, & t\in[-1,t_0). \end{cases} \tag{38}$$

特别是，$f_{z,r,\tau}$ 除了在球冠 $C(z,r)$ 的边界 $\partial C(z,r)$ 处的 r 阶导数不连续外，处处光滑。对于 $\tau=0$，测试信号就是 $C(z,r)$ 的示性函数，即 $f_{z,r,0} = \mathbf{1}_{C(z,r)}$。下文中，我们假设 $z=e^d$。此外，我们将采用简化记号 $f_{r,\tau} := f_{e^d,r,\tau}$。

根据第 3 节中图 1 之后的讨论，曲波 $\Psi^j{}_{\mathrm{C}}$ 局部化于 e^d，并沿方向 $\pm e^{d-1}$衰减最快。因此，对于 $\nu \in \mathbb{S}^{d-1}$，旋转后的曲波 $T^d(g_\nu^{-1})\Psi^j{}_{\mathrm{C}}$局部化于 $g_\nu^{-1}e^d$，并沿方向 $\pm g_\nu^{-1}e^{d-1}$衰减最快。可以合理地预期，当曲波 $T^d(g_\nu^{-1})\Psi^j{}_{\mathrm{C}}$在位置和方向上与边界 $\partial C(e^d,r)$充分匹配时，框架系数$|\langle f_{r,\tau}, T^d(g_\nu^{-1})\Psi^j{}_{\mathrm{C}}\rangle_{\mathbb{S}^{d-1}}|$取最大值。这里我们指出，$T^d(g_\nu^{-1})\Psi^j{}_{\mathrm{C}}$恰好位于$f_{r,\tau}$ 的一个（高阶）奇点上，当且仅当

$$\langle g_\nu^{-1}e^d, e^d\rangle = \nu_d = \cos r. \tag{39}$$

此外，在 $\nu \neq \pm e^d$的条件下，曲波 $T^d(g_\nu^{-1})\Psi^j{}_{\mathrm{C}}$ 与边界 $\partial C(e^d,r)$的方向精确对齐，每当

$$g_\nu^{-1}e^{d-1} = \pm \frac{e^d - \langle e^d, g_\nu^{-1}e^d\rangle g_\nu^{-1}e^d}{\|e^d - \langle e^d, g_\nu^{-1}e^d\rangle g_\nu^{-1}e^d\|_2}. \tag{40}$$

用 g_ν 从左侧乘（40）的两边，简单计算表明这等价于 (40)

$$\nu_{d-1}^2 + \nu_d^2 = 1, \qquad \text{i.e.,} \quad \nu = (0,\dots,0,\nu_{d-1},\nu_d). \tag{41}$$

因此，结合（39）和（41），曲波 $T^d(g_\nu^{-1})\Psi^j{}_{\mathrm{C}}$ 在位置和方向上与边界$\partial C(e^d,r)$的某一部分完全匹配，如果

$$\nu = (0,\dots,0,\pm\sin r, \cos r).$$

接下来我们将证明，当ν充分接近 $(0,\dots,0,\pm\sin\ r,\cos\ r)$时，曲波系数 $\langle f_{r,\tau}, T^d(g_\nu^{-1})\Psi^j{}_{\mathrm{C}}\rangle_{\mathbb{S}^{d-1}}$ 会达到峰值。否则，内积会随着 j 增大而迅速衰减。

6.1 一些辅助结果

在介绍本节的主要定理之前，我们需要先确立一些辅助结果。下面的引理给出了式（38）中定义的测试信号的调和系数的有用渐近公式。

引理 6.1
设 $\lambda = \frac{d-2}{2}$。则有

$$\langle f_{r,\tau}, Y_k^{d,n}\rangle_{\mathbb{S}^{d-1}} = \delta_{k,0}\, b_n^{\lambda}(\tilde{f}_{\cos r,\tau}) \sqrt{\frac{\Gamma(n+d-2)(d-2)}{n!\Gamma(d-2)(2n+d-2)}}. \tag{42}$$

这里，*Gegenbauer* 系数 $b_n^{\lambda}(\tilde{f}_{\cos r,\tau})$ 由 (9) 定义。此外，若

$$\gamma(\lambda, r, \tau) = \frac{4^{\lambda}\Gamma(\lambda)^2\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\sqrt{\lambda}\tau!(\sin r)^{\lambda+\tau}}{2^{\tau+1/2}\pi^{3/2}\Gamma(2\lambda)^{3/2}},$$

则对每个 $\varepsilon > 0$，渐近表达式

$$\langle f_{r,\tau}, Y_0^{d,n}\rangle_{\mathbb{S}^{d-1}} = \gamma(\lambda, r, \tau)\, n^{-\tau-1} \cos((n+\lambda)r - (\lambda+\tau+1)\pi/2) + \mathcal{O}(n^{-\tau-2}), \tag{43}$$

$n \to \infty$，以及

$$\langle f_{r,\tau}, Y_0^{d,n}\rangle_{\mathbb{S}^{d-1}} = \Re\left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}nr} \sum_{p=0}^{q-1} \phi_p(r) n^{-\tau-p-1} \right\} + \mathcal{O}(n^{-\tau-q-1}), \qquad n \to \infty, \tag{44}$$

对所有 $r \in [\varepsilon, \pi-\varepsilon]$ 一致成立。这里，ϕ_p、$p = 0$、……、$q-1$ 是连续复值函数。

证明。写出 $\tilde{f}_{\cos r,\ \tau} \in L^2([-1,1],\ w_\lambda)$ 的 Gegenbauer 展开（8），并利用球谐函数的加法定理，我们得到

$$f_{z,r,\tau}(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{\lambda}(\tilde{f}_{\cos r,\tau}) C_n^{\lambda}(\langle \eta, z\rangle) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathcal{I}_n^d} b_n^{\lambda}(\tilde{f}_{\cos r,\tau}) \frac{\lambda}{n+\lambda} \overline{Y_k^{d,n}(z)} Y_k^{d,n}(\eta).$$

因此，对于 $z = e^d$，公式（42）立即由

$$Y_k^{d,n}(e^d) = \delta_{k,0} \sqrt{\frac{\Gamma(n+d-2)(2n+d-2)}{n!\Gamma(d-1)}},$$

这可利用（4）和（5）加以验证。

如 [22, 引理 4], 中所述，成立

$$\int_{\cos r}^{1} (t-\cos r)^{\tau}\, C_n^{\lambda}(t)\, w_{\lambda}(t)\, \mathrm{d}t = \frac{\Gamma(n+2\lambda)\Gamma(\lambda+1/2)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(n+\lambda+1/2)} \times \frac{(n-\tau-1)!\tau!}{2^{\tau+1}n!} P_{n-\tau-1}^{(\lambda+\tau+1/2,\lambda+\tau+1/2)}(\cos r)\, (\sin r)^{2\lambda+2\tau+1}, \tag{45}$$

以及

$$P_{n-\tau-1}^{(\lambda+\tau+1/2,\lambda+\tau+1/2)}(\cos r)=\sqrt{\frac{2}{\pi(n-\tau-1)}}(\sin r)^{-\lambda-\tau-1}\cos((n+\lambda)r-(\lambda+\tau+1)\pi/2)$$
$$+\mathcal{O}(n^{-3/2}),\qquad n\to\infty, \tag{46}$$

and

$$P_{n-\tau-1}^{(\lambda+\tau+1/2,\lambda+\tau+1/2)}(\cos r)=\Re\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nr}\sum_{p=0}^{q-1}\phi_p(r)n^{-p-1/2}\right\}+\mathcal{O}(n^{-q-1/2}),\qquad n\to\infty. \tag{47}$$

这里， ϕ_p 是连续复值函数，并且当 $r\in[\delta,\pi-\delta]$ 时，对于所有 $\delta>0$，两个渐近表达式均一致成立。结合（42）和（45），我们得到

$$\langle f_{r,\tau},Y_k^{d,n}\rangle_{\mathbb{S}^{d-1}}=\delta_{k,0}\frac{4^\lambda\sqrt{\lambda}\,\Gamma^2(\lambda)\Gamma(\lambda+\frac12)\tau!(\sin r)^{2\lambda+2\tau+1}}{2^{\tau+1}\pi\Gamma(2\lambda)^{3/2}}$$
$$\times\frac{\sqrt{\Gamma(n+2\lambda)(n+\lambda)}(n-\tau-1)!}{\sqrt{n!}\Gamma(n+\lambda+\frac12)}P_{n-\tau-1}^{(\lambda+\tau+1/2,\lambda+\tau+1/2)}(\cos r). \tag{48}$$

最后，将（46）和（47）代入（48），很容易验证渐近公式（43）和（44）。

□

下面的引理给出了另一个有用的调和表示。

引理 6.2
对于 $\nu\in\mathbb{S}^{d-1}$，有

$$\langle T^d(g_\nu^{-1})\Psi_{\mathrm{C}}^j,Y_0^{d,n}\rangle_{\mathbb{S}^{d-1}}=\sqrt{2}\,\kappa\Big(\frac{n}{2^{j-1}}\Big)\,A^n_{(n,\dots,n)}|\nu_d+\mathrm{i}\nu_{d-1}|^n\cos(n\operatorname{Arg}(\nu_d+\mathrm{i}\nu_{d-1})), \tag{49}$$

其中

$$A^n_{(n,\dots,n)}=\frac{n^{(d-2)/4}}{\sqrt{\Gamma(\frac{d}{2})}}\left(\sum_{p=0}^{q-1}c_pn^{-p}+\mathcal{O}(n^{-q})\right),\qquad n\to\infty, \tag{50}$$

其中 $c_0=1$。

证明。由（14），可得

$$\Psi_{\mathrm{C}}^j(x)=\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\dim\mathcal{H}_n^d}\,\kappa\Big(\frac{n}{2^{j-1}}\Big)\,A^n_{(n,\dots,n)}H_n(x),$$

其中 $H_n(x)=\Re\{(x_d+\mathrm{i}x_{d-1})^n\}$，对于 $x\in\mathbb{S}^{d-1}$。由于根据构造， H_n 是 $Y^{d,n}_{(n,\dots,n)}+Y^{d,n}_{(n,\dots,n)}$ 的倍数，显然 $H_n\in\mathcal{H}_n^d$。因此，对于每个 $\nu\in\mathbb{S}^{d-1}$， $T^d(g_\nu^{-1})H_n\in\mathcal{H}_n^d$。
为了验证（49），只需证明

$$\sqrt{\dim\mathcal{H}_n^d}\,\langle T^d(g_\nu^{-1})H_n,Y_0^{d,n}\rangle_{\mathbb{S}^{d-1}}=\Re\{(\nu_d+\mathrm{i}\nu_{d-1})^n\}.$$

这里，我们首先注意到

$$\sqrt{\dim\mathcal{H}_n^d}\,Y_0^{d,n}(x)=\frac{2n+d-2}{d-2}C_n^{\frac{d-2}{2}}(\langle x,e^d\rangle).$$

此外，该映射

$$(x,y)\mapsto \frac{2n+d-2}{d-2}C_n^{\frac{d-2}{2}}(\langle x,y\rangle)$$

表示 $\mathcal{H}_n^d$ 的再生核，这是加法定理（7）的直接推论。因此

$$\sqrt{\dim \mathcal{H}_n^d}\,\langle T^d(g_\nu^{-1})H_n, Y_0^{d,n}\rangle_{\mathbb{S}^{d-1}} = T^d(g_\nu^{-1})H_n(e^d) = H_n(\nu).$$

这就完成了（49）的证明。

最后，从（22）可以很容易地推导出渐近表达式（50）。 □

6.2 主要结果

对于我们的第一个主要结果，我们假设旋转后的曲波 $T^d(g_\nu^{-1})\Psi^j{}_{\mathrm{C}}$ 与边界 $\partial C(e^d,r)$ 的方向完全匹配。根据本节开头的讨论，这意味着 $\nu_{d-1}^2+\nu_d^2=1$。在这种情况下，下面的定理为框架系数 $\langle f_{r,\tau}, T^d(g_\nu^{-1})\Psi^j{}_{\mathrm{C}}\rangle_{\mathbb{S}^{d-1}}$ 在 $T^d(g_\nu^{-1})\Psi^j{}_{\mathrm{C}}$ 趋近和远离 $f_{r,\tau}$ 的（高阶）奇点时的行为提供了重要见解。特别地，我们得到一个下界，表明只要曲波的位置足够靠近边界（距离取决于尺度 j）$\partial C(e^d,r)$，这些系数就会超过某个阈值。

我们注意到，在 $\nu_{d-1}^2+\nu_d^2=1$ 的情形下，北极与 $T^d(g_\nu^{-1})\Psi^j{}_{\mathrm{C}}$ 中心之间的测地距离为

$$\operatorname{dist}(e^d, g_\nu^{-1}e^d) = \arccos\nu_d = |\operatorname{Arg}(\nu_d+\mathrm{i}\nu_{d-1})|.$$

因此，量 $|\operatorname{Arg}(\nu_d+\mathrm{i}\nu_{d-1})|-r$ 表示曲波 $T^d(g_\nu^{-1})\Psi^j{}_{\mathrm{C}}$ 距离最近的（高阶）奇点有多远。

以下定理受一维结果 [22, Theorem 2], 的启发，并且此前已在 [29,Theorem 3.3] 中针对二维情形得到。

定理 6.3
设 $\varepsilon>0$, $\lambda=\frac{d-2}{2}$, $\varphi=(\lambda+\tau+1)\pi/2-\lambda r$，并设

$$\rho(\lambda,r,\tau)=\frac{(2\pi)^{\tau-(d-2)/4}\gamma(\lambda,r,\tau)}{\sqrt{2\Gamma(\frac{d}{2})}},$$

其中 $\gamma(\lambda,r,\tau)$ 如 引理 *6.1* 中的定义。此外，设 $\nu\in\mathbb{S}^{d-1}$ 满足 $\nu_d^2+\nu_{d-1}^2=1$，并设 $r\in[\varepsilon,\pi-\varepsilon]$。存在一个常数 $c_0>0$ 使得

$$\begin{aligned}&2^{j(\tau-(d-2)/4)}\langle f_{r,\tau}, T^d(g_\nu^{-1})\Psi^j_{\mathrm{C}}\rangle_{\mathbb{S}^{d-1}}\\ &\quad=\rho(\lambda,r,\tau)\int_0^{2\pi}\kappa(t/\pi)t^{(d-2)/4-\tau-1}\cos\left(\frac{2^j t(|\operatorname{Arg}(\nu_d+\mathrm{i}\nu_{d-1})|-r)}{2\pi}+\varphi\right)\mathrm{d}t+\mathrm{E}^j(\nu),\end{aligned}\tag{51}$$

其中

$$|\mathrm{E}^j(\nu)|\le c_0 2^{-j}.$$

此外，存在常数 c_1、$j_0 > 0$，以及某个非空开区间 $I \subset [0,\infty)$，使得

$$2^{j(\tau-(d-2)/4)}|\langle f_{r,\tau}, T^d(g_\nu^{-1})\Psi_{\mathrm{C}}^j\rangle_{\mathbb{S}^{d-1}}| \geq c_1, \quad \text{if } 2^j\big||\mathrm{Arg}(\nu_d + \mathrm{i}\nu_{d-1})| - r\big| \in I,\ j \geq j_0. \tag{52}$$

这些常数依赖于 $c_0 = c_0(\kappa,\varepsilon,\tau)$、$c_1 = c_1(\kappa,\varepsilon,\tau)$、$j_0 = j_0(\kappa,\varepsilon,\tau)$ 和$I = I(\kappa,\tau)$。特别是，这些常数都不依赖于 ν。

证明。以下证明采用的方法与一维情形中的方法非常相似[22]。对于 $\nu_d^2 + \nu_{d-1}^2 = 1$，引理 6.1 和 引理 6.2 给出

$$\begin{aligned}
&\langle f_{r,\tau}, T^d(g_\nu^{-1})\Psi_{\mathrm{C}}^j\rangle_{\mathbb{S}^{d-1}} \\
&\quad = \frac{\gamma(\lambda,r,\tau)}{\sqrt{2^{-1}\Gamma(\frac{d}{2})}} \sum_{n=0}^{\infty} \kappa\Big(\frac{n}{2^{j-1}}\Big)\, n^{(d-2)/4-\tau-1} \cos(n\,\mathrm{Arg}(\nu_d + \mathrm{i}\nu_{d-1}))\cos(nr-\varphi) \\
&\qquad + \mathcal{O}(2^{j((d-2)/4-\tau-1)}), \qquad j \to \infty.
\end{aligned}$$

此外，由 引理 6.2可知，$\langle f_{r、\tau、} T^d(g_\nu^{-1})\Psi^{j}{}_{\mathrm{C}}\rangle_{\mathbb{S}^{d-1}}$的值不依赖于 $\mathrm{Arg}(\nu_d+\mathrm{i}\nu_{d-1})$ 的符号。因此，在证明的其余部分中，我们可以假设 $\mathrm{Arg}(\nu_d+\mathrm{i}\nu_{d-1}) \in [0,\pi]$。直接计算可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma(\lambda,r,\tau)}{\sqrt{2^{-1}\Gamma(\frac{d}{2})}} \sum_{n=0}^{\infty} \kappa\Big(\frac{n}{2^{j-1}}\Big)\, n^{(d-2)/4-\tau-1} \cos(n\,\mathrm{Arg}(\nu_d + \mathrm{i}\nu_{d-1}))\cos(nr-\varphi) \\
&\quad = 2^{j((d-2)/4-\tau)}\frac{2\pi\rho(\lambda,r,\tau)}{2^j} \sum_{n=0}^{2^j} \kappa_\tau\Big(\frac{2\pi n}{2^j}\Big)\cos(n(\mathrm{Arg}(\nu_d + \mathrm{i}\nu_{d-1}) - r) + \varphi) \\
&\qquad + 2^{j((d-2)/4-\tau)}\frac{2\pi\rho(\lambda,r,\tau)}{2^j} \sum_{n=0}^{2^j} \kappa_\tau\Big(\frac{2\pi n}{2^j}\Big)\cos(n(\mathrm{Arg}(\nu_d + \mathrm{i}\nu_{d-1}) + r) - \varphi),
\end{aligned}$$

其中

$$\kappa_\tau(t) = \kappa(t/\pi)t^{\frac{d-2}{4}-\tau-1}.$$

应用 [22, 引理 5], 可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^j}\sum_{n=0}^{2^j} \kappa_\tau\Big(\frac{2\pi n}{2^j}\Big)\cos(n(\mathrm{Arg}(\nu_d + \mathrm{i}\nu_{d-1}) - r) + \varphi) \\
&\qquad = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \kappa_\tau(t)\cos\Big(\frac{2^j t(\mathrm{Arg}(\nu_d + \mathrm{i}\nu_{d-1}) - r)}{2\pi} + \varphi\Big)\,\mathrm{d}t + \mathcal{O}(2^{-jq}).
\end{aligned}$$

同样， [22, 引理 5] 结合反复分部积分表明

$$\frac{1}{2^j}\sum_{n=0}^{2^j} \kappa_\tau\Big(\frac{2\pi n}{2^j}\Big)\cos(n(\mathrm{Arg}(\nu_d + \mathrm{i}\nu_{d-1}) + r) - \varphi) = \mathcal{O}(2^{-jq}).$$

这就完成了对（51）的证明。

为验证（52），注意到映射

$$z \mapsto \int_0^{2\pi} \kappa(t/\pi)t^{(d-2)/4-\tau-1}\cos(zt+\varphi)\,\mathrm{d}t$$

是一个整函数。因此，必定存在一个不含零点的相应区间。 □

定理 6.3 特别表明，当分析函数与边界 $\partial C(e^d, r)$ 足够匹配时，曲波系数会超过某个阈值。现在我们确立第二个结果，说明当曲波远离奇点，或其方向与 $\partial C(e^d, r)$ 的方向不一致时，数值 $|\langle f_{r,\tau}, T^d(g_\nu^{-1})\Psi^j \mathrm{C}\rangle_{\mathbb{S}^{d-1}}|$ 会迅速衰减。反之，若 $T^d(g_\nu^{-1})\Psi^j \mathrm{C}$ 在位置和方向上与边界匹配，则下述定理给出的上界与定理 6.3 中的下界相一致。同样，以下估计的灵感来自 [22, Theorem 2]，中先前的一维结果，而其二维版本此前已在 [29,Theorem 3.3] 中确立。

定理 6.4
设 $\varepsilon > 0$，并设 $\Psi^j C$、$j \in \mathbb{N}_0$ 如第 3 节所定义，其中 $\kappa \in C^q([0,\infty))$，对某个 $q \in \mathbb{N}$。我们假设存在某个 $t_0 \in (1/2, 2)$，使得对每个 $t \in (1/2, t_0)$ 都有 $\kappa^{(q)}(t) \neq 0$。则存在常数 $c_2 = c_2(\kappa, \varepsilon, \tau, q) > 0$，使得

$$2^{j(\tau-(d-2)/4)}|\langle f_{r,\tau}, T^d(g_\nu^{-1})\Psi_{\mathrm{C}}^j\rangle_{\mathbb{S}^{d-1}}| \le \frac{c_2|\nu_d + \mathrm{i}\nu_{d-1}|^{2^{j-2}}}{(1 + 2^j\big|r - |\mathrm{Arg}(\nu_d + \mathrm{i}\nu_{d-1})|\big|)^q},$$

对所有 $\nu \in \mathbb{S}^{d-1}$ 成立，只要 $r \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$。

证明。 应用引理 6.1 和引理 6.2，我们得到

$$\begin{aligned} &2^{j(\tau-(d-2)/4)}\langle f_{r,\tau}, T^d(g_\nu^{-1})\Psi_{\mathrm{C}}^j\rangle_{\mathbb{S}^{d-1}} \\ &\quad = \Re\left\{\sum_{p=0}^{q-1}\frac{\phi_p(r)}{2^{j(1+p)}}\sum_{n=0}^{\infty}\kappa_{\tau,p}\Big(\frac{n}{2^{j-1}}\Big)\exp(\mathrm{i}nr)\cos(n\,\mathrm{Arg}(\nu_d + \mathrm{i}\nu_{d-1}))\right\} + \mathrm{E}^j(\nu), \end{aligned}$$

其中 $\kappa_{\tau,\,p}(t) = \kappa(t)t^{(d-2)/4-p-\tau-1}z^{2^{j-1}t}$，$z = |\nu_d + \mathrm{i}\nu_{d-1}|$，且

$$|\mathrm{E}^j(\nu)| \le c|\nu_d + \mathrm{i}\nu_{d-1}|^{2^{j-2}}2^{-jq}.$$

现在的断言可由我们在定理 4.1的证明中用于验证（23）的同样论证得出。

□

结合定理 6.3 和 定理 6.4，可知 $f_{r,\tau}$ 的（高阶）奇异性能够通过框架系数 $\langle f_{r,\tau}, T^d(g)\Psi^j{}_{\mathrm{C}}\rangle_{\mathbb{S}^{d-1}}$的渐近衰减，在位置和方向方面得到精确识别。特别是，

$$\sup_{g\in SO(d)}|\langle f_{r,\tau}, T^d(g)\Psi_{\mathrm{C}}^j\rangle_{\mathbb{S}^{d-1}}| \sim 2^{-j(\tau-(d-2)/4)}.$$

附录

下面我们简要回顾 $SO(d)$ 上调和分析的一些基础知识。这里给出的所有公式均可见于 [32] 等经典文献。我们也请读者参阅我们近期在 [14, 30] 中的讨论。

令 μ_d 表示 $SO(d)$ 上的 Haar测度，其归一化为

$$\int_{SO(d)} \mathrm{d}\mu_d = 1.$$

$g \in SO(d)$ 中的每个元素都可写为 $g = g_\eta h$，其中 $h \in SO(d-1)$ 且 $g_\eta \in SO(d)$，并满足 $g_\eta e^d = \eta \in \mathbb{S}^{d-1}$。显然，这种表示并不唯一。然而，无论选择 g_η 还是 h，均有

$$\int_{SO(d)} f(g)\,\mathrm{d}\mu_d(g) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{SO(d-1)} f(g_\eta h)\,\mathrm{d}\mu_{d-1}(h)\,\mathrm{d}\omega_{d-1}(\eta), \tag{A.1}$$

对每个 $f \in L^1(SO(d))$。这里，由于 Haar测度 μ_{d-1} 在 $SO(d-1)$ 上的不变性，右侧的内积分不依赖于 g_η 的取值。

现在考虑酉群表示

$$g \mapsto T^d(g), \quad T^d(g)f(x) = f(g^{-1}x),$$

$SO(d)$ 在 $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ 上的表示。它在空间 $\mathcal{H}_n^d$ 上的子表示是不可约的。因此，作为著名的彼得-外尔定理的一部分，矩阵函数 $t^{d,n}_{k,m} : SO(d) \to \mathbb{C}$由下式给出

$$t^{d,n}_{k,m}(g) = \langle T^d(g) Y^{d,n}_m, Y^{d,n}_k \rangle_{\mathbb{S}^{d-1}}, \qquad k, m \in \mathcal{I}^d_n,\ n \in \mathbb{N}_0, \tag{A.2}$$

构成 $L^2(SO(d))$ 的正交系，其内积为

$$\langle f_1, f_2 \rangle_{SO(d)} = \int_{SO(d)} f_1 \overline{f_2}\,\mathrm{d}\mu_d.$$

此外，

$$\int_{SO(d)} |t^{d,n}_{k,m}|^2\,\mathrm{d}\mu_d = \frac{1}{\dim \mathcal{H}^d_n}.$$

不难验证，式（A.2）中的矩阵函数满足对称性

$$\overline{t^{d,n}_{k,\ell}(g)} = t^{d,n}_{k^-,\ell^-}(g), \tag{A.3}$$

其中 $(k_1, \ldots, k_{d-3}, k_{d-2})^-$ 定义为 $(k_1, \ldots, k_{d-3}, -k_{d-2})$。类似地，容易看出

$$t^{d,n}_{k,\ell}(g^{-1}) = t^{d,n}_{\ell^-,k^-}(g). \tag{A.4}$$

显然，（A.2）也可以写成

$$Y^{d,n}_m(g^{-1}\eta) = \sum_{k \in \mathcal{I}^d_n} t^{d,n}_{k,m}(g)\, Y^{d,n}_k(\eta), \quad \eta \in \mathbb{S}^{d-1}. \tag{A.5}$$

T^d 是群同态这一事实，即 $T^d(g\tilde{g}) = T^d(g)T^d(\tilde{g})$，其中每个 $T^d(g)$ 都是作用于 $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ 上的酉算子，这意味着加法公式

$$t^{d,n}_{k,\ell}(g\tilde{g}) = \sum_{m \in \mathcal{I}^d_n} t^{d,n}_{k,m}(g)\, t^{d,n}_{m,\ell}(\tilde{g}), \quad g, \tilde{g} \in SO(d). \tag{A.6}$$

取 $\eta = e^d$ 于（A.5）中，简单计算可得

$$\overline{Y^{d,n}_m(\nu)} = \sum_{k \in \mathcal{I}^d_n} \overline{Y^{d,n}_k(e^d)}\, t^{d,n}_{m,k}(g_\nu). \tag{A.7}$$

特别地，球谐函数是某些矩阵函数的线性组合，因为 $t^{d,n}_{d,m,k}$ 显然是 $t^{d,n}_{d,r,s}$、r，$s \in \mathcal{I}^d_n$ 的线性组合。

不同维度的矩阵函数之间有着密切的联系。具体而言，我们有

$$t^{d,n}_{k,\ell}(h) = \delta_{k_1,\ell_1}\, t^{d-1,k_1}_{(k_2,\dots,k_{d-2}),(\ell_2,\dots,\ell_{d-2})}(h), \qquad h \in SO(d-1), \quad d \geq 4, \tag{A.8}$$

以及

$$t^{3,n}_{k,\ell}(h(\gamma)) = \delta_{k,\ell} \exp(\mathrm{i}k\gamma), \qquad \gamma \in [0, 2\pi), \tag{A.9}$$

其中 $h(\gamma) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ 是绕（x_1, x_2）平面正向旋转 γ。

对于 $N \in \mathbb{N}_0$，令

$$\mathcal{M}^1_N(SO(d)) = \operatorname{span}\{t^{d,n}_{k,m},\ k, m \in \mathcal{I}^d_n,\ 0 \leq n \leq N\}. \tag{A.10}$$

这里，记号1 中的上标 $\mathcal{M}^1_N(SO(d))$ 表示该空间由1 类矩阵函数张成（详见 [32]）。

文献

[1] Askari-Hemmat, A., Dehghan, M. A., 和 Skopina, M.《球面上的多项式小波型展开》。载于：《数学札记》74.1（2003），第278–285页。DOI：10.1023/A:1025016510773.[2] Aslam, A., Khalid, Z., 和 McEwen, J. D.《球面上的多尺度最优滤波》。载于：《IEEE信号处理快报》28（2021），第394–398页。DOI：10.1109/lsp.2021.3056236.[3] Atkinson, K. 和 Han, W.《球谐函数与单位球面上的逼近：入门》。第2044卷。《数学讲义》。柏林：施普林格，2012。DOI：10.1007/978-3-642-25983-8.[4] Bannai, E. 和 Bannai, E.《球面设计与球面上的代数组合学综述》。载于：Eur. J. Comb. 30.6（2009），第1392–1425页。DOI：10.1016/j.ejc.2008.11.007.[5] Bartel, F., Kämmerer, L., Pozharska, K., Schäfer, M., 和 Ullrich, T.《精确离散化、紧框架及通过 D最优设计进行恢复》。载于：SMAI J. Comput. Math. 11（2025），第607–636页。DOI：10.5802/smai-jcm.136.[6] Bondarenko, A., Radchenko, D., 和 Viazovska, M.《球面设计的最优渐近界》。载于：Ann. Math. (2) 178.2（2013），第443–452页。DOI：10.4007/annals.2013.178.2.2.[7] Brown, G. 和 Dai, F.《紧致二点齐性空间上光滑函数的逼近》。载于：《泛函分析杂志》220.2（2005），第401–423页。DOI：10.1016/j.jfa.2004.10.005.[8] Cai, X., Wallis, C. G. R., Chan, J. Y. H., 和 McEwen, J. D.《基于小波的球面分割》。载于：Pattern Recognit. 100（2020），第107081页。DOI：10.1016/j.patcog.2019.107081.[9] Chan, J. Y. H., Leistedt, B., Kitching, T. D., 和 McEwen, J. D.《球面上的第二代曲波》。载于：IEEE Trans. Signal Process. 65.1（2017），第5–14页。DOI：10.1109/TSP.2016.2600506.[10] Dai, F.《利用框架刻画球面上的函数空间》。载于：Trans. Am. Math. Soc. 359.2（2007），第567–589页。DOI：10.1090/S0002-9947-06-04030-X。

[11] Dai, F. 和 Xu, Y.《球面与球体上的逼近理论和调和分析》。Springer Monogr. Math. 纽约，NY：施普林格，2013。DOI：10.1007/978-1-4614-6660-4.[12] Delsarte, P., Goethals, J. M., 和 Seidel, J. J.《球面码与设计》。载于：《几何奉献》6（1977），第363–388页。DOI：10.1007/BF03187604.[13] Durastanti, C., Marinucci, D., 和 Todino, A. P.《灵活带宽小波》。载于：伯努利 30.1（2024），第22–45页。DOI：10.3150/22-BEJ1513.[14] Hasannasab, M., Kaldewey, L., 和 Schoppert, F.《球面上的方向多项式框架》。预印本。2026。arXiv：2601.15883 [math.CA].[15] McEwen, J. D., Feeney, S. M., Peiris, H. V., Wiaux, Y., Ringeval, C., 和 Bouchet, F. R.《利用小波贝叶斯推断检测嵌入宇宙微波背景中的宇宙弦》。载于：《皇家天文学会月报》472.4（2017），第4081–4098页。DOI：10.1093/mnras/stx2268.[16] McEwen, J. D., Durastanti, C., 和 Wiaux, Y.《球面上方向尺度离散小波的定位》。载于：《应用与计算调和分析》44.1（2018），第59–88页。DOI：10.1016/j.acha.2016.03.009.[17] McEwen, J. D., Vandergheynst, P., 和 Wiaux, Y.《关于球面上方向尺度离散小波变换的计算》。载于：《小波与稀疏性 XV》。第8858卷。国际光学工程学会，2013，第88580I页。DOI：10.1117/12.2022889.[18] Mhaskar, H. N.《单位区间上的多项式算子与局部光滑类》。载于：《逼近理论杂志》131.2（2004），第243–267页。DOI：10.1016/j.jat.2004.10.002.[19] Mhaskar, H. N.《利用有限比特表示球面上的光滑函数》。载于：《应用与计算调和分析》18.3（2005），第215–233页。DOI：10.1016/j.acha.2004.11.004.[20] Mhaskar, H. N., Narcowich, F. J., Prestin, J., 和 Ward, J. D.《球面上的多项式框架》。载于：《计算数学进展》13.4（2000），第387–403页。DOI：10.1023/A:1016639802349.[21] Mhaskar, H. N., Narcowich, F. J., 和 Ward, J. D.《球面马尔琴基维奇-齐格蒙德不等式与正求积》。载于：《数学计算》70.235（2001），第1113–1130页。DOI：10.1090/S0025-5718-00-01240-0.[22] Mhaskar, H. N. 和 Prestin, J.《用于奇异性检测的多项式框架》。载于：《小波分析与多分辨率方法》。会议论文集，伊利诺伊大学，美国伊利诺伊州厄巴纳-香槟。纽约，NY：马塞尔·德克尔，2000，第273–298页。DOI：10.1201/9781482290066-19.[23] Müller, C.《球谐函数》。第17卷。《数学讲义》。施普林格，查姆，1966。DOI：10.1007/BFb0094775.[24] Narcowich, F. J., Petrushev, P., 和 Ward, J. D.《球面上的 Besov 与 Triebel-Lizorkin 空间分解》。载于：《泛函分析杂志》238.2（2006），第530–564页。DOI：10.1016/j.jfa.2006.02.011.[25] Narcowich, F. J., Petrushev, P., 和 Ward, J. D.《球面上的局部化紧框架》。载于：《SIAM数学分析杂志》38.2（2006），第574–594页。DOI：10.1137/040614359。

[26] Petrushev, P. 和 Xu, Y.《带 Jacobi 权的区间局部多项式框架》。载于：《傅里叶分析与应用杂志》11.5（2005），第 557–575 页。DOI：10.1007/s00041-005-4072-3.
[27] Price, M. A.、McEwen, J. D.、Pratley, L. 和 Kitching, T. D.《含不确定性的稀疏贝叶斯质量映射：天球上的全天观测》。载于：《皇家天文学会月报》500.4（2020），第 5436–5452 页。DOI：10.1093/mnras/staa3563.[28] Rogers, K. K.、Peiris, H. V.、Leistedt, B.、McEwen, J. D. 和 Pontzen, A.《SILC：利用方向小波绘制的新型普朗克宇宙微波背景温度图（内部线性组合）》。载于：《皇家天文学会月报》460.3（2016），第 3014–3028 页。DOI：10.1093/mnras/stw1121.[29] Schoppert, F.《球面圆周上高阶跳跃间断的方向敏感分析》。载于：《国际几何数学杂志》14（2023），第 33 页。DOI：10.1007/s13137-023-00217-w.[30] Schoppert, F.《球面上的方向多项式小波》。载于：《傅里叶分析与应用杂志》32.1（2025），第 3 页。DOI：10.1007/s00041-025-10210-6.[31] Schoppert, F.《利用球面多项式框架进行边缘检测》。载于：《逼近理论杂志》315（2026），第 106279 页。DOI：10.1016/j.jat.2025.106279.[32] Vilenkin, N. Y.《特殊函数与群表示理论》。V. N. Singh 俄译英。第 22 卷。《数学译丛专著》。美国数学会（AMS），普罗维登斯，罗得岛州，1968。DOI：10.1090/mmono/022.[33] Wallis, C. G. R.、Wiaux, Y. 和 McEwen, J. D.《球面上的稀疏图像重建：分析与合成》。载于：《IEEE图像处理汇刊》26.11（2017），第 5176–5187 页。DOI：10.1109/tip.2017.2716824.[34] Wiaux, Y.、Jacques, L. 和 Vandergheynst, P.《球面小波与欧氏小波之间的对应原理》。载于：《天体物理学报》632.1（2005 年 10 月），第 15 页。DOI：10.1086/432926.[35] Wiaux, Y.、McEwen, J. D.、Vandergheynst, P. 和 Blanc, O.《利用球面方向小波实现精确重构》。载于：《皇家天文学会月报》388.2（2008），第 770–788 页。DOI：10.1111/j.1365-2966.2008.13448.x.[36] Zimbres, M.、Batista, R. A. 和 Kemp, E.《利用球面小波搜索超高能宇宙线到达方向中的磁致排列》。载于：《天体粒子物理学》54（2014），第 54–60 页。DOI：10.1016/j.astropartphys.2013.11.001。