arXiv:2603.12841v1 [math.DS] 13 Mar 2026

端口哈密顿多体动力学：拉格朗日表述、一致互连、保结构仿真与指标约简

Lisa Latussek*,† Philipp L. Kinon*,‡ Peter Betsch*
llatussek@ethz.ch philipp.kinon@kit.edu peter.betsch@kit.edu

2026年3月16日

摘要

本文提出了一种受约束机械系统的端口-哈密顿（PH）模型，该模型直接由拉格朗日运动方程推导而来。本文的 PH 框架采用了刚体转动的无奇异方向矢量表示，从而得到常质量矩阵。研究表明，PH 刚体子系统的功率守恒互连在数学上等价于使用运动副对理想关节进行的经典描述。这建立了一种与传统建模范式一致的 PH 多体动力学框架。

值得注意的是，控制系统的指标 2 微分代数方程所具有的 PH 结构，使得可以采用隐式、保结构的中点时间积分。所提出的方案既能满足总能量和角动量的平衡定律，也能满足位置级约束。这些性质使该方法具有出色的鲁棒性，并能够实现稳定的长期仿真。此外，本文还纳入了一种变分推导的降指数策略，在保持端口-哈密顿结构的同时，除位置级约束外还施加速度级约束。数值算例展示了所提出表述的优良性质，表明其适用于基于能量的控制设计。

关键词： 多体动力学· 指向矢量表述· 端口-哈密顿系统·基于能量的方法 ·保结构积分 · 指标约简

1 引言

多体系统（MBS）的动力学行为可描述为一组通过关节互连、并限制相对运动的刚体 [1], ，其行为可能变得极为复杂，例如涉及大转动，或跨多个物理域的相互作用。对这类系统进行准确而稳健的仿真至关重要，尤其是在长期研究中；保结构数值格式通常表现更优 [2]。

*卡尔斯鲁厄理工学院（KIT）
†苏黎世联邦理工学院
‡埃因霍温理工大学（TU/e）

应对这些挑战的一种有前景的方法，是采用端口-哈密顿（PH）框架。该框架已成为多个研究领域中复杂动力系统的一种优势建模范式 [3, 4]。端口哈密顿表示的一项关键优势，在于显式定义了端口，为子系统之间的能量交换提供接口。这样既能实现子模块的模块化互连，又能确保系统整体的功率平衡。这一特性在（柔性）多体动力学领域也已证明十分有用 [5–9], 因为它能够实现各个刚体之间能量一致的耦合。此外，外部端口还为控制设计提供了理想接口，参见例如 [10–12]。

值得注意的是，许多先前采用端口-哈密顿框架的研究基于位置和动量 [4, 5, 13–17]，而非位置和速度（对应于力学的拉格朗日表述）。然而，拉格朗日描述往往是首选方案 [18–29]。

迄今为止，在端口-哈密顿框架下处理刚体转动时，采用的都是李群表述 [5, 6], ，但基于坐标的方法也可能是合适的选择。朝这一方向迈出的第一步见于 [14]。采用最小坐标的多体系统表述会引入奇异性，并可能导致数值不稳定性，尤其是在存在大转动的情况下。描述有限转动的替代方案是使用冗余坐标，例如单位四元数 [30–33] 或指向矢 [34–36], ，综述可参见 [37–39]。后一种方法尤其具有吸引力，因为与四元数表示不同，它能得到常质量矩阵。此外，相应的刚性内部约束仅为二次约束 [27, 28]。不过，这需要额外引入六个拉格朗日乘子，以强制满足上述约束。

在刚体动力学的指向矢量表述中，每个刚体都配有一组指向矢，直接用于参数化其姿态，从而避免了最小坐标表示固有的奇异性。指向矢量表述已扩展至包含外部力旋量 [40] 和运动副 [29, 41]。这使得复杂多体系统能够以系统化的方式组合。

受约束机械系统的运动由微分指数为三的微分代数方程(DAE)所支配。 [42]提出了一种能够自然涵盖微分-代数方程系统的端口哈密顿形式。从计算角度来看，获得低指数的微分代数方程表示 [1, 43–45], 是可取的，因为这类表示不易出现数值不稳定性。一种广为人知的方法是 GGL 稳定化 [46], ， 该方法还考虑了速度层级约束。尽管原始的 GGL 稳定化牺牲了多体系统的哈密顿结构，从而妨碍了颇具吸引力的保结构离散化，但近期已有研究提出一种名为*GGL* 原理 的变分论证及其修正方案 [47, 48]。

1.1 研究空白

先前的研究已探讨多体系统的端口哈密顿表述 [5, 7, 9]以及刚体动力学的端口哈密顿表述 [14], ，但将指向矢量表述 [27], 、端口-哈密顿框架与多体系统的保结构离散化系统地结合起来的研究仍然缺失。本研究旨在实现这一衔

接。将指向矢量表述嵌入端口-哈密顿框架，应能确保能量一致性、模块化互连，并为控制提供自然的框架；而保结构时间步进则能在离散时间的长时间范围内保持能量和角动量等不变量 [2]。此外，利用 GGL 原理进行指标约简，还可提高数值稳定性 [48]。

1.2 主要贡献

本研究的贡献可概括如下：

C1 我们提出一种基于第一类拉格朗日方程的机械系统新型端口哈密顿微分代数方程表述，并将其具体应用于多体系统。

C2 我们提出一种基于指向矢量表述的新型多体系统端口哈密顿微分代数方程表述，该表述能够处理大转动并确保内禀能量守恒。它可与其他端口-哈密顿系统无缝互连，并具有恒定质量矩阵。**C3** 我们采用隐式中点法分析所提出框架的保结构时间离散。我们证明，该方法能够保持系统的能量平衡和角动量，从而确保长期精度和稳定性。该方案还可防止位置级约束发生漂移。**C4** 我们证明，将刚体描述为端口-哈密顿系统时，用于描述其互连的端口矩阵所编码的信息，与经典多体动力学中的运动副所包含的信息相同，从而为这两种视角建立了严谨的联系。

C5 我们在端口哈密顿微分代数方程框架内运用 GGL 原理实现指标约简，从而在离散时间下进一步满足速度级约束。

1.3 记号

我们遵循以下记号规则。标量用斜体表示，例如 f，$g \in \mathbb{R}$。三维欧几里得空间中的向量，例如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c} \in \mathbb{E}^3$，以及元组 $\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^3$，均用粗体表示。因此，每个向量都可以由右手正交归一惯性坐标系的基 $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^3$ 中的分量元组表示，使得

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i \boldsymbol{e}_i = x_i \boldsymbol{e}_i \mathrel{\hat{=}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

除非另有说明。请注意，本文通篇对重复指标采用爱因斯坦求和约定，例如 i，j，$k \in \{1, 2, 3\}$。我们使用简短的括号记法表示$\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{a}^\top, \boldsymbol{b}^\top]^\top =: (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$。例如，用 $\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{b} = a_i b_i$ 表示两个向量的标量积，用 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \boldsymbol{e}_i = \hat{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = -\hat{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$表示两个向量的叉积，其中我们使用了

熟知的列维-奇维塔符号 ε_{ijk} 并引入了

$$\hat{\square} = \begin{bmatrix} 0 & -\square_3 & \square_2 \\ \square_3 & 0 & -\square_1 \\ -\square_2 & \square_1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{so}(3), \quad \forall \square \in \mathbb{R}^3, \tag{1}$$

$\mathbb{R}^3$ 与反对称矩阵空间 $\mathfrak{so}(3) \subset \mathbb{R}^{3\times3}$之间的映射。矩阵$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 用粗体表示，其转置记为 $\boldsymbol{A}^\top$。矩阵向量乘法记为 $\boldsymbol{Ab}$。单位矩阵表示为 $\boldsymbol{I}$ ，全零矩阵表示为$\mathbf{0}$，其维数由上下文明确。方框表示占位符。函数 f 关于的偏导数记为 $\partial \quad f$。我们引入特殊记号$\dot{:=}$ ∂_t 表示时间导数。在本工作中，梯度 $\nabla g(\boldsymbol{q})$和偏导数

$$\partial_{\boldsymbol{q}} f(\boldsymbol{q},\boldsymbol{v}) = \begin{bmatrix} \partial_{q_1} f(\boldsymbol{q},\boldsymbol{v}) \\ \partial_{q_2} f(\boldsymbol{q},\boldsymbol{v}) \\ \vdots \\ \partial_{q_n} f(\boldsymbol{q},\boldsymbol{v}) \end{bmatrix} \tag{2}$$

表示为列向量。此外，二阶偏导数以如下方式得到矩阵

$$\partial^2_{\boldsymbol{qv}} f(\boldsymbol{q},\boldsymbol{v}) := \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}} \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{q},\boldsymbol{v})}{\partial \boldsymbol{q}} \right) = (\partial^2_{q_i v_j} f) \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j^\top . \tag{3}$$

由于 施瓦茨定理 $\partial^2_{q_i v_j} f = \partial^2_{v_j q_i} f$，恒等式 $\partial^2_{\boldsymbol{qv}} f(\boldsymbol{q},\boldsymbol{v}) = \partial^2_{\boldsymbol{vq}} f(\boldsymbol{q},\boldsymbol{v})^\top$ 成立 e.

1.4 概述

本文其余部分安排如下。在第2 节中，我们简要介绍所采用的端口哈密顿模型。接着，在第3节中，我们将力学的一般拉格朗日框架转化为端口哈密顿形式，并讨论相关的特殊情形。第4节介绍一种基于刚体指向矢量表述和运动副的多体框架。具体而言，我们以严谨的方式建立运动副与端口哈密顿功率守恒互连之间的联系。第5 节通过应用隐式中点法，将该框架推广至离散情形，并说明在离散层级上能量和角动量平衡可得到精确表示。在第6节中，为实现指标约简并在速度层级上精确施加约束，我们采用广为人知的*GGL* 稳定化（即 GGL 原理）的变分版本对该框架进行扩展。第7 节通过具有代表性的多体系统开展数值实验，展示所提出框架的鲁棒性、稳定性和结构保持性质。最后，第8节展望未来研究方向，并总结主要结论。详细推导和补充材料见附录。

2 端口-哈密顿系统

令时间为 $t \in [0, t_f]$，终止时间为 $t_f > 0$。端口-哈密顿描述系统（PH-DAE）是一种由一组微分代数方程 [42, 49–51]

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{u}, \tag{4a}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{z}. \tag{4b}$$

以及哈密顿函数 $H \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d,\ \mathbb{R})$，使得连接余态函数 $\boldsymbol{z} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 与哈密顿函数梯度的本构关系

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}) = \nabla H(\boldsymbol{x}), \tag{4c}$$

对所有状态向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$均成立。

状态的演化由微分（代数）方程 (4a) 控制，而关系式 (4b) 则描述系统的输出行为。为此，在 (4) 中，$\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^p$ 表示输入量，$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^p$ 表示功率共轭且共置的输出。此外，(4) 中还出现了若干矩阵：对称且依赖于状态的描述符矩阵 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})^\top \in \mathbb{R}^{d\times d}$，反对称且依赖于状态的结构矩阵$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})^\top \in \mathbb{R}^{d\times d}$，以及依赖于状态的端口矩阵 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{d\times p}$。当 (4a) 中存在代数约束时，明确允许描述符矩阵 $\boldsymbol{E}$ 为奇异矩阵。

因此，按照设计，端口哈密顿微分代数方程系统借助$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ 的斜对称性以及关系式（4c）确保能量一致性。为此，我们考虑哈密顿量对时间的全导数。利用（4a）和（4c），可得功率平衡方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(\boldsymbol{x}(t)) = \nabla H(\boldsymbol{x})^\top \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{z}^\top (\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{z} + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{u}, \tag{5}$$

这表明，对于任意 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{y})$ （4）的解以及所有 t，系统均具有无源性和无损性。能量的总变化等于通过输入和输出所提供的功率。在不存在输入（$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$）时，系统成为能量守恒系统，即 $\dot{H} = 0$。

鉴于能量一致性是端口-哈密顿系统的一项重要特性，文献中大量研究聚焦于保结构数值方法，以确保式（5）的离散对应形式在离散层面也成立，参见例如 [49, 52, 53] 及其中的参考文献。在本文中，我们将多体系统写成式（4）的形式，从而将其固有的无损性和无源性直接编码到端口哈密顿微分代数方程的表示中。随后，我们还将采用保结构时间离散格式。

3 拉格朗日框架下受约束机械系统的端口-哈密顿表述

迄今为止，有限维机械系统的端口哈密顿表示主要集中于在余切丛上进行定义。在这种情况下，系统动力学以广义坐标 $\boldsymbol{q}$ 和共轭动量 $\boldsymbol{p}$来表述。为此，需要进行勒让德

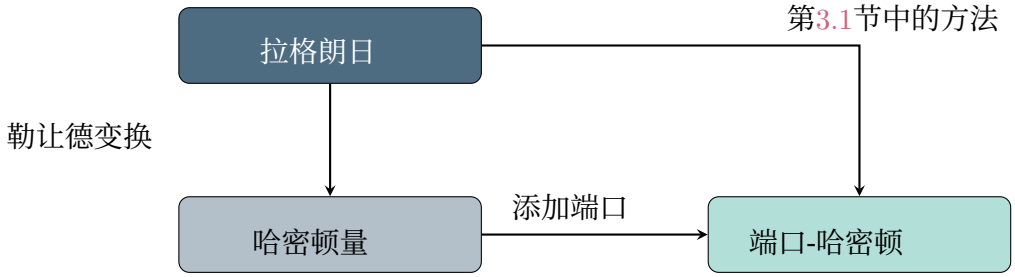


图1：本文方法的流程。我们不采用哈密顿方法，而是保留拉格朗日描述，以直接建立相应的端口哈密顿表述。

变换以转化为哈密顿力学，随后再添加端口。

然而，在诸多研究中，首选框架是以广义坐标 $\boldsymbol{q}$ 和速度 $\boldsymbol{v}$ [27, 54–57]表示的拉格朗日形式。因此，我们希望直接探究拉格朗日方程的端口-哈密顿结构。以下讨论适用于受完整约束的机械系统。两种备选方法的示意见图1 。

在第3.1节中，我们为离散（可能受约束的）机械系统引入一种端口哈密顿表述，该表述等价于第一类拉格朗日方程。在第3.2节中，我们将所得的端口-哈密顿（或称端口-拉格朗日可能更恰当）表述应用于一类知名的多体系统。第3.3节重点讨论常质量矩阵这一重要情形，它将作为后续发展的基础。

3.1 拉格朗日框架下的受约束机械系统

具有（可能冗余的）位置坐标$\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$ 和速度 $\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ 的保守机械系统的运动由第一类拉格朗日方程 [1,58]描述。驻定条件由欧拉-拉格朗日方程 [1, 58]给出。具体而言，考虑作用于系统的非保守力后，运动方程可写为

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{v} \tag{6a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\partial_{\boldsymbol{v}} L\left(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}\right)\right) = \partial_{\boldsymbol{q}} L\left(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}\right) - \nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})^{\top} \boldsymbol{\lambda} + \tilde{\boldsymbol{B}}\left(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}\right) \boldsymbol{u}, \tag{6b}$$

$$\mathbf{0} = \nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) \boldsymbol{v} \tag{6c}$$

其中，$L \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ 是拉格朗日函数，$\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^p$ 是外部输入，˜通过矩阵 $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ 投影，使其作为广义力项作用（视为系统的已知输入）。动量平衡方程包含约束力，其大小由拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ 决定；这些乘子用于强制满足完整约束和定常约束

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \mathbf{0}. \tag{7}$$

注意，约束（7）以时间微分后的形式包含在（6c）中。假设这些约束相互独立，因此雅可比矩阵 $\nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 满秩 m。约束（6c）有时称为（隐藏的）速度级约束，因为它们将允许的速度 $\boldsymbol{v}$ 限制在约束流形的切空间内。方程（6）表示微分指数为二的微分代数方程。对于 $m=0$，可恢复由纯常微分方程描述的无约束情形。现在我们来说明，系统（ 6 ）可以按照（4）的含义表示为端口-哈密顿描述系统。

对（6b）左侧应用链式法则，利用（6a）并添加零项+（$\partial^2_{\boldsymbol{qv}} L$）$\boldsymbol{v}$ −（$\partial^2_{\boldsymbol{qv}} L$）$\boldsymbol{v}$，在（6b）右侧可将（6）改写为以下形式

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \partial^2_{\boldsymbol{vv}} L & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}} \\ \dot{\boldsymbol{v}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{I} & \partial^2_{\boldsymbol{qv}} L - (\partial^2_{\boldsymbol{qv}} L)^\top & -\nabla \boldsymbol{g}^\top \\ \boldsymbol{0} & \nabla \boldsymbol{g} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\partial_{\boldsymbol{q}} L + (\partial^2_{\boldsymbol{qv}} L)\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \tilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}) \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{u}, \tag{8}$$

记号详情见第 1.3 节。引入包含位置、速度和拉格朗日乘子的状态向量 $\boldsymbol{x} =$（$\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{\lambda}$），（8）可按照（4）的形式重写为端口哈密顿微分代数方程。为此，我们定义

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \partial^2_{\boldsymbol{vv}} L(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}) & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -\partial_{\boldsymbol{q}} L(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}) + (\partial^2_{\boldsymbol{qv}} L(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}))\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

端口哈密顿系统的形式化定义要求满足本构关系（4c），以实现功率平衡方程。利用（9），条件（4c）变为

$$-\partial_{\boldsymbol{q}} L + (\partial^2_{\boldsymbol{qv}} L)\boldsymbol{v} = \partial_{\boldsymbol{q}} H, \tag{10a}$$

$$(\partial^2_{\boldsymbol{vv}} L)\boldsymbol{v} = \partial_{\boldsymbol{v}} H, \tag{10b}$$

$$\boldsymbol{0} = \partial_{\boldsymbol{\lambda}} H. \tag{10c}$$

通过如下选择总能量函数 H 可以满足这些条件：

$$H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\lambda}) = \tilde{H}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}) = \partial_{\boldsymbol{v}} L(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v})^\top \boldsymbol{v} - L(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}). \tag{11}$$

注意，总能量的这一定义 H 直接源自拉格朗日 L，并且与勒让德变换密切相关。我们进一步注意到，通过（4b）定义的共置输出由速度 $\boldsymbol{y} = \tilde{\boldsymbol{B}}^\top \boldsymbol{v}$给出。相应地，功率平衡方程（5）为

$$\dot{H} = \boldsymbol{u}^\top \tilde{\boldsymbol{B}}^\top \boldsymbol{v}, \tag{12}$$

˜其中，输入功率由外广义力 $\boldsymbol{Bu}$与广义速度 $\boldsymbol{v}$的标量积给出。

注 3.1. 可以将无约束情形下的公式（8）与一种等价表示联系起来，该表示在方程左侧含有一个斜对称矩阵，因此

$$\begin{bmatrix} \partial^2_{\boldsymbol{vq}} L - (\partial^2_{\boldsymbol{vq}} L)^\top & \partial^2_{\boldsymbol{vv}} L \\ -(\partial^2_{\boldsymbol{vv}} L)^\top & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}} \\ \dot{\boldsymbol{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_{\boldsymbol{q}} L - (\partial^2_{\boldsymbol{qv}} L)\boldsymbol{v} \\ -(\partial^2_{\boldsymbol{vv}} L)^\top \boldsymbol{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{B}}\left(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}\right) \boldsymbol{u} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{13}$$

例如参见 [59, 式（1）。6]将（13）与（10）的前两行进行比较，可以将（13）的右端识别为哈密顿量（11）的负梯度。值得注意的是，该系统属于由 $\boldsymbol{D}\left(\boldsymbol{x}\right) \dot{\boldsymbol{x}} = -\nabla H\left(\boldsymbol{x}\right) + \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right)$ 所支配的问题类别，该类别还包括梯度系统 [60]。

3.2 拉格朗日设定下多体系统的端口哈密顿表示

下面，我们希望针对具有以下知名拉格朗日函数的特定多体系统8，具体说明新得到的基于拉格朗日的端口哈密顿微分代数方程（ [1, 35, 58]）

$$L(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}) - V(\boldsymbol{q}), \tag{14}$$

其中，动能表示为

$$T(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}) \boldsymbol{v}. \tag{15}$$

这里，$\boldsymbol{M}\left(\boldsymbol{q}\right) = M_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{M}\left(\boldsymbol{q}\right)^\top \succ 0$表示对称正定的质量矩阵，而 $V \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}\right)$ 表示势能函数。将拉格朗日函数（14）代入运动方程（6），可得

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{v}, \tag{16a}$$

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}) \dot{\boldsymbol{v}} = -\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}) \boldsymbol{v} - \nabla V(\boldsymbol{q}) - \nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})^\top \boldsymbol{\lambda} + \tilde{\boldsymbol{B}}\left(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}\right) \boldsymbol{u}, \tag{16b}$$

$$\mathbf{0} = \nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) \boldsymbol{v}, \tag{16c}$$

例如参见 [61, 第 7 节。3], [12, 第 4.5 节和第 4 节6] 适用于无约束情形，或 [58, 式 (6.5)]适用于受约束情形。在 (16) 中，项 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{v}$ 表示科里奥利力和离心力，参见[61]。相应的科里奥利矩阵 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v})$ 及其 (k, j) 阶元素由下式给出

$$C_{kj}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}) = c_{ijk}(\boldsymbol{q}) v_i. \tag{17}$$

在 (17) 中，我们引入了第一类克里斯托费尔符号

$$c_{ijk}(\boldsymbol{q}) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M_{kj}(\boldsymbol{q})}{\partial q_i} + \frac{\partial M_{ki}(\boldsymbol{q})}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{ij}(\boldsymbol{q})}{\partial q_k} \right), \tag{18}$$

满足关于第一个指标对的对称性，即对于固定的 k，有 $c_{ijk} = c_{jik}$。

方程 运动方程（16）现在可以通过（8）等价地表示为一个 PH -

微分代数方程。直接计算拉格朗日函数（14）的一阶和二阶导数后，公式（8）得出

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}} \\ \dot{\boldsymbol{v}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{I} & \dot{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{q}) - 2\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{v}) & -\nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})^{\top} \\ \mathbf{0} & \nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_{\boldsymbol{q}} T(\boldsymbol{q},\boldsymbol{v}) + \nabla V(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{v}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{u}. \tag{19}$$

根据（14），关系式（11）给出总能量函数

$$H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^{\top}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\,\boldsymbol{v} + V(\boldsymbol{q}) = T(\boldsymbol{q},\boldsymbol{v}) + V(\boldsymbol{q}) \tag{20}$$

它是系统的动能与势能之和。现在可以通过两种方法求得相应的功率平衡：从（16）出发，或从等价的（19）出发。两种方法均可得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H = \boldsymbol{v}^{\top}\tilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^{\top}\left(\dot{\boldsymbol{M}} - 2\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{\top}\tilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}, \tag{21}$$

这与（5）和（12）一致。最后一个等号源于项 $\boldsymbol{M} - 2\boldsymbol{C}$ 的斜对称性（见下文备注或 [61, 命题 7。1]）。

备注 3.2。矩阵 $\boldsymbol{M} - 2\boldsymbol{C}$ 的斜对称性可由（8）中等价表达式的斜对称性推出，也可直接利用指标记法验证，具体如下

$$\dot{M}_{kj} - 2C_{kj} = \left(\frac{\partial M_{kj}}{\partial q_i} - \frac{\partial M_{kj}}{\partial q_i} - \frac{\partial M_{ki}}{\partial q_j} + \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k}\right) v_i = \left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial M_{ki}}{\partial q_j}\right) v_i, \tag{22}$$

其中，指标 k 和 j 的交换会改变符号。

3.3 常质量矩阵的特殊情形

在本工作的背景下，假定常质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ =const。出现在拉格朗日（14）中即已足够，从而 $\boldsymbol{M} = \mathbf{0}$，$\partial_{\boldsymbol{q}} T = \mathbf{0}$，以及 $\boldsymbol{C} = \mathbf{0}$。相应地，总能量函数（20）简化为

$$H = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^{\top}\,\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v} + V(\boldsymbol{q}). \tag{23}$$

并且端口哈密顿微分代数方程（19）取更简单的形式

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}} \\ \dot{\boldsymbol{v}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{I} & \mathbf{0} & -\nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})^{\top} \\ \mathbf{0} & \nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla V(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{v}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{u}. \tag{24}$$

结构矩阵的状态依赖性 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ 反映了端口哈密顿微分代数方程的几何非线性。可以观察到，对于无约束情形，可恢复典型的常数结构矩阵。将其与一般形式（4）进行比较，可得常数描述符矩阵 $\boldsymbol{E}$ =diag$(\boldsymbol{I},\boldsymbol{M},\mathbf{0})$ 以及协态函数 $\boldsymbol{z}$ =$(\nabla V(\boldsymbol{q})\ \ \boldsymbol{v},\boldsymbol{\lambda})$。

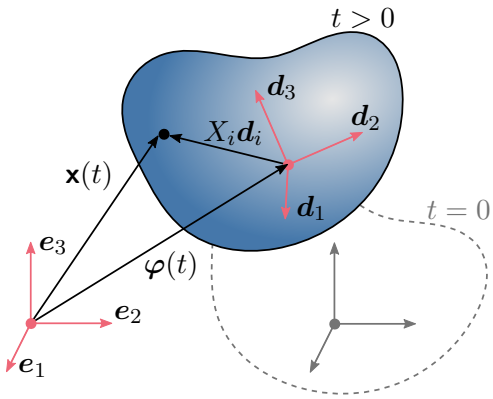


图 2：刚体的指向矢量表述 [29]。

最后，哈密顿量（23）的偏导数为

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}} = \nabla V(\boldsymbol{q}), \qquad \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{v}} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{v}, \qquad \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0}, \tag{25}$$

以满足本构关系（4c）。

4 端口-哈密顿框架中的多体动力学指向矢量表述

本节将介绍多体系统的端口哈密顿微分代数方程（PH-DAE）描述：从刚体的指向矢量表述出发，并将其扩展到运动副，由此可构建任意复杂的多体系统。

4.1 基于指向矢量表述的刚体动力学

刚体的转动动力学是多体系统的一个基本方面，所谓的指向矢表述 [27, 29] 提供了描述刚体转动运动的通用框架，同时允许采用第 3.3 节中假设的常质量矩阵。我们的目标是在第 3.3 节介绍的端口-哈密顿框架内表示刚体动力学。为此，我们回顾刚体动力学指向矢表述的关键要素，并始终注明其在式（24）中的对应项。

使用指向矢表述，可以将刚体描述为受约束机械系统，其运动方程可写成端口哈密顿微分代数方程（24）的形式。刚体的姿态由一组正交归一指向矢量 $\{\boldsymbol{d}_i\}_{i=1}^3$ 参数化，这些指向矢固定在刚体的质心处，见图 2。

为简化起见，假设惯性主轴与指向矢对齐。指向矢受 $m = 6$ 完整约束（7），以确保其正交且长度为单位值

指向矢，即

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{g}_d(\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \boldsymbol{d}_3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\boldsymbol{d}_1^\top \boldsymbol{d}_1 - 1) \\ \frac{1}{2}(\boldsymbol{d}_2^\top \boldsymbol{d}_2 - 1) \\ \frac{1}{2}(\boldsymbol{d}_3^\top \boldsymbol{d}_3 - 1) \\ \boldsymbol{d}_1^\top \boldsymbol{d}_2 \\ \boldsymbol{d}_1^\top \boldsymbol{d}_3 \\ \boldsymbol{d}_2^\top \boldsymbol{d}_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}. \tag{26}$$

关于（24），我们需要求（26）的梯度，其表达式为

$$\nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & 2\boldsymbol{d}_1^\top & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & 2\boldsymbol{d}_2^\top & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & 2\boldsymbol{d}_3^\top \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{d}_2^\top & \boldsymbol{d}_1^\top & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{d}_3^\top & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{d}_1^\top \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{d}_3^\top & \boldsymbol{d}_2^\top \end{bmatrix}. \tag{27}$$

每个刚体的构型由冗余坐标向量表征

$$\boldsymbol{q}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}(t) \\ \boldsymbol{d}_1(t) \\ \boldsymbol{d}_2(t) \\ \boldsymbol{d}_3(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12}, \tag{28}$$

其中 $\boldsymbol{\varphi}(t) \in \mathbb{R}^3$ 表示相对于惯性坐标系 $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^3$表示的质心笛卡尔坐标。注意，通过材料坐标 $\boldsymbol{X} = X_i \boldsymbol{e}_i$ （见图 2）确定的材料点的空间位置为

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{X}, t) = \boldsymbol{\varphi}(t) + \boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{X} \quad \text{with} \quad \boldsymbol{R}(t) = [\boldsymbol{d}_1(t)\ \boldsymbol{d}_2(t)\ \boldsymbol{d}_3(t)], \tag{29}$$

其中 $\boldsymbol{R}(t) \in SO(3)$ 是描述指向矢坐标系姿态的时变旋转矩阵，因此 $\boldsymbol{d}_i(t) = \boldsymbol{R}(t)\,\boldsymbol{e}_i$。

现在我们要为刚体形式指定运动方程。为此，可以将以对流角速度 $\boldsymbol{\Omega}(t)$ 表示的刚体经典相对转动动能，与用指向矢 $\boldsymbol{d}_i(t)$ 的时间导数表示的动能等同起来：

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}^\top \boldsymbol{J}\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} E_i\, \dot{\boldsymbol{d}}_i^\top \dot{\boldsymbol{d}}_i, \tag{30}$$

其中 $\boldsymbol{J} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ 是该刚体的对流惯性张量。此外，对于 $i = 1$，2、3

是对流欧拉张量 [27] 的主值，它们与 $\boldsymbol{J}$的主值之间的关系为 $E_i = \frac{1}{2}(J_j + J_k - J_i)$（指标 $(i$、j、$k)$ 的偶排列）。利用（30），总能量表达式（23）中的质量矩阵可写为：

$$\boldsymbol{M} = \operatorname{diag}(m\boldsymbol{I}, E_1\boldsymbol{I}, E_2\boldsymbol{I}, E_3\boldsymbol{I}). \tag{31}$$

值得注意的是，该矩阵为常数对角矩阵，这是指向矢表述的一个关键优势，可用于提高计算效率。

作用在刚体上的外力和力矩可通过输入项 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$ 在（24）中加以考虑，其中包含广义力 $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ 和 $\boldsymbol{f}_i(t)$，它们分别与 $\boldsymbol{\varphi}$ 和 $\boldsymbol{d}_i$共轭。

设 $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^3$ 为作用在距指向矢坐标系原点 $\boldsymbol{r} = X_i\boldsymbol{d}_i$ 处的偏心力。此外，设 $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^3$ 为作用在刚体上的外力矩。则相对于指向矢坐标系原点的总力矩由 $\bar{\boldsymbol{m}}_{\text{ext}} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} + \boldsymbol{\tau}$给出。于是，广义力可计算为 $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{F}$和$\boldsymbol{f}_i = -\frac{1}{2}\boldsymbol{d}_i \times \bar{\boldsymbol{m}}_{\text{ext}}$，见 [40, 62]。因此，将 $\boldsymbol{F}$和 $\boldsymbol{\tau}$排列到输入向量 $\boldsymbol{u} =$（$\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\tau}$）$\in \mathbb{R}^6$中，可得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\varphi}} \\ \boldsymbol{f}_1 \\ \boldsymbol{f}_2 \\ \boldsymbol{f}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F} \\ -\frac{1}{2}\widehat{\boldsymbol{d}}_1\bar{\boldsymbol{m}}_{\text{ext}} \\ -\frac{1}{2}\widehat{\boldsymbol{d}}_2\bar{\boldsymbol{m}}_{\text{ext}} \\ -\frac{1}{2}\widehat{\boldsymbol{d}}_3\bar{\boldsymbol{m}}_{\text{ext}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ -\frac{1}{2}\widehat{\boldsymbol{d}}_1\widehat{\boldsymbol{r}} & -\frac{1}{2}\widehat{\boldsymbol{d}}_1 \\ -\frac{1}{2}\widehat{\boldsymbol{d}}_2\widehat{\boldsymbol{r}} & -\frac{1}{2}\widehat{\boldsymbol{d}}_2 \\ -\frac{1}{2}\widehat{\boldsymbol{d}}_3\widehat{\boldsymbol{r}} & -\frac{1}{2}\widehat{\boldsymbol{d}}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} = \tilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{q})\,\boldsymbol{u}(t). \tag{32}$$

其中，$\widehat{\cdot}$ 是映射（1），介于 $\mathbb{R}^3$ 与反对称矩阵空间之间。自由刚体的运动方程现在可以写成端口哈密顿微分代数方程（24）的形式。

注记 4.1。除功率平衡方程（12）外，总角动量的平衡律对刚体动力学至关重要，见附录 A。就此而言，刚体相对于惯性坐标系原点的总角动量给出如下

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{\varphi} \times m\,\dot{\boldsymbol{\varphi}} + \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{d}_i \times E_i\,\dot{\boldsymbol{d}}_i. \tag{33}$$

相关平衡方程将在离散时间中由第5节给出的保结构积分方法得到一致复现。

4.2 多体系统

我们将上一节介绍的刚体动力学框架扩展到由刚体 A、B、……、N组成的更复杂多体系统。整个系统由此具有串联的位置 $\boldsymbol{q} =$($\boldsymbol{q}^A$、……、$\boldsymbol{q}^N$)、速度 $\boldsymbol{v} =$($\boldsymbol{v}^A$、……、$\boldsymbol{v}^N$) 和输入 $\boldsymbol{u} =$($\boldsymbol{u}^A$、……、$\boldsymbol{u}^N$)。多体系统中的N 刚体通常通过关节彼此连接。下文中，我们重点关注运动副，它们限制多体系统中两个代表性刚体之间的相对运动。在指向矢量表述中，关节的存在可通过附加约束加以考虑—

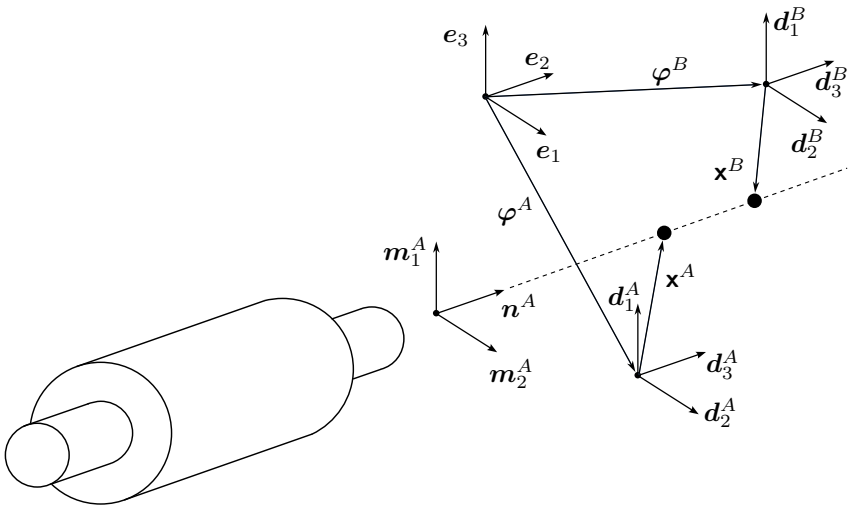


图3： 指向矢量表述中的圆柱副 [29]。

虑。约束向量 $\boldsymbol{g}$ 及其对应的拉格朗日乘子向量 $\boldsymbol{\lambda}$ 包含内部指向矢量相关约束和外部关节相关约束的贡献，因此得到

$$\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_{\mathrm{d}}^{A} \\ \vdots \\ \boldsymbol{g}_{\mathrm{d}}^{N} \\ \boldsymbol{g}_{\mathrm{J}} \end{bmatrix}, \qquad \nabla\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} \nabla\boldsymbol{g}_{\mathrm{d}}^{A} \\ \vdots \\ \nabla\boldsymbol{g}_{\mathrm{d}}^{N} \\ \nabla\boldsymbol{g}_{\mathrm{J}} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{d}}^{A} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{d}}^{N} \\ \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{J}} \end{bmatrix}. \tag{34}$$

特别地， $\boldsymbol{g}_{\mathrm{d}}^{k}(k = A、B、\ldots\ldots、N)$表示与刚体 A 的刚性相关的内部约束，而 $\boldsymbol{g}_{\mathrm{J}}$ 表示通过关节将各刚体互连形成多体系统时产生的外部约束。

作为示例，我们考虑一个连接两个刚体 A 和 B 的圆柱副，如图 3所示，该圆柱副允许沿公共关节轴进行相对平移并绕其旋转 $\boldsymbol{n}^A$，该关节轴（不失一般性）相对于刚体 A的坐标表示。其他运动副总结于表 1。如需更深入的讨论，请参见 [29, 62]。

表1：本文考虑的运动副，基于 [29]。

运动副 J	关节约束 m_{J}	相对运动自由度
球副（S）	3	3
圆柱副（C）	4	2
万向（U）	4	2
转动（R）	5	1
移动（P）	5	1

刚体 α 上的关节位置定义为

$$\mathbf{x}^{\alpha} = X_i^{\alpha}\boldsymbol{d}_i^{\alpha} \qquad \text{for} \qquad \alpha = A, B, \tag{35}$$

（参见图 3）。注意，除非另有说明，此处及下文中重复指标均默认求和。关节轴向量 $\boldsymbol{n}^A$ 可视为一个分量已知的单位向量 n_i^A，其位于体固连坐标系$\{\boldsymbol{d}_i^A\}_{i=1}^3$，满足

$$\boldsymbol{n}^A = n_i^A \boldsymbol{d}_i^A. \tag{36}$$

另外两个向量 $\boldsymbol{m}_\alpha^A = (m_\alpha^A)_i \boldsymbol{d}_i^A$对于 $\alpha = 1, 2$构成一个右手正交标架：$\{\boldsymbol{n}^A, \boldsymbol{m}_1^A, \boldsymbol{m}_2^A\}$，见图3。圆柱关节产生四个外部约束方程

$$\boldsymbol{g}_{\mathrm{J,cyl}}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_1^{A^\top} \Delta\boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{m}_2^{A^\top} \Delta\boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{n}^{A^\top} \boldsymbol{d}_1^B - \eta_1 \\ \boldsymbol{n}^{A^\top} \boldsymbol{d}_2^B - \eta_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \quad \text{with} \quad \Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\varphi}^B + \mathbf{x}^B - \boldsymbol{\varphi}^A - \mathbf{x}^A, \tag{37}$$

假设$\boldsymbol{d}_1^B$ 和$\boldsymbol{d}_2^B$ 的选取使它们不与 $\boldsymbol{n}^A$对齐。在（37）中，$\Delta\boldsymbol{p}$表示刚体 A 和 B上两个关节位置之间的相对位移向量。常数 η_1，$\eta_2 \in \mathbb{R}$ 的选取应与初始条件一致。式（37）中的前两个方程将垂直于关节轴的相对平移限制住，而后两个方程则阻止绕垂直于关节轴的轴发生相对转动。

4.3 将运动副描述为端口-哈密顿互连

现在，我们通过在端口-哈密顿框架 [3, 7, 9]中运用功率守恒互连的概念，从一个不同的角度来探讨运动副的建模。我们考虑两个刚体 A 和 B，它们从一开始就被建模为由式（4）支配的独立端口-哈密顿系统。也就是说，

$$\boldsymbol{E}^\alpha \dot{\boldsymbol{x}}^\alpha = \boldsymbol{J}^\alpha \boldsymbol{z}^\alpha + \boldsymbol{B}^\alpha \boldsymbol{u}^\alpha, \tag{38a}$$

$$\boldsymbol{y}^\alpha = \boldsymbol{B}^{\alpha^\top} \boldsymbol{z}^\alpha. \tag{38b}$$

对于每个刚体 $\alpha \in \{A, B\}$，式（38）中的量已在前文各节中定义，例如第 3.3 节。在 PH术语中，我们将 $(\boldsymbol{u}^\alpha, \boldsymbol{y}^\alpha)$ 称为与互连端口相关的端口变量 [4],，其对应的功率为 $P(\boldsymbol{u}^\alpha, \boldsymbol{y}^\alpha) = (\boldsymbol{u}^\alpha)^\top \boldsymbol{y}^\alpha$。该项可能源自外部影响（例如由控制输入引起），并出现在功率平衡式（5）中。我们将证明，通过对端口变量施加代数约束实现的这两个子系统之间的 PH 功率守恒互连，等价于上一节所讨论的运动副描述。

所讨论的两个端口-哈密顿系统的互连端口变量分解为内部贡献（$\boldsymbol{u}_{\mathrm{int}}^\alpha$，$\boldsymbol{y}_{\mathrm{int}}^\alpha$）和外部贡献（$\boldsymbol{u}_{\mathrm{ext}}^\alpha$，$\boldsymbol{y}_{\mathrm{ext}}^\alpha$），$\alpha \in \{A, B\}$，使得

$$\boldsymbol{u}^\alpha = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_{\mathrm{int}}^\alpha \\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{ext}}^\alpha \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}^\alpha = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_{\mathrm{int}}^\alpha \\ \boldsymbol{y}_{\mathrm{ext}}^\alpha \end{bmatrix}. \tag{39}$$

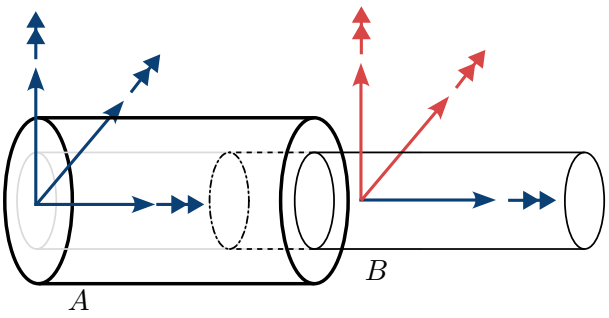


图 4：圆柱副的内部（红色）和外部（蓝色）端口变量。

内部贡献受互连约束，而外部贡献则可用于与环境或控制进行进一步交互 [7, 9]。圆柱副的示例（参见图4）能更清楚地说明这一差别。如第4.2节所述，该关节仅允许刚体 B 沿关节轴平移和旋转。这些容许运动（以蓝色标示）对应外部贡献，因为它们不受互连限制。相反，刚体 B 绕其余轴的平移和旋转受关节约束阻止（以红色标示）。因此，相应的端口变量构成内部贡献。刚体 A 不受此互连约束，因此其所有相关自由度均表现为外部端口变量。

与 (39) 一致，我们对输入-输出关系 (38) 中的端口矩阵进行分解，使得

$$\boldsymbol{B}^{\alpha}\boldsymbol{u}^{\alpha} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^{\alpha}_{\mathrm{int}} & \boldsymbol{B}^{\alpha}_{\mathrm{ext}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}^{\alpha}_{\mathrm{int}}\\ \boldsymbol{u}^{\alpha}_{\mathrm{ext}}\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}^{\alpha} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{y}^{\alpha}_{\mathrm{int}}\\ \boldsymbol{y}^{\alpha}_{\mathrm{ext}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(\boldsymbol{B}^{\alpha}_{\mathrm{int}})^{\top}\\ (\boldsymbol{B}^{\alpha}_{\mathrm{ext}})^{\top}\end{bmatrix}\boldsymbol{z}^{\alpha}. \tag{40}$$

对于 $\alpha \in \{A, B\}$。虽然我们可以将 $\boldsymbol{u}^{\alpha}_{\mathrm{int}}$ 识别为关节施加于刚体 α 上的力和力矩，但相应的 $\boldsymbol{y}^{\alpha}_{\mathrm{int}}$ 表示该刚体在关节位置处的速度。现在，可以应用互连约束

$$\boldsymbol{u}^{A}_{\mathrm{int}} + \boldsymbol{u}^{B}_{\mathrm{int}} = \boldsymbol{0}, \tag{41a}$$
$$\boldsymbol{y}^{A}_{\mathrm{int}} - \boldsymbol{y}^{B}_{\mathrm{int}} = \boldsymbol{0}. \tag{41b}$$

。注意，(41a) 对应于相互作用定律，而 (41b) 限制了两个子系统之间的相对运动。(41) 中的关系对应于所谓的变压器互连 [3, 9]，它连接由以下关系给出的两组端口变量

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}^{A}_{\mathrm{int}}\\ \boldsymbol{u}^{A}_{\mathrm{int}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}^{B}_{\mathrm{int}}\\ \boldsymbol{y}^{B}_{\mathrm{int}}\end{bmatrix}, \tag{42}$$

表明两个系统的互连无需能量存储或耗散即可实现，因此

耗散，因此

$$P_{\mathrm{int}} = P(\boldsymbol{u}^A_{\mathrm{int}}, \boldsymbol{y}^A_{\mathrm{int}}) + P(\boldsymbol{u}^B_{\mathrm{int}}, \boldsymbol{y}^B_{\mathrm{int}}) = (\boldsymbol{u}^A_{\mathrm{int}})^\top \boldsymbol{y}^A_{\mathrm{int}} + (\boldsymbol{u}^B_{\mathrm{int}})^\top \boldsymbol{y}^B_{\mathrm{int}} = 0. \tag{43}$$

利用变压器互连（42）连接形式为（38）的两个端口-哈密顿系统，我们得到耦合形式

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}^A & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}^B & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}^A \\ \dot{\boldsymbol{x}}^B \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_{\mathrm{J}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}^A & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^A_{\mathrm{int}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}^B & -\boldsymbol{B}^B_{\mathrm{int}} \\ -\boldsymbol{B}^{A\top}_{\mathrm{int}} & \boldsymbol{B}^{B\top}_{\mathrm{int}} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}^A \\ \boldsymbol{z}^B \\ \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{J}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^A_{\mathrm{ext}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^B_{\mathrm{ext}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}^A_{\mathrm{ext}} \\ \boldsymbol{u}^B_{\mathrm{ext}} \end{bmatrix}, \tag{44a}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}^A_{\mathrm{ext}} \\ \boldsymbol{y}^B_{\mathrm{ext}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{B}^A_{\mathrm{ext}})^\top & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & (\boldsymbol{B}^B_{\mathrm{ext}})^\top & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}^A \\ \boldsymbol{z}^B \\ \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{J}} \end{bmatrix}. \tag{44b}$$

关于互连约束（41a），我们在上述方程中引入了 $\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{J}} := \boldsymbol{u}^A_{\mathrm{int}} = -\boldsymbol{u}^B_{\mathrm{int}}$。此外，（44）给出了总状态向量 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}^A,\ \boldsymbol{x}^B,\ \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{J}})$ 以及哈密顿量 $H(\boldsymbol{x}) = H^A(\boldsymbol{x}^A) + H^B(\boldsymbol{x}^B)$。请注意，形式（44）再次符合一般框架（4），而新得到的结构矩阵的斜对称性则编码了（43）。剩余的功率平衡仍仅涉及外部端口，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(\boldsymbol{x}) = P(\boldsymbol{u}^A_{\mathrm{ext}}, \boldsymbol{y}^A_{\mathrm{ext}}) + P(\boldsymbol{u}^B_{\mathrm{ext}}, \boldsymbol{y}^B_{\mathrm{ext}}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}^A_{\mathrm{ext}} \\ \boldsymbol{u}^B_{\mathrm{ext}} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}^A_{\mathrm{ext}} \\ \boldsymbol{y}^B_{\mathrm{ext}} \end{bmatrix}. \tag{45}$$

最后可以观察到，（44a）的最后一行可以写为

$$\begin{bmatrix} -\boldsymbol{B}^{A\top}_{\mathrm{int}} & \boldsymbol{B}^{B\top}_{\mathrm{int}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}^A \\ \boldsymbol{z}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tilde{\boldsymbol{B}}^{A\top}_{\mathrm{int}} & \tilde{\boldsymbol{B}}^{B\top}_{\mathrm{int}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}^A \\ \boldsymbol{v}^B \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}. \tag{46}$$

也就是说，容许速度 $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}^A,\ \boldsymbol{v}^B)$ 必须属于 $\begin{bmatrix} -\tilde{\boldsymbol{B}}^{A^\top}{}_{\mathrm{int}} & \tilde{\boldsymbol{B}}^{B^\top}{}_{\mathrm{int}} \end{bmatrix}$ 的零空间。这与第 4.2 节中引入的外部关节约束必须在速度层级上得到满足的要求完全类似，这意味着

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{g}_{\mathrm{J}} = \nabla \boldsymbol{g}_{\mathrm{J}}(\boldsymbol{q}) \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}, \tag{47}$$

其中 $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q}^A, \boldsymbol{q}^B)$。因此，

$$\operatorname{null}\left(\begin{bmatrix} -\tilde{\boldsymbol{B}}^{A\top}_{\mathrm{int}} & \tilde{\boldsymbol{B}}^{B\top}_{\mathrm{int}} \end{bmatrix} \right) = \operatorname{null}\left(\nabla \boldsymbol{g}_{\mathrm{J}}(\boldsymbol{q}) \right) \tag{48}$$

因此，我们可以得出结论：端口-哈密顿形式体系编码的信息与运动学对的传统表述相同，但形式更为一般，并能自然地与基于能量的互连相结合。

5 保结构时间积分

我们提出了一种通过对底层端口哈密顿形式进行离散化而得到的保结构时间步进格式（4），例如可应用于多体系统（44）。我们采用二阶精度的隐式中点法积分器。对于当前的多体系统指向矢量表述，这意味着该格式能够保持能量和总角动量平衡定律的一致性。

考虑离散时间网格 $0 = t^0 < t^1 < \ldots < t^M = t_f$，其包含 M 个时间步。令 t^n 表示当前时间步，并将时间步长定义为 $h := t^{n+1} - t^n$。此外，$\boldsymbol{x}^n \approx \boldsymbol{x}(t^n)$ 和 $\boldsymbol{x}^{n+1} \approx \boldsymbol{x}(t^{n+1})$ 表示离散状态近似。中点状态定义为 $\boldsymbol{x}^{n+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^{n+1} + \boldsymbol{x}^n)$。将中点法则应用于连续时间端口哈密顿方程（4），可得时间步进方案

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}^{n+1} - \boldsymbol{x}^n) = h\,\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}^{n+\frac{1}{2}})\,\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}^{n+\frac{1}{2}}) + h\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}^{n+\frac{1}{2}})\,\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}, \tag{49a}$$

$$\boldsymbol{y}^{n+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}^{n+\frac{1}{2}})^\top \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}^{n+\frac{1}{2}}), \tag{49b}$$

从而离散时间本构关系

$$\boldsymbol{E}^\top \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}^{n+\frac{1}{2}}) = \nabla H(\boldsymbol{x}^{n+\frac{1}{2}}), \tag{49c}$$

按设计得以满足。请注意，此处我们仅考虑常量$\boldsymbol{E}$的情形。此外，输入在中点处取值为 $\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{u}(t^{n+\frac{1}{2}})$，但这一选择并非该方案具有结构保持性质的必要条件。相应地，输出 $\boldsymbol{y}^{n+\frac{1}{2}}$ 是 $\boldsymbol{y}(t^{n+\frac{1}{2}})$的近似值。

在当前多体系统的 PH 描述中，(49a) 表示 (24) 的离散对应形式，可更明确地写为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}^{n+1} - \boldsymbol{q}^n \\ \boldsymbol{v}^{n+1} - \boldsymbol{v}^n \\ \boldsymbol{\lambda}^{n+1} - \boldsymbol{\lambda}^n \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & -\nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}^{n+\frac{1}{2}})^\top \\ \boldsymbol{0} & \nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}^{n+\frac{1}{2}}) & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla V(\boldsymbol{q}^{n+\frac{1}{2}}) \\ \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{\lambda}^{n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \tilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x}^{n+\frac{1}{2}}) \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}. \tag{50}$$

对于二次势函数，格式 (49) 属于文献 [49],提出的离散梯度法，可精确表示功率平衡方程 (5)。

5.1 离散时间下的功率平衡方程

注意，结构矩阵 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ 在式（49）中取中点值，以实现二阶收敛；不过，无论具体在哪一点求值，以下功率平衡关系都成立。另一方面，哈密顿函数梯度 $\nabla H(\boldsymbol{x})$ 必须在中点求值才能保证这一性质，因为我们假设哈密顿量至多为二次，以确保方向性性质

$$H(\boldsymbol{x}^{n+1}) - H(\boldsymbol{x}^n) = \nabla H(\boldsymbol{x}^{n+\frac{1}{2}})^\top (\boldsymbol{x}^{n+1} - \boldsymbol{x}^n). \tag{51}$$

代入式（49）得到

$$H(\boldsymbol{x}^{n+1}) - H(\boldsymbol{x}^{n}) = h\,(\boldsymbol{y}^{n+\frac{1}{2}})^{\top}\boldsymbol{u}^{n+\frac{1}{2}}, \tag{52}$$

其中（49c）以及 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ 的斜对称性已得到利用。此结果证实，离散时间形式保留了连续系统的无源性和无损性。特别是，当 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ 时，能量被精确保守。

5.2 离散时间下的功率守恒互联

连续时间下互连的功率守恒特性由变压器关系（42）决定。互连与时间离散化如何相互作用并不显而易见。因此，我们可以证明这两种操作是可交换的：先互连两个子系统再进行时间离散化，与先对子系统进行离散化再将其互连，所得结果相同，见图5。

这种等价性依赖于所有子系统均采用相同的保结构格式（49）。考虑两个系统在离散时间下具有内部输入的离散形式（49）$\boldsymbol{u}^{\alpha}$、$n+\frac{1}{2}$内部输出 $\boldsymbol{y}^{\alpha}$、$n+\frac{1}{2}$内部，$\alpha \in \{A、B\}$。现在考虑离散时间下的互连关系（42）

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_{\mathrm{int}}^{A,n+\frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{int}}^{A,n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_{\mathrm{int}}^{B,n+\frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{y}_{\mathrm{int}}^{B,n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}. \tag{53}$$

离散时间下通过互连交换的功率为

$$(P_{\mathrm{int}})^{n+\frac{1}{2}} = \left(\boldsymbol{u}_{\mathrm{int}}^{A,n+\frac{1}{2}}\right)^{\top} \boldsymbol{y}_{\mathrm{int}}^{A,n+\frac{1}{2}} + \left(\boldsymbol{u}_{\mathrm{int}}^{B,n+\frac{1}{2}}\right)^{\top} \boldsymbol{y}_{\mathrm{int}}^{B,n+\frac{1}{2}} = 0, \tag{54}$$

其中采用了离散互连（53）。这一结果表明，离散时间端口哈密顿表述保留了连续系统的关键功率平衡性质。



图 5：互连与离散化的交换性。

最后，可以证明我们得到的离散时间系统

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}^A & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{E}^B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{A,n+1} - \boldsymbol{x}^{A,n} \\ \boldsymbol{x}^{B,n+1} - \boldsymbol{x}^{B,n} \\ \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{J}}^{n+1} - \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{J}}^{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}^{A,n+\frac{1}{2}} & \mathbf{0} & \boldsymbol{B}_{\mathrm{int}}^{A,n+\frac{1}{2}} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{J}^{B,n+\frac{1}{2}} & -\boldsymbol{B}_{\mathrm{int}}^{B,n+\frac{1}{2}} \\ -(\boldsymbol{B}_{\mathrm{int}}^{A,n+\frac{1}{2}})^\top & (\boldsymbol{B}_{\mathrm{int}}^{B,n+\frac{1}{2}})^\top & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h\boldsymbol{z}^{A,n+\frac{1}{2}} \\ h\boldsymbol{z}^{B,n+\frac{1}{2}} \\ h\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{J}}^{n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} + h\,\boldsymbol{B}_{\mathrm{ext}}^{n+\frac{1}{2}} \boldsymbol{u}_{\mathrm{ext}}^{n+\frac{1}{2}}, \tag{55}$$

这与直接对（44a）应用所提出的离散化完全相同。上标 $(\,)^{n+1/2}$ 表示在中点状态 $\boldsymbol{x}^{n+\frac{1}{2}}$ 处对相应量求值，而量 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{ext}}$ 和 $\boldsymbol{u}_{\mathrm{ext}}$ 可通过与（44a）比较得出。

5.3 离散时间约束满足

我们将证明，如上所述应用隐式中点法可在离散时间下精确保留完整约束。对于至多为二次的任意约束函数，例如指向矢正交归一约束（26）或外部关节约束（37），可以类比（51）证明关系

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}^{n+1}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}^{n}) = \nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}^{n+\frac{1}{2}})(\boldsymbol{q}^{n+1} - \boldsymbol{q}^{n}) \tag{56}$$

成立。将（50）第一行中的运动学关系代入上述表达式，可得

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}^{n+1}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}^{n}) = h\,\nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}^{n+\frac{1}{2}})\boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{0}, \tag{57}$$

由于（50）第三行的关系，该式为零。因此，若初值以一致的方式选取，使得 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}^0) = 0$，则约束在所有离散时刻均保持满足，即

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}^{n+1}) = \mathbf{0}, \tag{58}$$

对所有 n。这包括指向矢量表述中的正交约束，以及与表1中所含运动副相关的关节约束。

6 使用 GGL 原理进行指标约简

鉴于二次完整约束已按照（58）得到精确满足，连续时间下的指标二微分代数方程（24）等价于对相应指标三微分代数方程的积分，参见例如 [63]。在端口哈密顿框架中进一步进行指标约简可能会有所裨益。为此，我们旨在纳入 [47,48], 中概述的过程，其中著名的 *Gear-Gupta-Leimkuhler* （GGL）稳定化 [46] 经过了变分修改。由所谓的*GGL* 变分原理

表示为以下形式的指标2微分代数方程

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{M}^{-1}\partial_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{g}_v^\top \boldsymbol{\gamma} \tag{59a}$$

$$\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{v}} = -\nabla V(\boldsymbol{q}) - \nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})^\top \boldsymbol{\lambda} - \partial_{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{g}_v^\top \boldsymbol{\gamma} \tag{59b}$$

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) \tag{59c}$$

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{g}_v(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}) = \nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})\, \boldsymbol{v}. \tag{59d}$$

这些方程通过加入速度层级约束扩展了众所周知的指标3微分代数方程 $\boldsymbol{g}_v$，参见（59b），并引入额外的拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\gamma}$。为简洁起见，此处省略外广义力。在此背景下，经典的 GGL 稳定化通过在动量平衡中增加一项进行了修改，从而获得哈密顿结构，进而获得辛结构 [47]。为使这一框架符合端口哈密顿结构（4），我们对位置约束和速度层级约束（59c）及（59d）分别对时间求导，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) \left(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{M}^{-1}\partial_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{g}_v^\top \boldsymbol{\gamma}\right) = \boldsymbol{0}, \tag{60a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{g}_v(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}) = \partial_{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{g}_v \left(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{M}^{-1}\partial_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{g}_v^\top \boldsymbol{\gamma}\right) + \partial_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{g}_v \boldsymbol{M}^{-1} \left(-\nabla V(\boldsymbol{q}) - \nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})^\top \boldsymbol{\lambda} - \partial_{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{g}_v^\top \boldsymbol{\gamma}\right) = \boldsymbol{0}, \tag{60b}$$

其中，我们代入了（59a）和（59b）。最终，这些速度和加速度层级上的约束被纳入指标1端口哈密顿微分代数方程

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}} \\ \dot{\boldsymbol{v}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}^{-1}\nabla \boldsymbol{g}^\top \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & -\nabla \boldsymbol{g}^\top & -\partial_{\boldsymbol{q}}\, \boldsymbol{g}_v^\top \\ \boldsymbol{0} & \nabla \boldsymbol{g} & \boldsymbol{0} & \nabla \boldsymbol{g} \boldsymbol{M}^{-1} \nabla \boldsymbol{g}^\top \\ -\nabla \boldsymbol{g} \boldsymbol{M}^{-1} & \partial_{\boldsymbol{q}}\, \boldsymbol{g}_v & -\nabla \boldsymbol{g} \boldsymbol{M}^{-1}\, \nabla \boldsymbol{g}^\top & \boldsymbol{J}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla V \\ \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} \tag{61}$$

其中 $\boldsymbol{J}_{44}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}) = \partial_{\boldsymbol{q}}\, \boldsymbol{g}_v\, \boldsymbol{M}^{-\top} \nabla \boldsymbol{g}^\top - \nabla \boldsymbol{g} \boldsymbol{M}^{-1}\, \partial_{\boldsymbol{q}}\, \boldsymbol{g}_v^\top = -\boldsymbol{J}_{44}^\top$和 $\partial_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{g}_v = \nabla \boldsymbol{g}$。注意，（61）可视为（24）的扩展。由于这些方程同样符合端口-哈密顿框架（4），即 $\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x})$，我们可以确信功率平衡方程（5）仍然成立。因此，我们采用与（49）相同的时间积分方法，并对结构矩阵进行中点求值，使得 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}^{n+1} - \boldsymbol{x}^n) = h\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}^{n+\frac{1}{2}})\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}^{n+\frac{1}{2}})$。与前一种情形类似，我们可以验证，该 formulation 现在能够精确保持位置约束和速度层级约束，即对所有 n

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}^{n+1}) = \boldsymbol{0}, \qquad \text{and} \qquad \boldsymbol{g}_v(\boldsymbol{q}^{n+1}, \boldsymbol{v}^{n+1}) = \boldsymbol{0}, \tag{62}$$

以获得相容初始条件（$\boldsymbol{q}^0$，$\boldsymbol{v}^0$）。此外，还要求完整约束至多为二阶多项式。证明过程遵循第5.3节中的思路，并将 $\boldsymbol{g}_v$以及 $\boldsymbol{g}$纳入其中。

7 数值结果与讨论

下文将所提出的 PH 中点积分器（50）（以下简称“PH-MP”）应用于三个涉及多体系统的代表性数值算例。此外，我们将突出说明，通过扩展该积分器以纳入第6节中引入的 GGL 型稳定化，可以获得稳定性方面的优势。我们将该积分器称为“PH-MP-GGL”。第7.1节演示了第4.3节所介绍的圆柱关节的运行。第7.2节讨论了一个涉及闭环系统的模型问题。特别是，闭环系统使确定最小坐标变得困难，从而说明了使用冗余坐标的优势。第7.3 节研究了空间滑块曲柄机构——一种更为复杂的闭环系统，其中包括重力和固定支座。

每个时间步均使用牛顿法求解由此得到的非线性方程，绝对容差为 $\varepsilon = 10^{-9}$。除非另有说明，时间步长采用文献中的取值；如有另行说明，则选择能够确保收敛的步长。值得注意的是，对于这里使用的中点积分器，步长仅受每次迭代中牛顿法收敛性的限制。

7.1 飞行圆柱副

本例改编自 [29], ，展示了自由飞行状态下圆柱副的动力学，并用于验证所提出框架的守恒性质。该设置可用于评估在没有外力作用时，所提出的数值积分方法保持能量和总角动量的准确性，分别见(52)和(72)。

表 2：飞行圆柱副的仿真参数。

h	t_{end}	l^A	r^A	m^A	l^B	$r^B_{\text{外侧}}$	$r^B_{\text{内侧}}$	m^B
0.001	0.7	30	2	4	6	3	2	3

系统的初始构型如图6a 所示，所选仿真参数汇总于表2。刚体 A是一个细长圆柱体，质量为 m^A，长度为 l^A ，半径为 r^A；而刚体 B 是一个短而粗的空心圆柱体，质量为 m^B，长度为 l^B，内半径为r^B_{inner} ，外半径为 r^B_{outer}。位于刚体 A质心处的圆柱关节连接这两个刚体，允许二者绕关节轴相对转动并沿关节轴平移$\boldsymbol{n}^A$ ，适用于 $\boldsymbol{n}^A(t=0) = [0\ 0\ 1]^\top$。基于 $t=0$ 的问题在 [29] 处的独立广义速度为

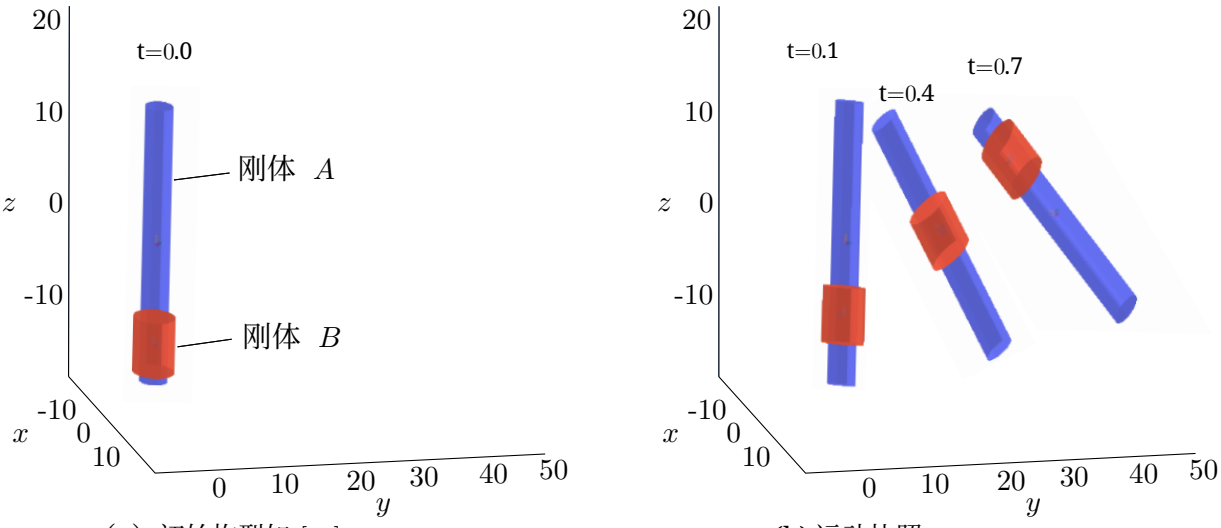
$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{\text{ind}}(t=0) &= \begin{bmatrix}\left(\boldsymbol{v}^A_\varphi(t=0)\right)^\top & \left(\boldsymbol{\omega}^A(t=0)\right)^\top & \dot{u}^B(t=0) & \dot{\theta}^B(t=0)\end{bmatrix}^\top \\ &= \begin{bmatrix}0 & 50 & 0 & 1 & 1.5 & 0 & 35.5 & -100\end{bmatrix}^\top .\end{aligned}$$

此处， $\dot{u}^B$ 表示刚体 B 沿 $\boldsymbol{n}^A$的平移速度，而 $\dot{\theta}^B$ 表示刚体 B 相对于刚体 A的角速度。根据 [29], ，我们得到刚体 B的初始速度

采用指向矢量表述，使用

$$\boldsymbol{v}_{\varphi}^{B} = \boldsymbol{v}_{\varphi}^{A} + \boldsymbol{\omega}^{A} \times (\boldsymbol{\varphi}^{B} - \boldsymbol{\varphi}^{A}) + \dot{u}^{B}\boldsymbol{n}^{A} + \dot{\theta}^{B}\mathbf{x}^{B} \times \boldsymbol{n}^{A}.$$

刚体上没有外力作用，也没有引力生效。



（a）初始构型如 [29]。 (b) 运动快照

图 6：飞行圆柱副。

图 6b 中的运动快照展示了两个物体在 $t \in \{0.1, 0.4, 0.7\}$时的运动。在没有外力或重力作用于系统的情况下，整个仿真过程中，总能量和角动量向量$\boldsymbol{L}$ 始终保持不变，精度达到机器精度，分别见图 7 和 8。

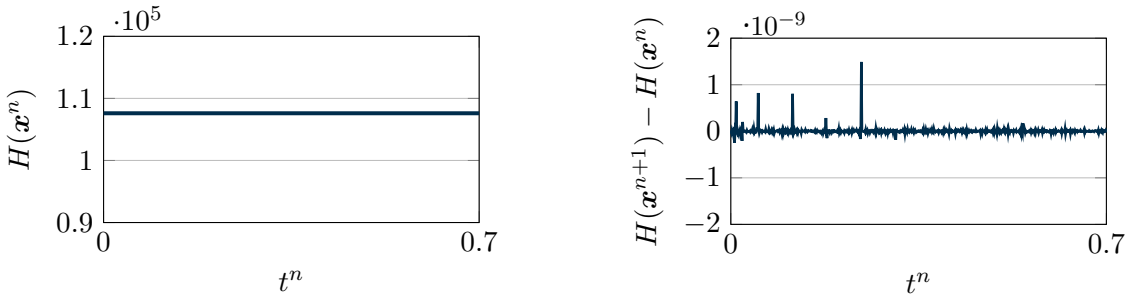


图 7：飞行圆柱副的哈密顿量（使用 PH-MP）。

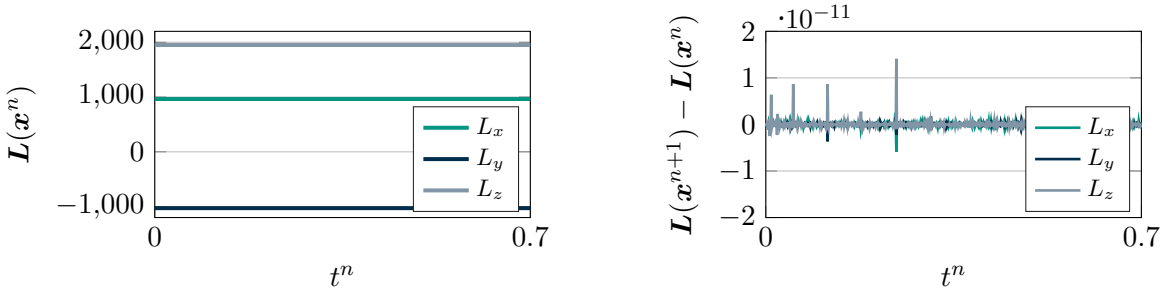
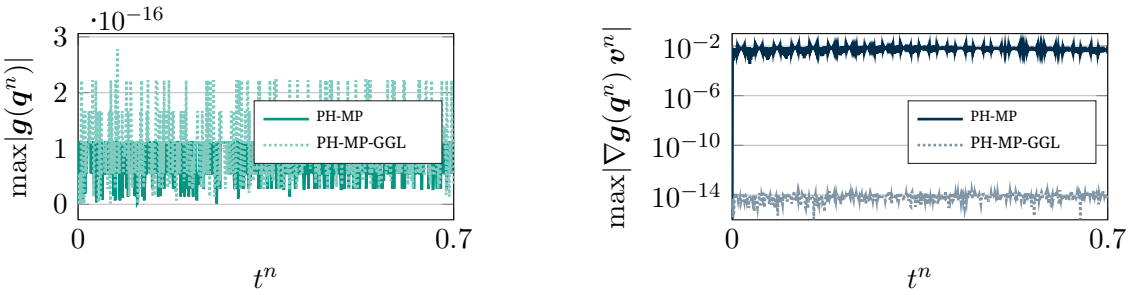


图 8：圆柱副的总角动量（使用 PH-MP）。

如（58）中所述，对约束满足情况的分析表明，图9a显示，位置级约束在整个仿真过程中始终满足至数值精度，这证实了所提方法在保持约束一致性方面的有效性，见第5.3节。如图9b所示，采用 PH-MP 积分器时，速度层级约束并非如此。相比之下，PH-MP-GGL 积分器也能精确强制满足速度层级约束，见（62），从而确保这些约束满足至数值精度，参见图9b。



(a) 位置层级。 （b）速度层级。

图9：圆柱副的约束满足情况（最大绝对误差）。

为验证数值格式的准确性，本文分析状态变量$\boldsymbol{q}$、 $\boldsymbol{v}$、 $\boldsymbol{\lambda}$ 和守恒量 H、 $\boldsymbol{L}$ 的收敛性。将 $h = \{10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}\}$的结果与采用 $h = 10^{-5}$精细离散得到的解进行比较。对于每个状态，计算仿真结果与参考解在$t = t = 0.02$ 处的均方根（RMS）误差，例如：

$$e_{\mathrm{RMS}}(\boldsymbol{q}) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\left(\boldsymbol{q}_i^{\mathrm{sim}}(\bar{t}) - \boldsymbol{q}_i^{\mathrm{ref}}(\bar{t})\right)^2}. \tag{63}$$

速度 $\boldsymbol{v}$、拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\lambda}$ 和守恒量 H、 $\boldsymbol{L}$ 的均方根（RMS）误差计算采用相同的步骤。

对于拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\lambda}$，收敛阶降至一阶。这与该方法的预期表现一致。对于状态变量的收敛性，PH-MP 和 PH-MP-GGL 积分器得出的结果完全相同，见图10。

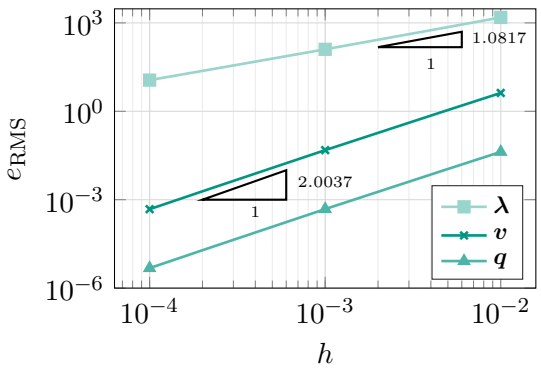


图10：圆柱副状态变量的收敛性（PH-MP）。

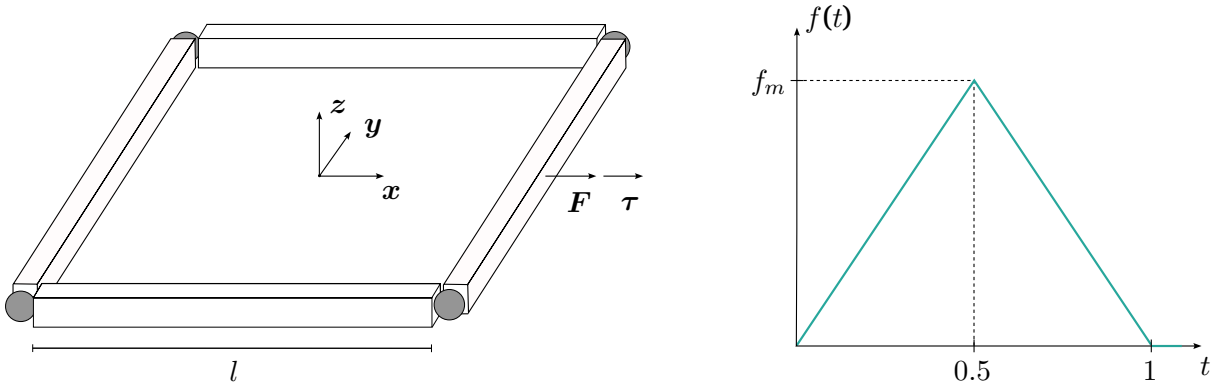
7.2 闭环多体系统

此基准问题改编自 [28, 57], ，用于评估所提出的冗余坐标公式在瞬态外载荷作用下处理闭合运动学回路的能力，并在卸载后保持物理不变量，相关讨论见第5节。

表 3：闭环多体系统的仿真参数。

h	t_{end}	l	A	ρ	m	f_m
0.1	10	10	1	1	$\rho A l$	100

该系统由四根长度为 l 且横截面为方形的刚性杆组成， A通过四个球铰相互连接，形成一个闭环。仿真参数见表 3。图11a 展示了系统初始构型的示意图。



（a）闭环多体系统的初始构型系统。

(b) 外载荷的作用。

图11：闭环多体系统。

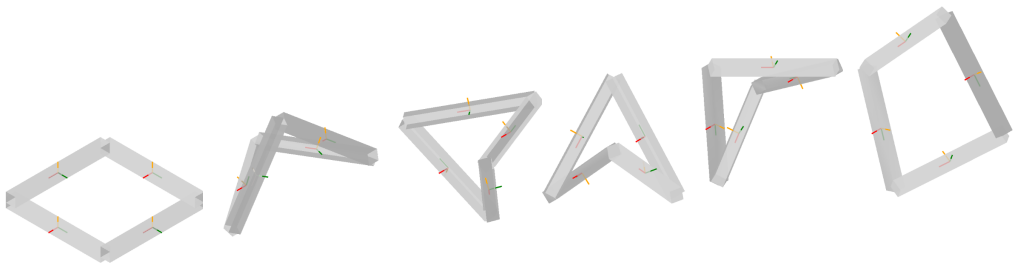


图12：系统在仿真过程中的运动。

在 $t \in [0, 1]$ 期间，第一根杆的质心在

全局 x方向（见图 11b），其表达式为

$$\boldsymbol{F} = 8f(t)\boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{\tau} = 6f(t)\boldsymbol{e}_1 \qquad \text{with} \qquad f(t) = \begin{cases} 2f_m t & \text{for } t \in [0, 0.5]\,, \\ 2f_m(1-t) & \text{for } t \in (0.5, 1], \\ 0 & \text{for } t \in (1, t_{\text{end}}]. \end{cases}$$

施加的载荷引起沿 x轴的整体平移，以及结构的折叠与展开运动；卸载后，该运动仍会持续。图 12 展示了这一运动的快照。与前一个示例一样，卸载后的总能量除数值舍入误差外保持不变，见图 13。此外，可以观察到，当前方法与采用基于单位四元数的能量-动量一致方法“Livens-EM”所得结果完全一致，参见 [32]。

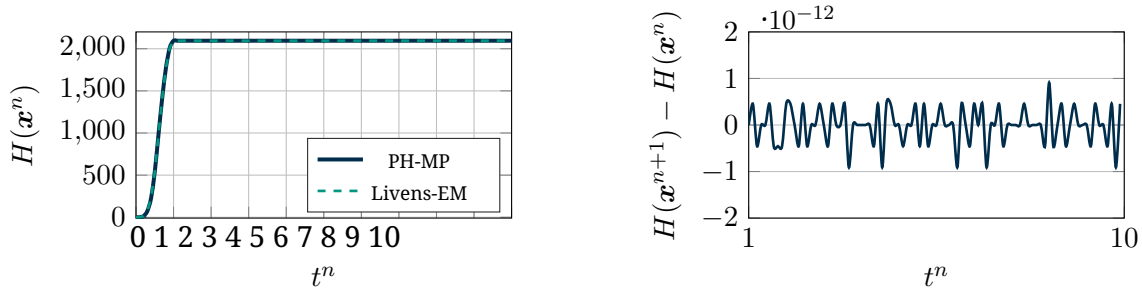
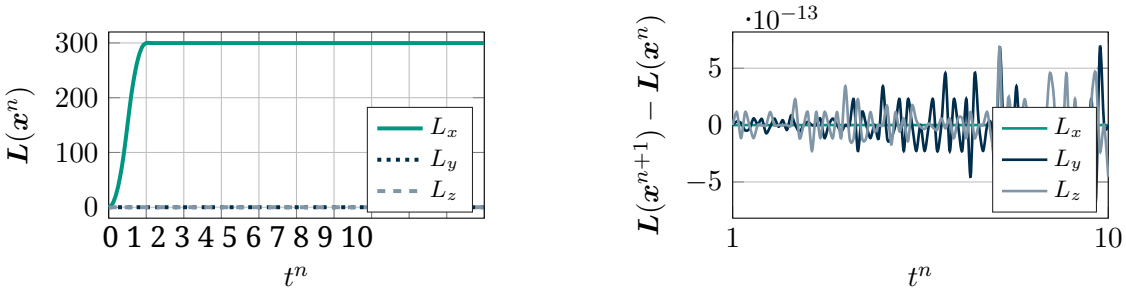


图13：闭环多体系统的哈密顿量（使用 PH-MP）。

角动量也有同样的情况，如图14所示。需要注意的是，只有 L_x 分量保持非零，这与加载方向一致。



Fig图14：闭环多体系统的总角动量（使用 PH-MP）

该示例证实，所提出的公式能够在瞬态载荷作用下保持闭环多体系统动力学中的不变能量和角动量。

7.3 空间曲柄滑块机构

最后，我们将所提出的框架应用于一个空间滑块—曲柄机构，该机构改编自 [64] 并曾在 [65, 66] 中研究过。该示例具有一个闭合运动学回路、固定支座和重力 $\boldsymbol{g} = -9.81\boldsymbol{e}_3$。系统如图15 所示，由一个曲柄 AB 组成，其质量为 m_{AB}，长度为 l_{AB}，方形横截面的特征参数为

表 4：空间滑块曲柄基准的仿真参数。

h	t_{end}	$\omega_x(t=0)$	θ_0	l_{AB}	a_{AB}	m_{AB}	l_{BC}	a_{BC}	m_{BC}	$a^{\text{块}}$	$m^{\text{块}}$
0.01, 0.001	5	6	0	0.08	0.01	0.12	0.3	0.01	0.5	0.03	2.0

边长为 a_{AB}；一根连杆 BC，质量为 m_{BC}、长度为 l_{BC}，其方形横截面的特征参数为 a_{BC}；以及一个质量为 m^{block} 的滑块，该滑块建模为边长为a^{block}的立方体。曲柄通过位于 A 的转动副与墙壁连接，并以初始角速度 $\omega_{x,\,0}$ 在 $t=0$ 处绕全局 x轴旋转。滑块通过位于 D的移动副约束于地面，可沿 x轴移动。位于 B 的球面副和位于 C 的万向副分别将连杆与曲柄和滑块连接起来。

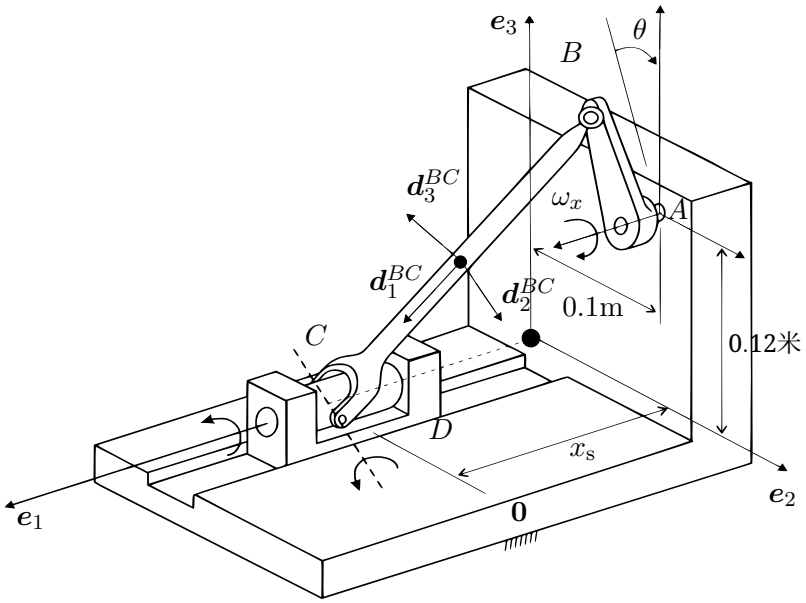


图 15：空间滑块曲柄机构的设置。图改编自 [65]。

系统未施加其他载荷。关键仿真参数汇总于表4。

在仿真运动中，曲柄 AB 持续绕全局 e_1 轴旋转。该旋转带动连杆 BC，使其同时发生平移和旋转。因此，滑块沿 e_1 轴移动。

图 16 对比了使用我们的方法计算得到的滑块位移 x_{s} （“PH-MP”）与参考结果 [65, 66], ，后者取自数据库 [65]。振幅吻合良好，但可以看出存在相位偏移。将时间步缩小两个数量级至 $h=0.0001$ 后，我们的积分器得到的位置曲线并未发生明显变化，这表明 $h=0.01$ 对应的结果已接近收敛解。中的 Rosenbrock 积分器 [65] 和 α 中的李群广义 [66] 方法均表现出较慢的响应。由于所有系统参数都相同，这些差异很可能源于积分格式不同。

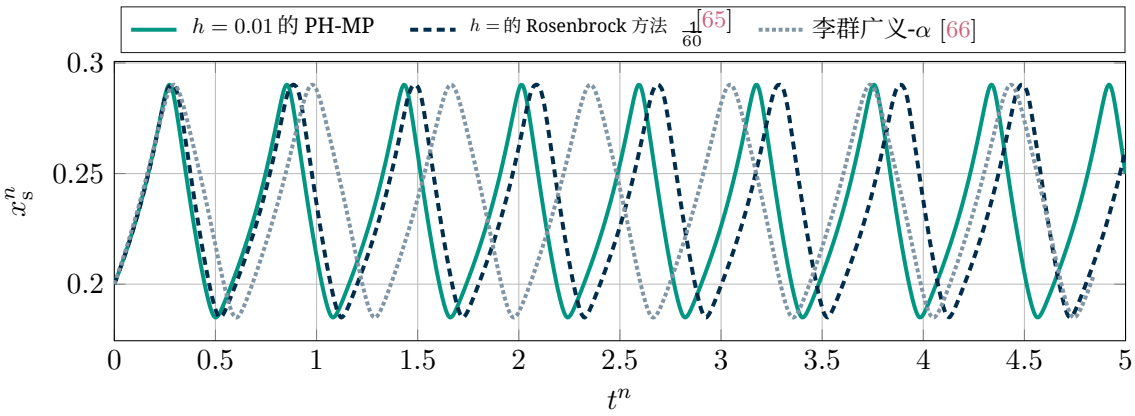
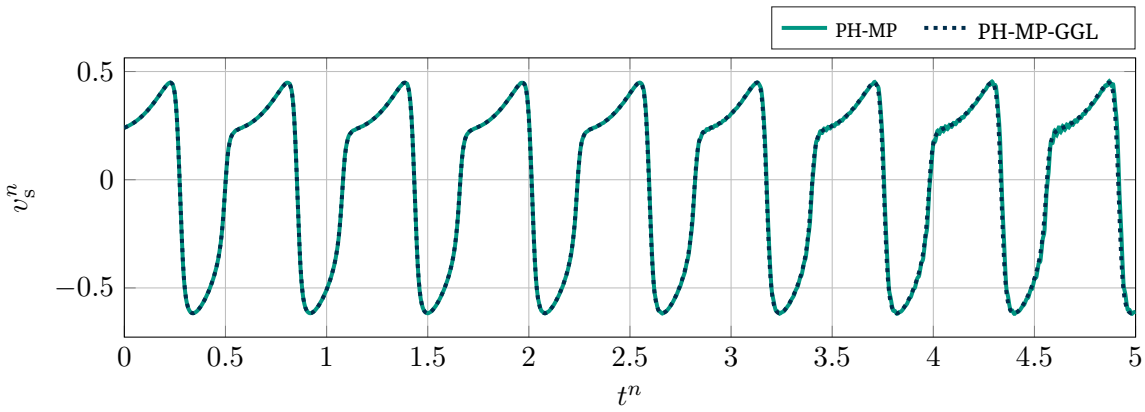


图1 16：模拟滑块位移与参考结果的比较。

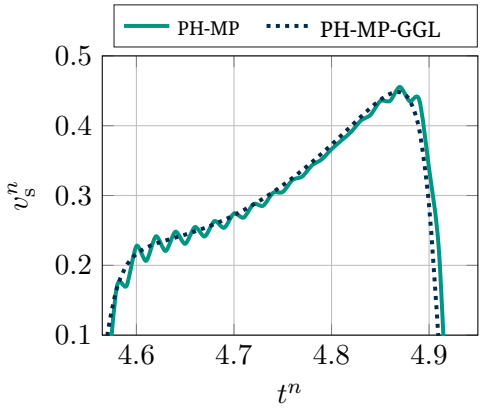
关于能量守恒，[65] 的作者没有报告能量结果，而 [66]则观察到数值阻尼逐渐增大，这与观察到的相位偏移相符。

最后，我们分析滑块的速度 v_s，如图17所示。对于 $h = 0.01$的时间步长，使用 PH-MP 积分器（见绿色曲线）时，速度曲线在定性上仍然正确，但在仿真接近结束时出现了轻微振荡，完整仿真时间内的情况见图17a，放大视图见图17b。将步长减小到 $h = 0.001$后，便不再能观察到这些振荡。对于$h = 0.02$ 的步长，然而，PH-MP 方法引起的振荡变得非常明显，最终导致牛顿-拉夫森方法无法收敛，如图17c所示。

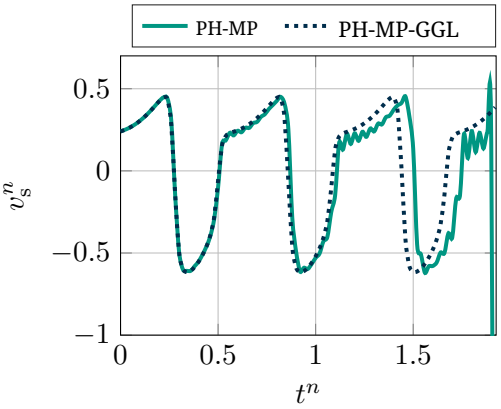
相反，通过施加约束，不仅约束位置，还约束速度层级，PH-MP-GGL 积分器（见蓝色虚线）不会出现任何振荡，见图 17b；即使 PH-MP 积分器失效时也是如此，见图 17c。



(a) $h = 0.01$ 的速度曲线。



（b） $h = 0.01$的放大视图。



（c） $h = 0.02$的速度曲线。

图17： x的速度曲线——不同时间步长下滑块的速度。

总体而言，所提出的 PH-MP 积分器能够很好地再现曲柄滑块机构预期的运动学特性，同时确保整个仿真过程严格满足能量守恒。将该方法扩展为 PH-MP-GGL 积分器，还带来了另一项显著优势，即避免速度曲线出现振荡。至关重要的是，这使得可以采用大得多的步长，从而抵消精确施加速度级约束所带来的额外计算成本。

8 结论与展望

本文系统地将刚体的指向矢量表述融入端口-哈密顿框架，为多体系统建模提供了一种稳健且能量一致的方法。通过将指向矢量表述对大转动的无奇异表示与端口-哈密顿系统的模块化结构相结合，我们成功仿真了复杂的多体动力学，同时保持了基本的守恒性质。此外，我们还在当前端口-哈密顿框架中引入了 GGL 型稳定化。这样，我们不仅获得了额外的稳定性优势，还确保了位置层级和速度层级上的约束满足，同时不影响总能量和角动量的守恒能力。

这些结果直接回应了引言中概述的贡献：**C1**，提出了一种基于拉格朗日表述的机械系统端口-哈密顿表述；**C2**，在指向矢框架下将该表述具体应用于多体系统，从而以常质量矩阵确保了对大转动的无奇异、能量一致描述；**C3**，利用保结构离散化确保数值模拟中能量、角动量和约束的一致性；**C4**，确定了运动副与端口哈密顿互连矩阵之间的等价性，从而衔接了经典多体理论与端口-哈密顿互连方法；以及**C5**，通过采用 GGL 原理进一步满足速度级约束并实现指标约简。总体而言，这些贡献展示了所提出方法在以模块化且符合物理一致性的方式仿真复杂多体系统方面的适用性。

展望未来，可以看到若干颇具前景的研究方向。通过端口哈密顿端口集成控制输入，有望实现能量整形 [67] 以及其他先进的控制策略，从而利用系统固有的无源性。将该框架扩展到柔性多体系统，可以在统一且能量一致的方式下，同时处理刚体和弹性部件。沿这一方向，针对平面几何精确梁已经迈出了第一步，相关工作见 [68]。类似地，将热弹性或机电相互作用等多物理现象纳入其中，可以充分发挥端口哈密顿表示的模块化优势。最后，指向矢量表述虽然稳健且具有启发性，但会为每个刚体引入六个额外约束，可能增加计算成本。另一方面，指向矢量表述具有稀疏矩阵表述和较低的非线性程度，其中包括恒定的质量矩阵。诸如基于四元数的表示等替代方案，或许能够在保持本文所展示的良好守恒性质的同时提高计算效率，但代价是质量矩阵将依赖于状态。

总而言之，本研究证明，融入端口-哈密顿框架的指向矢量表述，为多体系统建模提供了一种模块化且符合物理规律的方法。通过保持能量和角动量、将经典约束与端口-哈密顿互连相结合，并在连续和离散模型中维持无源性，所提出的框架为复杂多体系统的仿真与控制奠定了坚实基础，也为未来拓展至柔性、受控或多物理场应用提供了基础。

致谢

PLK 衷心感谢 Karlsruhe House of Young Scientists (KHYS) 提供的研究差旅资助。我们感谢与 Simon R. Eugster（埃因霍温理工大学）和 Manuel Schaller（开姆尼茨工业大学）进行的富有成效的讨论。

利益冲突声明

作者声明不存在已知的利益冲突。

Code

该仿真　仿真结果可通过 [69] 公开获取。仿真已使用 d

开源动力学工具包*pydykit* [70]。

作者贡献

LL 方法学、软件、验证、形式分析、调研、数据管理、撰写—初稿准备、可视化。**PLK** 概念化、方法学、软件、验证、形式分析、调研、数据管理、撰写—初稿准备、可视化、指导。**PB** 方法学、验证、形式分析、资源、撰写—审阅与编辑、指导、项目管理、经费获取。

参考文献

[1] B. Simeon。《计算柔性多体动力学：微分代数方法》。柏林、海德堡：Springer Berlin Heidelberg，2013。数字对象唯一标识符：10.1007/978-3-642-35158-7。（访问于2025年11月20日）。[2] E. Hairer、G. Wanner和C. Lubich。《几何数值积分》。第2版。Springer Berlin，2006。数字对象唯一标识符：10.1007/3-540-30666-8.[3] V. Duindam、A. Macchelli、S. Stramigioli和H. Bruyninckx。《复杂物理系统的建模与控制：端口哈密顿方法》。Springer Science & Business Media，2009。数字对象唯一标识符：10.1007/978-3-642-03196-0。[4] A. J. van der Schaft、D. Jeltsema等。《端口哈密顿系统理论：介绍性概述》。载于：《Foundations and Trends® in Systems and Control》1.2-3（2014），第173–378页。数字对象唯一标识符：10.1561/2600000002。[5] A. Macchelli、C. Melchiorri和S. Stramigioli。《具有刚性与柔性连杆的机械系统的基于端口的建模与仿真》。载于：《IEEE Transactions on Robotics》25.5（2009），第1016–1029页。数字对象唯一标识符：10.1109/TRO.2009.2026504。[6] M. Lohmayer、G. Capobianco和S. Leyendecker。《用于多体动力学的火用端口哈密顿系统》。载于：《Multibody System Dynamics》（2024）。数字对象唯一标识符：10.1007/s11044-024-10038-w。[7] T. Berger、R. Hochdahl、T. Reis和R. Seifried。《刚性多体系统的端口哈密顿建模》。载于：（2025）。arXiv：2504.17063 [math.DS]。网址：https://arxiv.org/abs/2504.17063。[8] P. Kinon、T. Thoma、P. Betsch和P. Kotyczka。《端口哈密顿框架下的离散非线性弹性动力学》。载于：《PAMM》23.3（2023），e202300144。数字对象唯一标识符：10.1002/pamm.202300144。[9] A. Brugnoli、D. Alazard、V. Pommier-Budinger和D. Matignon。《端口哈密顿柔性多体动力学》。载于：《Multibody System Dynamics》51.3（2021），第343–375页。数字对象唯一标识符：10.1007/s11044-020-09758-6。[10] R. Ortega、A. Van Der Schaft、B. Maschke和G. Escobar。《端口控制哈密顿系统的互连与阻尼配置无源性控制》。载于：《Automatica》38.4（2002），第585–596页。数字对象唯一标识符：10.1016/S0005-1098(01)00278-3。（访问于2025年10月31日）。[11] B. Caasenbrood、A.Pogromsky和H. Nijmeijer。《通过端口哈密顿科塞拉特模型对软体机器人操纵器进行能量整形控制》。载于：《SN Computer Science》3.6（2022），第494页。数字对象唯一标识符：10.1007/s42979-022-01373-w。（访问于2024年12月23日）。[12] A. van der Schaft。《非线性控制中的L2增益与无源性技术》。第3版。Cham：Springer，2017。数字对象唯一标识符：10.1007/978-3-319-49992-5。[13] V. Duindam、A. Macchelli、S. Stramigioli和H. Bruyninckx。《复杂物理系统的建模与控制：端口哈密顿方法》。Springer Berlin Heidelberg，2009。数字对象唯一标识符：10.1007/978-3-642-03196-0。[14] P. Forni、D. Jeltsema和G. A. Lopes。《刚体姿态控制的端口哈密顿表述》。载于：《IFAC-PapersOnLine》48.13（2015），第164–169页。数字对象唯一标识符：10.1016/j.ifacol.2015.10.233。[15] M. Trivedi、R. Banavar和B. Maschke。《具有多重平衡的混合集中—分布参数机械系统建模》。载于：《IFAC Proceedings Volumes》44.1（2011），第7696–7701页。数字对象唯一标识符：10.3182/20110828-6-IT-1002.03070。[16] E. P. Ayala、Y. Wu、K. Rabenorosoa和Y. Le Gorrec。《压电管驱动光纤的基于能量的建模与控制》。载于：《IEEE/ASME Transactions on Mechatronics》28.1（2023），第385–395页。数字对象唯一标识符：10.1109/TMECH.2022.3199566。（访问于2025年9月16日）。[17] A. Warsewa、M. Böhm、O. Sawodny和C. Tarín。《复杂系统结构动力学建模的端口哈密顿方法》。载于：《Applied Mathematical Modelling》89（2021），第1528–1546页。数字对象唯一标识符：10.1016/j.apm.2020.07.038。[18] E. Curiel。《经典力学是拉格朗日的，而非哈密顿的》。载于：《The British Journal for the Philosophy of Science》65.2（2014），第269–321页。数字对象唯一标识符：10.1093/bjps/axs034。[19] S. Leyendecker、J. Marsden和M. Ortiz。《受约束动力系统的变分积分器》。载于：《ZAMM》88.9（2008），第677–708页。数字对象唯一标识符：10.1002/zamm.200700173。

[20] O. A. Bauchau、A. Epple和C. L. Bottasso。《多体动力学仿真中的约束缩放与增广拉格朗日公式》。载于：《Journal of Computational and Nonlinear Dynamics》4.2（2009），第021007页。数字对象唯一标识符：10.1115/1.3079826。[21] J. Gerstmayr和J. Schöberl。《柔性多体系统的三维有限元方法》。载于：《Multibody System Dynamics》15.4（2006），第305–320页。数字对象唯一标识符：10.1007/s11044-006-9009-3。[22] E. Bayo和R. Ledesma。《受约束多体动力学的增广拉格朗日与质量正交投影法》。载于：《Nonlinear Dynamics》9.1-2（1996），第113–130页。数字对象唯一标识符：10.1007/BF01833296。[23] A. Laulusa和O. A. Bauchau。《多体系统约束施加的经典方法综述》。载于：《Journal of Computational and Nonlinear Dynamics》3.1（2008），第011004页。数字对象唯一标识符：10.1115/1.2803257。[24] A. Jain和G. Rodriguez。《对角化拉格朗日机器人动力学》。载于：《IEEE Transactions on Robotics and Automation》11.4（1995），第571–584页。数字对象唯一标识符：10.1109/70.406941。[25] F. Gay-Balmaz和H. Yoshimura。《从拉格朗日力学到非平衡热力学：变分视角》。载于：《Entropy》21.1（2018），第8页。数字对象唯一标识符：10.3390/e21010008。[26] S.-J. Chung和J.-J. E. Slotine。《拉格朗日系统的协作机器人控制与并发同步》。载于：《IEEE Transactions on Robotics》25.3（2009），第686–700页。数字对象唯一标识符：10.1109/TRO.2009.2014125。[27] P. Betsch和P. Steinmann。《刚体动力学的受约束积分》。载于：《Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering》191.3-5（2001），第467–488页。数字对象唯一标识符：10.1016/S0045-7825(01)00283-3。[28] P. Betsch和P. Steinmann。《柔性多体动力学的微分代数方程方法》。载于：《Multibody System Dynamics》8.3（2002），第365–389页。数字对象唯一标识符：10.1023/A:1020934000786。[29] P. Betsch和S. Leyendecker。《受约束机械系统能量一致积分的离散零空间法。第二部分：多体动力学》。载于：《International Journal for Numerical Methods in Engineering》67.4（2006），第499–552页。数字对象唯一标识符：10.1002/nme.1639。[30] M. Möller和C. Glocker。《具有可缩放刚体、四元数和完整约束的刚体动力学》。载于：《Multibody System Dynamics》27.4（2012），第437–454页。数字对象唯一标识符：10.1007/s11044-011-9276-5。[31] J. Harsch和S. R. Eugster。《Petrov–Galerkin Cosserat杆有限元的非单位四元数参数化》。载于：《PAMM》23.4（2023），e202300172。数字对象唯一标识符：10.1002/pamm.202300172。[32] P. L. Kinon和P. Betsch。《包含基于四元数的刚体动力学的奇异与非恒定质量矩阵多体系统守恒积分》。载于：《Multibody System Dynamics》63.1（2024），第303–340页。数字对象唯一标识符：10.1007/s11044-024-10001-9。[33] M. May和P. Betsch。《用单位四元数表示的刚体动力学的基于Galerkin的时间积分方法》。载于：《Multibody System Dynamics》（2025）。数字对象唯一标识符：10.1007/s11044-025-10093-x。[34] S. Krenk和M. B. Nielsen。《通过带有隐式约束的对流基向量实现保守刚体动力学》。载于：《Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering》269（2014），第437–453页。数字对象唯一标识符：10.1016/j.cma.2013.10.028.[35] O. A. Bauchau。《柔性多体动力学》。第176卷，《固体力学及其应用》。多德雷赫特：Springer Netherlands，2011。数字对象唯一标识符：10.1007/978-94-007-0335-3。（访问于2024年9月13日）。[36] P. Betsch和P. Steinmann。《几何精确梁的受约束动力学》。载于：《Computational Mechanics》31.1-2（2003），第49–59页。数字对象唯一标识符：10.1007/s00466-002-0392-1。（访问于2022年1月17日）。[37] O. A. Bauchau和S. Han。《旋转与运动插值》。载于：《Multibody System Dynamics》31.3（2014），第339–370页。数字对象唯一标识符：10.1007/s11044-013-9365-8。（访问于2025年11月3日）。[38] I. Romero。《旋转插值及其在几何精确杆有限元模型中的应用》。载于：《Computational Mechanics》34.2（2004）。数字对象唯一标识符：10.1007/s00466-004-0559-z。（访问于2025年11月3日）。[39] A. Ibrahimbegovic。《有限转动参数的选择》。载于：《Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering》149.1-4（1997），第49–71页。数字对象唯一标识符：10.1016/S0045-7825(97)00059-5。[40] P. Betsch和N. Sänger。《多体动力学无旋转框架中力矩的一致表述》。载于：《Computers & Structures》127（2013），第29–38页。数字对象唯一标识符：10.1016/j.compstruc.2012.10.005。[41] N. Sänger。《柔性多体系统动力学基础》。访问日期：2025年9月10日。博士论文。锡根：锡根大学，2011。网址：https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:467-5611。[42] V. Mehrmann和R. Morandin。《端口哈密顿描述符系统的保结构离散化》。载于：《第58届IEEE决策与控制会议》。法国尼斯，2019年，第6863–6868页。数字对象唯一标识符：10.1109/CDC40024.2019.9030180。[43] C. W. Gear。《微分代数方程指标变换》。载于：《SIAM科学与统计计算杂志》9.1（1988），第39–47页。数字对象唯一标识符：10.1137/0909004。[44] S. E. Mattsson和G. Söderlind。《使用虚导数对微分代数方程进行指标约简》。载于：《SIAM科学计算杂志》14.3（1993），第677–692页。数字对象唯一标识符：10.1137/0914043。[45] P. Kunkel和V. Mehrmann。《通过最小扩展对微分代数方程进行指标约简》。载于：《ZAMM应用数学与力学杂志 / 应用数学与力学杂志》84.9（2004）

，页 579–597。数字对象唯一标识符：10.1002/zamm.200310127。

[46] C. Gear、B. Leimkuhler 和 G. Gupta.《带约束欧拉-拉格朗日方程的自动积分》。载于：Journal of Computational and Applied Mathematics 12–13 (1985)，页 77–90。数字对象唯一标识符： 10.1016/0377-0427(85)90008-1。（访问日期：2022年1月17日）。[47] P. L. Kinon、P. Betsch 和 S. Schneider.《基于受约束机械系统新变分原理的保结构积分器》。载于：非线性动力学 111 (2023)，页 14231–14261。数字对象唯一标识符： 10.1007/s11071-023-08522-7。[48] P. L. Kinon、P. Betsch 和 S. Schneider.《受约束机械系统的 GGL 变分原理》。载于：Multibody System Dynamics 57 (2023)，页 211–236。数字对象唯一标识符： 10.1007/s11044-023-09889-6。[49] P. L. Kinon、R. Morandin 和 P. Schulze.《端口哈密顿微分代数方程的离散梯度法》。2025。arXiv： 2505.18810 [math.NA]。网址： https://arxiv.org/abs/2505.18810。[50] V. Mehrmann 和 B. Unger.《端口哈密顿微分代数系统的控制及其应用》。载于：Acta Numerica 32 (2023)，页 395–515。数字对象唯一标识符： 10.1017/S0962492922000083。（访问日期：2024年11月18日）。[51] C. Beattie、V. Mehrmann、H. Xu 和 H. Zwart.《线性端口哈密顿描述子系统》。载于：Mathematics of Control, Signals, and Systems 30 (2018)，页 1–27。[52] P. Kotyczka 和 L. Lefèvre.《离散时间端口哈密顿系统：基于辛积分的定义》。载于：Systems & Control Letters 133 (2019)，第 104530 页。数字对象唯一标识符： 10.1016/j.sysconle.2019.104530。[53] J. Giesselmann、A. Karsai 和 T. Tscherpel.《端口-哈密顿系统的能量一致彼得罗夫-伽辽金时间离散》。载于：arXiv 预印本 arXiv:2404.12480 (2024)。数字对象唯一标识符： 10.48550/arXiv.2404.12480。arXiv：2404.12480。[54] P. Betsch.《用于受约束机械系统能量一致积分的离散零空间法》。载于：计算力学与工程方法 194.50-52 (2005)，页 5159–5190。数字对象唯一标识符：10.1016/j.cma.2005.01.004。（访问日期：2025年9月30日）。[55] P. Betsch 和 N. Sänger.《多体动力学无旋转框架中力矩的一致表述》。载于：计算机与结构 127 (2013)，页 29–38。数字对象唯一标识符： 10.1016/j.compstruc.2012.10.005。（访问日期：2022年1月17日）。[56] P. L. Kinon、T. Thoma、P. Betsch 和 P. Kotyczka.《端口-哈密顿框架中的离散非线性弹性动力学》。载于：PAMM 23.3 (2023)，e202300144。数字对象唯一标识符： 10.1002/pamm.202300144。[57] P. Kinon 和 P. Betsch.《奇异及非恒定质量矩阵多体系统的守恒积分（包括基于四元数的刚体动力学）》。载于：Multibody System Dynamics 63.1 (2024)，页 303–340。数字对象唯一标识符：10.1007/s11044-024-10001-9。[58] R. M. Murray、Z. Li 和 S. S. Sastry.《机器人操作数学导论》。第 1 版。CRC Press，1994。数字对象唯一标识符： 10.1201/9781315136370。（访问日期：2024年12月23日）。[59] T. Winandy.《有限维机械系统的动力学》。博士论文。斯图加特大学，2019。数字对象唯一标识符：10.18419/opus-10642。[60] H. Egger、O. Habrich 和 V. Shashkov.《哈密顿系统与梯度系统的能量稳定近似》。载于：Computational Methods in Applied Mathematics 21.2 (2021)，页 335–349。数字对象唯一标识符：10.1515/cmam-2020-0025。[61] M. W. Spong、S. Hutchinson 和 M. Vidyasagar.《机器人建模与控制》。第 1 版。John Wiley & Sons，2006。[62] P. Betsch.《弹性科瑟拉特点、刚体和多体系统的能量-动量积分器》。载于：《非线性结构动力学与柔性多体动力学中的保结构积分器》。P. Betsch 编。第 565 卷。CISM Courses and Lectures。Springer-Verlag，2016。第 2 章，页 31–89。数字对象唯一标识符： 10.1007/978-3-319-31879-0_2。[63] P. Kunkel 和 V. Mehrmann.《微分代数方程：分析与数值解法》。EMS 数学教材。苏黎世：欧洲数学学会出版社，2006。[64] E. J. Haug.《机械系统的计算机辅助运动学与动力学，第二卷：现代方法，第二版》。Ed and Carol Haug Charitable Foundation，Silver City, NM，2024。[65] R. Masoudi.《空间刚体曲柄滑块机构》。载于：计算基准问题库（国际机构学与机器科学联合会多体动力学技术委员会）（2025）。访问日期：2025-08-29。网址： https://www.iftomm-multibody.org/benchmark/problem/Spatial_rigid_slider-crank_mechanism/。[66] P. Zhou、H. Ren 和 P. Masarati.《代数约束机械系统的松弛耦合方法》。载于：Multibody System Dynamics 55.1 (2022)，页 57–81。数字对象唯一标识符：10.1007/s11044-022-09825-0。[67] B. Caasenbrood、A. Pogromsky 和 H. Nijmeijer.《通过端口哈密顿科塞拉特模型实现软体机器人操纵器的能量整形控制器》。载于：SN Computer Science 3.6 (2022)，第 494 页。数字对象唯一标识符：10.1007/s42979-022-01373-w。[68] P. L. Kinon、P. Betsch 和 S. R. Eugster.《端口-哈密顿框架中平面几何精确梁的能量-动量一致仿真》。载于：Multibody System Dynamics (2025)，页 1–33。数字对象唯一标识符： 10.1007/s11044-025-10087-9。[69] L. Latussek 和 P. L. Kinon. GitHub 仓库：PHMultiBodySystems。2026。数字对象唯一标识符：10.5281/zenodo.18998378。网址：https://github.com/LisaLatussek/PHMultiBodySystems。[70] P. L. Kinon、J. K. Bauer 和 L. Latussek. GitHub 仓库：pydykit。2026。网址： https://github.com/pydykit/pydykit。

附录

指向矢刚体的角动量平衡

为便于分析，我们考虑式（24）所述的单个刚体，其总角动量为（33）。其时间导数为

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{\varphi} \times m\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{d}_i \times E_i \ddot{\boldsymbol{d}}_i, \tag{64}$$

这是因为向量与自身的叉积为零。考虑刚体的运动方程

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\varphi}}, \tag{65a}$$
$$\dot{\boldsymbol{d}}_i = \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{d}_i}, \tag{65b}$$
$$m\dot{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{\varphi}} = -\nabla V(\boldsymbol{\varphi}) + \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\varphi}}, \tag{65c}$$
$$E_i \dot{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{d}_i} = -\nabla\, \boldsymbol{g}_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{d}_i)^{\top}\, \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{f}_i, \tag{65d}$$
$$\nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{d}_i)\, \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{d}_i} = \boldsymbol{0}, \tag{65e}$$

将式（65c）和式（65d）代入式（64）。此外，我们考虑约束力与指向矢共线的情况，因此 $\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{d}} \times \boldsymbol{d}_i = \boldsymbol{0}$ 并得到

$$\dot{\boldsymbol{L}} = -\boldsymbol{\varphi} \times \nabla V(\boldsymbol{\varphi}) + \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\varphi}} + \boldsymbol{d}_i \times \boldsymbol{f}_i, \tag{66}$$

这表明，在不存在外力和势力时，角动量守恒。对于存在主动引力的情况，例如 $\nabla V(\boldsymbol{\varphi}) = -mg\, \boldsymbol{e}_3$，角动量在 $\boldsymbol{e}_3$ 方向上的分量保持不变，即 $\mathrm{d}\ \mathrm{d}t(\boldsymbol{L}^{\top} \boldsymbol{e}_3) = 0$。

—

在离散时间下，也可以证明离散演化方程（49）满足角动量平衡。若将其应用于刚体形式，该格式为

$$\boldsymbol{\varphi}^{n+1} - \boldsymbol{\varphi}^{n} = h\, \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\varphi}}^{n+\frac{1}{2}}, \tag{67a}$$
$$\boldsymbol{d}_i^{n+1} - \boldsymbol{d}_i^{n} = h\, \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{d}_i}^{n+\frac{1}{2}} \quad \text{for } i = 1, 2, 3, \tag{67b}$$
$$m\left(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\varphi}}^{n+1} - \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\varphi}}^{n}\right) = -h\, \nabla V(\boldsymbol{\varphi}^{n+\frac{1}{2}}) + h\, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\varphi}}^{n+\frac{1}{2}}, \tag{67c}$$
$$E_i\left(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{d}_i}^{n+1} - \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{d}_i}^{n}\right) = -h\, \nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{d}_i^{n+\frac{1}{2}})^{\top} \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{d}}^{n+\frac{1}{2}} + h\, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{d}_i}^{n+\frac{1}{2}} \quad \text{for } i = 1, 2, 3, \tag{67d}$$
$$\nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{d}_i^{n+\frac{1}{2}})\, \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{d}_i}^{n+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{0}. \tag{67e}$$

现在我们证明，采用中点法则的离散时间形式同样满足角动量平衡。将连续角动量平衡式（64）在 t^n 和 t^{n+1}处求值，可得

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}^{n+1}) - \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}^{n}) = \boldsymbol{\varphi}^{n+1} \times m\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\varphi}}^{n+1} - \boldsymbol{\varphi}^{n} \times m\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\varphi}}^{n} + \boldsymbol{d}_i^{n+1} \times E_i \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{d}_i}^{n+1} - \boldsymbol{d}_i^{n} \times E_i \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{d}_i}^{n}. \tag{68}$$

为计算各项，我们使用以下标准恒等式

$$\mathbf{a}^{n+1}\times\mathbf{b}^{n+1}-\mathbf{a}^{n}\times\mathbf{b}^{n}=\tfrac{1}{2}\left[\left(\mathbf{a}^{n+1}-\mathbf{a}^{n}\right)\times\left(\mathbf{b}^{n+1}+\mathbf{b}^{n}\right)+\left(\mathbf{a}^{n+1}+\mathbf{a}^{n}\right)\times\left(\mathbf{b}^{n+1}-\mathbf{b}^{n}\right)\right]. \tag{69}$$

将（69）应用于（68）中的平动项，并代入离散演化定律（67a）和（67c），得到

$$\boldsymbol{\varphi}^{n+1}\times m\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\varphi}}^{n+1}-\boldsymbol{\varphi}^{n}\times m\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\varphi}}^{n}=\tfrac{h}{2}\left[\left(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\varphi}}^{n+1}+\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\varphi}}^{n}\right)\times\left(m\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\varphi}}^{n+1}+m\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\varphi}}^{n}\right)-\left(\boldsymbol{\varphi}^{n+1}+\boldsymbol{\varphi}^{n}\right)\times\nabla V\left(\boldsymbol{\varphi}^{n+\frac{1}{2}}\right)+\left(\boldsymbol{\varphi}^{n+1}+\boldsymbol{\varphi}^{n}\right)\times\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\varphi}}^{n+\frac{1}{2}}\right]. \tag{70}$$

第一项由于速度向量与自身共线而消失。对指向矢项进行类似展开可得

$$\boldsymbol{d}_i^{n+1}\times_{E_i}\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{d}_i}^{n+1}-\boldsymbol{d}_i^{n}\times_{E_i}\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{d}_i}^{n}=h\left[\tfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{d}_i}^{n+1}+\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{d}_i}^{n}\right)\times\left(E_i\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{d}_i}^{n+1}+E_i\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{d}_i}^{n}\right)-\boldsymbol{d}_i^{n+\frac{1}{2}}\times\nabla\boldsymbol{g}(\boldsymbol{d}_i^{n+\frac{1}{2}})^{\top}\boldsymbol{\lambda}^{n+\frac{1}{2}}+\boldsymbol{d}_i^{n+\frac{1}{2}}\times\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{d}_i}^{n+\frac{1}{2}}\right]. \tag{71}$$

同样，第一项由于共线性而消失，第二项则由于约束力与指向矢共线而消失。合并两项贡献可得

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}^{n+1})-\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}^{n})=-h\left[\boldsymbol{\varphi}^{n+\frac{1}{2}}\times\nabla V\left(\boldsymbol{\varphi}^{n+\frac{1}{2}}\right)-\boldsymbol{\varphi}^{n+\frac{1}{2}}\times\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\varphi}}^{n+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{d}_i^{n+\frac{1}{2}}\times\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{d}_i}^{n+\frac{1}{2}}\right]. \tag{72}$$

因此，如果系统不受外部势或外载荷作用，则右端消失，且在中点法则下角动量严格守恒。