arXiv:2603.12966v1 [math.OA] 13 Mar 2026

强自吸收紧群 C*-动力系统的分类研究

Masaki Izumi *Keiya
Ohara 京都大学理学研究科 日
本京都市左京区 606-8502

摘要

强自吸收 C*-代数在核 C*-代数的分类中扮演着重要角色。Szab´o 引入并深入研究了它们的动力学类比。本文针对等变KK-理论提出一个关于等变自举范畴中紧群的强自吸收 C*-动力系统的猜想；若该猜想成立，将导出分类结果。我们证明了该猜想对所有有限 EPPO（每个元素的阶均为素数幂）群都成立。在证明过程中，我们在某个唯一可除性假设下，为配备有限循环群作用的 C*-代数的等变 K-理论建立了一个 K¨unneth 型公式——更确切地说，是为 Meyer 和 Nadareishvili 引入的等变 K-群中的分圆部分建立了该公式。

目录

引言 **2**

1 预备知识 51.1 K理论与 KK理论.5 1.2 环论与同调代数的一些注记.11**2 强自吸收作用 14 3 模型作用 17 4 等变 K¨unneth 公式 20**

5 K理论：强自吸收作用 25
5.1 循环 p 群的作用.27 5.2 EPPO 群的作用.35 5.3 定理 5.25 的证明.38

*部分由日本学术振兴会科研费资助，项目编号 25K00912

引言

强自吸收 C*-代数这一概念由 Toms 和 Winter[43] 提出，旨在公理化一类适用 McDuff 型论证的 C*-代数。若一个含单位的可分 C*-代数 D 满足：由 $x \mapsto x \otimes 1_D$ 给出的第一因子嵌入 $D \to D \otimes D$ 与某个同构近似酉等价，则称其为强自吸收。以下列出了目前已知的所有强自吸收 C*-代数：Jiang-Su 代数 $\mathcal{Z}$、无限型 UHF 代数 $M_{\mathfrak{P}^\infty}$（其中 $\mathfrak{P}$ 是素数集合）、Cuntz 代数 $\mathcal{O}_2$ 和 $\mathcal{O}_\infty$，以及它们的张量积。

众所周知， $\mathcal{O}_2$ 和 $\mathcal{O}_\infty$ 在纯无限核 C*-代数的 Kirchberg–Phillips 分类理论中发挥着核心作用（见 [23, 32]），而对于核 C*-代数的分类， $\mathcal{Z}$-吸收是所需的精确正则性条件（例如，见 [16, 4]）。Toms 和 Winter 的表述提供了一个统一框架，使得这些代数能够在其中得到统一处理。作为核 C*-代数分类理论的推论，只要满足泛系数定理 [36], 上述列表就涵盖了强自吸收 C*-代数的所有同构类（证明见 [43, 44, 9] ）。本文开启了一项研究，旨在将强自吸收 C*-代数的这一分类推广到涉及紧群作用的等变情形。

设 G 为一个局部紧群。在本文中， G-C*-代数是指配备了固定 G作用的 C*-代数。强自吸收 C*-代数概念的一个 G-等变类比，即强自吸收 G-作用或强自吸收 G-C*-代数，由 Szab´o [40], 引入，其性质已在一系列工作 [40, 41, 42]中得到广泛研究。在 Gabe 和 Szab´o [15] 近期关于通过等变 KK-理论分类 Kirchberg 代数上的等距移位吸收作用的杰出工作中，等变的 $\mathcal{O}_\infty$-吸收发挥了关键作用。强自吸收作用在群作用的分类中具有基础性的重要意义。

强自吸收 C*-代数（及其等变类比）这一概念的重要性并不局限于分类理论。事实上，在一系列工作[8, 7, 6], 中，Dadarlat 和 Pennig 发展了 Dixmier–Douady 理论的深远推广。他们证明，强自吸收 C*-代数 D 的稳定化的自同构群的分类空间 $B\mathrm{Aut}(D \otimes \mathbb{K})$ 是一个无限环空间，因而产生一种广义上同调理论。此外，他们阐明了这些由此得到的无限环空间与和 K-理论相关的环谱之间的关系。涉及紧群作用的这一理论的等变版本尚未得到充分发展，但已有一些来自 UHF代数上的无限张量积作用的例子在 [12, 13, 2]中得到研究。这些工作带来的一个重要启示是，这些例子的等变 K_0-群是作用群 G的表示环 $R(G)$ 的局部化。

强自吸收 C*-代数 D 的 K_0-群具有交换环结构，事实上是整数环 $\mathbb{Z}$的一个局部化。这一事实在[43]中被隐含地用于确定 D的结构，并在 [8]中被明确陈述。另一方面，当 G 是一个紧群时，对于任意两个 G-C*-代数 A， B 我们有 $K_0^G(\mathbb{C}) = KK^G(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \cong R(G)$，并且等变 KK-群 $KK^G(A, B)$ 具有自然的 $R(G)$-模结构。

此外，当 D 是一个强自吸收 G-C*-代数时， $K_0^G(D)$ 具有交换环结构，与非等变情形一样，并且嵌入映射 $\nu\colon \mathbb{C} \hookrightarrow D$ 诱导出一个环同态

$$\nu_* : R(G) = K_0^G(\mathbb{C}) \to K_0^G(D).$$

Let

$$S_D = \{x \in R(G);\ \nu_*(x) \text{ is invertible in } K_0^G(D)\}.$$

那么， S_D 是 $R(G)$的一个乘法子集。因此，对于任意 $R(G)$-模 $\mathcal{M}$，其在 S_D 处的局部化 $\mathcal{M}_{S_D}$ 是有意义的。虽然通常在定义局部化 $\mathcal{M}_S$时会排除 $S = R(G)$的情形，但为便于陈述我们的主要猜想，我们通过令 $\mathcal{M}_S = \{0\}$ 纳入 $S = R(G)$的情形。

更一般地，对于任意 G-C*-代数 B，我们将由 ν诱导的映射记为 $\nu_*^B\colon KK_i^G(B,\ \mathbb{C}) \to KK_i^G(B,\ D)$。

定义 0.1. 我们称强自吸收 G-C*-代数 D 满足相对于 G-C*-代数 B 的局部化条件，如果存在 $R(G)$-模同构 $h_i^B\colon KK_i^G(B,\mathbb{C})_{S_D} \to KK_i^G(B,D)$，其中 $i = 0,\ 1$，且 h_i^B与自然局部化映射 $KK_i^G(B,\mathbb{C}) \to KK_i^G(B,\mathbb{C})_{S_D}$ 复合后为 $\nu_*^B\colon KK_i^G(B,\mathbb{C}) \to KK_i^G(B,D)$:

$$\begin{array}{ccc} KK_i^G(B,\ \mathbb{C}) & \longrightarrow & KK_i^G(B,\mathbb{C})_{S_D} \\ & \searrow^{\nu_*^B} & \circlearrowleft \quad \Big\downarrow h_i^B \cong \\ & & KK_i^G(B,\ D) \end{array} .$$

现在陈述我们的主要猜想。我们称一个可分的 G-C*-代数 B 为紧致，若 B 是 G-等变 Kasparov 范畴 KK^G中的紧对象；也就是说，对于任意可数族 $\{C_n\}_n$ 可分的 G-C*-代数， $\bigoplus_n KK^G(B,\ C_n)$ 与 $KK^G(B,\ \bigoplus_n C_n)$ 存在典范同构。

猜想 A。 设 G 是一个紧致群， D 是一个强自吸收的 G-C*-代数，且属于 G-等变 *bootstrap* 类 $\mathcal{B}_G$。那么， D 满足相对于任意可分紧致 G-C*-代数 B的局部化条件。

注 0.2。 下面给出几点说明。

(1) 对于每个饱和乘法子集 $S \subset R(G)$，我们在命题 3.2 中构造了一个属于 $\mathcal{B}_G$ 的模型作用 $(M^S,\ \mu^S)$，使得 $S_{M^S} = S$，并且 $(M^S,\ \mu^S)$ 关于每个紧致 B 都满足局部化条件。此外，我们可以选取 $(M^S,\ \mu^S)$，使得 M^S 是一个 Kirchberg 代数，且 μ^S 是等距移位吸收的（推论 3.3）。

(2) 对于一个闭子群 $H \subset G$， D 关于 $C(G/H)$ 满足局部化条件，当且仅当 $K_0^H(D) \cong R(H)_{S_D}$，并且 $K_1^H(D) \cong \{0\}$，其中 $R(H)$ 通过限制同态 $R(G) \to R(H)$ 被视为一个 $R(G)$-模。

(3) 设 $\{B\}_{B\in\mathcal{B}_G^0}$ 是生成 $\mathcal{B}_G$ 的紧对象族 $\mathcal{B}_G$。那么，当且仅当每个强自吸收 $D \in \mathcal{B}_G$ 都满足关于每个 $B \in \mathcal{B}_G^0$ 的局部化条件时，猜想 A 对 G 成立。事实上，我们在命题 3.5 中证明，后一条件意味着 D 与模型 (M^{S_D}, μ^{S_D}) KK^G- 等价，且该等价将 $[1_D] \in K_0^G(D)$ 映到 $[1_{M^{S_D}}] \in K_0^G(M^{S_D})$。基于同样的

理由，我们还看到，如果猜想 A 对 G 成立，那么乘法集合 S_D 是 D 在保持恒等元的 KK^G-等价意义下的完备不变量。此外，若我们只考虑 Kirchberg 代数上的等距移位吸收作用，那么根据 Gabe–Szab´o 定理，集合 S_D 在共轭意义下是完备不变量。

（4）当 G 是有限群时，Meyer 和 Nadareishvili [27, 推论 3.3] 基于 Arano 和 Kubota 的工作 [1], 证明，循环子群 $H \subset G$ 的对象 $C(G/H)$生成 $\mathcal{B}_G$。因此，猜想 A 的证明归结为对每个循环子群 $H \subset G$证明 $K_0^H(D) \cong R(H)^{S_D}$ 以及 $K_1^H(D) = \{0\}$ 。

目前要在完全一般的情形下验证猜想 A，这一目标过于宏大。本文中，我们仅满足于对一类略大于 p-群类、且仍包含若干非阿贝尔单群的有限群验证该猜想。我们相信，在这样一类群中得到肯定回答，足以体现该猜想的意义。

定义 0.3. 若 G 的每个元素都具有素数幂阶，则称有限群 G 为*EPPO* 群 （每个元素都具有素数幂阶的缩写）。

例 0.4. (1) 所有 p-群都是 EPPO 群。

(2) 当且仅当 $n = p^m$ 对某个素数 p 成立时，二面体群 $D_n = \mathbb{Z}/n \rtimes \mathbb{Z}/2$ 是 EPPO 群。事实上，若 $p = 2$，则 $|D_n| = 2^{m+1}$。若 p 是奇数，则 D_n 中的每个元素的阶为 1、2 或 p 的幂。(3) 对称群 S_3、S_4 以及交错群 A_4、A_5、A_6 都是 EPPO 群。

定理 B (定理 5.22)。 猜想 *A* 对每个 *EPPO* 群都成立。

Toms 和 Winter 对 $K_*(D)$ 在 [43] 中的计算，关键依赖于 Schochet [39] 建立的 K¨unneth 公式。要将他们的计算推广到等变情形，需要 K¨unneth 公式的等变版本。然而，众所周知，K¨unneth 公式无法以朴素方式适用于等变 K 理论，文献中也提出了若干变体（参见 [35, 31, 34]）。遵循 Meyer 和 Nadareishvili [27] 的思路，我们提出另一种适用于本文目的的变体。

令 $\mathbb{Z}/n$ 表示阶为 n 的循环群。对于一个 $\mathbb{Z}/n$-C*-代数 A，其等变K理论 $K_*^{\mathbb{Z}/n}(A)$ 是表示环 $R(\mathbb{Z}/n) \cong \mathbb{Z}[t]/(t^n - 1)$ 上的一个模。令$\Phi_n(t)$ 表示 $\mathbb{Z}[t]/(t^n - 1)$ 中的 n 次分圆多项式。于是

$$F_*^{\mathbb{Z}/n}(A) = \left\{x \in K_*^{\mathbb{Z}/n}(A) \mid \Phi_n \cdot x = 0\right\}$$

它是 $\mathbb{Z}[t]/(\Phi_n(t)) \cong \mathbb{Z}[\zeta_n]$ 上的一个模，其中 ζ_n 是一个本原 n 次单位根。利用这个模，Meyer 和 Nadareishvili 在 [27] 中为有限群作用表述了一个版本的泛系数定理。下述定理可以看作该定理在有限循环群情形下的张量类比。

定理 C (定理 4.3)。 设 A 和 B 是 $\mathbb{Z}/n$-C*-代数。假设对所有子群 $H \subset \mathbb{Z}/n$， $K_*^H(A)$ 都是唯一 n-可除的，并且 B 属于 $\mathbb{Z}/n$-等变 *bootstrap* 类 $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}/n}$。那么存在一个短正合列

$$F_*^{\mathbb{Z}/n}(A) \otimes_{\mathbb{Z}[\zeta_n]} F_*^{\mathbb{Z}/n}(B) \rightarrowtail F_*^{\mathbb{Z}/n}(A \otimes B) \twoheadrightarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}[\zeta_n]}(F_*^{\mathbb{Z}/n}(A), F_{*-1}^{\mathbb{Z}/n}(B)).$$

本文组织如下。第 1 节回顾全文将用到的预备定义和结果。我们首先介绍等变 K-理论、等变 KK-理论以及等变 bootstrap 类 $\mathcal{B}_G$的定义。我们还将回顾交换环论和同调代数中的若干事实，这些内容将在后续章节中用到。

在第2节中，我们介绍强自吸收作用。本节解释其等变 K-理论的乘法结构。

在第3节中，我们构造模型作用，并讨论注 0.2 中提到的应用。

在第4节中，我们证明一个等变 K¨unneth 公式（定理 C）。其证明采用 Schochet [39] 的策略：我们构造一个投射分解的几何实现，并从两个 C*-代数中有一个具有投射同调的情形推出 K¨unneth 公式。

在第5节中，我们计算强自吸收作用的 K-理论的环结构。作为第一步，我们应用定理 C，讨论作用群为素数 p 对应的循环 p-群的情形。这部分主要依赖 Meyer 关于 bootstrap 范畴中 $\mathbb{Z}/p$-作用的工作 [26]。随后，我们将论证推广到一般 p-群的情形。最后，我们从 p-群的情形推导出 EPPO 群的结果（定理 B）。

在第 6 节中，我们尝试利用 Rosenberg 和 Schochet 的 K¨unneth 谱序列 [35]，验证关于李群 $U(1)$ 和$SU(2)$ 的主要猜想。我们证明，只要 $K_1^G(D)$ 是平凡的，该猜想就成立。事实上，我们证明了将该猜想与泛 UHF 代数作张量积后成立；这仅意味着一般而言， $K_1^G(D)$ 是一个挠群。

本文基于第二作者在第一作者指导下完成的硕士论文。

致谢。 作者感谢 Yosuke Kubota、Taro Sogabe 和 Hiroro Kamikawa 所进行的启发性讨论，并感谢 Takumi Nishihara 提请我们注意定理 1.25。本文撰写过程中，作者使用 Gemini 和 ChatGPT 进行英文语言润色和数学信息检索。

1 预备知识

1.1 K-理论与 KK-理论

在本小节中，我们回顾等变 K理论与KK理论的基本定义和性质，这些内容将在本文全文中使用。标准参考文献为 [22] 以及著作 [3]。除非另有说明，在本小节中， G 表示一个第二可数局部紧群。在本小节后半部分，我们将进一步假设 G 是有限的。

一个 G-C*-代数 是指一个C*-代数 A ，它带有点范连续同态α： $G \to \mathrm{Aut}(A)$。 ΣA 表示 A的悬挂，换言之，即 $C_0(\mathbb{R})$（配备 G的平凡作用）与 A的最小张量积。对于两个 G-C*-代数（A, α）与（B, β）， $A \otimes B$ 表示 A 与 B 在作用$\alpha \otimes \beta$下的最小张量积。

对于一个 G-C*-代数 A，一个 G-*Hilbert* A-模 是指一个右Hilbert A-模 E，它带有 G 的范数连续作用，并满足

$$g(e+\lambda e')=g(e)+\lambda g(e'),\ g(e\cdot a)=g(e)\cdot g(a),\ g(\langle e,e'\rangle)=\langle g(e),g(e')\rangle.$$

对于 $e,\ e'\in E,\ \lambda\in\mathbb{C},\ a\in A$。 G-***Hilbert*** 空间 是指一个 G-Hilbert $\mathbb{C}$-模。~

A 和 $\mathcal{M}(A)$ 分别表示 A的单位化和乘子代数。对于 Hilbert 模 E，我们将所有有界可伴随算子构成的 C*-代数记作$\mathcal{L}(E)$。由有限秩算子生成的范数闭理想记作 $\mathcal{K}(E)$。

我们先回顾等变 K-理论的定义。

定义 1.1 （参见 [3, 定义 11.5.1、11.5.3 和 11.9.3]）。 设 G 为紧群， A 为一个 G-C*-代数。

（1）当 A 为含单位元时，设 V，W 为两个有限维 G-Hilbert 空间。对于 G-不变投影 $p\in B(V)\otimes A$ 和 $q\in B(W)\otimes A$，若存在一个 G-不变偏等距 $v\in B(V\oplus W)\otimes A$，使得 $vv^*=p$ 和 $v^*v=q$ 成立，则称它们是等价的 。这类投影的等价类在运算 $[p]+[q]=[\mathrm{diag}(p,\ q)]$下构成一个交换半群。其 Grothendieck 群记作 $K_0^G(A)$。

~(2) 当 A 非幺时，令 $\pi\colon A\to\mathbb{C}$ 为自然投影。 π 诱导一个映射$\pi_*\colon K_0^G(\tilde{A})\to K_0^G(\mathbb{C})$，由 $\pi_*([p])=[\pi(p)]$给出。群 $K_0^G(A)$定义为 π_*的核。

(3) 对于 $i\in\mathbb{Z}_{>0}$，群 $K_i^G(A)$定义为 $K_0^G(\Sigma^iA)$。

存在一个双线性配对

$$K_i^G(A)\times K_j^G(B)\ni(x,y)\mapsto x\hat{\otimes}y\in K_{i+j}^G(A\otimes B)$$

称为杯积。若 $p\in B(V)\otimes A$ 与 $q\in B(W)\otimes B$ 为投影，则 $[p]\in K_0^G(A)$与 $[q]\in K_0^G(B)$的杯积为 $[p]\hat{\otimes}[q]=[p\otimes q]\in K_0^G(A\otimes B)$。

当 G 紧致时， $K_0^G(\mathbb{C})$是表示环 $R(G)$。因此， $K_i^G(A)$通过杯积 $R(G)\times K_i^G(A)\to K_i^G(A)$成为一个左$R(G)$-模。

现在我们转向等变的 KK-理论。

定义 1.2 （参见 [22, 定义 2.2 和 2.3]）. 设 A,B 是两个可分的 G-C*-代数。一个 $Kasparov\ A$-B 双模 是一个三元组 (E,ϕ,F)，其中 E 是一个可数生成的$\mathbb{Z}/2$-分次 G-Hilbert B-模， ϕ 是一个 G-等变分次 $*$-同态 $A\to\mathcal{L}(E)$，而 $F\in\mathcal{L}(E)$ 是一个奇元，使得

$$\phi(a)F-F\phi(a),\ \phi(a)(F^2-1),\ \phi(a)(F-F^*)\ \text{and}\ \phi(a)(g\cdot F-F)$$

对于任意 $a\in A$，$g\in G$，它们都属于 $\mathcal{K}(E)$。如果存在 Kasparov A-B 双模 $\mathcal{E}=\mathcal{E}_0,\mathcal{E}_1,\dots,\mathcal{E}_n=\mathcal{E}'$，使得对于每个 $i=0,\dots,n-1$， $\mathcal{E}_i$和$\mathcal{E}_{i+1}$都是酉等价或同伦等价的，我们就称两个 Kasparov A-B双模 $\mathcal{E},\mathcal{E}'$等价。 $KK^G(A,B)$，也记作 $KK_0^G(A,B)$，是 Kasparov A-B 双模的等价类集合。它在 $[(E,\phi,F)]+[(E',\phi',F')]=[(E\oplus E',\phi\oplus\phi',\mathrm{diag}(F,F'))]$ 的运算下构成一个阿贝尔群。我们也将 $KK^G(A,\Sigma B)$ 记作 $KK_1^G(A,B)$。

直和 $K_0^G(A)\oplus K_1^G(A)$ 和 $KK_0^G(A,B)\oplus KK_1^G(A,B)$ 分别记为 $K_*^G(A)$ 和 $KK_*^G(A,B)$。存在自然同构 $K_*^G(A)\cong KK_*^G(\mathbb{C},A)$。若$p\in B(V)\otimes A$ 是一个投影，则此同构将 $[p]\in K_0^G(A)$ 映射为 $[(E,\phi,0)]\in KK_0^G(\mathbb{C},A)$，其中 $E=p(V\otimes A)$ 且 $\phi\colon\mathbb{C}\to\mathcal{L}(E)$ 是含幺嵌入。

命题 1.3 (参见 [22, 定理 2.11 和 2.14])。 存在一个满足结合律且对函子双线性的配对

$$KK^G(A,B)\times KK^G(B,C)\ni(x,y)\mapsto x\otimes y\in KK^G(A,C),$$

称为 *Kasparov* 积。

G-等变 $*$-同态 $f\colon A\to B$给出 $[(B,\ f,\ 0)]\in KK^G(A,\ B)$。我们也将其记为 f。若 $A=B$且 $f=\mathrm{id}_A$，则对任意 $x\in KK^G(C,\ A)$ $y\in KK^G(A,\ D)$，有 $x\otimes\mathrm{id}_A=x$ 且 $\mathrm{id}_A\otimes y=y$。对于另一个 $*$- 同态 $g\colon B\to C$，Kasparov 积 $f\otimes g\in KK^G(A,\ C)$ 等于 $g\circ f$。给定 $x\in KK^G(A,\ B)$，以下映射

$$\begin{aligned}&KK^G(C,A)\ni y\mapsto y\otimes x\in KK^G(C,B)\quad\text{and}\\&KK^G(B,C)\ni y\mapsto x\otimes y\in KK^G(A,C)\end{aligned}$$

分别记为 x_* 和 x^*。

定义 1.4. 设 $A,\ B$是两个可分 G-C*-代数。若存在 $y\in KK^G(B,\ A)$，使得 $x\otimes y=\mathrm{id}_A$ 且 $y\otimes x=\mathrm{id}_B$，则称元素 $x\in KK^G(A,\ B)$ 为可逆 。此时称 A 和 B KK^G-等价。

例 1.5. (1) 两个 G-C*-代数 A,B 若存在一个满的G-Hilbert B-模，并存在同构 ϕ: $A\to\mathcal{K}(E)$，则称它们 Morita 等价。Kasparov A-B 双模 $(E,\phi,0)$ 给出了 $KK^G(A,B)$ 中的一个可逆元。详情请参见 [22,定理 2.18]。

(2) KK^G与带平凡 G-作用的 $\mathbb{C}$和 $C_0(\mathbb{R}^2)$之间存在等价。等价地，对于任意 $A\in KK^G$，Σ^2A 与 A 是 KK^G-等价的。这称为*Bott* 周期性。例如，证明见 [3, 推论 19.2.3], 。

接下来我们回顾 KK-理论的三角范畴方面。

定义 1.6 (参见 [28, 1.1]). G-等变 *Kasparov* 范畴 KK^G 是一个范畴，其对象为所有可分的 G-C*-代数，态射集合 $A\to B$ 为$KK^G(A,B)$。

Meyer 和 Nest 证明了，在 [28]中， KK^G 是一个三角范畴（等价地）；它是一个加性范畴 $\mathcal{T}$，配有一个自函子 Σ以及一组形如

$$\Sigma Z\to X\to Y\to Z\qquad(X,Y,Z\in\mathcal{T}),\tag{1.1}$$

的交换图，称为正合三角，并满足某些性质。在 KK^G 中的一个正合三角是如上所示、具有交换图的图式

$$\begin{array}{ccccccc}\Sigma Z&\longrightarrow&X&\longrightarrow&Y&\longrightarrow&Z\\\downarrow{\scriptstyle\Sigma z}&&\downarrow{\scriptstyle x}&&\downarrow{\scriptstyle y}&&\downarrow{\scriptstyle z}\\\Sigma B&\longrightarrow&C_f&\longrightarrow&A&\xrightarrow{f}&B,\end{array}$$

其中底行是 G-等变 $*$-同态f的映射锥序列，且垂直态射 $x\in KK^G(X,\ C_f)$ $y\in KK^G(Y,\ A)$ 和 $z\in KK^G(Z,\ B)$ 均为可逆态射。

设 $\mathcal{T}$ 为三角范畴，$\mathbf{Ab}$ 为阿贝尔群范畴，且 $F\colon \mathcal{T} \to \mathbf{Ab}$ 为加性函子。若对任意正合三角形 (1.1)，交换图 $F(X) \to F(Y) \to F(Z)$ 是正合的，则称 F 为同调的。在此情况下，我们有一个长正合列

$$\cdots \to F_{n+1}(X) \to F_{n+1}(Y) \to F_{n+1}(Z) \to F_n(X) \to F_n(Y) \to F_n(Z) \to \cdots,$$

这里 $F_n(X) \coloneqq F(\Sigma^n X)$。一个上同调 函子是对偶定义的。

命题 1.7 (参见 [5, 1.1 定理])。 设 D 是 KK^G中的一个对象。那么对于任意映射锥序列 $\Sigma B \to C_f \to A \to B$，我们有两个正合列

$$KK^G(D, C_f) \to KK^G(D, A) \to KK^G(D, B),$$

$$KK^G(B, D) \to KK^G(A, D) \to KK^G(C_f, D).$$

因此 $KK^G(D, \cdot)\colon KK^G \to$**阿贝尔群范畴** 是同调的，而 $KK^G(\cdot, D)\colon KK^G \to$**阿贝尔群范畴** 是上同调的。

定义 1.8. 设 H 是 G的一个闭子群。

(1) 限制函子 $\mathrm{Res}^H_G\colon KK^G \to KK^H$ 是通过将 G的作用限制到 H而定义的函子。

(2) 诱导函子 $\mathrm{Ind}^G_H\colon KK^H \to KK^G$ 定义如下。对于任意对象$A \in KK^H$，我们定义 KK^G中的对象

$$\mathrm{Ind}^G_H A \coloneqq \left\{ \widetilde{a} \in C_b(G, A) \,\middle|\, \begin{array}{l} h(\widetilde{a}(g)) = \widetilde{a}(gh^{-1}) \text{ for all } g \in G,\ h \in H \\ \text{and } (gH \to \|\widetilde{a}(g)\|) \in C_0(G/H) \end{array} \right\}$$

其中 G-作用由左平移给出。对于任意态射 $f = [(E, \phi, F)] \in KK^H(A, B)$，我们定义态射

$$\mathrm{Ind}^G_H f = [(\mathrm{Ind}^G_H E, \widetilde{\phi}, \widetilde{F})] \in KK^G(\mathrm{Ind}^G_H A, \mathrm{Ind}^G_H B)$$

by

$$\mathrm{Ind}^G_H E \coloneqq \left\{ \widetilde{e} \in C_b(G, E) \,\middle|\, \begin{array}{l} h(\widetilde{e}(g)) = \widetilde{e}(gh^{-1}) \text{ for all } g \in G,\ h \in H \\ \text{and } (gH \to \|\widetilde{e}(g)\|) \in C_0(G/H) \end{array} \right\},$$

$$\Big(\widetilde{\phi}(a)e\Big)(g) \coloneqq \phi(a(g))e(g) \quad (a \in \mathrm{Ind}^G_H A,\ e \in \mathrm{Ind}^G_H E,\ g \in G),$$

$$(\widetilde{F}e)(g) \coloneqq Fe(g) \quad (e \in \mathrm{Ind}^G_H E,\ g \in G).$$

设 A, B 是 KK^G 中的对象，且 H 是 G 的闭子群。我们通常将 $KK^H_*(\mathrm{Res}^H_G A, \mathrm{Res}^H_G B)$ 和 $K^H_*(\mathrm{Res}^H_G A)$ 分别简写为 $KK^H_*(A, B)$ 和 $K^H_*(A)$。如果 K 是 H 的子群，那么限制函子和诱导函子满足

$$\mathrm{Res}^K_H \circ \mathrm{Res}^H_G = \mathrm{Res}^K_G,$$

$$\mathrm{Ind}^G_H \circ \mathrm{Ind}^H_K = \mathrm{Ind}^G_K.$$

引理1.9。设 H 是 G 的闭子群，且 A 是 KK^G 中的一个对象。那么存在一个 G-等变的 $*$-同构

$$\mathrm{Ind}_H^G \mathrm{Res}_G^H A \cong C_0(G/H) \otimes A.$$

证明。该映射

$$\mathrm{Ind}_H^G \mathrm{Res}_G^H A \ni a \mapsto (gH \mapsto g(a(g))) \in C_0(G/H) \otimes A$$

给出所需的 $*$-同构。 ■

命题 1.10. 设 H 为 G的闭子群， A 为 KK^G 中的对象，且 B 为 KK^H中的对象。

(1)（参见 *[28, (19)]*）若 H 是余紧的，则存在自然同构

$$KK^G(A, \mathrm{Ind}_H^G B) \cong KK^H(\mathrm{Res}_G^H A, B).$$

(2)（参见 *[28, (20)]*）若 H 是开的，则存在自然同构

$$KK^G(\mathrm{Ind}_H^G B, A) \cong KK^H(B, \mathrm{Res}_G^H A).$$

证明。 该证明可见于 [28, 第230页-231], ，但我们简要描述给出(2)之同构的同态。定义映射 ι_B: $B \to \mathrm{Res}_G^H \mathrm{ind}_H^G B$ 如下

$$\iota_B(b)(g) = \begin{cases} g^{-1}(b) & \text{if } g \in H, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \qquad (b \in B,\ g \in G)$$

于是我们得到复合映射

$$KK^G(\mathrm{Ind}_H^G B, A) \overset{\mathrm{Res}_G^H}{\to} KK^H(\mathrm{Res}_G^H \mathrm{Ind}_H^G B, \mathrm{Res}_G^H A) \overset{\iota_B^*}{\to} KK^H(B, \mathrm{Res}_G^H A). \tag{1.2}$$

由引理1.9，$\mathrm{Ind}_H^G\mathrm{Res}_G^H A$同构于 $C_0(G/H) \otimes A$。因此，对角嵌入 $C_0(G/H) \hookrightarrow \mathcal{K}(\ell_2(G/H))$与 Morita 等价 $\mathcal{K}(\ell_2(G/H)) \sim \mathbb{C}$ 的复合给出一个元素 $\pi_A \in KK^G(\mathrm{Ind}_H^G \mathrm{Res}_G^H A, A)$。现在，映射

$$KK^H(B, \mathrm{Res}_G^H A) \overset{\mathrm{Ind}_H^G}{\to} KK^H(\mathrm{Ind}_H^G B, \mathrm{Ind}_H^G \mathrm{Res}_G^H A) \overset{(\pi_A)_*}{\to} KK^G(\mathrm{ind}_H^G B, A)$$

是(1.2)的逆元。 ■

注1.11. 命题 1.10 (1)指出，函子Res_G^H 是Ind_H^G的左伴随。因此，存在一个元素 $\varepsilon_B \in KK^G(\mathrm{Res}_G^H \mathrm{Ind}_H^G B, B)$，使得命题 1.10 (1)的同构等于

$$KK^G(A, \mathrm{Ind}_H^G B) \overset{\mathrm{Res}_G^H}{\to} KK^H(\mathrm{Res}_G^H A, \mathrm{Res}_G^H \mathrm{Ind}_H^G B) \overset{(\varepsilon_B)_*}{\to} KK^H(\mathrm{Res}_G^H A, B)$$

（参见 [24, 定理2.2.5]）。

设 $\mathcal{T}$ 是一个具有可数直和的三角范畴， $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{T}$中的一个对象类。由 $\mathcal{G}$ 生成的*($\aleph_0$-)*局部化子范畴 是 $\mathcal{T}$的最小三角子范畴，它包含 $\mathcal{G}$ 且对可数直和封闭。若 $\mathcal{T} = KK^G$，则它是包含 $\mathcal{G}$ 并具有以下性质的最小满子范畴 $\mathcal{B}$：

（1）对于任意 $A, B \in \mathcal{B}$ 以及任意 G-等变 $*$-同态 $f\colon A \to B$，其映射锥 C_f 属于 $\mathcal{B}$。

(2) 对于任意 $A \in \mathcal{B}$，其悬挂 ΣA 属于 $\mathcal{B}$。

(3) 对于任意可数个 $A_n \in \mathcal{B}$ $(n \in \mathbb{N})$，它们的直和 $\oplus_n A_n$ 属于 $\mathcal{B}$。

(4) 如果 $A \in \mathcal{B}$ 和 $B \in KK^G$ KK^G等价，那么 $B \in \mathcal{B}$。

定义 1.12（参见 [14, 定义 3.9]）。设 G 为紧群。G-等变 *bootstrap* 类 $\mathcal{B}_G$ 是由以下对象生成的 KK^G 的局部化子范畴：形式为 $\mathrm{Ind}_H^G M_n$ 的G-C*-代数，其中 H 是 G 的闭子群，且 M_n 是带有某种 H作用的矩阵代数。

bootstrap 类中两个对象之间的态射是否可逆，可以很容易地检验。

命题 *1.13.* 设 G 是紧群，A、B 是 G-等变 *bootstrap* 类 $\mathcal{B}_G$ 中的对象，且 $\mathcal{B}_G^0$ 是生成 $\mathcal{B}_G$ 的 $\mathcal{B}_G$ 子类。那么，元素 $f \in KK^G(A, B)$ 可逆，当且仅当对 $\mathcal{B}_G^0$ 中的每个对象 C，$f_*\colon KK_*^G(C, A) \to KK_*^G(C, B)$ 可逆。特别地，当 G 是有限的，f 可逆，当且仅当对每个循环子群 $H \subset G$，$f_*\colon K_*^H(A) \to K_*^H(B)$ 可逆。

证明。假设对于每个对象 $C \in \mathcal{B}_G^0$，$f_*\colon KK_*^H(C, A) \to KK_*^H(C, B)$ 都是可逆的。令 $\mathcal{C}$ 为由 KK^G 中满足 $f_*\colon KK_*^G(C, A) \to KK_*^G(C, B)$ 可逆的对象 C 构成的满子范畴。显然，$\mathcal{C}$ 包含 $\mathcal{B}_G^0$。容易看出，$\mathcal{C}$ 是 KK^G的一个局部化子范畴。因此，$\mathcal{C}$ 包含 $\mathcal{B}_G$。由于 $A, B \in \mathcal{B}_G$，我们有两个同构

$$KK^G(B, A) \xrightarrow{\cong} KK^G(B, B), \quad x \mapsto x \otimes f, \tag{1.3}$$

$$KK^G(A, A) \xrightarrow{\cong} KK^G(A, B), \quad y \mapsto y \otimes f. \tag{1.4}$$

第一个同构意味着存在一个元素 $x \in KK^G(B, A)$，使得 $x \otimes f = \mathrm{id}_B$。对于这个 x，

$$f_* \circ x_* = (x \otimes f)_* = (\mathrm{id}_B)_*\colon KK^G(A, B) \to KK^G(A, B).$$

映射 $f_*\colon KK^G(A, A) \to KK^G(A, B)$ 根据 (1.4) 同构。因此，$x_*\colon KK^G(A, B) \to KK^G(A, A)$ 是 f_* 的逆元，并且

$$f \otimes x = x_* \circ f_*(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_A .$$

因此，$f \in KK^G(A, B)$ 可逆，其逆元为 $x \in KK^G(B, A)$。反过来，若 f 可逆，则显然对每个对象 $C \in \mathcal{B}_G^0$，f 都给出一个同构 $KK_*^H(C, A) \cong KK_*^H(C, B)$。

当 G 有限时，根据 [27, 推论 3.3]，$\mathcal{B}_G$ 由对象 $C(G/H)$ 生成，其中对象对应于循环子群 $H \subset G$。由于根据命题 1.10（2），$KK_*^G(C(G/H)\ A) \cong K_*^H(A)$，上述论证表明，若 f 对每个循环子群 H 都诱导出一个同构 $K_*^H(A) \cong K_*^H(B)$，则 f 可逆。■

此后，假设 G是有限的。最后，我们描述$(K_*^H(A))_{H \subset G}$的麦基模结构。

定义 1.14。设 G是一个有限群，A 是 KK^G中的一个对象。

(1) 对任意子群 $K \subset H \subset G$，限制映射res_H^K 是限制同态 $\mathrm{Res}_H^K\colon K_*^H(A) \to K_*^K(A)$。

(2) 对任意元素 $g \in G$ 和任意子群 $H \subset G$，共轭映射$\mathrm{con}_{g,\ H}$ 是同态 $K_*^H(A) \to K_*^{gHg^{-1}}(A)$，其定义是将 H-作用视为经由同构 $H \to gHg^{-1},\quad h \mapsto ghg^{-1}$ 的 gHg^{-1}-作用。

(3) 对任意子群 $K \subset H \subset G$，归纳映射 $I_K^H\colon K_*^K(A) \to K_*^H(A)$ 定义如下。令 $\iota\colon \mathbb{C} \to C(H/K) = \mathrm{Ind}_K^H \mathbb{C}$ 为含幺嵌入，令 $\pi_A\colon \mathrm{Ind}_K^H \mathrm{Res}_H^K(\mathrm{Res}_G^H A) \to \mathrm{Res}_H^G A$ 为按照命题 1.10（2）的证明中相同方式定义的映射。则 I_K^H 是以下映射的复合

$$\begin{aligned} &K_*^K(A) \overset{\mathrm{Ind}_K^H}{\to} KK_*^H(\mathrm{Ind}_K^H \mathbb{C}, \mathrm{Ind}_K^H \mathrm{Res}_H^K(\mathrm{Res}_G^H A)) \\ &\overset{(\pi_A)_*}{\to} KK_*^H(\mathrm{Ind}_K^H \mathbb{C}, A) \overset{\iota^*}{\to} K_*^H(A). \end{aligned}$$

命题 1.15（参见[11, 命题 4.5]）。对于 $g \in G$ 和 $H \subset G$，我们分别将子群 gHg^{-1} 和 $g^{-1}Hg$ 记作 ${}^gH$ 和 H^g。那么，定义 *1.14* 中定义的映射满足以下关系：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{res}_H^K \circ \mathrm{res}_G^H = \mathrm{res}_G^K && (K \subset H \subset G),\\
&I_K^G \circ I_K^H = I_K^G && (K \subset H \subset G),\\
&\mathrm{con}_{g',{}^gH} \circ \mathrm{con}_{g,H} = \mathrm{con}_{g'g,H} && (g', g \in G,\ H \subset G),\\
&\mathrm{con}_{g,H} \circ I_K^H = I_{{}^gK}^{{}^gH} \circ \mathrm{con}_{g,K} && (g \in G,\ K \subset H \subset G),\\
&\mathrm{con}_{g,K} \circ \mathrm{res}_H^K = \mathrm{res}_{{}^gH}^{{}^gK} \circ \mathrm{con}_{g,H} && (g \in G,\ K \subset H \subset G),\\
&I_H^H = \mathrm{res}_H^H = \mathrm{con}_{h,H} = \mathrm{id}_{K_*^H(A)} && (h \in H \subset G),\\
&\text{限制}_H^L \circ I_K^H = \sum_{x \in L\backslash H/K} I_{L\cap {}^xK}^L \circ \text{共轭}_{x,\ L^x\cap K} \circ \text{限制}_K^{L^x\cap K} && (L, K \subset H \subset G).
\end{aligned}$$

此外，对于所有的 $A \in KK^G$ 和 $K \subset H \subset G$，以下公式成立：

$$\begin{aligned}
&x \cdot I_K^H(y) = I_K^H(\mathrm{res}_H^K(x) \cdot y) && (x \in R(H),\ y \in K_*^K(A)),\\
&I_K^H(x) \cdot y = I_K^H(x \cdot \mathrm{res}_H^K(y)) && (x \in R(K),\ y \in K_*^H(A)).
\end{aligned}$$

1.2 关于环论和同调代数的一些说明

本小节旨在汇集环论和同调代数中的一些初等事实。它们将用于等变 K-理论的分析以及等变 K¨unneth 公式的证明。本小节的大部分内容都是标准材料，可见于 [37]和 [29]。

下文中，交换环简称为环。

设 R 为一个环。对于乘法子集 $S \subset R$ 以及左 R-模 M，M_S表示 M 关于 S 的局部化。更精确地说，M_S 是 $M \times S$ 关于等价关系 $\sim$的商集，其中若对某个 $s \in S$有 $s(ym - xn) = 0$，则 $(m, x) \sim (n, y)$。M_S 中由 $(m, x) \in M \times S$ 所表示的元素记为 m/x。对于素理想$\mathfrak{p} \lhd R$，我们将 $M_{R\backslash\mathfrak{p}}$ 记为 $M_{\mathfrak{p}}$。当 R 为整环时，分式域(R)表示分式域 $R_{R\backslash\{0\}}$。关于局部化的细节，参见 [37, 4.7]。

称乘法子集 $S \subset R$ 为饱和的，若对于满足 $xy \in S$的 $x, y \in R$，有 $x, y \in S$。乘法子集 S 的饱和化是集合

$$\overline{S} \coloneqq \{x \in R \mid xy \in S \text{ for some } y \in R\}.$$

容易看出， S 是饱和的，并且两个局部化 R_S、 R_S 是典范同构的。 –

注 1.16。 局部化 R_S 具有如下意义下的泛性质。令i: $R \to R_S$为自然映射 $i(r) = r/1$。如果 f: $R \to R'$是一个环同态，使得对所有 $s \in S$， $f(s) \in R'$ 均可逆，则存在唯一同态 $\sim$ $\sim$ $\sim f$: $R_S \to R'$，满足 $f \circ i = f$。更确切地说， f定义为

$$\widetilde{f}\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) \cdot f(y)^{-1} \quad (x \in R,\ y \in S).$$

$\widetilde{}$因此，当且仅当对于任意 $a \in A$，存在 $x \in R$ 和 $y \in S$ 使得 $\sim a = f(x) \cdot f(y)^{-1}$时，$f$ 是满射。上述公式还表明，如果 f是单射，则 f也是单射。

定义 1.17。 若环 R 的每个理想都是投射 R-模，则称 R 为遗传环。遗传整环称为戴德金整环。

如果 R 是主理想整环（PID），那么 R 的每个理想都是自由 R-模。因此，PID 都是戴德金整环。

注 1.18。 如果 R 是遗传环，那么环 R上投射模的每个子模也是投射的（例如参见 [37, 定理 4.19], ）。特别地，遗传环上的每个模都有一个长度至多为一的投射分解。

注 1.19。 设 R 为戴德金整环。那么，对于任意乘法子集 $S \subset R$， R_S 也是戴德金整环；对于任意素理想 $\mathfrak{p} \triangleleft R$， $R_\mathfrak{p}$ 是主理想整环。证明例如见 [29, (11.4) 命题和 (11.5) 命题], 。

下面的陈述将在定理 5.11 的证明中用到。

引理 1.20。 设 R 是一个戴德金整环， M 是一个左 R-模。若 M 满足 $\mathrm{Tor}_1^R(M, M) = 0$, 则 M是平坦的。

证明。 M是平坦的，当且仅当对于每个极大理想 $\mathfrak{p} \triangleleft R$， $M_\mathfrak{p}$ 都是一个平坦的 $R_\mathfrak{p}$-模（例如参见推论 7.18], ）。因此，只需证明 $M_\mathfrak{p}$的平坦性。注意到

$$0 = \left(\mathrm{Tor}_1^R(M, M)\right)_\mathfrak{p} \cong \mathrm{Tor}_1^{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}, M_\mathfrak{p}).$$

任取一个非零元素 $x \in M_\mathfrak{p}$。我们将证明 x 不是挠元。对短正合列应用挠长正合序列,

$$R_\mathfrak{p} x \rightarrowtail M_\mathfrak{p} \twoheadrightarrow M_\mathfrak{p}/R_\mathfrak{p} x,$$

我们得到一个正合列

$$\mathrm{Tor}_2^{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}/R_\mathfrak{p} x, M_\mathfrak{p}) \to \mathrm{Tor}_1^{R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p} x, M_\mathfrak{p}) \to \mathrm{Tor}_1^{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}, M_\mathfrak{p}).$$

由于根据注 1.19， $R_\mathfrak{p}$ 是主理想整环，上述序列中最左边的模为零。我们已经知道最右边的模也为零。因此，中间的 $\mathrm{Tor}_1^{R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p} x,\ M_\mathfrak{p})$也

为零。重复类似的论证，我们得到 $\mathrm{Tor}_1^{R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}x,\ R_\mathfrak{p}x) = 0$。现在注意到，$R_\mathfrak{p}x$ 是主理想整环上的一个模，且由一个元素 x生成。因此，存在$a \in R_\mathfrak{p}$，使得 $R_\mathfrak{p}x$ 同构于 $R_\mathfrak{p}/(a)$。假设 $a \neq 0$，并考虑挠正合序列的以下部分

$$\mathrm{Tor}_1^{R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}/(a), R_\mathfrak{p}/(a)) \to R_\mathfrak{p} \otimes_{R_\mathfrak{p}} R_\mathfrak{p}/(a) \overset{m_a \otimes \mathrm{id}}{\to} R_\mathfrak{p} \otimes_{R_\mathfrak{p}} R_\mathfrak{p}/(a),$$

其中 $m_a\colon\ R_\mathfrak{p} \to R_\mathfrak{p}$ 表示乘以 a 的乘法。映射 $m_a \otimes \mathrm{id}$ 是单射，因为 $\mathrm{Tor}_1^{R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}/(a)\ R_\mathfrak{p}/(a)) = 0$。该映射等同于在 $R_\mathfrak{p}/(a)$ 上乘以 a 的乘法，并且它是单射。然而，这仅当 $R_\mathfrak{p}/(a) = 0$ 时才会发生，而这与 $R_\mathfrak{p}x \neq 0$ 矛盾。因此，我们有 $a = 0$ 和 $R_\mathfrak{p}x \cong R_\mathfrak{p}$，也就是说，$x$ 不是 $M_\mathfrak{p}$ 的挠元。故 $M_\mathfrak{p}$ 是无挠的。由于主理想整环上的无挠模是平坦的（见 [37, 推论 3.51]），$M_\mathfrak{p}$ 是平坦的 $R_\mathfrak{p}$-模。■

为了陈述第四节所需的定理，我们现在转向代数整数的定义。

定义 1.21. 设 K 为一个数域，换言之，$\mathbb{Q}$的一个扩域，使得 K 作为 $\mathbb{Q}$ 上的向量空间是有限维的。元素 $a \in K$ 称为 K 的一个代数整数，如果存在首一的 $f \in \mathbb{Z}[x]$，使得 $f(a) = 0$ 于 K 中。K 的代数整数集合构成 K 的一个子环，称为 K的整数环。

注记1.22。若 K 是分圆域 $\mathbb{Q}[\zeta_n]$，其中 ζ_n 是一个本原 n 次单位根，那么 $\mathbb{Q}[\zeta_n]$ 的整数环是 $\mathbb{Z}[\zeta_n]$。已知数域的整数环总是戴德金整环。例如参见 [29, (3.1) 定理]，。特别地，$\mathbb{Z}[\zeta_n]$ 是戴德金环。

注记1.23。设 K 是一个数域，$\mathcal{O}_K$ 是 K 的整数环。那么，$\mathcal{O}_K$ 的分式域等于 K。事实上，每个元素 $a \in K$ 都有一个首一 $f \in \mathbb{Q}[x]$，满足 $f(a) = 0$，因为 $\mathbb{Q}$ 的所有有限扩张都是代数扩张。设

$$f(x) = x^n + \frac{p_1}{q_1}x^{n-1} + \cdots + \frac{p_n}{q_n}$$

对于某些 p_1，.....，$p_n \in \mathbb{Z}$，q_1，.....，$q_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$。令 $d = q_1 \cdots q_n$。那么我们很容易验证，da 是该首一多项式的一个根

$$g(x) \coloneqq x^n + \frac{p_1}{q_1}dx^{n-1} + \cdots + \frac{p_n}{q_n}d^n \in \mathbb{Z}[x].$$

因此，我们可以写作 $a = da/d$，其中 da。

定义 1.24。设 R 是一个整环。R 的上环 是分式域 $\mathrm{Frac}(R)$ 的一个子环，且包含 R 作为子环。

下面的定理在第4节的讨论中起着关键作用。设 R 是一个戴德金整环。一般而言，$\mathrm{Frac}(R)$ 的所有非零有限生成 R- 子模按由单个元素生成的子模取商后构成一个群，称为类群。

定理 1.25 （参见 [10, 定理 2]）。设 R 是一个戴德金整环。当且仅当对于 R 的任意上环 $\mathcal{A}$，都存在 R 的一个乘法子集 S，使得 $\mathcal{A}$ 等于 R_S，此时 R 的类群是挠群。

众所周知，若 K 是一个数域，则其整数环 $\mathcal{O}_K$的类群是有限的（参见 [29, (6.3) 定理]）。因此，上述定理意味着，$\mathcal{O}_K$ 的所有上环都是 $\mathcal{O}_K$的局部化。

2 强自吸收作用

本节回顾强自吸收 G-C*-代数的概念，并为其 K-理论赋予环结构。

定义 2.1 (参见 [40, 定义 1.15])。设 G是一个第二可数局部紧群，(A,α)，(B,β)是两个 G-C*-代数，且 $\phi,\psi\colon A\to B$是两个 G-等变 $*$-同态。若存在一列酉元 $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ 属于 $\mathcal{M}(B)$，满足下列条件，则称 ϕ 和 ψ 近似 G-酉等价

$$\lim_{n\to\infty}\|\mathrm{Ad}(u_n)\circ\phi(a)-\psi(a)\|=0\quad(a\in A),\tag{2.1}$$

$$\lim_{n\to\infty}(\beta_g(u_n)-u_n)=0\quad(\text{in the strict topology},\ g\in G),\tag{2.2}$$

其中，(2.2) 中的收敛在 G 的紧子集上一致。

命题 2.2. 设 G, A, B, ϕ, ψ 如上所述。若 G 是紧致的且 B 是含幺的，则由此诱导的同态

$$\phi_*,\psi_*\colon K_*^G(A)\to K_*^G(B)$$

由 ϕ 和 ψ 诱导的映射相同。

证明。我们首先证明，在此情形下，给出 ϕ 和 ψ 等价关系的酉元序列可以取为 G-不变的。为此，设 β 是 G 在 B 上的作用，μ 是 G 上满足 $\mu(G)=1$ 的 Haar测度。取 $0<\varepsilon<1/4$ 以及 $\mathcal{M}(B)=B$ 中一列酉元 $(u_n)_n$，使其满足 (2.1) 和 (2.2)。由于 B 是含幺的，(2.2) 中的严格收敛就是范数收敛。因此，当 n 足够大时，对所有 $g\in G$，都有$\|\beta_g(u_n)-u_n\|<\varepsilon$。于是

$$\|u_n-\int_G\beta_g(u_n)d\mu(g)\|\le\int_G\|u_n-\beta_g(u_n)\|d\mu(g)<\varepsilon,$$

其中积分 $\int_G\beta_g(u_n)d\mu(g)$ 在范数拓扑下收敛。令 $v_n:=\int_G\beta_g(u_n)d\mu(g)$。由上述不等式，$v_n$ 是可逆的且 G-不变。此外，我们有

$$\begin{aligned}&\|v_n\|\le\int_G\|\beta_g(u_n)\|d\mu(g)=1,\\&\|1-v_n^*v_n\|\le\|u_n^*-v_n^*\|\|u_n\|+\|v_n^*\|\|u_n-v_n\|<2\varepsilon,\quad\text{and}\\&\|1-(v_n^*v_n)^{-\frac12}\|=\sup\left\{\left|1-(1-x)^{-\frac12}\right|\middle|x\in\sigma(1-v_n^*v_n)\right\}<2\varepsilon.\end{aligned}$$

最后一个不等式由 $(1-x)^{-1/2}\le 1+x$ 对 $0\le x\le 1/2$ 成立而得出。因此，定义为 $u_n':=v_n(v_n^*v_n)^{-1/2}$ 的酉元序列是 G-不变的，并且满足 (2.1)。

若 A 是含幺的，则取任意有限维的 G-希尔伯特空间 V 以及任意 G-不变投影 $p\in B(V)\otimes A$。当 n 足够大时，有 $\|\mathrm{Ad}(u_n')\circ\phi(p)-\psi(p)\|<1/4$。现在存在一个 G- 不变酉算子，使 $\mathrm{Ad}(u_n')\circ\phi(p)$ 与$\psi(p)$ 酉等价。因此，我们在 $K_0^G(A)$ 中得到 $[\phi(p)]=[\mathrm{Ad}(u_n')\circ\phi(p)]=[\psi(p)]$。这意味着，当 A 是含幺的时，ϕ和 ψ 从 $K_0^G(A)$ 到 $K_0^G(B)$ 诱导相同的映射。非含幺情形可通过考虑单位化 $\tilde{A}$，由含幺情形推出。最后，由于 $K_1^G(A)$ 等于 $K_0^G(\Sigma A)$，ϕ 和 ψ 也从 $K_1^G(A)$ 到 $K_1^G(B)$ 诱导相同的映射。■

定义 2.3 (参见 [40, 定义 3.1])。设 G是第二可数局部紧群，$D \neq \mathbb{C}$ 是可分、含幺的 G-C*-代数，且 $\nu\colon \mathbb{C} \to D$ 是含幺嵌入。D 称为强自吸收 G-C*-代数，如果 $*$-同态 $\mathrm{id} \otimes \nu\colon D \to D \otimes D$ 近似酉等价于一个同构。

命题 2.4 （参见 [40, 命题 3.4 (ii)]）。在上述设定中，这两个映射 $\mathrm{id} \otimes \nu$, $\nu \otimes \mathrm{id}\colon D \to D \otimes D$ 是近似 G-酉等价的。

推论 2.5。设 G 是一个紧群，D 是一个强自吸收 G-C*-代数，且 $\nu\colon \mathbb{C} \to D$ 是含幺嵌入。

(1) $\mathrm{id} \otimes \nu$ 与 $\nu \otimes \mathrm{id}$ 诱导相同的同构

$$(\mathrm{id} \otimes \nu)_* = (\nu \otimes \mathrm{id})_*\colon K_*^G(D) \xrightarrow{\cong} K_*^G(D \otimes D).$$

(2) 由翻转自同构 $D \otimes D \to D \otimes D$, $a \otimes b \mapsto b \otimes a$ 在 $K_*^G(D \otimes D)$ 上诱导的自同构是恒等映射。

(3) $K_*^G(D \otimes C_\nu) = 0$，其中 C_ν 是 ν 的映射锥。

证明。(1) 由于 $\mathrm{id} \otimes \nu$ 在近似意义下与一个同构 G-酉等价，故由命题 2.2 可知 $(\mathrm{id} \otimes \nu)_*$ 同构。再次由命题 2.2 和命题 2.4，得到 $(\mathrm{id} \otimes \nu)_* = (\nu \otimes \mathrm{id})_*$。

(2) 令 f 为翻转自同构。由于 $f \circ (\nu \otimes \mathrm{id}) = \mathrm{id} \otimes \nu$,

$$f_* \circ (\nu \otimes \mathrm{id})_* = (\mathrm{id} \otimes \nu)_*\colon K_*^G(D) \xrightarrow{\cong} K_*^G(D \otimes D)$$

成立。(1) 推出 f_* 是恒等映射。

(3) 对映射锥序列作张量积

$$\Sigma D \to C_\nu \to \mathbb{C} \xrightarrow{\nu} D$$

与 D，得到正合三角形

$$\Sigma D \otimes D \to D \otimes C_\nu \to D \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \nu} D \otimes D.$$

它给出正合列

$$\cdots \to K_{*+1}^G(D \otimes D) \to K_*^G(D \otimes C_\nu) \to K_*^G(D) \xrightarrow{(\mathrm{id} \otimes \nu)_*} K_*^G(D \otimes D) \to \cdots$$

由于 $(\mathrm{id} \otimes \nu)_*$ 根据 (1) 是一个同构，$K_*^G(D \otimes C_\nu) = 0$。

■

定义 2.6. 设 G 为一个紧群，D 为一个强自吸收 G-C*-代数，且 $\nu\colon \mathbb{C} \to D$ 为含幺嵌入。我们将杯积与同构 $(\mathrm{id} \otimes \nu)_*^{-1}$ 的复合称为

$$K_*^G(D) \times K_*^G(D) \to K_*^G(D \otimes D) \to K_*^G(D), \quad (x, y) \mapsto x \hat{\otimes} y \mapsto (\mathrm{id} \otimes \nu)_*^{-1}(x \hat{\otimes} y)$$

该多重乘法 $K_*^G(D)$。对于 $x, y \in K_*^G(D)$，我们将 $(\mathrm{id} \otimes \nu)_*^{-1}(x \hat{\otimes} y)$ 简记为 xy。

命题 2.7。 设 G、 D 如上。则 $K_*^G(D)$ 是一个交换环，其乘法由前述定义给出。

证明。 由于根据推论 2.5 (2)， $x\hat{\otimes}y = y\hat{\otimes}x$，交换性得证。令 1_D 为 D 的单位元。则 $[1_D]$ 是 $K_*^G(D)$ 的乘法单位元，因为对于任意 $x \in K_*^G(D)$，我们有 $(\nu\otimes\mathrm{id})_*(x) = [1_D]\hat{\otimes}x$ 。

取 x， y， $z \in K_*^G(D)$。与推论 2.5 (1) 的证明类似，两个映射 $\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\nu$，$\mathrm{id}\otimes\nu\otimes\mathrm{id} : D\otimes D \to D\otimes D\otimes D$ 诱导出同一个同构

$$(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\nu)_* = (\mathrm{id}\otimes\nu\otimes\mathrm{id})_* \colon K_*^G(D\otimes D) \xrightarrow{\cong} K_*^G(D\otimes D\otimes D).$$

因此，我们得到结合律

$$\begin{aligned} x(yz) &= (\mathrm{id}\otimes\nu)_*^{-1}(x\hat{\otimes}((\mathrm{id}\otimes\nu)_*^{-1}(y\hat{\otimes}z))) \\ &= (\mathrm{id}\otimes\nu)_*^{-1}\circ(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\nu)_*^{-1}(x\hat{\otimes}y\hat{\otimes}z) \\ &= (\mathrm{id}\otimes\nu)_*^{-1}\circ(\mathrm{id}\otimes\nu\otimes\mathrm{id})_*^{-1}(x\hat{\otimes}y\hat{\otimes}z) \\ &= (\mathrm{id}\otimes\nu)_*^{-1}(((\mathrm{id}\otimes\nu)_*^{-1}(x\hat{\otimes}y))\hat{\otimes}z) \\ &= (xy)z. \end{aligned}$$

容易看出分配律 $x(y+z) = xy + xz$。证明完毕。 ■

接下来，我们考察 $K_*^G(D)$ 与 $KK_*^G(D)$ 之间的关系。令 $\varphi\colon D \to D\otimes D$ 为一个 G-等变同构，它与 $\mathrm{id}\otimes\nu$ 近似 G-酉等价。我们还将由 φ 给出的 $KK^G(D,\ D\otimes D)$ 中的元素记为 φ。存在一个映射

$$K_*^G(D) \to KK_*^G(D, D\otimes D) \to KK_*^G(D, D), \quad x \mapsto x\hat{\otimes}\,\mathrm{id} \mapsto (x\hat{\otimes}\,\mathrm{id})\otimes\varphi^{-1}.$$

命题 2.8。 设 G 为有限群， D 为属于 G-等变 *bootstrap* 类的强自吸收 G-代数。那么，当且仅当 $(x\hat{\otimes}\,\mathrm{id})\otimes\varphi^{-1} \in KK_*^G(D, D)$ 可逆时， $x \in K_*^G(D)$ 才可逆。

证明。 设 $H \subset G$ 为一个子群， $y \in K_*^H(D)$ 为一个元素。我们将 $\mathrm{res}_G^H(x)$ 简记为 x。由于

$$y\otimes(x\hat{\otimes}\,\mathrm{id}) = x\hat{\otimes}y \in K_*^H(D\otimes D),$$

我们有

$$y\otimes(x\hat{\otimes}\,\mathrm{id})\otimes\varphi^{-1} = (x\hat{\otimes}y)\otimes\varphi^{-1} = \varphi_*^{-1}(x\hat{\otimes}y) = (\mathrm{id}\otimes\nu)_*^{-1}(x\hat{\otimes}y)$$

在 $K_*^G(D)$ 中，最后一个等号由命题 2.2 得出。这意味着映射 $((x\hat{\otimes}\,\mathrm{id})\otimes\varphi^{-1})_*\colon K_*^H(D) \to K_*^H(D)$ 等于乘以 x 的映射。因此，对于所有子群 $H \subset G$， x 可逆当且仅当 $((x\hat{\otimes}\,\mathrm{id})\otimes\varphi^{-1})_*\colon K_*^H(D) \to K_*^H(D)$ 可逆。根据命题 1.13，这当且仅当 $(x\hat{\otimes}\,\mathrm{id})\otimes\varphi^{-1}$ 可逆。■

事实上，上述结果对每个紧致 G 都成立（见 [21]）。以下推论有助于检验 $K_*^G(D)$ 中元素的可逆性。

推论 2.9. 设 G 为有限群，且 D 为属于 G-等变 *bootstrap* 类的强自吸收 G-C*-代数。那么，当且仅当对所有循环子群 $H \subset G$，$\mathrm{res}_G^H(x) \in K_*^H(D)$ 均可逆时，$x \in K_*^G(D)$ 才可逆。

证明。 根据定理 2.8， x 可逆当且仅当（$x\hat{\otimes}\,\mathrm{id}$）$\otimes\varphi^{-1} \in KK_*^G$（$D$， D）可逆。根据命题 1.13，这当且仅当对于所有循环子群 $H \subset G$，Res_G^H（（$x\hat{\otimes}\,\mathrm{id}$）$\otimes\varphi^{-1}$）$\in KK_*^H$（$D$， D）可逆。再次根据定理 2.8，Res_G^H（（$x\hat{\otimes}\,\mathrm{id}$）$\otimes\varphi^{-1}$）可逆当且仅当 res_G^H（x）$\in K_*^H$（D）可逆。■

3 模型作用

本节旨在构造满足局部化条件的强自吸收 G-C*-代数模型。现在回顾定义 0.1。设 D 是一个强自吸收 G-C*-代数，且 $\nu\colon \mathbb{C} \to D$ 是含幺嵌入。令

$$S_D = \{x \in R(G);\ \nu_*(x) \text{ is invertible in } K_0^G(D)\}.$$

D 关于一个 G-C*-代数 B 满足局部化条件，如果存在一个$R(G)$-模同构 $h_*^B\colon KK_*^G(B,\ \mathbb{C})_{S_D} \to KK_*^G(B,\ D)$，使得交换图

$$\begin{array}{ccc} KK_*^G(B,\ \mathbb{C}) & \longrightarrow & KK_*^G(B,\ \mathbb{C})_{S_D} \\ & \searrow^{\nu_*^B} & \downarrow{\scriptstyle h_*^B}\cong \\ & & KK_*^G(B,\ D) \end{array}$$

可交换，其中映射 $KK_i^G(B,\ \mathbb{C}) \to KK_i^G(B,\ \mathbb{C})_{S_D}$ 是自然映射，而 ν_*^B 是由 ν 诱导的映射。

注 3.1. 使上面的交换图可交换的 $R(G)$-模映射 $h_*^B\colon KK_*^G(B,\mathbb{C})_{S_D} \to KK_*^G(B,D)$ 若存在，则是唯一的，无论它是否为同构。事实上，若这样的 h_*^B 存在，则对每个 $x \in S_D$，$KK_*^G(B,D)$ 上由 x 给出的乘法都是可逆的，且 h_*^B 由下式给出

$$h_*^B\left(\frac{f}{x}\right) = \nu_*(f)\cdot\nu_*(x)^{-1} \quad (f \in KK_*^G(B,\mathbb{C}), x \in S_D).$$

设 D' 是另一个强自吸收的 G-C*-代数，且 $S_D = S_{D'}$ 满足关于 B 的局部化条件。h_*^B 的唯一性保证了 $R(G)$-模映射 $KK^G(B,D') \to KK^G(B,D)$ 的唯一性。该映射自动是一个同构，并使下图可交换：

$$\begin{array}{ccc} KK_*^G(B,\mathbb{C}) & \xrightarrow{\nu_*^B} & KK_*^G(B,D') \\ & \searrow^{\nu_*^B} & \downarrow \\ & & KK_*^G(B,\ D) \end{array}$$

对于乘法子集 $S \subset R(G)$，S 表示其饱和化。

命题 3.2。 设 G 是一个紧群，S 是表示环 $R(G)$ 的一个乘法子集。那么存在一个强自吸收的 G-C*-代数 M^S，使得 M^S 属于 G-等变 ***bootstrap*** 类 $\underline{\mathcal{B}}_G$，$S_{M^S} = S$，且 M^S 满足关于每个紧对象 $B \in KK^G$ 的局部化条件。

证明。 首先考虑 S 由 1 和一个元素 $x \in R(G)$ 生成的情形。记 $x = [\rho_0] - [\rho_1]$，其中 $[\rho_0]$ 和 $[\rho_1]$ 分别是由有限维表示 $\rho_0\colon G \curvearrowright H_0$ 和 $\rho_1\colon G \curvearrowright H_1$ 给出的元素。对于 $i = 0,\ 1$，令 $d_i := $ 维数 H_i。由于 Cuntz 代数 $\mathcal{O}_\infty$ 是单且纯无限的，存在一族 $\mathcal{O}_\infty$ 的互相正交投影 $\{p_i^{(k)} \mid i = 0,1,\ 1 \le k \le d_i\}$，使得

$$[p_i^{(k)}] = (-1)^i \cdot [1_\infty] \in K_0(\mathcal{O}_\infty),$$

其中 $[1_\infty]\in K_0(\mathcal{O}_\infty)$ 是由恒等元 $1_\infty\in\mathcal{O}_\infty$给出的元素。由于 $\mathcal{O}_\infty$ 是纯无限的，$[p_i^{(1)}]=[p_i^{(k)}]$ 蕴含对于任意 $1\le k\le d_i$，存在一个偏等距 $v_i^{(1k)}$，满足 $v_i^{(1k)}v_i^{(1k)*}=p_i^{(1)}$ 和 $v_i^{(1k)*}v_i^{(1k)}=p_i^{(k)}$。因此，令 $v_i^{(kl)}:=v_i^{(1k)*}v_i^{(1l)}$ 且 $p_i:=\sum_{k=1}^{d_i}p_i^{(k)}$，便有如下同构

$$B(H_i)\otimes p_i^{(1)}\mathcal{O}_\infty p_i^{(1)}\cong p_i\mathcal{O}_\infty p_i \tag{3.1}$$

使得对于 $B(H_i)$ 的矩阵单位系 $\{e_i^{(kl)}\}_{k,l=1}^{d_i}$，它将 $e_i^{(kl)}\otimes p_i^{(1)}$ 映射到 $v_i^{(kl)}$。$\mathcal{O}_\infty$ 的单纯性意味着 $p_i^{(1)}$ 是 $\mathcal{O}_\infty$ 的满投影，因此嵌入 $p_i^{(1)}\mathcal{O}_\infty p_i^{(1)}\hookrightarrow\mathcal{O}_\infty$ 给出了 Morita 等价。此外，根据 [33, 定理 4.4]，含幺嵌入 $\mathbb{C}\to\mathcal{O}_\infty$ 给出了一个 KK-等价 $\mathcal{O}_\infty\sim\mathbb{C}$。在这些等价之下，由含幺嵌入 $\mathbb{C}\to p_i^{(1)}\mathcal{O}_\infty p_i^{(1)}$ 给出的 $KK(\mathbb{C},p_i^{(1)}\mathcal{O}_\infty p_i^{(1)})$ 中的元素 $=K_0(p_i^{(1)}\mathcal{O}_\infty p_i^{(1)})$ 被识别为 $(-1)^i\cdot[1]\in K_0(\mathbb{C})$。现在，同构 (3.1) 给出了内作用 $\pi_i\colon G\curvearrowright p_i\mathcal{O}_\infty p_i$，它由 $\mathrm{Ad}\ \rho_i\otimes\mathrm{id}\colon G\curvearrowright B(H_i)\otimes p_i^{(1)}\mathcal{O}_\infty p_i^{(1)}$ 诱导。因此，由含幺嵌入 $\mathbb{C}\to p_i\mathcal{O}_\infty p_i$ 给出的 $K_0^G(p_i\mathcal{O}_\infty p_i)$ 中的元素 $=K_0^G((p_i\mathcal{O}_\infty p_{i,j},\pi_i))$ 被识别为 $(-1)^i\cdot[\rho_i]\in K_0^G(\mathbb{C})$。令 $p:=p_0+p_1$，定义内作用 $\pi:=\pi_0\oplus\pi_1\colon\ G\curvearrowright p\mathcal{O}_\infty p$。那么，由含幺嵌入 $\nu_p\colon\ \mathbb{C}\to p\mathcal{O}_\infty p$ 给出的元素 $[\nu_p]\in K_0^G(p\mathcal{O}_\infty p)$ 被识别为

$$[\rho_0]-[\rho_1]=x\in K_0^G(\mathbb{C}).$$

现在考虑归纳系统 $((p\mathcal{O}_\infty p)^{\otimes m},\ \iota_m)_m$，其中

$$\iota_m=\nu_p\otimes\mathrm{id}\colon(p\mathcal{O}_\infty p)^{\otimes m}\to(p\mathcal{O}_\infty p)\otimes(p\mathcal{O}_\infty p)^{\otimes m}=(p\mathcal{O}_\infty p)^{\otimes m+1}.$$

上述论证表明，$(\iota_m)_*\colon\ KK_*^G(B,\ (p\mathcal{O}_\infty p)^{\otimes m})\ \to\ KK_*^G(B,\ (p\mathcal{O}_\infty p)^{\otimes m+1})$ 可识别为 $KK_*^G(B,\mathbb{C})$ 上的乘以 x 映射。因此

$$\varinjlim_m\left(KK_*^G(B,(p\mathcal{O}_\infty p)^{\otimes m}),(\iota_m)_*\right)\cong KK_*^G(B,\mathbb{C})_S.$$

由于 $((p\mathcal{O}_\infty p)^{\otimes m},\ \iota_m)_m$ 中出现的所有 C*-代数都是核的，因此该归纳系统是容许的，并且归纳极限 $\bigotimes_{\mathbb{N}}p\mathcal{O}_\infty p$ 与其同伦极限 KK^G-等价（关于“容许的”和“同伦极限”的定义，见 [28, 2.4]）。因此，根据 B 的紧性以及 [28, 引理 2.4]，

$$KK_*^G(B,\bigotimes_{\mathbb{N}}p\mathcal{O}_\infty p)\cong\varinjlim_m\left(KK_*^G(B,(p\mathcal{O}_\infty p)^{\otimes m})\right).$$

$\bigotimes_{\mathbb{N}}p\mathcal{O}_\infty p$ 属于 G-等变 bootstrap 类 $\mathcal{B}_G$，因为所有内作用都与平凡作用 Morita 等价，并且 $p\mathcal{O}_\infty p$ 与 $\mathbb{C}$ KK-等价。由于 $\mathcal{O}_\infty$ 是强自吸收的，因此角 $p\mathcal{O}_\infty p$ 作为非等变 C*-代数，具有近似内翻转。因此，根据 [41, 命题 6.3]，$M^S:=\bigotimes_{\mathbb{N}}p\mathcal{O}_\infty p$ 是强自吸收的 G-C*-代数。它满足 $S_{M^S}=S$，因为

$$K_i^G(\bigotimes_{\mathbb{N}}p\mathcal{O}_\infty p)\cong\varinjlim_m(K_i^G((p\mathcal{O}_\infty p)^{\otimes m}))\cong\begin{cases}R(G)_S & (i=0),\\ 0 & (i=1).\end{cases}$$

当 S 是一般情形时，对每个 $x\in S$，令 S_x 为由 1 和 x 生成的乘法子集，并取如上所述的 M^{S_x}。那么 $M^S:=\bigotimes_{x\in S}M^{S_x}$ 就是所需的对象。注意，$S\subset R(G)$ 是可数集，因为 G 是紧致的。■

在前一个命题的证明中， M^S 表示为形如 $p\mathcal{O}_\infty p$ 的单位Kirchberg代数的无限张量积。因此，这个 M^S 也是一个单位Kirchberg代数。令 μ^S 为 G 在 M^S 上的作用，并令 $\gamma\colon G \curvearrowright \mathcal{O}_\infty$ 为在 $[15,$ 定义 3.4] 中定义的作用（事实上，得益于 $[19,$ 命题 7.2] ，我们可以选取 γ 为准积作用）。含幺嵌入 $\mathbb{C} \to (\mathcal{O}_\infty, \gamma)$ 根据 $[15,$ 注 3.3] 给出一个 KK^G-等价 $\mathbb{C} \sim (\mathcal{O}_\infty, \gamma)$。此外，$(\mathcal{O}_\infty, \gamma)$ 是强自吸收的，这是由 $[15,$ 推论 6.8] 得出的。因此，根据 $[15,$ 推论 6.8],，作用 $\mu^S \otimes \gamma\colon G \curvearrowright M^S \otimes \mathcal{O}_\infty$ 是等距移位吸收且强自吸收的。此外，$(M^S \otimes \mathcal{O}_\infty, \mu^S \otimes \gamma)$ 与 (M^S, μ^S) KK^G-等价。这个观察得出以下推论。

推论 3.3。 $M^S =$（M^S、μ^S）在命题 *3.1* 中可以选取为使得 M^S是一个带单位元的 ***Kirchberg*** 代数，且作用 $\mu^S\colon$ $G \curvearrowright M^S$ 是等距移位吸收的。

备注 3.4。 在命题 3.1（以及推论 3.3）的论证中， M^S 被构造为一个归纳系统的直极限，该归纳系统由一系列 G-C*-代数组成，并且这些代数都与 $\mathbb{C}$ KK^G-等价。更确切地说，将 $S \subset R(G)$ 的元素重新标记为 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$。令归纳系统 $(A_n, \iota_n)_n$ 为 $A_n = \mathbb{C}$ 和 $\iota_n = x_1 \cdots x_n \in KK^G(A_n, A_{n+1}) = R(G)$。那么，该系统的同伦极限与 M^S KK^G-等价。

我们的最终目标是证明，每个强自吸收 $D \in \mathcal{B}_G$ 都与命题 3.1 中的模型之一 KK^G等变同构。我们通过建立以下命题来结束本节，该命题是实现这一目标的一个重要步骤。

命题 3.5。 设 $\mathcal{B}_G^0$ 是 G-等变 ***bootstrap*** 类 $\mathcal{B}_G$ 的一个子类，该子类生成 $\mathcal{B}_G$，并设 D 是 G-强自吸收C*-代数，且属于 $\mathcal{B}_G$。假设 D 对于每个 $B \in \mathcal{B}_G^0$ 都满足局部化条件。那么，命题 *3.1*（或推论 *3.3*）中的 M^{S_D} 与 D 之间存在一个 KK^G-等价映射，该映射将 $[1_{M^{S_D}}] \in K_0^G(M^{S_D})$映射到 $[1_D] \in K_0^G(D)$。

证明。 取备注 3.4 中关于 $S = S_D$ 的归纳系统（A_n， ι_n）$_n$ 。根据 $[28,$ 引理 2.4],，存在一个短正合列

$$\varprojlim{}^1 KK_{*+1}^G(A_n, D) \rightarrowtail KK_*^G(M^{S_D}, D) \twoheadrightarrow \varprojlim KK_*^G(A_n, D),$$

其中 $\varprojlim{}^1 KK_*^G(A_n, D)$ 为

$$\operatorname{Coker}\left(\mathrm{id} - (\iota_{n-1}^*)_n \colon \prod_{n=1}^\infty KK_*^G(A_n, D) \to \prod_{n=1}^\infty KK_*^G(A_n, D)\right).$$

由于 $A_n = \mathbb{C}$ 和 $\iota_{n-1} \in KK^G(A_{n-1}, A_n)$ 可与 S_D 的一个元素相对应，因此映射 $(\iota_{n-1})^*\colon KK_*^G(A_n, D) \to KK_*^G(A_{n-1}, D)$ 是可逆的。因此，$\varprojlim{}^1 KK_{*+1}^G(A_n, D)$ 消失，并且我们有同构

$$KK_*^G(M^{S_D}, D) \cong \varprojlim KK_*^G(A_n, D) \cong K_*^G(D).$$

令 $f \in KK^G(M^{S_D}, D)$ 为对应于 $[1_D] \in K_0^G(D)$ 的元素。那么我们有$[1_{M^{S_D}}] \otimes f = [1_D]$。等价地，交换图

$$\begin{array}{ccc} KK_*^G(B, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\nu_*^B} & KK_*^G(B, M^{S_D}) \\ & \searrow^{\nu_*^B} & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ & & KK_*^G(B, D) \end{array}$$

对所有 $B \in KK^G$ 都交换。现在， D 和 M^{S_D} 对每个 $B \in \mathcal{B}_G^0$ 都满足局部化条件。因此，根据注 3.1，映射 $f_*\colon KK^G(B, M^{S_D}) \to KK^G(B, D)$ 是一个同构。结合命题 1.13，我们得出 $f \in KK^G(M^{S_D}, D)$ 是可逆的。■

回忆一下， $\mathcal{B}_G$ 由形如 $\mathrm{Ind}_H^G M_n$ 的 G-C*-代数生成，根据 [14, 命题 3.13]，它们是紧致的。因此，像前一个命题中的 $\mathcal{B}_G^0$ 这样的子类总是存在。特别地，如果猜想 A 对 D成立，则 D 与 M^{S_D} 在保持单位元的条件下是 KK^G-等价的。

4 等变 K¨unneth 公式

本节将证明一个等变 K¨unneth 公式，该公式用于计算强自吸收作用的等变 K-理论。为陈述该公式，我们需要定义一些概念。

对于正整数 n，如果乘以 n的映射在其上是双射，则称一个阿贝尔群为**唯一 n-可除** 的。

定义 4.1。设 n 为正整数， G 为有限群。若对于 G 的每个子群 H ， $K_*^H(A)$ 都是唯一 n-可除的，则称$A \in KK^G$ **具有唯一 n-可除的 K-理论** 。

对于 $A \in KK^{\mathbb{Z}/n}$，其等变 K-理论 $K_*^{\mathbb{Z}/n}(A)$ 是一个左 $R(\mathbb{Z}/n)$-模。表示环 $R(\mathbb{Z}/n)$ 与 $\mathbb{Z}[t]/(t^n-1)$ 同构。令 $\Phi_n(t) \in \mathbb{Z}[t]/(t^n-1)$ 为第 n 个分圆多项式：即本原 n 次单位根 ζ_n 的最小多项式。注意，环 $\mathbb{Z}[t]/(\Phi_n)$ 与 $\mathbb{Z}[\zeta_n]$ 同构。

定义 4.2 （参见 [27, 第 2] 页）。对于 $A \in KK^{\mathbb{Z}/n}$， $\mathbb{Z}[\zeta_n]$-模 $F_*^{\mathbb{Z}/n}(A)$ 定义为

$$F_*^{\mathbb{Z}/n}(A) = \left\{x \in K_*^{\mathbb{Z}/n}(A) \mid \Phi_n \cdot x = 0\right\}.$$

$F_*^{\mathbb{Z}/n}$是一个从 $KK^{\mathbb{Z}/n}$ 到 $\mathbb{Z}/2$分次左 $\mathbb{Z}[\zeta_n]$-模范畴的函子，它将对象 $A \in KK^{\mathbb{Z}/n}$ 映射到 $F_*^{\mathbb{Z}/n}(A)$。

本节的主要结果如下。

定理 4.3。设 A、B 是 $KK^{\mathbb{Z}/n}$ 中的对象。若 A 的 K-理论唯一地可被 n 整除，且 B 属于 $\mathbb{Z}/n$-等变 ***bootstrap*** 类 $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}/n}$，则存在一个由$\mathbb{Z}[\zeta_n]$-模构成的短正合列

$$F_*^{\mathbb{Z}/n}(A) \otimes_{\mathbb{Z}[\zeta_n]} F_*^{\mathbb{Z}/n}(B) \rightarrowtail F_*^{\mathbb{Z}/n}(A \otimes B) \twoheadrightarrow Tor_1^{\mathbb{Z}[\zeta_n]}(F_*^{\mathbb{Z}/n}(A), F_{*-1}^{\mathbb{Z}/n}(B)),$$

其中第一个同态由杯积给出。

在开始上述定理的证明之前，我们介绍 Meyer 和 Nadareishvili 的泛系数定理。设 G 为有限群， $H \subset G$ 为循环子群。我们将 H 的正规化子记为 N_H。对任意 $g \in N_H$，$\mathrm{con}_{g,H}\colon K_*^H(\mathbb{C}) \to K_*^H(\mathbb{C})$ 固定 $\Phi_{|H|}$。因此，$\mathrm{con}_{g,H}$ 给出 $R(H)/\Phi_{|H|} \cong \mathbb{Z}[\zeta_{|H|}]$的一个自同构。类似地，对任意 $A \in KK^G$，$\mathrm{con}_{g,H}\colon K_*^H(A) \to K_*^H(A)$ 给出 $F_*^H(A)$ 的一个自同构。若 $g \in H$，则 $\mathrm{con}_{g,H}$ 在 $\mathbb{Z}[\zeta_{|H|}]$ 上以及在 $F_*^H(A)$ 上平凡地作用。因此， $F_*^H(A)$ 是一个 $\mathbb{Z}[\zeta_{|H|}] \rtimes W_H$-模，其中 $W_H := N_H/H$。

定理 4.4（参见 [27, 定理 1.1]）。设 G 为有限群，且 A、B 为 KK^G 中的对象。若 A 属于 G- 等变 ***bootstrap*** 类，且 $|G|\cdot\mathrm{id} \in KK^G(B,B)$ 可逆，则存在一个短正合列

$$\prod_{H\subset G\ \ cyclic} \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}[\zeta_{|H|}]\rtimes W_H}(F^H_{*-1}(A), F^H_*(B)) \rightarrowtail KK^G(A,B)$$
$$\twoheadrightarrow \prod_{H\subset G\ \ cyclic} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\zeta_{|H|}]\rtimes W_H}(F^H_*(A), F^H_*(B)).$$

尽管证明定理 4.3 并不需要这个泛系数定理，但这两个证明有着共同的思路。我们还将利用定理 4.4 进行第 5.3 小节中的计算。

注 4.5. 如果 $A \in KK^{\mathbb{Z}/n}$ 具有唯一的 n-可除 K-理论，那么 $K_*^{\mathbb{Z}/n}(A)$是一个$\mathbb{Z}[t,1/n]/(t^n-1)$-模。根据 [27, 引理 5.3],，它可由 $\mathbb{Z}[t,1/n]/(t^n-1)$中的幂等元（$\psi_k$）$_{k|n}$分解为

$$\psi_k(t) = \frac{t(t^n-1)}{n\Phi_k(t)}\frac{d\Phi_k(t)}{dt}.$$

$K_*^{\mathbb{Z}/n}(A)$的直和项 $\psi_n K_*^{\mathbb{Z}/n}(A)$恰好是 $F_*^{\mathbb{Z}/n}(A)$。事实上，$\psi_n\Phi_n = 0$ 蕴含$\psi_n K_*^{\mathbb{Z}/n}(A) \subset F_*^{\mathbb{Z}/n}(A)$。如果 k整除 n和 $k\neq n$，那么 Φ_n整除（t^n-1）$/\Phi_k$。因此，对于任意 $x\in F_*^{\mathbb{Z}/n}(A)$,

$$x = \sum_{k|n}\psi_k x = \psi_n x.$$

该公式表示 $F_*^{\mathbb{Z}/n}(A) \subset \psi_n K_*^{\mathbb{Z}/n}(A)$。

引理 4.6. 令 $\mathfrak{N}$ 为 $KK^{\mathbb{Z}/n}$ 的满子范畴，由具有唯一 n-可除 K-理论的对象组成。则 $\mathfrak{N}$ 是 $KK^{\mathbb{Z}/n}$的一个局部化子范畴，而函子 $F_*^{\mathbb{Z}/n}$在 $\mathfrak{N}$ 上的限制是一个同调函子。

证明。容易看出，$\mathfrak{N}$ 在可数直和、$KK^{\mathbb{Z}/n}$-等价和悬挂下封闭。对于任意正合三角形

$$\Sigma C \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

在 $KK^{\mathbb{Z}/n}$ 中，且对于 $\mathbb{Z}/n$的任意子群 H，我们有一个长正合列

$$\cdots \longrightarrow K^H_{*+1}(C) \longrightarrow K^H_*(A) \longrightarrow K^H_*(B) \longrightarrow K^H_*(C) \longrightarrow \cdots.$$

若 A、B、C中任意两个属于 $\mathfrak{N}$，则由五引理可知第三个也属于 $\mathfrak{N}$。因此，$\mathfrak{N}$是 $KK^{\mathbb{Z}/n}$的一个局部化子范畴。在 $\mathfrak{N}$上，依注 4.5，函子 $F_*^{\mathbb{Z}/n}$等于 $K_*^{\mathbb{Z}/n}$的直和项 $\psi_n K_*^{\mathbb{Z}/n}$。由于 $K_*^{\mathbb{Z}/n}$是一个同调，其直和项 $F_*^{\mathbb{Z}/n}$在 $\mathfrak{N}$上也同样是一个同调。■

引理 4.7. 设 A, B 是 $KK^{\mathbb{Z}/n}$ 中的对象。若 A 的 K-理论具有唯一的 n-可除性，且 B 属于等变 ***bootstrap*** 类 $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}/n}$，则 $A\otimes B$ 的 K-理论也具有唯一的 n-可除性。

证明. 设 $\mathcal{C}$ 是 $KK^{\mathbb{Z}/n}$ 的满子范畴，由满足以下条件的对象 B 组成： $A\otimes B$ 的 K-理论具有唯一的 n-可除性。考虑函子 $K_*^{\mathbb{Z}/n}(A\otimes\cdot)$，我们可以按照引理 4.6 的证明，以同样的方式验证 $\mathcal{C}$ 是 $KK^{\mathbb{Z}/n}$ 的局部化子范畴。因此，为了证明 $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}/n}\subset\mathcal{C}$，只需证明对 $\mathbb{Z}/n$ 的每个子群 H， $C((\mathbb{Z}/n)/H)$ 都是 $\mathcal{C}$ 中的对象。

设 H 是 $\mathbb{Z}/n$的子群。由引理1.9和命题 1.10，对于任意子群K （属于 $\mathbb{Z}/n$），

$$\begin{aligned} K_*^K(\mathrm{Res}^K_{\mathbb{Z}/n}\,\mathrm{Ind}_H^{\mathbb{Z}/n}\,\mathrm{Res}^H_{\mathbb{Z}/n}\,A) &\cong KK_*^{\mathbb{Z}/n}(C((\mathbb{Z}/n)/K),\mathrm{Ind}_H^{\mathbb{Z}/n}\,\mathrm{Res}^H_{\mathbb{Z}/n}\,A)\\ &\cong KK_*^H(\mathrm{Res}^H_{\mathbb{Z}/n}\,C((\mathbb{Z}/n)/K),\mathrm{Res}^H_{\mathbb{Z}/n}\,A)\end{aligned}$$

成立。令令 X 为 $H\backslash(\mathbb{Z}/n)/K$的完全代表系。在等式 y

$$(\mathbb{Z}/n)/K=\bigsqcup_{h\in H/H\cap K}\bigsqcup_{g\in X}hgK,$$

我们得到一个 C*-代数的 H-等变 $*$-同构

$$\mathrm{Res}^H_{\mathbb{Z}/n}\,C((\mathbb{Z}/n)/K)\cong(C(H/H\cap K))^{|X|}.$$

再次由命题 1.10,

$$KK_*^H(C(H/H\cap K)^{|X|},\mathrm{Res}^H_{\mathbb{Z}/n}\,A)\cong K_*^{H\cap K}(\mathrm{Res}^{H\cap K}_{\mathbb{Z}/n}\,A)^{|X|}.$$

右侧唯一地可被 n整除。因此， $A\otimes C((\mathbb{Z}/n)/H)$具有唯一$n$-可整除的 K-理论，并且 $C((\mathbb{Z}/n)/H)$属于 $\mathcal{C}$。■

推论4.8. 设 A 是 $KK^{\mathbb{Z}/n}$ 中具有唯一 n可除 K理论的对象。函子 $F_*^{\mathbb{Z}/n}(A\otimes\cdot)|_{\mathcal{B}_{\mathbb{Z}/n}}$ 是从 $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}/n}$ 到 $\mathbb{Z}/2$分次左 $\mathbb{Z}[\zeta_n]$模范畴的同调函子。

证明. 它直接由引理 4.6和引理 4.7得出。 ■

命题4.9. 设 A 是 $KK^{\mathbb{Z}/n}$ 中具有唯一 n可除 K理论的对象。若$F_*^{\mathbb{Z}/n}(A)=0$，则对 $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}/n}$ 中的任意对象 B，有 $F_*^{\mathbb{Z}/n}(A\otimes B)=0$。

证明。设 $\mathcal{C}$是函子 $F_*^{\mathbb{Z}/n}(A\otimes\cdot)|_{\mathcal{B}_{\mathbb{Z}/n}}$的核。由推论4.8，该函子是一个同调，因此 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}/n}$的局部化子范畴。显然 $\mathcal{C}$ 包含 $\mathbb{C}$。设 H 是 $\mathbb{Z}/n$ 的真子群，且 i_H是命题 1.10 (1)中的同构 $K_*^{\mathbb{Z}/n}(A\otimes C((\mathbb{Z}/n)/H))\cong K_*^H(A)$。由注1.11，对任意 $f\in R(\mathbb{Z}/n)$和 $x\in K_*^{\mathbb{Z}/n}(A\otimes C((\mathbb{Z}/n)/H))$，我们有 $i_H(f\cdot x)=\mathrm{Res}^H_{\mathbb{Z}/n}(f)\cdot i_H(x)$。由于 $F_*^{\mathbb{Z}/n}(A\otimes C((\mathbb{Z}/n)/H))$是乘以$(t^n-1)/\Phi_n(t)$的像，且 $t^{|H|}-1$ 整除$(t^n-1)/\Phi_n(t)$，我们得到$\mathrm{Res}^H_{\mathbb{Z}/n}((t^n-1)/\Phi_n(t))=0$ 以及 $F_*^{\mathbb{Z}/n}(A\otimes C((\mathbb{Z}/n)/H))=0$。因此， $C((\mathbb{Z}/n)/H)$属于 $\mathcal{C}$，且 $\mathcal{C}$ 等于 $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}/n}$。■

定理 4.10。 设 A 是 $KK^{\mathbb{Z}/n}$ 中的一个对象，具有唯一的 n-可除 K-理论。则存在一个具有平凡 $\mathbb{Z}/n$-作用的 C*-代数 $\mathscr{F}$，以及一个元素 $\alpha\in KK^{\mathbb{Z}/n}(\mathscr{F}\otimes M_{n^\infty},A)$，使得 $\mathscr{F}$ 是 $\mathbb{C}$ 的至多可数直和，且 $C_0(\mathbb{R})$，并且 α 诱导出一个从 $F_*^{\mathbb{Z}/n}(\mathscr{F}\otimes M_{n^\infty})$ 到 $F_*^{\mathbb{Z}/n}(A)$的满射 α_*。此外，若 $F_*^{\mathbb{Z}/n}(A)$是一个自由 $\mathbb{Z}[\zeta_n,1/n]$-模，则可以选取 $\mathscr{F}$ 和 α，使得 α_* 是一个同构。

证明。考虑归纳系统 $(M_{n^k},\iota_k)_{k=1}^{\infty}$，其中 $\iota_k\colon M_{n^k}\to M_{n^{k+1}}$ 是含幺嵌入。它给出一个投影系统 $(KK_*^{\mathbb{Z}/n}(M_{n^k},A)\ \iota_k^*)$。于是，其投影极限同构于 $KK_*^{\mathbb{Z}/n}(M_{n^\infty},A)$。事实上，根据 [28, 引理 2.4、命题 2.6 和引理 2.7]，存在一个短正合列

$$\varprojlim{}^1 KK_{*+1}^G(M_{n^k},A)\rightarrowtail KK_*^G(M_{n^\infty},A)\twoheadrightarrow \varprojlim KK_*^G(M_{n^k},A),$$

其中 $\varprojlim{}^1 KK_*^G(M_{n^k},\ A)$ 为

$$\operatorname{Coker}\left(\mathrm{id}-(\iota_{k-1}^*)_k\colon \prod_{k=1}^{\infty}KK_*^G(M_{n^k},A)\to\prod_{k=1}^{\infty}KK_*^G(M_{n^k},A)\right).$$

在 Morita 等价 $M_{n^k}\sim\mathbb{C}$ 下，映射 ι_k^* 被识别为作用于 $K_*^{\mathbb{Z}/n}(A)$ 上的乘以 n 的映射。结合 A 具有唯一 n-可除的 K-理论这一假设，可得 $\varprojlim{}^1 KK_*^G(M_{n^k},\ A)$ 消失。

取 $\mathbb{Z}[\zeta_n,1/n]$-模 $F_0^{\mathbb{Z}/n}(A)$ 的一个生成集（若 $F_*^{\mathbb{Z}/n}(A)$ 是自由的，则取一个基）$\{f_i\}_{i\in I}$。由于 $F_0^{\mathbb{Z}/n}(A)\subset K_0^{\mathbb{Z}/n}(A)$ 至多可数，因此指标集 I 可取为至多可数。对于每个 $i\in I$，令 $\widetilde{f_i}$ 为 $KK^{\mathbb{Z}/n}(M_{n^\infty},\ A)$ 中与元素相对应的一个元素

$$[(n^{-k}f_i)_k]\in\varprojlim K^{\mathbb{Z}/n}(A)\cong\varprojlim KK^{\mathbb{Z}/n}(M_{n^k},A).$$

这 $\widetilde{f_i}$ 诱导从 $F_0^{\mathbb{Z}/n}(M_{n^\infty})$到由 f_i生成的 $F_0^{\mathbb{Z}/n}(A)$的子模的一个满射（相应地，一个同构）。此外，选取 $F_1^{\mathbb{Z}/n}(A)$的一个生成集（相应地，一个基）$\{h_j\}_{j\in J}$，并以类似方式取 $\widetilde{h_j}\in KK^{\mathbb{Z}/n}(\Sigma M_{n^\infty},A)$。现在我们定义

$$\mathscr{F}:=\mathbb{C}^I\oplus C_0(\mathbb{R})^J,$$

$$\begin{aligned}\alpha:=\left((\widetilde{f_i})_i,(\widetilde{h_j})_j\right)\in&\left(\prod_{i\in I}KK^{\mathbb{Z}/n}(M_{n^\infty},A)\right)\oplus\left(\prod_{j\in J}KK^{\mathbb{Z}/n}(\Sigma M_{n^\infty},A)\right)\\&\cong KK^{\mathbb{Z}/n}(F\otimes M_{n^\infty},A).\end{aligned}$$

由构造，$\alpha_*\colon\ F_*^{\mathbb{Z}/n}(\mathscr{F}\otimes M_{n^\infty})\to F_*^{\mathbb{Z}/n}(A)$是一个满射（相应地，一个同构）。■

引理 4.11. 对于 $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}/n}$中的任意对象 B，杯积给出 $\mathbb{Z}[\zeta_n]$-模的一个同构 $F_*^{\mathbb{Z}/n}(M_{n^\infty})\otimes_{\mathbb{Z}[\zeta_n]}F_*^{\mathbb{Z}/n}(B)\cong F_*^{\mathbb{Z}/n}(M_{n^\infty}\otimes B)$。

证明。由引理 4.7，$M_{n^\infty}\otimes B$具有唯一的 n-可除 K-理论。利用注 4.5 中定义的幂等元 ψ_n，成立 $F_*^{\mathbb{Z}/n}(M_{n^\infty}\otimes B)=\psi_nK_*^{\mathbb{Z}/n}(M_{n^\infty}\otimes B)$。$M_{n^\infty}\otimes B$是系统 $(M_{n^k}\otimes B,\iota_k\otimes id_B)_k$ 的归纳极限，其中 $\iota_k\colon M_{n^k}\to M_{n^{k+1}}$ 是含幺嵌入。在 Morita 等价 $M_{n^k}\sim\mathbb{C}$下，此归纳系统可识别为由若干个 B 的副本，以及从 B 到 B的乘以 n 映射所组成的系统。因此，$K_*^{\mathbb{Z}/n}(M_{n^\infty}\otimes B)$ 同构于 $\mathbb{Z}[1/n]\otimes_{\mathbb{Z}}K_*^{\mathbb{Z}/n}(B)$，且 $F_*^{\mathbb{Z}/n}(M_{n^\infty}\otimes B)$ 同构于 $\mathbb{Z}[1/n]\otimes_{\mathbb{Z}}F_*^{\mathbb{Z}/n}(B)$。另一方面，$F_*^{\mathbb{Z}/n}(M_{n^\infty})$ 同构于$\mathbb{Z}[\zeta_n,1/n]$。因此，杯积映射 $K_*^{\mathbb{Z}/n}(M_{n^\infty})\otimes_{R(\mathbb{Z}/n)}K_*^{\mathbb{Z}/n}(B)\to K_*^{\mathbb{Z}/n}(M_{n^\infty}\otimes B)$ 给出了从 $F_*^{\mathbb{Z}/n}(M_{n^\infty})\otimes_{\mathbb{Z}[\zeta_n]}F_*^{\mathbb{Z}/n}(B)\cong\mathbb{Z}[\zeta_n,1/n]\otimes_{\mathbb{Z}[\zeta_n]}F_*^{\mathbb{Z}/n}(B)$ 到$F_*^{\mathbb{Z}/n}(M_{n^\infty}\otimes B)\cong\mathbb{Z}[1/n]\otimes_{\mathbb{Z}}F_*^{\mathbb{Z}/n}(B)$ 的同构。■

定理 4.12. 设 A 是 $KK^{\mathbb{Z}/n}$ 中的一个对象，且具有唯一的 n-可除 K-理论。若 $F_*^{\mathbb{Z}/n}(A)$ 是一个投射 $\mathbb{Z}[\zeta_n, 1/n]$-模，则对于任意 $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}/n}$，两个模 $F_*^{\mathbb{Z}/n}(A) \otimes_{\mathbb{Z}[\zeta_n]} F_*^{\mathbb{Z}/n}(B)$ 和 $F_*^{\mathbb{Z}/n}(A \otimes B)$ 在杯积下同构。

证明。 取定理 4.10 中的 $\mathscr{F}$ 和 α。存在一个正合三角

$$\Sigma A \longrightarrow C \longrightarrow \mathscr{F} \otimes M_{n^\infty} \xrightarrow{\alpha} A \tag{4.1}$$

位于 $KK^{\mathbb{Z}/n}$ 中。由引理 4.6 及 α 的选取，对象 C 具有唯一的 n-可除 K-理论，并且存在一个 $\mathbb{Z}[\zeta_n, 1/n]$-模的短正合列

$$F_*^{\mathbb{Z}/n}(C) \rightarrowtail F_*^{\mathbb{Z}/n}(\mathscr{F} \otimes M_{n^\infty}) \overset{\alpha_*}{\twoheadrightarrow} F_*^{\mathbb{Z}/n}(A). \tag{4.2}$$

由于 α_*是满射且 $F_*^{\mathbb{Z}/n}(A)$ 是射影的，我们有 $F_*^{\mathbb{Z}/n}(\mathscr{F} \otimes M_{n^\infty}) \cong F_*^{\mathbb{Z}/n}(C \oplus A)$。若 $F_*^{\mathbb{Z}/n}(C \oplus A) \otimes_{\mathbb{Z}[\zeta_n]} F_*^{\mathbb{Z}/n}(B)$ 和 $F_*^{\mathbb{Z}/n}((C \oplus A) \otimes B)$ 同构，则它们的直和项 $F_*^{\mathbb{Z}/n}(A) \otimes_{\mathbb{Z}[\zeta_n]} F_*^{\mathbb{Z}/n}(B)$ 和 $F_*^{\mathbb{Z}/n}(A \otimes B)$ 也同构。因此，我们可以将问题归结为 $F_*^{\mathbb{Z}/n}(A)$ 是一个自由 $\mathbb{Z}[\zeta_n, 1/n]$-模的情形。

再次由定理 4.10，我们可以取一个形如 (4.1) 的正合三角，使得α_*: $F_*^{\mathbb{Z}/n}(\mathscr{F} \otimes M_{n^\infty}) \to F_*^{\mathbb{Z}/n}(A)$ 是一个同构。由引理 4.6， $F_*^{\mathbb{Z}/n}(C)$ 为零，因此由引理 4.9， $F_*^{\mathbb{Z}/n}(C \otimes B)$ 为零。我们还有一个正合三角

$$\Sigma A \otimes B \longrightarrow C \otimes B \longrightarrow \mathscr{F} \otimes M_{n^\infty} \otimes B \xrightarrow{\alpha \otimes id_B} A \otimes B.$$

现在， $F_*^{\mathbb{Z}/n}(C \otimes B) = 0$，而引理 4.6 蕴含 $F^{\mathbb{Z}/n}(\mathscr{F} \otimes M_{n^\infty} \otimes B)$ 与 $F_*^{\mathbb{Z}/n}(A \otimes B)$ 同构。根据 $\mathscr{F}$的构造以及引理 4.11， $F_*^{\mathbb{Z}/n}(\mathscr{F} \otimes M_{n^\infty}) \otimes_{\mathbb{Z}[\zeta_n]} F_*^{\mathbb{Z}/n}(B)$ 与 $F^{\mathbb{Z}/n}(\mathscr{F} \otimes M_{n^\infty} \otimes B)$ 同构。因此

$$\begin{aligned} F_*^{\mathbb{Z}/n}(A) \otimes_{\mathbb{Z}[\zeta_n]} F_*^{\mathbb{Z}/n}(B) &\cong F_*^{\mathbb{Z}/n}(\mathscr{F} \otimes M_{n^\infty}) \otimes_{\mathbb{Z}[\zeta_n]} F_*^{\mathbb{Z}/n}(B) \\ &\cong F_*^{\mathbb{Z}/n}(\mathscr{F} \otimes M_{n^\infty} \otimes B) \\ &\cong F_*^{\mathbb{Z}/n}(A \otimes B). \end{aligned}$$

■

现在我们可以证明本节的主要结果了。

定理 *4.3* 的证明。 取定理 4.10 中的 $\mathscr{F}$ 和 α。考虑形如 (4.1) 的正合三角形，可得到 $\mathbb{Z}[\zeta_n, 1/n]$-模的短正合列 (4.2)。在此正合列中，模 $F_*^{\mathbb{Z}/n}(C)$ 是自由 $\mathbb{Z}[\zeta_n, 1/n]$-模 $F_*^{\mathbb{Z}/n}(\mathscr{F} \otimes M_{n^\infty})$ 的子模。根据注 1.19 和注记1.22， $\mathbb{Z}[\zeta_n, 1/n]$ 是戴德金整环。因此，根据注释 1.18， $F_*^{\mathbb{Z}/n}(C)$ 是射影的。令 π: $C \to \mathscr{F} \otimes M_{n^\infty}$ 为出现在

三角形 (4.1) 中的态射。现在我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}[\zeta_n]}(F_*^{\mathbb{Z}/n}(\mathscr{F}\otimes M_{n^\infty}), F_*^{\mathbb{Z}/n}(B)) & & \\
\downarrow & & \\
\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}[\zeta_n]}(F_*^{\mathbb{Z}/n}(A), F_*^{\mathbb{Z}/n}(B)) & & F_{*+1}^{\mathbb{Z}/n}(A\otimes B) \\
\downarrow & & \downarrow \\
F_*^{\mathbb{Z}/n}(C)\otimes_{\mathbb{Z}[\zeta_n]} F_*^{\mathbb{Z}/n}(B) & \xrightarrow[\cong]{\omega_C} & F_*^{\mathbb{Z}/n}(C\otimes B) \\
\downarrow{\scriptstyle \pi_*\otimes\mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle (\pi\otimes\mathrm{id})_*} \\
F_*^{\mathbb{Z}/n}(\mathscr{F}\otimes M_{n^\infty})\otimes_{\mathbb{Z}[\zeta_n]} F_*^{\mathbb{Z}/n}(B) & \xrightarrow[\cong]{\omega_{\mathscr{F}}} & F_*^{\mathbb{Z}/n}(\mathscr{F}\otimes M_{n^\infty}\otimes B) \\
\downarrow{\scriptstyle \alpha_*\otimes\mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle (\alpha\otimes\mathrm{id})_*} \\
F_*^{\mathbb{Z}/n}(A)\otimes_{\mathbb{Z}[\zeta_n]} F_*^{\mathbb{Z}/n}(B) & \xrightarrow{\omega_A} & F_*^{\mathbb{Z}/n}(A\otimes B).
\end{array}$$

在上述交换图中，两列正合，水平映射 ω_C，$\omega_{\mathscr{F}}$ 和 ω_A都是杯积映射。根据定理 4.12，ω_C 和 $\omega_{\mathscr{F}}$ 都是同构。

证明的其余部分是一次图追逐。若 $x \in F_*^{\mathbb{Z}/n}(\mathscr{F}\otimes M_{n^\infty})\otimes_{\mathbb{Z}[\zeta_n]} F_*^{\mathbb{Z}/n}B$，$\omega_A$ $z \in F_*^{\mathbb{Z}/n}C\otimes_{\mathbb{Z}[\zeta_n]} F_*^{\mathbb{Z}/n}B$，$\alpha_*\otimes$ $y = x$Ker，则存在 ( ) ( ) 和 ( ) ( )，使得 (id)( ) 且 $(\pi\otimes\mathrm{id})_*\circ\omega_C(z) = \omega_{\mathscr{F}}(y)$。因此

$$x = (\alpha_*\otimes\mathrm{id})\circ(\pi_*\otimes\mathrm{id})(z) = 0$$

并且 ω_A 是单射。上述交换图也蕴含 $\mathrm{Coker}\,\omega_A = \mathrm{Coker}(\alpha\otimes\mathrm{id})_*$。它同构于

$$\mathrm{Ker}\left((\pi\otimes\mathrm{id})_*\colon F_{*-1}^{\mathbb{Z}/n}(C\otimes B)\to F_{*-1}^{\mathbb{Z}/n}(\mathscr{F}\otimes M_{n^\infty}\otimes B)\right)$$

通过映射 $F_*^{\mathbb{Z}/n}(A\otimes B)\to F_{*-1}^{\mathbb{Z}/n}(C\otimes B)$，这又同构于

$$\mathrm{Ker}\left(\pi_*\otimes\mathrm{id}\colon F_*^{\mathbb{Z}/n}(C)\otimes_{\mathbb{Z}[\zeta_n]} F_{*-1}^{\mathbb{Z}/n}(B)\to F_*^{\mathbb{Z}/n}(\mathscr{F}\otimes M_{n^\infty})\otimes_{\mathbb{Z}[\zeta_n]} F_{*-1}^{\mathbb{Z}/n}(B)\right)$$

借助 ω_C。由于 $F_*^{\mathbb{Z}/n}(\mathscr{F}\otimes M_{n^\infty})$ 是平坦的，$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}[\zeta_n]}(F_*^{\mathbb{Z}/n}(\mathscr{F}\otimes M_{n^\infty}) F_{*-1}^{\mathbb{Z}/n}(B))$ 消失，并且 $\mathrm{Ker}(\pi_*\otimes\mathrm{id})$ 同构于 $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}[\zeta_n]}(F_*^{\mathbb{Z}/n}(A) F_{*-1}^{\mathbb{Z}/n}(B))$。因此，

$$\mathrm{Coker}\,\omega_A \cong \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}[\zeta_n]}(F_*^{\mathbb{Z}/n}(A), F_{*-1}^{\mathbb{Z}/n}(B)).$$

证明至此完成。 ■

5 K-理论与强自吸收作用

本节旨在计算强自吸收作用的等变 K-理论的环结构。在开始计算之前，我们先来看下面的定理。它将在第 5.1 小节和第 5.3 小节的讨论中发挥关键作用。

定理 5.1. 设 G 是一个 p-群，且 A 是 KK^G中的一个对象。那么 $K_*^G(A)$ 是唯一p可除的，当且仅当 $K_*(A)$ 是唯一 p可除的。

Pro的。 假设 $|G| = p^m$。我们对 m应用归纳法来证明。 $m = 0$ 的情形显然 1.

假设该结论对阶为 p^{m-1}的群成立。由于p-群的中心非平凡， G 有一个正规子群 N ，它与 $\mathbb{Z}/p$同构。根据 [17,命题 1],，存在 G/N在 $A \rtimes N$上的一个扭曲作用，使得 $A \rtimes G \cong (A \rtimes N) \rtimes G/N$。根据定理 3.4]，该扭曲作用与 G/N 在$(A \rtimes N) \otimes \mathcal{K}$ 上的一个作用 Morita 等价，其中 [30,。因此

$$K_*^G(A) \cong K_*(A \rtimes G) \cong K_*(((A \rtimes N) \otimes \mathcal{K}) \rtimes G/N) \cong K_*^{G/N}((A \rtimes N) \otimes \mathcal{K}).$$

由于 $|G/N| = p^{m-1}$，归纳假设表明，如果 $K_*((A \rtimes N) \otimes \mathcal{K})$是唯一 p-可除的，那么 $K_*^{G/N}((A \rtimes N) \otimes \mathcal{K})$也是唯一$p$-可除的。它与 $K_*^N(A)$同构。根据 [26,定理 7.2], ，如果 $K_*(A)$是唯一 p-可除的，那么该群就是唯一 p-可除的。■

推论 5.2. 设 G 是一个 p-群，且 A 是 G-等变 *bootstrap* 类中的一个对象。那么 $K_*(A)$ 可唯一地被 p 整除，当且仅当 A 具有可唯一被 p 整除的 K-理论；而这又当且仅当 $p \cdot \mathrm{id} \in KK^G(A, A)$ 可逆。

证明。 根据定理 5.1， $K_*(A)$ 可唯一地被 p 整除，当且仅当 A 具有可唯一被 p 整除的 K-理论。根据命题 1.13， A 具有可唯一被 p 整除的 K-理论，当且仅当 $p \cdot \mathrm{id} \in KK^G(A, A)$ 可逆。■

下面的推论是一个强有力的工具，可用于计算 $K_*^G(D)$，尤其是在 $K_*(D)$ 不能被 p 唯一整除时。

推论 5.3. 设 G 是一个 p-群，且 D 是一个强自吸收 G-C^*-代数。假设 D 属于 G-等变 *bootstrap* 类 $\mathcal{B}_G$ ，并且 $K_*(D)$ 不能被 p 唯一整除。

(1) 对于含幺嵌入 $\nu\colon\ \mathbb{C} \to D$，其映射锥 C_ν 的 p-理论具有唯一的 K可除性。(2) 在 $K_*^G(D)$ 上乘以 p 是单射。因此，含幺嵌入$\mathbb{C} \hookrightarrow M_{p^\infty}$ 诱导了单射 $K_*^G(D) \hookrightarrow K_*^G(D \otimes M_{p^\infty})$。

证明。 (1) 根据 [43, 命题 5.1], $K_0(D)$ 是 $\mathbb{Z}$ 关于集合 T 的局部化 $\mathbb{Z}_T$，该集合由 $K_0(D)$ 中所有可逆整数构成。映射 $\nu_*\colon\ K_0(\mathbb{C}) \to K_0(D)$ 可识别为自然含入 $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_T$。由正合三角得到的六项正合列

$$C_\nu \to \mathbb{C} \xrightarrow{\nu} D \to \Sigma^{-1}C_\nu$$

表明 $K_0(C_\nu) = 0$且 $K_1(C_\nu) \cong \mathbb{Z}_T/\mathbb{Z}$。取 $a/b \in \mathbb{Z}_T (a \in \mathbb{Z},\ b \in T)$。由于$\mathbb{Z}_T$ 不具有唯一的 p 可除性， b 与 p 互素。因此，存在整数 k, l ，使得 k 为正且 $p^k - 1 = lb$ 成立。现在我们有如下公式

$$p^k \frac{a}{b} = \frac{a}{b} + la.$$

这意味着 $\mathbb{Z}_T/\mathbb{Z} \cong K_1(C_\nu)$ 是唯一 p-可除的。由于 $\mathbb{C}$ 和 D 都属于 $\mathcal{B}_G$，因此 C_ν 也属于 $\mathcal{B}_G$。因此，根据推论 5.2， C_ν 的 K-理论是唯一 p-可除的。

(2) 考虑正合列

$$K_*^G(C_\nu) \to K_*^G(\mathbb{C}) \to K_*^G(D) \to K_{*-1}^G(C_\nu).$$

$K_*^G(C_\nu)$ 由 (1) 唯一地 p-可除。由于乘以 p 在 $K_*^G(\mathbb{C})$ 上是单射，根据四引理，它在 $K_*^G(D)$ 上也是单射。

■

5.1 循环 p-群的作用

本小节将证明以下定理。

定理 5.4. 设 G 是一个循环 p-群， D 是一个属于 G-等变 *bootstrap* 类的强自吸收 G-C*-代数。则 $K_1^G(D) = 0$，且 $K_0^G(D)$ 与表示环 $R(G)$的零环或某个局部化环同构。此外，若 $K_0(D)$不是唯一的 p-可除群，则含幺嵌入 $\mathbb{C} \hookrightarrow D$ 诱导出一个单射环同态 $R(G) \hookrightarrow K_0^G(D)$。

在本小节中， G 表示群 $\mathbb{Z}/p^m$ （p 是素数， m 是非负整数）， H 表示子群 $pG \cong \mathbb{Z}/p^{m-1}$ ，而 D 表示一个属于 G-等变 bootstrap 类 $\mathcal{B}_G$的强自吸收 G-C*-代数。我们通过对 m使用归纳法证明定理 5.4。 $m = 0$ 的情形就是非等变情形：这是 Toms 和 Winter 的工作，见命题 5.1] [43, 。在本小节接下来的内容中，我们假设以下归纳假设。

假设 5.5。 定理 5.4 对阶为 p^{m-1} 的循环群成立。

令 α_{01}^H 为 $KK^G(\mathbb{C}, C(G/H))$ 中由含幺嵌入 $\mathbb{C} \hookrightarrow C(G/H)$ 给出的元素，并令 α_{10}^H 为 $KK^G(C(G/H)\ \mathbb{C})$ 中由含幺嵌入 $C(G/H) \hookrightarrow B(l_2(G/H))$ 与 Morita 等价 $B(\ell_2(G/H)) \sim \mathbb{C}$ 的复合给出的元素。我们先计算 $\alpha_{10}^H \otimes \alpha_{01}^H$ 和 $\alpha_{01}^H \otimes \alpha_{10}^H$。令 $s_H \in KK^G(C(G/H)\ C(G/H))$ 为由同态 $C(G/H) \ni f \mapsto f(\cdot + 1) \in C(G/H)$ 给出的元素，并令 $t \in R(G)$ 为由不可约表示给出的元素

$$G = \mathbb{Z}/p^m \ni n \mapsto \exp\left(\frac{2n\pi i}{p^m}\right) \in U(1)$$

G的表示环 $R(G)$ 等于 $\mathbb{Z}[t]/(t^{p^m} - 1)$。它含有 p^m 次分圆多项式 $\Phi_{p^m}(t)$ $= 1 + t^{p^{m-1}} + \cdots + t^{(p-1)p^{m-1}}$。

元素 α_{01}^H， α_{10}^H 在 $G = \mathbb{Z}/p$ 时的行为已在 [26] 中研究。令 pb: $KK^{\mathbb{Z}/p} \to KK^G$ 为如下函子：它通过自然投影 $G \to G/H \cong \mathbb{Z}/p$，将 $\mathbb{Z}/p$ 的作用视为 G 的作用。也就是说，pb 是沿 $G \to \mathbb{Z}/p$ 的拉回函子。它保持 Kasparov 积。若 $f\colon A \to B$ 是一个 $\mathbb{Z}/p$-等变的 $*$-同态，且C_f 是其映射锥，那么显然

$$\mathrm{pb}(\Sigma B) \to \mathrm{pb}(C_f) \to \mathrm{pb}(A) \xrightarrow{\mathrm{pb}(f)} \mathrm{pb}(B)$$

这也是一个映射锥序列。因此，函子 pb 保持正合三角。类似地定义$\alpha_{01} \in KK^{\mathbb{Z}/p}(\mathbb{C}, C(\mathbb{Z}/p))$、 $\alpha_{10} \in KK^{\mathbb{Z}/p}(C(\mathbb{Z}/p)\ \mathbb{C})$ 和 $s \in KK^{\mathbb{Z}/p}(C(\mathbb{Z}/p)\ C(\mathbb{Z}/p))$，分别对应于 α_{01}^H、 α_{10}^H 和 s_H。于是有 $\mathrm{pb}(\alpha_{01}) = \alpha_{01}^H$、$\mathrm{pb}(\alpha_{10}) = \alpha_{10}^H$ 和 $\mathrm{pb}(s) = s_H$。

引理 5.6. $\alpha_{10}^H \otimes \alpha_{01}^H = 1 + s_H + \cdots + s_H^{p-1} \in KK^G(C(G/H)\ C(G/H))$，且 $\alpha_{01}^H \otimes \alpha_{10}^H = \Phi_{p^m}(t) \in R(G)$。

证明。 $t_0 \in R(\mathbb{Z}/p)$ 表示由不可约表示给出的元素

$$\mathbb{Z}/p \ni n \mapsto \exp\left(\frac{2n\pi i}{p}\right) \in U(1)$$

$\mathbb{Z}/p$ 的。根据 [26, 引理 4.10 (4)]，$\alpha_{10}\otimes\alpha_{01}=1+s+\cdots+s^{p-1}$ 以及 $\alpha_{01}\otimes\alpha_{10}=1+t_0+\cdots+t_0^{p-1}$。根据 pb 的定义：$KK^{\mathbb{Z}/p}\to KK^G$，$\mathrm{pb}(t_0)\in R(G)$ 由不可约表示表示

$$G=\mathbb{Z}/p^m\ni n\mapsto\exp\left(\frac{2n\pi i}{p}\right)\in U(1).$$

这意味着 $\mathrm{pb}(t_0)=t^{p^{m-1}}$。因此

$$\begin{aligned}\alpha_{10}^H\otimes\alpha_{01}^H&=\mathrm{pb}(1+s+\cdots+s^{p-1})=1+s_H+\cdots+s_H^{p-1},\\ \alpha_{01}^H\otimes\alpha_{10}^H&=\mathrm{pb}(1+t_0+\cdots+t_0^{p-1})=1+t^{p^{m-1}}+\cdots+t^{(p-1)p^{m-1}}=\Phi_{p^m}(t).\end{aligned}$$

■

注 5.7. 我们将 [26] 的论证继续详细展开。令 C_u 为 α_{01} 的映射锥（在 [26] 中记作 D）。存在映射锥序列

$$\Sigma C(\mathbb{Z}/p)\longrightarrow C_u\xrightarrow{\alpha_{20}}\mathbb{C}\xrightarrow{\alpha_{01}}C(\mathbb{Z}/p).$$

此外，根据 [26, 命题 5.5]，，存在某个 $\alpha_{02}\in KK^{\mathbb{Z}/p}$（$\mathbb{C}$，$C_u$），以及一个正合三角形

$$\Sigma\mathbb{C}\xrightarrow{\Sigma\alpha_{02}}\Sigma C_u\longrightarrow C(\mathbb{Z}/p)\xrightarrow{\alpha_{10}}\mathbb{C}.$$

[26, 引理 5.52] 表明，在$R\ \mathbb{Z}/p\ \cong\mathbb{Z}/\ t_0^p-1$ $\alpha_{02}^H=\ \alpha_{02}\ \in KK^G\ \mathbb{C}\ C_u$ $\alpha_{20}^H=\ \alpha_{20}\ \in KK^G\ C_u\ \mathbb{C}$ $\alpha_{02}^H\otimes\alpha_{20}^H=\ 1-t_0\ =1-t^{p^{m-1}}$ ( ) ( )下，α_{02} 和 α_{20} 满足 $\alpha_{02}\otimes\alpha_{20}=1-t_0\in R(\mathbb{Z}/p)$。因此，令：pb( ) (，)，以及：pb( ) (，)，我们有 pb( )。这将在本小节后文中用到。

s_H 通过 Kasparov 积作用于 $KK^G(C(G/H)\ D)$。根据命题 1.10（2），映射

$$\iota\colon\mathbb{C}\ni\lambda\mapsto\lambda\delta_H\in C(G/H)$$

给出同构 $KK^G(C(G/H)\ D)\ \xrightarrow{\cong}\ K_0^H(D)\ \ \widetilde{x}\ \mapsto\ \iota\otimes\mathrm{Res}_G^H(\widetilde{x})$。通过此同构，$s_H$ 作用于 $K_0^H(D)$。给定 $x,\ y\in K_0^H(D)$，令 $\widetilde{x},\ \widetilde{y}$ 为 $KK^G(C(G/H)\ D)$ 中满足 $\iota\otimes\mathrm{Res}_G^H(\widetilde{x})=x$ 和 $\iota\otimes\mathrm{Res}_G^H(\widetilde{y})=y$ 的元素。则

$$(\iota\otimes\mathrm{Res}_G^H(\widetilde{x}))\hat{\otimes}(\iota\otimes\mathrm{Res}_G^H(\widetilde{y}))=(\iota\hat{\otimes}\iota)\otimes\mathrm{Res}_G^H(\widetilde{x}\hat{\otimes}\widetilde{y})=\iota\otimes\mathrm{Res}_G^H(\mu\otimes(\widetilde{x}\hat{\otimes}\widetilde{y}))$$

在 $K_0^H(D\otimes D)$ 中，其中 $\mu\in KK^G(C(G/H)\ C(G/H)\ \otimes C(G/H))$ 是由 $C(G/H)\ \to C(G/H)\ \otimes C(G/H)\ \ \delta_{gH}\to\delta_{gH}\otimes\delta_{gH}$ 给出的元素。此公式蕴含，乘法 $xy=$(id $\otimes\nu)_*^{-1}(x\hat{\otimes}y)\ \in\ K_0^H(D)$ 对应于 (id $\otimes\nu)_*^{-1}(\mu\otimes(\widetilde{x}\hat{\otimes}\widetilde{y}))\ \in KK^G(C(G/H)\ D)$。此外，$s_H$ 的作用将 x 映射为 $s_H(x):=\iota\otimes\mathrm{Res}_G^H(s_H\otimes\widetilde{x})$。由于 $\mu\otimes(s_H\hat{\otimes}s_H)=s_H\otimes\mu$，

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}\otimes\nu)_*(s_H(x)\cdot s_H(y))&=(\iota\otimes\mathrm{Res}_G^H(s_H\otimes\widetilde{x}))\hat{\otimes}(\iota\otimes\mathrm{Res}_G^H(s_H\otimes\widetilde{y}))\\&=\iota\otimes\mathrm{Res}_G^H(s_H\otimes\mu\otimes(\widetilde{x}\hat{\otimes}\widetilde{y}))\\&=(\mathrm{id}\otimes\nu)_*(s_H(xy)).\end{aligned}$$

因此，s_H 作为环自同构作用于 $K^H(D)$。同理，s_H 也给出 $R(H)$的一个环自同构。

引理 5.8。 s_H 在 $R(H)$ 和 $K_0^H(D)$上作用为恒等映射。因此， $\alpha_{10}^H \otimes \alpha_{01}^H$在 $R(H)$ 和 $K_0^H(D)$ 上的作用等同于乘以 p。

证明。 根据假设 5.5， $K_0^H(D)$ 与 $R(H)$ 的一个局部化同构。因此，若 s_H 在 $R(H)$ 上作用平凡，则根据注 1.16， s_H 在 $K_0^H(D)$ 上也作用平凡。令 $t_H \in R(H)$ 为不可约表示

$$H \cong \mathbb{Z}/p^{m-1} \ni n \mapsto \exp\left(\frac{2n\pi i}{p^{m-1}}\right) \in U(1)$$

H 的不可约表示。由于 $R(H)$ 由 t_H 作为环生成，若 s_H 固定 t_H，则 s_H 在 $R(H)$ 上的作用平凡。命题 1.10（2）中的同构 $R(H) = KK^H(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \cong KK^G(C(G/H)\ \mathbb{C})$ 将 t_H 映射到 G-希尔伯特空间

$$E = \left\{ f \in \ell_2(G) \mid f(g+n) = \exp\left(\frac{2n\pi i}{p^{m-1}}\right) f(g),\ g \in G,\ n \in H \right\}$$

$\sim$ $\sim$，其带有由乘法给出的左 $C(G/H)$-作用。我们将其记为 t_H。元素 $s_H \otimes t_H \in KK^G(C(G/H)\ \mathbb{C})$ 由同一个希尔伯特空间 E 表示，但左 $C(G/H)$-作用不同

$$(\varphi \cdot f)(g) = \varphi(g+1) f(g) \quad (\varphi \in C(G/H),\ f \in E,\ g \in G).$$

$\sim$ $\sim$酉算子 $E \to E, f \mapsto f(\cdot - 1)$ 给出了 $s_H \otimes t_H$与 t_H的等价。这就完成了证明。 ■

注 5.9. 根据命题 1.10（2），同构 $KK^G(C(G/H)\ A) \cong K_0^H(A)$ 由 H-等变映射给出

$$\iota \colon \mathbb{C} \ni z \mapsto z\delta_H \in C(G/H).$$

我们也将由 ι 给出的 $KK^H(\mathbb{C}, C(G/H))$ 中的元素记为 ι。ι 与对角嵌入 $C(G/H) \to B(\ell_2(G/H))$ 的复合，等于将 $\mathbb{C}$嵌入 $B(\ell_2(G/H))$ 的一个一维角中的嵌入。因此

$$\iota \otimes \operatorname{Res}_G^H(\alpha_{10}^H) = \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \in KK^H(\mathbb{C}, \mathbb{C}),$$

也就是说，由 α_{10}^H 诱导的映射 $K_0^G(A) \to KK^G(C(G/H)\ A)$ 可识别为限制映射 res_G^H: $K_*^G(A) \to K_*^H(A)$。此外，根据定义， I_H^G: $K_*^H(A) \to K_*^G(A)$ 就是命题 1.10 （2）中的同构 $K_*^H(A) \xrightarrow{\cong} KK^G(C(G/H)\ A)$ 与映射 $(\alpha_{01}^H)^*$: $KK_*^G(C(G/H)\ A) \to K_*^G(A)$ 的复合。因此，$(\alpha_{01}^H)^*$ 可识别为归纳映射 I_H^G。特别地，由引理 5.6 和引理 5.8,

$$I_H^G \circ \mathrm{res}_G^H = \Phi_{p^m} \colon K_*^G(D) \to K_*^G(D), \quad x \mapsto \Phi_{p^m} x, \tag{5.1}$$
$$\mathrm{res}_G^H \circ I_H^G = p \colon K_0^H(D) \to K_0^H(D), \quad y \mapsto py. \tag{5.2}$$

推论 5.10. 如果 $K_*(D)$ 是唯一的 p-可除的，那么限制映射 $K_*^G(D) \to K_*^H(D)$ 诱导一个同构

$$\Phi_{p^m} K_0^G(D) \cong K_0^H(D).$$

证明. 由于表示环 $R(H)$ 与 $\mathbb{Z}[t]/(t^{p^{m-1}}-1)$ 同构，我们有 $\mathrm{res}_G^H(\Phi_{p^m}) = p$。若对 $x \in K_0^G(D)$ 有 $\mathrm{res}_G^H(\Phi_{p^m}x) = 0$，则 $p\,\mathrm{res}_G^H(x) = 0$，因此 $\mathrm{res}_G^H(x) = 0$，因为根据推论 5.2， D 具有唯一的 p-可除的 K-理论。这意味着根据 (5.1)， $\Phi_{p^m}x = 0$ 。因此，映射 res_G^H: $\Phi_{p^m}K_0^G(D) \to K_0^H(D)$ 是单射。为证明其满射，取$y \in K_0^H(D)$。根据 $\mathrm{res}_G^H(\Phi_{p^m}) = p$ 和 (5.2),

$$\mathrm{res}_G^H(p^{-2}\Phi_{p^m}I_H^G(y)) = p^{-2}\cdot p\cdot \mathrm{res}_G^H\, I_H^G(y) = y$$

成立。这证明了满射性。 ■

目前，我们关注 $K_*(D)$ 为唯一 p-可除的情形。由于根据推论 5.2， D 具有唯一 p-可除的 K-理论，故 $K_*^G(D)$ 分解为

$$K_*^G(D) = \left(1-\frac{\Phi_{p^m}}{p}\right)K_*^G(D) \oplus \frac{\Phi_{p^m}}{p}K_*^G(D)$$

由幂等元 $\Phi_{p^m}/p \in R(G)_P$ 给出，其中 P 是由 1 与 p 生成的 $\mathbb{Z}$ 的乘法子集。直和项 $(1-\Phi_{p^m}/p)K_*^G(D)$ 等于 $F_*^G(D)$，因为它是乘以 Φ_{p^m} 的核。（事实上， $1-\Phi_{p^m}/p$ 等于注 4.5 中定义的 ψ_{p^m} 。）特别地， $F_*^G(D)$ 是以 $1-\Phi_{p^m}/p$ 为单位元的含幺环。另一分量 $(\Phi_{p^m}/p)K_*^G(D)$ 由推论 5.10 同构于 $K_*^H(D)$。因此

$$K_*^G(D) \cong F_*^G(D) \oplus K_*^H(D). \tag{5.3}$$

同样，我们有一个环同构

$$R(G)_P \cong \mathbb{Z}[\zeta_{p^m}, 1/p] \oplus R(H)_P. \tag{5.4}$$

定理 5.11. 如果 $K_*(D)$ 是唯一 p-可除的，那么 $F_1^G(D) = 0$，且 $F_0^G(D)$ 为零，或同构于 $\mathbb{Z}[\zeta_{p^m}]$ 作为环的一个局部化。

证明. 根据推论 5.2， D 是唯一 p-可除的。由定理 4.3，我们得到一个 K¨unneth 公式

$$F_*^G(D) \otimes_{\mathbb{Z}[\zeta_{p^m}]} F_*^G(D) \rightarrowtail F_*^G(D\otimes D) \twoheadrightarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}[\zeta_{p^m}]}(F_*^G(D), F_{*+1}^G(D)).$$

在同构$D\otimes D \cong D$下，第一个同态是 $F_*^G(D)$ 的环乘法。因此它也是满射，并且 $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}[\zeta_{p^m}]}(F_*^G(D)\ F_{*+1}^G(D))$ 消失。特别地，我们得到一个同构

$$\big(F_0^G(D)\otimes_{\mathbb{Z}[\zeta_{p^m}]} F_1^G(D)\big) \oplus \big(F_1^G(D)\otimes_{\mathbb{Z}[\zeta_{p^m}]} F_0^G(D)\big) \cong F_1^G(D),$$

但即使将其整环限制为某个直和项，这个映射仍然是满射。因此，$F_1^G(D)$ 必须为零。

假设 $F_0^G(D)$ 非零。由引理 1.20， $F_0^G(D)$ 是一个平坦 $\mathbb{Z}[\zeta_{p^m}]$-模，并包含 $\mathbb{Z}[\zeta_{p^m}]$ 作为子环。平坦性还意味着包含关系 $F_0^G(D) \subset F_0^G(D)\otimes_{\mathbb{Z}[\zeta_{p^m}]}\mathbb{Q}[\zeta_{p^m}]$。上述 K¨unneth 公式给出了 $\mathbb{Q}[\zeta_{p^m}]$-向量空间及环的同构

$$\big(F_0^G(D)\otimes_{\mathbb{Z}[\zeta_{p^m}]}\mathbb{Q}[\zeta_{p^m}]\big)\otimes_{\mathbb{Q}[\zeta_{p^m}]}\big(F_0^G(D)\otimes_{\mathbb{Z}[\zeta_{p^m}]}\mathbb{Q}[\zeta_{p^m}]\big) \cong F_0^G(D)\otimes_{\mathbb{Z}[\zeta_{p^m}]}\mathbb{Q}[\zeta_{p^m}].$$

取 $\mathbb{Q}[\zeta_{p^m}]$-向量空间 $F_0^G(D)\otimes_{\mathbb{Z}[\zeta_{p^m}]}\mathbb{Q}[\zeta_{p^m}]$ 的一组基 $(e_i)_{i\in I}$，使得对于某个属于 I 的 i_0， e_{i_0} 是单位元。上述公式的左侧有一组基 $(e_i\otimes e_j)_{(i,j)\in I\times I}$，但对于任意 I 中的 i，
$e_i\otimes e_{i_0} - e_{i_0}\otimes e_i$ 都属于这个同构的核。因此，我们得到 $I=\{i_0\}$ 和 $F_0^G(D)$ $\otimes_{\mathbb{Z}[\zeta_{p^m}]}\mathbb{Q}[\zeta_{p^m}] \cong \mathbb{Q}[\zeta_{p^m}]$。 $\mathbb{Q}[\zeta_{p^m}]$ 的平坦性蕴含 $F_0^G(D) \subset \mathbb{Q}[\zeta_{p^m}]$。现在， $F_0^G(D)$ 是 $\mathbb{Z}[\zeta_{p^m}]$ 的一个上环。根据注记 1.22 和定理 1.25， $F_0^G(D)$ 可写成 $\mathbb{Z}[\zeta_{p^m}]$ 的一个局部化。■

推论 **补充引理 5.12**。 若 $G=\mathbb{Z}/p^m$ 和 $K_*(D)$ 是唯一 p-可除的，则定理 *5.4* 成立 .

证明。 令 $P\subset\mathbb{Z}$ 为由 1 和 p生成的乘法子集。回顾 (5.3) 和 (5.4) 中的同构:

$$K_*^G(D)\cong F_*^G(D)\oplus K_*^H(D),$$
$$R(G)_P\cong\mathbb{Z}[\zeta_{p^m},1/p]\oplus R(H)_P.$$

$K_1^G(D)=0$，因为 $F_1^G(D)=0$ 且 $K_1^H(D)=0$。定理 5.11 和假设 5.5 意味着 $K_0^G(D)$ 同构于环 $R(G)_P$ 的一个局部化。■

现在考虑 $K_*(D)$ 不是唯一 p-可除的情形。这种情况更复杂，因为我们不能直接使用定理 4.3。然而，根据推论 5.3 (2)，我们可以将 D 嵌入到另一个强自吸收 G-C*-代数中，该代数具有唯一 p-可除的 K-理论。

推论 5.13。 如果 $K_*(D)$ 不是唯一 p-可除的，那么 $K_1^G(D)=0$。

证明。 这由推论 5.12 和推论 5.3 (2) 得出。 ■

引理 5.14。 假设 $K_*(D)$ 不是唯一的 p-可除的。令 $[\cdot]$ 为自然投影

$$R(H)=\mathbb{Z}[t]/(t^{p^{m-1}}-1)\ni f\mapsto[f]\in\mathbb{Z}[t]/(t^{p^{m-1}}-1,p).$$

若 $f\in R(H)$ 在环 $K_0^H(D)$中可逆，则 $[f]\in\mathbb{Z}[t]/(t^{p^{m-1}}-1,p)$ 可逆。因此，映射 $[\cdot]$ 可扩展为从 $K_0^H(D)$ 到 $\mathbb{Z}[t]/(t^{p^{m-1}}-1,p)$的映射。

证明。 注意，根据假设 5.5， $K_0^H(D)$ 包含 $R(H)$ 作为子环。由于 f 在 $K_0^H(D)$ 中可逆，元素 $f(1)\in\mathbb{Z}$在 $K_0(D)$ 中可逆，因此 $[f(1)]\in\mathbb{Z}/p$可逆。若记 $f=\sum_{i=0}^{p^{m-1}-1}a_it^i$，则

$$\left[f^{p^{m-1}}\right]=\left[\left(\sum_{i=0}^{p^{m-1}-1}a_it^i\right)^{p^{m-1}}\right]=\left[\sum_{i=0}^{p^{m-1}-1}a_i^{p^{m-1}}\right]=\left[\sum_{i=0}^{p^{m-1}-1}a_i\right]=[f(1)]$$

在 $\mathbb{Z}[t]/(t^{p^{m-1}}-1,\ p)$ 中成立。因此， $[f]$ 是可逆的。由于根据假设 5.5， $K_0^H(D)$ 是 $R(H)$ 的局部化，该陈述的最后一部分由注 1.16 得出。■

引理 5.15。 如果 $K_*(D)$ 不是唯一 p-可除的，那么限制映射 $K_0^G(D)\ \to K_0^H(D)$是满射。

证明。 由引理 5.8 和注 5.9，其像包含 $p\cdot K_0^H(D)$，并且也包含$R(H)$，因为限制映射 $R(G)\ \to R(H)$ 是满射。假设 5.5 表明， $K_0^H(D)$ 的任一元素都可以对某个 f_0, $f_1\in R(H)$ 写成一个分式 f_0/f_1，使得 f_1 在 $K_0^H(D)$ 中可逆。由引理 5.14，我们可以取 h_0, $h_1\in R(H)$，使得$h_0f_1-1=ph_1$ 成立。现在我们有

$$\frac{f_0}{f_1}=h_0f_0-ph_1\frac{f_0}{f_1}\in R(H)+p\cdot K_0^H(D)\subset\operatorname{Im}\left(\operatorname{res}_G^H\colon K_*^G(D)\to K_*^H(D)\right).$$

■

设 α 设$_{02}^{H}$， α_{20}^{H} 为注 5.7 中定义的元素。存在两个长正合列 s

$$KK_1^G(C(G/H),D)\to KK^G(C_u,D)\overset{(\alpha_{02}^H)^*}{\to} K^G(D)\overset{(\alpha_{10}^H)^*}{\to} KK^G(C(G/H),D),$$
$$KK_1^G(C(G/H),D)\leftarrow KK^G(C_u,D)\overset{(\alpha_{20}^H)^*}{\leftarrow} K^G(D)\overset{(\alpha_{01}^H)^*}{\leftarrow} KK^G(C(G/H),D).$$

现在，由注 5.9 和引理 5.15，$(\alpha_{10}^H)^*$ 是满射。由 $(\alpha_{10}^H)^*\circ(\alpha_{01}^H)^*=p$ （引理 5.8）和推论 5.3（2），$(\alpha_{01}^H)^*$ 是单射。此外，由命题 1.10（2）和假设 5.5， $KK_1^G(C(G/H)\ D)\cong K_1^H(D)=0$。由此可知 $(\alpha_{02}^H)^*$ 是单射且 $(\alpha_{20})^*$是满射。因此，我们得到如下短正合列

$$KK^G(C_u,D)\overset{(\alpha_{02}^H)^*}{\rightarrowtail} K_0^G(D)\overset{(\alpha_{10}^H)^*}{\twoheadrightarrow} KK^G(C(G/H),D),$$
$$KK^G(C_u,D)\overset{(\alpha_{20}^H)^*}{\twoheadleftarrow} K_0^G(D)\overset{(\alpha_{01}^H)^*}{\hookleftarrow} KK^G(C(G/H),D).$$

由注 5.7， $\alpha_{02}^H\otimes\alpha_{20}^H=1-t^{p^{m-1}}\in R(G)\cong\mathbb{Z}[t]/(t^{p^m}-1)$。将其与上述正合列结合，在 $K_0^G(D)$ 上，

$$\operatorname{Ker}(1-t^{p^{m-1}})=\operatorname{Ker}(\alpha_{20}^H)^*=\operatorname{Im}(\alpha_{01}^H)^*=\operatorname{Im}(\alpha_{01}^H)^*(\alpha_{10}^H)^*=\operatorname{Im}\Phi_{p^m},\tag{5.5}$$
$$\operatorname{Im}(1-t^{p^{m-1}})=\operatorname{Im}(\alpha_{02}^H)^*=\operatorname{Ker}(\alpha_{10}^H)^*=\operatorname{Ker}(\alpha_{01}^H)^*(\alpha_{10}^H)^*=\operatorname{Ker}\Phi_{p^m},\tag{5.6}$$

其中两个等式最后的等号均由引理 5.6 得出。因此存在 $\mathbb{Z}[\zeta_{p^m}]$-模的同构

$$F_0^G(D)=\operatorname{Ker}\Phi_{p^m}=\operatorname{Im}(1-t^{p^{m-1}})\cong K_0^G(D)/\operatorname{Ker}(1-t^{p^{m-1}})=K_0^G(D)/\operatorname{Im}\Phi_{p^m},$$

其中中间的同构由乘法映射给出

$$1-t^{p^{m-1}}\colon K_0^G(D)/\operatorname{Ker}(1-t^{p^{m-1}})\to\operatorname{Im}(1-t^{p^{m-1}}).$$

注意，该同构并不保持乘法结构。事实上，当 D 不具有唯一 p-可除的 K-理论时，$F_0^G(D)$ 不是含幺的。然而，模 $K_0^G(D)/\operatorname{Im}\Phi_{p^m}$ 始终构成一个含幺环。

引理 5.16. 若 $K_*(D)$ 不是唯一 p-可除的，则 $K_0^G(D)/Im\Phi_{p^m}$ 包含 $\mathbb{Z}[\zeta_{p^m}]$作为子环。

证明. 与上文类似的论证给出 $F_0^G(\mathbb{C})\cong\mathbb{Z}[\zeta_{p^m}]=R(G)/\operatorname{Im}\ \Phi_{p^m}$。设 $\nu\colon\mathbb{C}\to D$ 为含幺嵌入。 $\nu_*\colon R(G)\to K_0^G(D)$ 诱导一个环同态 $\mathbb{Z}[\zeta_{p^m}]\to K_0^G(D)/\operatorname{Im}\Phi_{p^m}$。由于该交换图

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{Z}[\zeta_{p^m}] & \xrightarrow{1-t^{p^{m-1}}} & F_0^G(\mathbb{C})\\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\nu_*}\\ K_0^G(D)/\operatorname{Im}\Phi_{p^m} & \xrightarrow{1-t^{p^{m-1}}} & F_0^G(D)\end{array}$$

交换，则只需证明 $\nu_*\colon\ F_0^G(\mathbb{C})\to F_0^G(D)$ 是单射。若 $F_0^G(D)\neq0$，则由推论 5.3 (2) 得 $F_0^G(D\otimes M_{p^\infty})\neq0$，且由定理 5.11 知 $F_0^G(D\otimes M_{p^\infty})$ 包含 $F_0^G(\mathbb{C})$。由于映射 $F_0^G(\mathbb{C})\to F_0^G(M_{p^\infty}\otimes D)$ 经由 $F_0^G(D)$ 分解，故当 $F_0^G(D)$ 非零时， $F_0^G(D)$ 包含 $F_0^G(\mathbb{C})$。

设 $F_0^G(D)=0$。由此可得 $\mathrm{Im}(1-t^{p^{m-1}})=0$，从而 $\mathrm{Ker}(1-t^{p^{m-1}})$ 等于 $K_0^G(D)$。此外，由于 $\mathrm{Ker}\ \Phi_{p^m}=F_0^G(D)=0$ 且 $\mathrm{Im}\ \Phi_{p^m}=\mathrm{Ker}(1-t^{p^{m-1}})=K_0^G(D)$，用 Φ_{p^m} K_0^G D $1-$ 在 $(\ )$ 上的乘法是双射。另一 $t^{p^{m-1}}$ D 方面，等式 $\mathrm{Ker}(\ )=K_0^G(\ )$ 表明 $\Phi_{p^m}=p$ 在 D $K_0^G(\ )$ 上。这与 $K_0^G(D)$ 并非唯一 p-可除的假设相矛盾。■

推论 5.3 (2) 给出了一个包含关系

$$K_0^G(D)/\mathrm{Im}\Phi_{p^m}\subset K_0^G(D\otimes M_{p^\infty})/\mathrm{Im}\Phi_{p^m}\cong F_0^G(D\otimes M_{p^\infty}).$$

因此，由定理 5.11 和引理 5.16 $K_0^G(D)/\mathrm{Im}\Phi_{p^m}$，可知它是 $\mathbb{Z}[\zeta_{p^m}]$ 的一个上环。这意味着有如下推论。

推论 5.17. 如果 $K_*(D)$ 不是唯一 p-可除的，那么环 $K_0^G(D)/\operatorname{Im}\Phi_{p^m}$ 同构于 $\mathbb{Z}[\zeta_{p^m}]$的一个局部化。

回忆一下，p^m Φ_{p^m} $\Phi_{p^m}\ t=1+t^{p^{m-1}}+$ 阶分圆多项式定义为 $\cdots+t^{(p-1)p^{m-1}}$ $(\ )$。公式

$$\Phi_{p^m}(t)-p=(t^{p^{m-1}}-1)(t^{(p-2)p^{m-1}}+2t^{(p-3)p^{m-1}}+\cdots+p-1)$$

给出了自然投影 $\mathbb{Z}[t]/(\Phi_{p^m}(t)\ p)\to\mathbb{Z}[t]/(t^{p^{m-1}}-1,p)$。将其与投影 $\mathbb{Z}[t]/(\Phi_{p^m}(t))\to\mathbb{Z}[t]/(\Phi_{p^m}(t)\ p)$复合后，我们得到映射

$$\pi\colon\mathbb{Z}[\zeta_{p^m}]=\mathbb{Z}[t]/(\Phi_{p^m}(t))\to\mathbb{Z}[t]/(\Phi_{p^m}(t),p)\to\mathbb{Z}[t]/(t^{p^{m-1}}-1,p).$$

注意，交换图

$$\begin{array}{ccc} R(G)=\mathbb{Z}[t]/(t^{p^m}-1) & \xrightarrow{\mathrm{res}_G^H} & R(H)=\mathbb{Z}[t]/(t^{p^{m-1}}-1) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [\cdot]} \\ \mathbb{Z}[\zeta_{p^m}] & \xrightarrow{\quad\pi\quad} & \mathbb{Z}[t]/(t^{p^{m-1}}-1,p) \end{array}$$

可交换，其中 $[\cdot]$ 是引理 5.14 中定义的映射。

引理 5.18. 假设 $K_*(D)$ 不是唯一的 p-可除的。若 $f\in\mathbb{Z}[\zeta_{p^m}]$ 在 $K_0^G(D)/\operatorname{Im}\Phi_{p^m}$中可逆，则 $\pi(f)\in\mathbb{Z}[t]/(t^{p^{m-1}}-1,p)$ 也可逆。因此，映射 π 可扩展为从 $K_0^G(D)/\operatorname{Im}\Phi_{p^m}$ 到 $\mathbb{Z}[t]/(t^{p^{m-1}}-1,p)$ 的映射。

$\sim$ $\sim$ $\sim$证明。设 $f,f^{-1}\in K_0^G(D)$ 分别是 $f,f^{-1}\in K_0^G(D)/\mathrm{Im}\Phi_{p^m}$ 的提升。由于 $f^{-1}f-$ $\sim$ $\sim$ 1 属于 $\mathrm{Im}\ \Phi_{p^m}$，我们可以取满足 $f^{-1}f-1=\Phi_{p^m}h$ 的 $h\in K_0^G(D)$。将其限制到 $K_0^H(D)$ 上，得到

$$\mathrm{res}_G^H(\widetilde{f^{-1}}\widetilde{f}-1)=p\cdot\mathrm{res}_G^H(\widetilde{h}).$$

由该等式和引理 5.14 可得 $[\mathrm{res}_G^H(\widetilde{f^{-1}}\widetilde{f}-1)]=0$ 属于 $\mathbb{Z}[t]/(t^{p^{m-1}}-1,\ p)$。因此 $\sim$ $\sim\pi(f)=[\mathrm{res}_G^H(f)]$ 有逆元 $[\mathrm{res}_G^H(f^{-1})]$。该陈述的最后一部分由推论 5.17 和注 1.16 得出。■

命题 论 5.19. 含幺嵌入 $\nu\colon\ \mathbb{C}\to D$ 给出了一个嵌入 $R(G)\hookrightarrow K_0^G(D$ $)$.

证明。我们已经知道 $\nu_*|_{F_0^G(\mathbb{C})}\colon F_0^G(\mathbb{C}) \to K_0^G(D)$ 是单射（引理 5.16）。取 $f \in \operatorname{Ker}\ \nu_*$。于是 $(t^{p^{m-1}}-1)f \in \operatorname{Ker}\ \nu_* \cap F_*^G(D) = 0$，因此 f 属于 $\operatorname{Ker}(t^{p^{m-1}}-1)$。由 (5.5) 和注 5.9，

$$\operatorname{Ker}(t^{p^{m-1}}-1) = \operatorname{Im}(\alpha_{01}^H)^* = \operatorname{Im}\left(I_H^G\colon R(H) \to R(G)\right).$$

因此，我们可以选择 $h \in R(H)$，使得 $f = I_H^G(h)$。(5.2) 推出

$$0 = \operatorname{res}_G^H(\nu_*(f)) = \nu_*(\operatorname{res}_G^H(f)) = \nu_*(\operatorname{res}_G^H I_H^G(h)) = \nu_*(p \cdot h)$$

属于 $K_0^H(D)$。由假设 5.5，$\nu_*\colon R(H) \to K_0^H(D)$ 是单射。因此 $p \cdot h = h = 0$ 属于 $R(H)$，且 $f = I_H^G(h) = 0$。■

引理 *5.20*。若 $f \in \mathbb{Z}[\zeta_{p^m}]$ 和 $h \in R(H)$ 满足 $[f] = \pi(h)$，则存在一个元素 $f \in R(G)$，使得 $f + \operatorname{Im}\ \Phi_{p^m} = f$ 且 $\operatorname{res}_G^H(f) = h$。此外，若 $K_*(D)$ 不是唯一 p-可除的，则 f 在 $K_0^G(D)/\operatorname{Im}\Phi_{p^m}$ 中可逆，且 h 在 $K_0^H(D)$ 中可逆，那么 f 在 $K_0^G(D)$ 中可逆。

证明。取 $F \in R(G)$，使得 $F + \operatorname{Im}\ \Phi_{p^m} = f$。于是 $\pi(\operatorname{res}_G^H(F) - h) = 0$ 且

$$\operatorname{res}_G^H(F) - h = p \cdot h'$$

对于某个 $h' \in R(H)$。令 $f_1 := F - I_G^H(h')$。由注 5.9 和 (5.5)，由于 $\operatorname{Im} I_H^G = \operatorname{Im}\ \Phi_{p^m}$，可得 $f + \operatorname{Im}\ \Phi_{p^m} = f$。此外，由 (5.2)，$\operatorname{res}_G^H(f) = \operatorname{res}_G^H(F) - p \cdot h' = h$。

If f 属于 $K_0^G(D)$ 是 f 注 5.9 和 (5.5) 表明 的任意提升，则 $\widetilde{f^{-1}}$

$$\widetilde{f^{-1}}\widetilde{f} - 1 = I_H^G(y)$$

对于某个 $y \in K_0^H(D)$ 成立。于是 $f^{-1} - I_H^G(y \cdot h^{-1})$ 是 f 的逆元。事实上，由命题 1.15，$I_H^G(y \cdot h^{-1}) \cdot f = I_H^G(y \cdot h^{-1} \cdot \operatorname{res}_G^H(f)) = I_H^G(y)$，因此我们有

$$\left(\widetilde{f^{-1}} - I_H^G(y \cdot h^{-1})\right)\widetilde{f} = 1 + I_H^G(y) - I_H^G(y) = 1.$$

■

定理 5.21。若 $G = \mathbb{Z}/p^m$ 和 $K_*(D)$ 不是唯一的 p-可除，则定理 *5.4* 成立。

证明。令 $S = S_D$ 为 $K_0^G(D)$ 中可逆元素的集合。由推论 5.13 和命题 5.19 可知，我们只需证明 $K_0^G(D)$ 与 $R(G)_S$ 同构。由于 $\nu_*\colon R(G) \to K_0^G(D)$ 根据命题 5.19 是单射，ν_* 由注 1.16 可扩展为单射 $R(G)_S \to K_0^G(D)$。我们证明它是满射。

取 $x \in K_0^G(D)$。由推论 5.17，存在一些 $f_0, f_1 \in \mathbb{Z}[\zeta_{p^m}]$，使得 f_1 在 $K_0^G(D)/\operatorname{Im}\Phi_{p^m}$ 中可逆，并且

$$x + \operatorname{Im}\Phi_{p^m} = \frac{f_0}{f_1}$$

在 $K_0^G(D)/\operatorname{Im}\Phi_{p^m}$ 中成立。假设 5.5 还允许我们取 $h_0, h_1 \in R(H)$，使得 h_1 在 $K_0^H(D)$ 中可逆，并且

$$\operatorname{res}_G^H(x) = \frac{h_0}{h_1}$$

在 $K_0^H(D)$ 中成立。通过针对 $n = \left|(\mathbb{Z}[t]/(t^{p^{m-1}}-1,p))^\times\right|$ 将 (f_0, f_1) 替换为 $(f_0 \cdot f_1^{n-1}, f_1^n)$，并将 (h_0, h_1) 替换为 $(h_0 \cdot h_1^{n-1}, h_1^n)$，我们可以假定 f_1 与 h_1 满足 $[f_1] = \pi(h_1) = 1$ 在$\mathbb{Z}[t]/(t^{p^{m-1}}-1,p)$。由引理 5.20，存在元素 $\widetilde{f}_1 \in S$，使得 $\widetilde{f}_1$+Im $\Phi_{p^m} =\sim \quad \sim \quad \sim f_1$ 且 $\mathrm{res}_G^H(f_1) = h_1$。由于 $x = f_1 x/f_1$，尚需证明 $f_1 x$ 属于 $R(G)$。

令 C_ν 为含幺嵌入 $\nu\colon \mathbb{C} \to D$ 的映射锥。由命题 5.19，存在一个短正合列

$$R(G) \overset{\nu_*}{\rightarrowtail} K_0^G(D) \twoheadrightarrow K_1^G(C_\nu).$$

由推论 5.3 (1)， $K_*^G(C_\nu)$ 唯一地被 p 整除。因此， $K_1^G(C_\nu)$ 可由幂等元 Φ_{p^m}/p 分解为

$$\begin{aligned} K_1^G(C_\nu) &= \left(1 - \frac{\Phi_{p^m}}{p}\right) K_1^G(C_\nu) \oplus \frac{\Phi_{p^m}}{p} K_1^G(C_\nu) \\ &\cong F_1^G(C_\nu) \oplus \operatorname{Im}\left(\operatorname{Res}_G^H \colon K_1^G(C_\nu) \to K_1^H(C_\nu)\right). \end{aligned}$$

因此，元素 $z \in K_0^G(D)$ 属于 Im ν_*，当且仅当 $[z]$ 属于 $\mathbb{Z}[\zeta_{p^m}]$，且 $\mathrm{Res}_G^H(z)$ 属于$R(H)$。由于 $[\widetilde{f}_1 x] = f_0$ 和 $\mathrm{Res}_G^H(\widetilde{f}_1 x) = h_0$，元素 $\widetilde{f}_1 x$ 属于 Im ν_*。 ■

定理 5.4 由推论 5.12 和定理 5.21 得出。

5.2 EPPO 群的作用

本文的主要定理如下。

定理 5.22. 设 G 为 *EPPO* 群，且 D 为属于 G-等变 ***bootstrap*** 类的强自吸收 G-C^*-代数。则对每个循环子群 $K \subset G$， D 关于 $C(G/K)$ 满足局部化条件。此外，命题 ***3.1*** 的 M^{S_D}与 D之间存在一个KK^G-等价，它将 $[1_{M^{S_D}}] \in K_0^G(M^{S_D})$映射到 $[1_D] \in K_0^G(D)$。

在概述本定理的证明策略之前，我们先回顾以下概念。

定义 5.23 （参见 [38, 10.1 与 10.5]）. 设 G 为有限群。对素数p， G的子群称为 p-初等 ，如果它是一个 p-群与一个阶与 p互素的循环群的直积。 G的子群 H 称为初等 ，如果对某个 p， H 是p-初等的。

当 G 是 EPPO 群时， G 的初等子群就是素数幂阶的子群。关注初等子群的原因由下述定理给出（例如见 [38, 10.5], 的定理 19）。

定理 5.24 （布劳尔定理）。 设 G 为有限群， X 为 G的初等子群集合。则映射

$$\bigoplus_{H \in X} I_H^G \colon \bigoplus_{H \in X} R(H) \to R(G)$$

是满射。

下文中， G表示一个 EPPO 群， D 表示 G等变 bootstrap 类中的一个强自吸收 G-C*-代数。对于每个子群 $H \subset G$， $\nu_*^H\colon R(H) \to K_0^H(D)$ 表示由含幺嵌入 $\nu\colon \mathbb{C} \to D$ 诱导的映射，而S_D^H 表示满足 $\nu_*^H(f) \in K_0^H(D)$ 可逆的元素 $f \in R(H)$ 集合。定理 5.22 的证明策略如下。根据定理 5.4， $K_*^H(D) \cong K_*^H(\mathbb{C})^{S_D^H}$ 对每个循环子群$H \subset G$都成立。我们证明 $S_D^H = \mathrm{res}_G^H(S_D^G)$，其中 $\overline{\mathrm{res}_G^H(S_D^G)}$ 是 $\mathrm{res}_G^H(S_D^G)$ 的饱和化（推论 5.27）。然后

$$KK_*^G(C(G/H), D) \cong K_*^H(D) \cong K_*^H(\mathbb{C})_{\mathrm{res}_G^H(S_D^G)} \cong KK_*^G(C(G/H), \mathbb{C})_{S_D^G}.$$

因此， D 关于 $C(G/H)$满足局部化条件。由命题 3.5，它蕴含定理 5.22。

设 $K \subset G$ 为一个循环子群。容易看出 $\mathrm{res}_G^K(S_D) \subset S_D^K$ 为证明$\sim S_D^K = \mathrm{res}_G^K(\overline{S_D^G})$，对每个 $f \in S_D^K$，我们希望得到 $f \in S_D^G$，使得 $\mathrm{res}_G^K(f)$ 是 $\sim f$的倍数。若存在这样的元素 f，则元素 $f_H \coloneqq \mathrm{res}_G^H(f) \in S_D^H$所构成的族$(f_H)_{H\in X}$（其中 X 是 G的初等子群集合）满足

$$\mathrm{res}_H^L(f_H) = f_L \quad (L \subset H), \tag{5.7}$$
$$\mathrm{con}_{g,H}(f_H) = f_{{}^gH} \quad (g \in G). \tag{5.8}$$

并且 f_K 是 f 的倍数（注意 $K \in X$ ，因为 EPPO-$\widetilde{}$群的每个循环子群都具有素数幂阶）。反之， f 是通过归纳法 I_H^G将这样的一族粘合而构造的： $R(H) \to R(G)$。下述定理保证了这样的$(f_H)_{H\in X}$的存在性，并将在下一小节中证明。

定理 5.25. 对于每个循环子群 $K \subset G$ 和每个元素 $f \in S_D^K$，存在一个元素族 $(f_H)_{H\in X}$ $f_H \in S_D^H$ ，满足 *(5.7)-(5.8)*，使得 f_K 是f的倍数。

有了定理 5.25，我们可以证明如下结论。

定理 5.26. 对于每个循环子群 $K \subset G$ 和每个元素 $f \in S_D^K$，存在 $\sim f \in S_D^G$，使得 $\mathrm{res}_G^K(f)$ 是 f的倍数。

证明. 取定理 5.25 中的元素族 $(f_H)_{H\in X}$ 。由定理 5.24，存在一个元素族 $(\phi_H)_{H\in X}$ $\phi_H \in R(H)$，满足 $\sum_{H\in X} I_H^G(\phi_H) = 1$。利用这一点，定义

$$\widetilde{f} \coloneqq \sum_{H\in X} I_H^G(\phi_H f_H).$$

$\widetilde{}$我们证明，对于每个循环子群 $L \subset G$，$\mathrm{res}_G^L(f) = f_L$。于是，由于 $f_L \in S_L^D$，$\sim$ $\widetilde{}$，推论 2.9 得出 $f \in S_D^G$。此外，$\mathrm{res}_G^K(f) = f_K$ 是 f 的倍数。$\widetilde{}$剩下需要证明的是，对于每个循环子群 $L \subset G$，$\mathrm{res}_G^L(f) = f_L$。根据命题 1.15，

$$\mathrm{res}_G^L(\widetilde{f}) = \sum_{H\in X} \sum_{g\in L\backslash G/H} I_{L\cap {}^gH}^L \circ \mathrm{con}_{g,L^g\cap H} \circ \mathrm{res}_H^{L^g\cap H}(\phi_H f_H).$$

B由引理 5.25 可知，$\mathrm{con}_{g,L^g\cap H}\circ \mathrm{res}_H^{L^g\cap H}(f_H) = f_{L\cap {}^gH} = \mathrm{res}_L^{L\cap {}^gH}(f_L)$。因此

$$\begin{aligned}
&\sum_{g\in L\backslash G/H} I_{L\cap {}^gH}^L \circ \mathrm{con}_{g,L^g\cap H}\circ \mathrm{res}_H^{L^g\cap H}(\phi_H f_H)\\
&= \sum_{g\in L\backslash G/H} I_{L\cap {}^gH}^L\big(\mathrm{con}_{g,L^g\cap H}\circ \mathrm{res}_H^{L^g\cap H}(\phi_H)\cdot \mathrm{res}_L^{L\cap {}^gH}(f_L)\big)\\
&= \sum_{g\in L\backslash G/H} I_{L\cap {}^gH}^L \circ \mathrm{con}_{g,L^g\cap H}\circ \mathrm{res}_H^{L^g\cap H}(\phi_H)\cdot f_L\\
&= \mathrm{res}_G^L \circ I_H^G(\phi_H)\cdot f_L,
\end{aligned}$$

其中第二个和第三个等式由命题 1.15 得出。因此

$$\mathrm{res}_G^L(f_1) = \sum_{H\in X} \mathrm{res}_G^L \circ I_H^G(\phi_H)\cdot f_L = f_L$$

因为 $\sum_{H\in X} I_H^G(\phi_H) = 1$。 ■

上述定理表明，自然映射 $R(K) \to R(K)_{\mathrm{res}_G^K(S_G^D)}$ 诱导映射 $R(K)_{S_K^D} \to R(K)_{\mathrm{res}_G^K(S_G^D)}$。由于 $\mathrm{res}_G^K(S_G^D) \subset S_K^D$，还存在自然映射$R(K)_{\mathrm{res}_G^K(S_G^D)} \to R(K)_{S_K^D}$。它们互为逆映射。因此，以下结论成立。

推论 5.27. 对于每个循环子群 $K\subset G$，都有 $S_D^K = \text{限制}_G^K(S_D^G)$。

证明. 前述定理表明，$\mathrm{res}_G^K(S_D^G)$ 包含 S_D^K。由于 S_D^K 是饱和的，且 $\mathrm{res}_G^K(S_D^G) \subset S_D^K$，我们便得到所需结论。■

现在我们证明主定理。

定理 5.22 的证明。设 K 是 G 的一个循环子群。命题 1.10（2）给出同构 $KK_*^G(C(G/K)\ \mathbb{C})_{S_D^G} \cong K_*^K(\mathbb{C})_{\mathrm{res}_G^K(S_D^G)}$ 和 $KK_*^G(C(G/K)\ D) \cong K_*^K(D)$。由定理 5.4 和推论 5.27，存在一个同构 $K_*^K(\mathbb{C})_{\mathrm{res}_G^K(S_D^G)} \cong K_*^K(D)$，使得它与自然映射 $K_*^K(\mathbb{C}) \to K_*^K(\mathbb{C})_{\mathrm{res}_G^K(S_D^G)}$ 的复合为 $\nu_*\colon K_*^K(\mathbb{C}) \to K_*^K(D)$。因此，$D$ 满足关于 $C(G/K)$ 的局部化条件。由推论 3.3]，$\mathcal{B}_G$ 由对象 $C(G/K)$ 生成，其中 $K\subset G$ 是循环子群。因此，命题 3.5 给出了所需的 KK^G-等价 M^{S_D} 与 D。■

作为定理 5.22 的推论，$S_D = S_D^G$ 是保持单位元的强自吸收 $D\in\mathcal{B}_G$ 的 KK^G-等价类的完备不变量。

推论 5.28。设 G 为一个 *EPPO* 群，且 $D_i = (D_i, \alpha_i)\ i = 1、2)$ 是属于 $\mathcal{B}_G$ 的两个强自吸收 G-C*-代数。

(1) 存在一个 KK^G-等价，将 D_1 中的 $[1_{D_1}] \in K_0^G(D_1)$ 映射到 $[1_{D_2}] \in K_0^G(D_2)$，当且仅当 $S_{D_1} = S_{D_2}$。

(2) 设 D_i 为单位*Kirchberg*代数，且 α_i 对 $i = 1、2$ 是等距移位吸收的。那么，当且仅当 $S_{D_1} = S_{D_2}$ 时，D_1 与 D_2 共轭。

证明。(1) 显然，若 D_1 和 D_2 是保持单位元的 KK^G-等价，则 $S_{D_1} = S_{D_2}$。反向结论由定理 5.22 和命题 3.5 (2) 得出。

(2) 根据 [15, 推论 6.4 (ii)], ，紧群 G 上的两个等距移位吸收作用共轭，当且仅当它们是保持单位元的 KK^G-等价。因此，该结论由 (1) 得出。

■

将这一结果与命题 3.1 结合，可得饱和乘法子集 $S \subset R(G)$ 的集合与强自吸收 G-C*-代数 D in $\mathcal{B}_G$ 的保持恒等元KK^G-等价类之间的一一对应。该对应由 $S \mapsto M^S$ 和 $D \mapsto S_D$ 给出。

5.3 定理 5.25 的证明

本小节旨在证明定理 5.25。与上一小节一样，G 表示一个 EPPO 群，而 D 是 G-等变 bootstrap 类 $\mathcal{B}_G$ 中的强自吸收 G-C*-代数。固定一个循环子群 $K \subset G$ 和一个元素 $f \in S_D^K$。

设 $|G| = p_1^{r_1} \cdots p_m^{r_m}$ 是 $|G|$ 的素因数分解。重新编号后，我们可以假设存在 $n \geq 0$，使得对于所有 $1 \leq i \leq n$， $K_*(D)$ 都是唯一 p_i-可除的。若对于任意 i， $K_*(D)$ 都不是唯一 p_i-可除的，则令 $n = 0$。令 X_i 为 G 的p_i-子群集合， $Y_i \subset X_i$ 为 G 的循环 p_i-子群集合。存在唯一的数 k，满足 $K \in Y_k$。在这种情况下，定理 5.25 的陈述可改述如下。

定理 5.29。 存在族 $(f_H^{(i)})_{H \in X_i} (i = 1, \ldots, m)$ 元素 $f_{(i)H} \in S_D^H$，使得每个 $(f_{(i)H})_{H \in X_i}$ 都满足 *(5.7)-(5.8)*， $f_{(k)K}$ 是 f 的倍数，且 $f_{\{e\}}^{(1)} = \cdots = f_{(m)\{e\}}$。

我们的第一步是求得 $(f_{(k)H})_{H \in X_k}$。我们先考虑 $K_*(D)$ 不是唯一 p_k-可除的情形。

引理 5.30。 假设 $n < k \leq m$。那么存在一个族 $(f_H)_{H \in Y_k}$ 元素$f_H \in S_D^H$，满足 *(5.7)*，并且 f_K 是 f 的倍数， $f_{\{e\}}$ 是$\mathrm{res}_K^{\{e\}}(f)$ 的幂，且对每个 H，$f_H - 1 \in p_k \cdot R(H)$。

证明。 我们由 r 归纳得到 f_H，其中 $|H| = p_k^r$。当 $r = 0$ 时，阶为 p_k^0 的循环子群只有平凡子群 $\{e\}$。注意，$\mathrm{res}_K^{\{e\}}(f)$ 在 $K_0(D)$ 中可逆。由于 $K_0(D)$ 不是唯一的 p_k-可除的，$\mathrm{res}_K^{\{e\}}(f) \in R(\{e\}) \cong \mathbb{Z}$ 与 p_k 互素。因此 $\mathrm{res}_K^{\{e\}}(f)^{p_k - 1} - 1 \in p_k \cdot \mathbb{Z}$。定义 $f_{\{e\}} := \mathrm{res}_K^{\{e\}}(f)^{p_k - 1}$。

假设对于所有阶为 $|H| \leq p_k^{r-1}$ 的 $H \in Y_k$，我们都能取满足陈述条件的 f_H，并且存在某个 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 $H \subset K$ 都有 $f_H = \mathrm{res}_K^H(f)^N$。固定满足 $|L| = p^r$ 的 $L \in Y_k$。注意，

$$[f_{p_k L}] = 1 \in \mathbb{Z}[t]/(t^{p_k^{r-1}} - 1, p_k),$$

其中 $[f_{p_k L}]$ 是 $f_{p_k L}$ 在自然投影 $R(p_k L) = \mathbb{Z}[t]/(t^{p_k^{r-1}} - 1) \to \mathbb{Z}[t]/(t^{p_k^{r-1}} - 1, p_k)$下的像。若 $L \subset K$，则令 $\widetilde{f_L} := \mathrm{res}_K^L(f)^N$。否则，由引理 5.20，我们可以取 $\widetilde{f_L} \in S_D^L$，使得$\mathrm{res}_L^{p_k L}(\widetilde{f_L}) = f_{p_k L}$。在 $R(L) \cong \mathbb{Z}[t]/(t^{p_k^r} - 1)$下，我们可以写成$\widetilde{f_L} = \sum_{i=0}^{p_k^r - 1} a_i t^i$。然后，模 p_k，

$$(\widetilde{f_L})^{p_k^r} \equiv \sum_{i=0}^{p_k^r - 1} a_i^{p_k^r} t^{i p_k^r} = \sum_{i=0}^{p_k^r - 1} a_i^{p_k^r} \equiv \sum_{i=0}^{p_k^r - 1} a_i.$$

最右边的整数等于$\mathrm{res}_L^{\{e\}}(\widetilde{f_L}) = f_{\{e\}}$，因为$\mathrm{res}_L^{\{e\}}$：$R(L) \to R(\{e\})$被等同$\widetilde{\ }$于在1处求值映射 $\mathbb{Z}[t]/(t^{p_k^r}-1) \to \mathbb{Z}$。由此可得$(f_L)^{p_k^r} \equiv 1$ 模 p_k。

$\widetilde{\ }$一旦对所有满足 $|L| = p^r$的 L 都已得到 f_L，我们令 $f_L := (f_L)^{p_k^r}$。对于满足$|H| \le p_k^{r-1}$的 $H \in Y_k$，将 f_H替换为$(f_H)^{p_k^r}$。

通过反复迭代这一过程，我们得到所需的族 $(f_H)^{H\in Y_k}$。 ■

引理 5.31. 引理 *5.30* 中的族 $(f_H)_H$可以选取得使得 $(f_H)_H$满足 *(5.8)*，并且对所有 H，$f_H - 1 \in p_k^{r_k} \cdot R(H)$。

证明。取 $(f_H)_H$，如引理 5.30 所述。对于 $r \in \mathbb{Z}_{>0}$,

$$\begin{aligned}(f_H)^{p_k^r} - 1 &= ((f_H)^{p_k^{r-1}} - 1 + 1)^{p_k} - 1 \\ &= ((f_H)^{p_k^{r-1}} - 1)^{p_k} + \sum_{i=1}^{p_k-1} \binom{p_k}{i} ((f_{1,H})^{p_k^{r-1}} - 1)^i.\end{aligned}$$

由于 $f_H - 1 \in p_k \cdot R(H)$，我们有 $(f_H)^{p_k} - 1 \in p_k^2 \cdot R(H)$。归纳地，上述公式推出 $(f_H)^{p_k^r} - 1 \in p_k^{r+1} \cdot R(H)$。因此，用 $\prod_{g\in G}$ 替换 f_H $\mathrm{con}_{g,\ H^g}((f_{H^g})^{p_k^{r_k-1}})$ 后，族 $(f_H)_H$ 便构成所需的族。■

我们将通过扩充前一个引理中的族，得到所需的族 $(f_H)^{H\in X_k}$；为此还需要几个引理。

对于子群 $H \subset E \subset G$，$N_E(H)$ 表示 H 在 E 中的正规化子。

引理 5.32. 设 $E \in X_k$，$H \subset E$ 为一个循环子群，$L \subset E$ 为一个子群。设$(f_H)^{H\in Y_k}$ 为由引理 *5.31* 得到的一个族。

(1) 若 $H \not\subset L$，则

$$\mathrm{res}_H^{H\cap L}\left(\frac{f_H - 1}{|N_E(H)/H|} - I_{p_kH}^H\left(\frac{f_{p_kH} - 1}{|N_E(H)/p_kH|}\right)\right) = 0.$$

(2)

$$\begin{aligned}&\mathrm{res}_E^L\, I_H^E\left(\frac{f_H - 1}{|N_E(H)/H|} - I_{p_kH}^H\left(\frac{f_{p_kH} - 1}{|N_E(H)/p_kH|}\right)\right) \\ &= \sum_{g\in L\backslash E/H,\ {}^gH\subset L} I_{{}^gH}^L\left(\frac{f_{{}^gH} - 1}{|N_E(H)/H|} - I_{{}^gp_k{}^gH}^{{}^gH}\left(\frac{f_{{}^gpH} - 1}{|N_E(H)/p_kH|}\right)\right).\end{aligned}$$

证明。(1 $H \not\subset L$ $H\cap L \subsetneq H$ H p_k $H\cap L =$) 推出 。
$p_kH\cap L$ 5 8 5 9, ${}^{p_kH}_{H} \circ I^H_{p_kH}$ R p_kH $\to$
由于 是循环 -群，我们有 。此外，根据引理 。和注 。映射 res : ( ) $R(p_kH)$ 等于乘以 p_k。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{res}_H^{H\cap L}\frac{f_H - 1}{|N_E(H)/H|} &= \frac{f_{H\cap L} - 1}{|N_E(H)/H|} \\ &= p_k\frac{f_{p_kH\cap L} - 1}{|N_E(H)/p_kH|} \\ &= \mathrm{res}_{p_kH}^{p_kH\cap L}\left(p_k\frac{f_{p_kH} - 1}{|N_E(H)/p_kH|}\right) \\ &= \mathrm{res}_{p_kH}^{p_kH\cap L}\,\mathrm{res}_H^{p_kH}\, I_{p_kH}^H\left(\frac{f_{p_kH} - 1}{|N_E(H)/p_kH|}\right) \\ &= \mathrm{res}_H^{H\cap L}\, I_{p_kH}^H\left(\frac{f_{p_kH} - 1}{|N_E(H)/p_kH|}\right).\end{aligned}$$

(2) 请注意，对于 $g \in E$， $l \in L$ 和 $h \in H$，我们有 ${}^{lgh}H = {}^{l}({}^{g}H)$。特别地，当$[g_1] = [g_2]$ 属于 $L\backslash E/H$时， ${}^{g_1}H \subset L$ 当且仅当 ${}^{g_2}H \subset L$。回想一下，根据命题 1.15 和引理 5.31，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{res}^L_E \circ I^E_H = \sum_{g\in L\backslash E/H} I^L_{{}^{g}H\cap L} \circ \mathrm{con}_{g,L^g\cap H} \circ \mathrm{res}^{L^g\cap H}_H,\\
&\mathrm{con}_{g,H} \circ I^H_{p_kH} = I^{{}^{g}H}_{{}^{g}p_kH} \circ \mathrm{con}_{g,p_kH},\\
&\mathrm{con}_{g,H}(f_H) = f_{{}^{g}H}.
\end{aligned}$$

因此，(1) 蕴含

$$\begin{aligned}
&\mathrm{res}^L_E\, I^E_H\left(\frac{f_H-1}{|N_E(H)/H|} - I^H_{p_kH}\left(\frac{f_{p_kH}-1}{|N_E(H)/p_kH|}\right)\right)\\
&= \sum_{g\in L\backslash E/H} I^L_{{}^{g}H\cap L}\, \mathrm{con}_{g,L^g\cap H}\, \mathrm{res}^{L^g\cap H}_H \left(\frac{f_H-1}{|N_E(H)/H|} - I^H_{p_kH}\left(\frac{f_{p_kH}-1}{|N_E(H)/p_kH|}\right)\right)\\
&= \sum_{g\in L\backslash E/H,\ {}^{g}H\subset L} I^L_{{}^{g}H}\, \mathrm{con}_{g,H} \left(\frac{f_H-1}{|N_E(H)/H|} - I^H_{p_kH}\left(\frac{f_{p_kH}-1}{|N_E(H)/p_kH|}\right)\right)\\
&= \sum_{g\in L\backslash E/H,\ {}^{g}H\subset L} I^L_{{}^{g}H}\left(\frac{f_{{}^{g}H}-1}{|N_E(H)/H|} - I^{{}^{g}H}_{{}^{g}p_kH}\left(\frac{f_{{}^{g}p_kH}-1}{|N_E(H)/p_kH|}\right)\right).
\end{aligned}$$

■

命题 5.33. 对于 $E \in X_k$，设 C_E 为 E 的循环子群的共轭类的一组完全代表元。设 $(f_H)^{H\in Y_k}$ 为由引理 *5.31* 得到的一个族。对每个 $E \in X_k \setminus Y_k$，定义 $f_E \in R(E)$ 为

$$f_E \coloneqq 1 + I^E_{\{e\}}\left(\frac{f_{\{e\}}-1}{|E|}\right) + \sum_{H\in C_E\setminus\{e\}} I^E_H\left(\frac{f_H-1}{|N_E(H)/H|} - I^H_{p_kH}\left(\frac{f_{p_kH}-1}{|N_E(H)/p_kH|}\right)\right).$$

则 $(f_E)^{E\in X_k}$ 满足 *(5.7)-(5.8)*。

证明. 我们首先注意到，即使 $E \in Y_k$， f_E 仍可写成与上文相同的形式。事实上，在这种情形下， C_E 恰好是 E 的子群集合，因此

$$\begin{aligned}
&1 + I^E_{\{e\}}\left(\frac{f_{\{e\}}-1}{|E|}\right) + \sum_{H\in C_E\setminus\{e\}} I^E_H\left(\frac{f_H-1}{|N_E(H)/H|} - I^H_{p_kH}\left(\frac{f_{p_kH}-1}{|N_E(H)/p_kH|}\right)\right)\\
&= 1 + (f_E - 1)\\
&= f_E,
\end{aligned}$$

其中第一个等式由 $I^E_H \circ I^H_{p_kH} = I^E_{p_kH}$（命题 1.15）得出。

设 $E \in X_k$ 和 $L \subset E$ 是一个子群。我们看到 $\mathrm{res}^L_E(f_E) = f_L$。根据命题 1.1 5

以及引理 5.32 (2),

$$\begin{aligned}\operatorname{res}^L_E(f_E) &= 1 + \operatorname{res}^L_E I^E_{\{e\}}\left(\frac{f_{\{e\}}-1}{|E|}\right)\\ &\quad + \sum_{H\in C_E\backslash\{e\}} \operatorname{res}^L_E I^E_H\left(\frac{f_H-1}{|N_E(H)/H|} - I^H_{p_kH}\left(\frac{f_{p_kH}-1}{|N_E(H)/p_kH|}\right)\right)\\ &= 1 + \sum_{g\in L\backslash E} I^L_{g\{e\}}\operatorname{con}_{g,\{e\}}\left(\frac{f_{\{e\}}-1}{|E|}\right)\\ &\quad + \sum_{H\in C_E\backslash\{e\}}\sum_{g\in L\backslash E/H,\ {}^gH\subset L} I^L_{gH}\left(\frac{f_{gH}-1}{|N_E(H)/H|} - I^{gH}_{gp_kH}\left(\frac{f_{gp_kH}-1}{|N_E(H)/p_kH|}\right)\right)\end{aligned}$$

由引理 5.31, $f_{\{e\}} = \operatorname{con}_{g,\ \{e\}}(f_{\{e\}})$,

$$\sum_{g\in L\backslash E} I^L_{g\{e\}}\operatorname{con}_{g,\{e\}}\left(\frac{f_{\{e\}}-1}{|E|}\right) = I^L_{\{e\}}\left(\frac{f_{\{e\}}-1}{|L|}\right).$$

在和式 $\sum_{H\in C_E\backslash\{e\}}\sum_{g\in L\backslash E/H,\ {}^gH\subset L}$ 中, ${}^gH$ 遍历 L 的所有非平凡循环子群。对于子群 $H'\subset L$,

$$\{g\in L\backslash E/H' \mid {}^gH' = H'\} = N_L(H')\backslash N_E(H')/H' = N_L(H')\backslash N_E(H').$$

Thus

$$\begin{aligned}&\sum_{H\in C_E\backslash\{e\}}\sum_{g\in L\backslash E/H,\ {}^gH\subset L} I^L_{gH}\left(\frac{f_{gH}-1}{|N_E(H)/H|} - I^{gH}_{gp_kH}\left(\frac{f_{gp_kH}-1}{|N_E(H)/p_kH|}\right)\right)\\ &= \sum_{H'\in C_L\backslash\{e\}} |N_L(H')\backslash N_E(H')|\cdot I^L_{H'}\left(\frac{f_{H'}-1}{|N_E(H')/H'|} - I^{H'}_{p_kH'}\left(\frac{f_{p_kH'}-1}{|N_E(H')/p_kH'|}\right)\right)\\ &= \sum_{H'\in C_L\backslash\{e\}} I^L_{H'}\left(\frac{f_{H'}-1}{|N_L(H')/H'|} - I^{H'}_{p_kH'}\left(\frac{f_{p_kH'}-1}{|N_L(H')/p_kH'|}\right)\right).\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{res}^L_E(f_E) &= 1 + I^L_{\{e\}}\left(\frac{f_{\{e\}}-1}{|L|}\right)\\ &\quad + \sum_{H'\in C_L\backslash\{e\}} I^L_{H'}\left(\frac{f_{H'}-1}{|N_L(H')/H'|} - I^{H'}_{p_kH'}\left(\frac{f_{p_kH'}-1}{|N_L(H')/p_kH'|}\right)\right)\\ &= f_L.\end{aligned}$$

(5.8) 由对所有 $g\in G$ 都成立的 $\operatorname{con}_{g,\ E}\circ I^E_H = I^{gE}_{gH}\circ\operatorname{con}_{g,\ H}$（命题 1.15）以及 $(f_H)_{H\in Y_k}$ 满足 (5.8) 这一事实可得。■

取引理 5.31 中的 $(f_H)_{H\in Y_k}$，并取前一引理中关于 $E\in X_k$ 的 f_E。由于 $\operatorname{res}^H_E(f_E) = f_H$，且对所有循环子群 $H\subset E$ 都有 $f_H\in S^H_D$，由推论 2.9 可得 $f_E\in S^E_D$。因此，我们得到以下结果。

推论 5.34. 假设 $n<k\le m$。那么对于任意 $f\in S^K_D$，存在一个由元素 $f_H\in S^H_D$ 组成的族 $(f_H)_{H\in X_k}$，满足 *(5.7)-(5.8)*，使得 f_K 是 f 的倍数，且 $f_{\{e\}}$ 是 $\operatorname{res}^{\{e\}}_K(f)$ 的幂。

接下来，我们考虑 $K_*(D)$ 可唯一地被 p_k 整除的情形。

注 5.35. 假设 G 是一个 p-群，并且 $K_*(D)$唯一地 p-可除。那么根据推论 5.2，我们可以对 $KK^G(\mathbb{C},\ D)$应用定理 4.4。根据定理 5.4，对于循环子群 $H \subset G$，$F_1^H(\mathbb{C}) = F_1^H(D) = 0$，因此我们得到同构

$$K_0^G(D) = KK^G(\mathbb{C}, D) \cong \prod_{H\subset G \text{ cyclic}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\zeta_{|H|}]\rtimes W_H}(F_0^H(\mathbb{C}), F_0^H(D)).$$

$\mathrm{Hom}^{\mathbb{Z}[\zeta_{|H|}]\rtimes W_H}(F_0^H(\mathbb{C})\ F_0^H(D))$构成一个环，其乘法由 $K_0^G(D) \cong KK^G(\mathbb{C},\ D)$诱导。给定 $f_0,\ f_1 \in \mathrm{Hom}^{\mathbb{Z}[\zeta_{|H|}]\rtimes W_H}(F_0^H(\mathbb{C})\ F_0^H(D))$，它们的乘积 $f_0 f_1$ 定义为

$$f_0 f_1 \coloneqq (\mathrm{id}\otimes\nu)_*^{-1} \circ (f_0 \otimes f_1)\colon F_0^H(\mathbb{C}) \to F_0^H(D \otimes D) \to F_0^H(D).$$

根据定理 5.11，$\mathrm{Hom}^{\mathbb{Z}[\zeta_{|H|}]\rtimes W_H}(F_0^H(\mathbb{C})\ F_0^H(D))$同构于 $F_0^H(D)^{W_H}$：$F_0^H(D)$在 W_H作用下的不动点子环。这些结果给出了环的同构

$$K_0^G(D) \cong \prod_{H\subset G \text{ cyclic}} F_0^H(D)^{W_H}.$$

考虑 $D = M_{p^\infty}$ 的情形，我们也得到

$$R(G)_P \cong K_0^G(M_{p^\infty}) \cong \prod_{H\subset G \text{ cyclic}} F_0^H(M_{p^\infty})^{W_H} \cong \prod_{H\subset G \text{ cyclic}} \mathbb{Z}[\zeta_{|H|}, 1/p]^{W_H},$$

其中 $P \subset \mathbb{Z}$ 是由 1 和 p 生成的乘法子集。

引理 5.36. 假设 $1 \le k \le n$。那么存在一个由元素组成的族 $(f_H)^{H\in X_k}$，满足 *(5.7)-(5.8)*，且 f_K 是 f 的倍数。

证明。令 $P_k \subset \mathbb{Z}$ 为由 1 和 p_k 生成的乘法子集。注意，根据定理 5.1，对于所有 $H \in X_k$，$K_0^H(D)_\sim$ 都是唯一 p_k-可除的。令 ν_*^H 表示由 ν_*^H 诱导的映射 $R(H)_{P_k} \to K_0^H(D)$。首先，我们构造一个由元素 $f'_H \in R(H)^{P_k}{}_\sim$ 组成的族 $(f'_H)^{H\in Y_k}$，使得 $\nu_*^H(f'_H)$ 可逆，且 $f'_K = f$ 和 $(f'_H)_H$ 满足 (5.7)。我们通过对 r 使用归纳法得到 f'_H，其中 $|H| = p_k^r$。首先，设 $f'_{\{e\}} \coloneqq \mathrm{res}_K^{\{e\}}(f)$。假设对于 $|H| \le p_k^{r-1}$，$(f'_H)^{H\in Y_k}$ 可以取为所需形式。取满足 $|L| = p_k^r$ 的 $L \in Y_i$。推论 5.2 表明，作为一个 L-C*-代数，D 具有唯一 p_k-可除的 K-理论。由 (5.3) 和 (5.4)，我们得到环的同构

$$K_0^L(D) \cong F_0^L(D) \oplus K_0^{p_k L}(D),$$
$$R(L)_{P_k} \cong \mathbb{Z}[\zeta_{|L|}, 1/p_k] \oplus R(p_k L)_{P_k}.$$

根据定理 5.11 和定理 5.4，$F_0^L(D)$ 和 $K_0^L(D)$ 分别是 $\mathbb{Z}[\zeta_{|L|}, 1/p_k]$和 $R(L)^{P_k}$ 的局部化。如果 $L \subset K$，则令 $f'_L \coloneqq \mathrm{res}_K^L(f)$。否则，令 $f'_L \in R(L)^{P_k}$ 为对应于

$$(1, f'_{p_k L}) \in \mathbb{Z}[\zeta_{|L|}, 1/p_k] \oplus R(p_k L)_{P_k}.$$

$\sim$由于 $(1,\ \nu_*^{p_k L}(f'_{p_k L})) \in F_0^L(D) \oplus K_0^{p_k L}(D)$ 是可逆的，因此 $\widetilde{\nu_*^L}(f'_L) \in K_0^L(D)$ 是可逆的。我们还有 $\mathrm{res}_K^{p_k L}(f'_L) = f'_{p_k L}$。重复这一过程，我们得到 f'_H对所有 $H \in Y_k$。

对于 $H \in Y_k$，将 f'_H 替换为 $\prod_{g\in G} \mathrm{con}_{g,\ {}^gH}(f'_{{}^gH})$。取 $L \in X_k \setminus Y_k$。注 5.35 给出了环的同构

$$K_0^L(D) \cong \prod_{H\subset L \text{ cyclic}} F_0^H(D)^{W_H},$$
$$R(L)_{P_k} \cong \prod_{H\subset L \text{ cyclic}} \mathbb{Z}[\zeta_{|H|}, 1/p_k]^{W_H}.$$

令 $\overline{f'_H} \in R(H)_{P_k}$ 为 f'_H 在自然投影 $R(H)_{P_k} \to R(H)_{P_k}/\Phi_{|H|} \cong \mathbb{Z}[\zeta_{|H|}, 1/p_k]$ 下的像。由于对正规化子 H 的所有元素 g，$\mathrm{con}_{g,H}(f'_H) = f'_H$，故 f'_H 属于 $\mathbb{Z}[\zeta_{|H|}, 1/p_k]^{W_H}$。选取与 $(f'_H)_{H\subset L}$ 对应的元素 $f'_L \in R(L)_{P_k}$。则 $\nu_*^L(f'_L) \in K_0^K(D)$ 可逆，因为对于每个 H，f'_H 在 $F_0^H(D)$ 中可逆。若 $L' \subset L$，则 $\mathrm{res}_L^{L'}(f'_L) \in R(L')_{P_k}$ 与 $(f'_H)_{H\subset L'}$ 对应。此外，对于 $g \in G$，$\mathrm{con}_{g,L}(f'_L) \in R({}^gL)_{P_k}$ 与 $(f'_{{}^gH})_{H\subset L}$ 对应。因此，族 $(f'_L)_{L\in X_k}$ 满足 (5.7)-(5.8)。

选取 $N \in \mathbb{N}$ 充分大，使得对所有 $H \in X_k$，都有 $p_k^N \cdot f'_H \in R(H)$。那么，$f_H := p_k^N \cdot f'_H$ 即为所需的对象。■

引理 5.37. 假设 $n \geq 1$。那么，对于任意 $1 \leq i \leq n$ 和 $a \in S_{\{e\}}^D$，存在一个由元素 $\psi_H \in S_D^H$ 组成的族 $(\psi_H)_{H\in X_i}$，满足 *(5.7)-(5.8)*，且使得 $\psi_{\{e\}} = p_i^{r_i} a$。

证明。令 $P_i \subset \mathbb{Z}$ 为由 1 和 p_i 生成的乘法子集。我们首先如下定义由元素 $\psi'_H \in R(H)_{P_i}$ 组成的族 $(\psi'_H)_{H\in Y_i}$。令 $\psi'_{\{e\}} := a$。若 $H \in Y_i$ 且我们有 ψ'_{p_iH}，则定义 $\psi'_H \in R(H)_{P_i}$ 为

$$\psi'_H := 1 - \frac{\Phi_{|H|}}{p_i} + \frac{1}{p_i} I_{p_iH}^H(\psi'_{p_iH}).$$

那么，$\nu_*^H(\psi'_H) \in K_0^H(D)$ 可逆，其中 ν_*^H 为由 ν_*^H 诱导的映射 $R(H)_{P_i} \to K_0^H(D)$。事实上，同构

$$R(H)_{P_i} \cong \mathbb{Z}[\zeta_{|H|}, 1/p_i] \oplus R(p_iH)_{P_i}.$$

(5.4) 由投影 $\pi\colon R(H)_{P_i} \to R(H)_{P_i}/\Phi_{|H|} \cong \mathbb{Z}[\zeta_{|H|}, 1/p_i]$ 和限制 $R(H)_{P_i} \to R(p_iH)_{P_i}$ 给出。由 (5.1) 和 (5.2),

$$\begin{aligned}\pi(\psi'_H) &= \pi\left(1 - \frac{\Phi_{|H|}}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} \cdot I_{p_iH}^H \circ \mathrm{res}_H^{p_iH} \circ I_{p_iH}^H(\psi'_{p_iH})\right)\\ &= \pi\left(1 - \frac{\Phi_{|H|}}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} \cdot \Phi_{|H|} \cdot I_{p_iH}^H(\psi'_{p_iH})\right)\\ &= 1,\end{aligned}$$

$$\mathrm{res}_H^{p_iH}(\psi'_H) = 1 - \frac{p_i}{p_i} + \frac{1}{p_i} \cdot p_i \cdot \psi'_{p_iH} = \psi'_{p_iH}.$$

因此，$\nu_*^H(\psi'_H)$ 的可逆性可归纳地得到。此外，容易验证 $(\psi'_H)_{H\in Y_i}$ 满足 (5.7)-(5.8)，且 $|H| \cdot \psi'_H \in R(H)$。

接下来，我们将 $\psi'_L \in R(L)_{P_i}$ 定义为 $L \in X_i \setminus Y_i$：

$$\psi'_L := 1 + I_{\{e\}}^L\left(\frac{\psi'_{\{e\}} - 1}{|L|}\right) + \sum_{H\in C_L\setminus\{e\}} I_H^L\left(\frac{\psi'_H - 1}{|N_L(H)/H|} - I_{p_iH}^H\left(\frac{\psi'_{p_iH} - 1}{|N_L(H)/p_iH|}\right)\right).$$

如命题 5.33 的证明中所述，族 $(\psi'_L)_{L\in X_i}$ 满足 (5.7)–(5.8)。因此，$\sim\nu_*^L(\psi'_L) \in K_0^L(D)$ 根据推论 2.9 是可逆的。此外，$|H|\cdot\psi'_H \in R(H)$ 意味着 $|L|\cdot\psi'_L \in R(L)$。因此，元素族 $\psi_L := p_i^{r_i}\cdot\psi'_L$ 就是所需的族。■

现在我们可以证明定理 5.29 了。

定理 *5.29* 的证明。族 $(f_H^{(i)})_{H\in X_i}(i=1,\dots,m)$ 的构造分为两种情况，分别对应 $k\le n$ 或 $k>n$。

假设 $k\le n$。取引理 5.36 中的 $(f_H'^{(k)})_{H\in X_k}$，并在 $\psi_{\{e\}}^{(k)} = p_1^{r_1}\cdots p_n^{r_n}$ 的条件下，取引理 5.37 中的 $(\psi_H^{(k)})_{H\in X_k}$。然后令 $f_H^{(k)} := f'_{(\ {}^{k}_{H}\ \psi_H^{(k)})}$。此外，对于满足 $j\ne k$ 的 $1\le j\le k$，在条件下取引理 5.37 中的 $(f_H^{(j)})_{H\in X_j}$：

$$f_{\{e\}}^{(j)} = p_1^{r_1}\cdots p_n^{r_n}\cdot f_{\{e\}}'^{(k)} = f_{\{e\}}^{(k)}.$$

于是，族 $(f_H^{(j)})_{H\in X_j}(j=1,\dots,n)$ 满足所需条件。若 $n=m$，则构造到此完成。假设 $n<m$。根据推论 5.34，存在由元素 $f_{(n+1)\ H} \in S_D^H$ 组成的族 $(f_{(n+1)\ H})_{H\in X_{n+1}}$，满足 (5.7)-(5.8)，且对于某个 $N\in\mathbb{N}$，有 $f_{\{e\}}^{(n+1)} = (f_{(1)\ \{e\}})^N$。将 $f_{(j)\ H}$ 替换为 $j\le n$ 对应的 $(f_H^{(j)})^N$ 后，族 $(f_H^{(j)})_{H\in X_j}(j=1,\dots,n+1)$ 满足所需关系。迭代这一论证，即可得到所需的族 $(f_H^{(j)})_{H\in X_j}$，其中 $j=1,\dots,m$。

设 $k>n$。不妨设 $k=n+1$。取如推论 5.34 中的 $(f_H'^{(n+1)})_{H\in X_{n+1}}$。再次由推论 5.34，存在一个元素族 $(f''_{(n+1)\ H})_{H\in X_{n+1}}$，满足 (5.7)-(5.8)，使得 $f_{\{e\}}''^{(n+1)}$ 是 $p_1^{r_1}\cdots p_n^{r_n}$ 的倍数。于是令 $f_{(n+1)\ H} := f'_{(n+1)\ H}\cdot f_{\{e\}}''^{(n+1)}$。由于 $f_{(n+1)\ \{e\}}$ 是 $p_1^{r_1}\cdots p_k^{r_n}$的倍数，对于 $1\le j\le n$，我们可以取引理 5.37 中的 $(f_{(j)\ H})_{H\in X_j}$，其中 $f_{(j)\ \{e\}} = f_{(n+1)\ \{e\}}$。现在，族 $(f_H^{(j)})_{H\in X_j}(j=1,\dots,n+1)$ 满足所需条件。其余部分与前一种情形中的论证相同。■

定理 5.25 的证明至此完成。

6 李群 $U(1)$ 和 $SU(2)$ 的情形

尽管我们无法验证 $G=U(1)$ 或 $G=SU(2)$ 的猜想 A，但对于 $\mathcal{B}_G$ 中的强自吸收 G-C*-代数 D 而言，$K_*^G(D)$ 的结构相当受限。

研究 $K_*^G(D)$ 的主要工具如下。

定理 6.1（参见 [35, 定理 5.1]）。设 G 为一个紧李群，使得基本群 $\pi_1(G)$ 是无挠的。那么对于每个 $A\in\mathcal{B}_G$ 和 $B\in KK^G$，存在一个强收敛的谱序列，其系数为 $R(G)$-模

$$E_{p,q}^2 = \operatorname{Tor}_p^{R(G)}(K_*^G(A), K_{*+q}^G(B)) \Longrightarrow K_{*+p+q}^G(A\otimes B)$$

使得边缘同态

$$K_*^G(A)\otimes_{R(G)} K_{*+q}^G(B) = E_{0,q}^2 \to E_{0,q}^\infty \to K_{*+q}^G(A\otimes B)$$

由杯积给出。

在下文中，令 $G = U(1)$ 或 $SU(2)$。那么，分别有 $R(G) = \mathbb{Z}[t, 1/t]$ 或 $\mathbb{Z}[t]$。在任一情况下， $R(G)$ 的全局维数均为二。换言之，对于所有 $p \geq 3$ 和$R(G)$-模 M， N，我们有 $\mathrm{Tor}_p^{R(G)}(M, N) = 0$.因此，在这种情况下，若 $p \geq 3$ 或 $p < 0$，则 $E^2_{p,\,q} = 0$。

令 $d^r_{p,q}\colon E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}$ 为微分。该谱序列的 E^3 页计算如下：

$$E^3_{p,q} = \operatorname{Ker} d^2_{p,q} / \operatorname{Im} d^2_{p+2,q-1} = \begin{cases} 0 & \text{if } p \geq 3 \text{ or } p < 0, \\ \operatorname{Ker} d^2_{2,q} & \text{if } p = 2, \\ E^2_{1,q} & \text{if } p = 1, \\ E^2_{0,q} / \operatorname{Im} d^2_{2,q-1} & \text{if } p = 0. \end{cases} \tag{6.1}$$

由此得到 $d^3_{p,q} = 0$ 和 $E^\infty_{p\,,q} = E^3_{p,q}$。令

$$0 = F_{-1}H_n \subset F_0 H_n \subset \cdots \subset F_n H_n = K^G_{*+n}(A \otimes B)$$

令其为滤过，并满足 $F_pH_n/F_{p-1}H_n = E^\infty_{p\,,n-p} = E^3_{p,n-p}$。由于对 $p \geq 3$ 有 $E^3_{p,q} = 0$，因此我们有 $F_2H_n = F_nH_n = K^G_{*+n}(A \otimes B)$。现在有两个短正合列：

$$E^3_{0,n} \rightarrowtail F_1H_n \twoheadrightarrow E^3_{1,n-1}, \tag{6.2}$$

$$F_1H_n \rightarrowtail K^G_{*+n}(A \otimes B) \twoheadrightarrow E^3_{2,n-2}. \tag{6.3}$$

此外，$E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}_p^{R(G)}(K^G_*(A)\ K^G_{*+q}(B))$ 给出以下两个短正合列：

$$\operatorname{Ker} d^2_{2,q} \rightarrowtail \operatorname{Tor}_2^{R(G)}(K^G_*(A), K^G_{*+q}(B)) \overset{d^2_{2,q}}{\twoheadrightarrow} \operatorname{Im} d^2_{2,q}, \tag{6.4}$$

$$\operatorname{Im} d^2_{2,q} \rightarrowtail K^G_*(A) \otimes_{R(G)} K^G_{*+q+1}(B) \twoheadrightarrow E^2_{0,q+1} / \operatorname{Im} d^2_{2,q}. \tag{6.5}$$

将这四个正合列与 (6.1) 结合，我们得到以下两个正合列

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} d^2_{2,q} \rightarrowtail \operatorname{Tor}_2^{R(G)}(K^G_*(A), K^G_{*+q}(B)) &\overset{d^2_{2,q}}{\to} K^G_*(A) \otimes_{R(G)} K^G_{*+q+1}(B) \\ &\to F_1H_{q+1} \twoheadrightarrow \operatorname{Tor}_1^{R(G)}(K^G_*(A), K^G_{*+q}(B)), \end{aligned} \tag{6.6}$$

$$F_1H_{q+1} \rightarrowtail K^G_{*+q+1}(A \otimes B) \twoheadrightarrow \operatorname{Ker} d^2_{2,q-1}. \tag{6.7}$$

注意，复合映射 $K^G_*(A) \otimes_{R(G)} K^G_{*+q+1}(B) \to F_1H_{q+1} \to K^G_{*+q+1}(A \otimes B)$ 是杯积。

命题6.2。 设 D 是一个强自吸收 G-C*-代数，属于 $\mathcal{B}_G$，而 C_ν 是含幺嵌入 $\nu\colon \mathbb{C} \to D$的映射锥。那么

$$\operatorname{Tor}_1^{R(G)}(K^G_*(D), K^G_*(D)) = 0, \tag{6.8}$$

$$\operatorname{Tor}_1^{R(G)}(K^G_*(D), K^G_*(C_\nu)) = 0, \tag{6.9}$$

$$\operatorname{Tor}_2^{R(G)}(K^G_*(D), K^G_{*-1}(C_\nu)) \cong K^G_*(D) \otimes_{R(G)} K^G_*(C_\nu) \tag{6.10}$$

并且存在一个正合列

$$\operatorname{Tor}_2^{R(G)}(K^G_*(D), K^G_{*-1}(D)) \rightarrowtail K^G_*(D) \otimes_{R(G)} K^G_*(D) \twoheadrightarrow K^G_*(D \otimes D). \tag{6.11}$$

证明。首先，将 (6.6) 和 (6.7) 应用于情形 $A = B = D$。由于杯积 $K_*^G(D) \otimes_{R(G)} K_*^G(D) \to K_*^G(D \otimes D)$ 根据命题 2.7 是满射，$F_1H_{q+1} \cong K_*^G(D \otimes D)$，且映射 $K_*^G(D) \otimes_{R(G)} K_{*+q+1}^G(D) \to F_1H_{q+1}$ 是满射。因此，$\mathrm{Tor}_1^{R(G)}(K_*^G(D)\ K_*^G(D)) = \mathrm{Ker}\, d^2_{2,q-1} = 0$。将 q 替换为 $q+1$ 重复这一论证，我们也有 $\mathrm{Ker}\, d^2_{2,q} = 0$。因此，$d^2_{2,q}$: $\mathrm{Tor}_2^{R(G)}(K_*^G(D)\ K_{*-1}^G(D)) \to K_*^G(D) \otimes_{R(G)} K_*^G(D)$ 是单射，故 (6.11) 成立。

接下来，将 (6.6) 和 (6.7) 应用于情形 $A = D$ 和 $B = C_\nu$。由推论 2.5 得到 $F_1H_{q+1} = K_{*+q+1}^G(D \otimes C_\nu) = \mathrm{Ker}\, d^2_{2,\ q-1} = 0$。因此 $\mathrm{Tor}_1^{R(G)}(K_*^G(D)\ K_{*+q}^G(C_\nu)) = 0$, $\mathrm{Ker}\, d^2_{2,\ q} = 0$，进而 $\mathrm{Tor}_2^{R(G)}(K_*^G(D)\ K_{*+q}^G(C_\nu)) \cong K_*^G(D) \otimes_{R(G)} K_{*+q+1}^G(C_\nu)$。

■

由于 $R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[t, 1/t]$ 或 $\mathbb{Q}[t]$ 是主理想整环，(6.8) 和引理 1.20 蕴含$K_*^G(D) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 是平坦的。此外，由 (6.11),

$$(K_*^G(D) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \otimes_{R(G)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}} (K_*^G(D) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \cong K_*^G(D) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

类似于定理 5.11 的证明可知，$K_1^G(D) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ 和$K_0^G(D) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 是 $R(G)$的局部化。特别地，$K_1^G(D)$是一个 $\mathbb{Z}$-模中的挠元。这个局部化过程可通过 $D \otimes M_{\mathbb{Q}}$实现；它仍然是强自吸收的 G-C*-代数，其中 $M_{\mathbb{Q}}$ 是满足 $K_0(M_{\mathbb{Q}}) \cong \mathbb{Q}$的UHF代数。

命题 6.3. 沿用上述记号。则，

(1) $K_1^G(D)$ 是一个 $\mathbb{Z}$-模中的挠元。

(2) 除非 $K_*^G(D)$ 是平凡的，否则映射 $\nu_*: R(G) \to K_0^G(D)$ 是单射，并且 $K_0^G(C_\nu) \cong K_1^G(D)$。

证明。 我们只证明 (2)。若 $\nu_*: R(G) \to K_0^G(D)$是单射，则由映射锥序列可得 $K_0^G(C_\nu) \cong K_1^G(D)$。

假设 $\nu_*: R(G) \to K_0^G(D)$ 不是单射。我们首先证明 $K_0^G(D)$ 是一个 $\mathbb{Z}$-模上的挠元。令 J_0 为 ν_*的核，由于 ν_* 是代数同态，因此它是 $R(G)$ 的一个理想。令 J_1 为 $\nu_* \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}: R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to K_0^G(D) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 的核。则 J_1是 $R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 的一个理想，满足 $J_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \subset J_1$。由于 $K_1^G(D \otimes M_{\mathbb{Q}}) = 0$，由此得到的六项正合列

$$\Sigma D \otimes M_{\mathbb{Q}} \rightarrowtail C_\nu \otimes M_{\mathbb{Q}} \twoheadrightarrow \mathbb{C} \otimes M_{\mathbb{Q}}$$

推出 $K_0^G(C_\nu) \otimes \mathbb{Q} \cong J_1$。接着，(6.10) 表明 $(K_0^G(D) \otimes \mathbb{Q}) \otimes_{R(G)\otimes\mathbb{Q}} J_1 = 0$。由于$R(G) \otimes \mathbb{Q}$ 是一个主理想整环，理想 J_1 同构于 $R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$，作为一个 $R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$-模，这意味着 $K_0^G(D) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$。因此，$K_0^G(D)$ 是一个 $\mathbb{Z}$-模上的挠元。

由于 $R(G)$ 作为 $\mathbb{Z}$-模是自由的，映射 ν_* 是平凡的，因此我们得到 $K_0^G(D) \cong K_1(C_\nu)$，以及分裂正合列

$$K_1^G(D) \rightarrowtail K_0^G(C_\nu) \twoheadrightarrow R(G).$$

Thus

$$\mathrm{Tor}_2^{R(G)}(K_{*-1}^G(D), K_*^G(D)) \cong \mathrm{Tor}_2^{R(G)}(K_*^G(C_\nu), K_*^G(D)),$$
$$K_0^G(D) \otimes_{R(G)} K_0^G(D) \cong K_1^G(C_\nu) \otimes_{R(G)} K_0^G(D),$$

且 $K_1^G(D) \otimes_{R(G)} K_1^G(D)$ 是 $K_0^G(C_\nu) \otimes_{R(G)} K_1^G(D)$ 的一个直和项。现在，(6.10) 和 (6.11) 表明 $K_*^G(D)$ 是平凡的。■

注 6.4. 当 $K_*^G(D)$ 非平凡时，我们可以进一步由 (6.10) 和 (6.11) 得出以下结论。

(1) 下列正合列分裂:

$$K_0^G(D) \otimes_{R(G)} R(G) \rightarrowtail K_0^G(D) \otimes_{R(G)} K_0^G(D) \twoheadrightarrow K_0^G(D) \otimes_{R(G)} K_1^G(C_\nu).$$

(2) $K_1^G(D) \otimes_{R(G)} K_1^G(C_\nu) = 0$ 和 $1 \otimes \nu_*$: $K_1^G(D) \otimes_{R(G)} R(G) \to K_1^G(D) \otimes_{R(G)} K_0^G(D)$ 是同构。

(3) $\mathrm{Tor}_2^{R(G)}(K_*^G(D), K_*^G(D)) \cong K_1^G(D)$.

由于我们不需要这些事实，因此省略证明。

遗憾的是，我们无法证明 $K_1^G(D) = 0$ 本身。下文中，我们将在此假设下继续讨论。

一般而言，环同态 $R \to A$ 若是满射的，则称其为满射的，当且仅当乘法映射 $A \otimes_R A \to A$ 是同构。

定理 6.5. 设 $K_1^G(D) = 0$。则 D 满足关于 $\mathbb{C}$的局部化条件。

证明. 假设 $K_1^G(D) = 0$ 与 (6.11) 给出同构

$$K_0^G(D) \otimes_{R(G)} K_0^G(D) \cong K_0^G(D).$$

因此， ν_*: $R(G) \to K_0^G(D)$ 是满射的。由 (6.8) 及 [20, 定理 1.1]， $K_0^G(D)$ 实际上是一个平坦的 $R(G)$-模。由于 $R(G)$ 是唯一分解整环，相应的除子类群 $\mathrm{Cl}(R(G))$ 与皮卡群 $\mathrm{Pic}(R(G))$ 均为平凡的（例如参见 [25, 第 165 页–167], ）。因此，由 [20, 定理 1.3 (i)(ii)]， $K_0^G(D)$ 是 $R(G)$ 的一个局部化。■

命题 6.6. 若 D 关于 $\mathbb{C}$满足局部化条件，则 D关于 $\mathcal{B}_G$中的每一个紧对象都满足该条件。

证明. 设 $B \in \mathcal{B}_G$ 为一个紧对象。由 [14, 命题 3.13], ，存在一个对象$B^* \in KK^G$ ，使得对每一个 $A \in KK^G$，都存在一个同构

$$KK^G(B, A) \cong K_0^G(B^* \otimes A)$$

关于 A自然。因此，要证明 D 满足关于B的局部化条件，只需证明 $K_*^G(B^* \otimes D) \cong K_*^G(B^*)_{S_D}$。由于 $K_0^G(D) \cong R(G)_{S_D}$ 且 $K_1^G(D) = 0$， $K_*^G(D)$ 是一个平坦的 $R(G)$-模。因此，对于所有$p \geq 1$，$\mathrm{Tor}_p^{R(G)}(K_*^G(B^*) K_*^G(D)) = 0$。由此以及定理 6.1 可得一个同构

$$K_*^G(B^*) \otimes_{R(G)} K_*^G(D) \cong K_*^G(B^* \otimes D).$$

左边同构于 $K_*^G(B^*) \otimes_{R(G)} R(G)_{S_D} = K_*^G(B^*)_{S_D}$。证明至此完成。■

注记 6.7。 前一个命题的证明并未使用$G = U(1)$或 $SU(2)$这一假设。换言之，对于每个满足 $\pi_1(G)$无挠的紧李群G，该命题都成立。

结合定理 6.5、命题 6.6 和命题 3.5，我们得到以下结果。

推论 6.8. 设 D 是一个强自吸收的 G-C*-代数，属于 $\mathcal{B}_G$，其中 $G = U(1)$ 或$SU(2)$。若 $K_1^G(D) = 0$，则 M^{S_D} 与 D 之间存在一个 KK^G- 等价，它将$[1_{M^{S_D}}] \in K_0^G(M^{S_D})$映到 $[1_D] \in K_0^G(D)$。

推论 6.9. 设 D是一个强自吸收的 G-C*-代数，属于 $\mathcal{B}_G$，其中 $G = U(1)$或 $SU(2)$。那么 $M^{S_{D\otimes M_{\mathbb{Q}}}}$与 $D \otimes M_{\mathbb{Q}}$之间存在一个 KK^G-等价，它将$[1_{M^{S_{D\otimes M_{\mathbb{Q}}}}}] \in K_0^G(M^{S_{D\otimes M_{\mathbb{Q}}}})$映到 $[1_{D\otimes M_{\mathbb{Q}}}] \in K_0^G(D \otimes M_{\mathbb{Q}})$。

我们以以下这个独特的例子结束本文。

例 6.10. 对于 $G = U(1)$，令 S为 $R(G) = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$中由 $\{1 - t^n\}_{n=1}^{\infty}$生成的乘法集合。于是，对所有自然数 n，都有 $K_*^{\mathbb{Z}/n}(M^S) = 0$，而 $K_0^G(M^S) \cong \mathbb{Z}[t, t^{-1}]_S \neq 0$。我们可以通过 Cuntz 代数 $\mathcal{O}_2$上的等距移位吸收作用 α 来实现该模型的 KK^G-等价类。此 α 满足以下性质：对于任意自然数，α 在 $\mathbb{Z}/n$ 上的限制 β_n 是具有 Rohlin 性质且满足 $\mathcal{O}_2 \rtimes_{\beta_n} \mathbb{Z}/n \cong \mathcal{O}_2$的唯一 $\mathbb{Z}/n$-作用，而 $\mathcal{O}_2 \rtimes_{\alpha} U(1)$ 与 $\mathcal{O}_2$不同构。事实上，由构造可知，β_n 是近似可表示的，且其对偶作用具有 Rohlin 性质（见 [18, 引理 3.8]）。由于 $K_*^{\mathbb{Z}/n}(\mathcal{O}_2) = 0$，交叉积 $\mathcal{O}_2 \rtimes_{\beta_n} \mathbb{Z}/n$ 与 $\mathcal{O}_2$同构。由于 $\mathbb{Z}/n$ 在 $\mathcal{O}_2$上的唯一 Rohlin 作用是自对偶的，我们可知 β_n 自身具有 Rohlin 性质。选取更大的乘法集合 S，我们可以构造种类繁多、具有相同性质的 $U(1)$-作用。

参考文献

[1] Arano, Yuki；Kubota, Yosuke，《KK理论中 Atiyah-Segal 完备化定理的范畴论视角》。《非交换几何杂志》12 (2018)，第 2 期，779–821 页。[2] Bianchi, Valerio；Pennig, Ulrich，《$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 等变 K理论的单位谱与 UHF 代数丛》。预印本，arXiv:2410.06947[3] Blackadar, Bruce，《算子代数的 K理论》，第 2 版。数学科学研究所出版物，第 5 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1998。[4] Castillejos, Jorge；Evington, Samuel；Tikuisis, Aaron；White, Stuart；Winter, Wilhelm，《单 C^*代数的核维数》。《数学发明》224 (2021)，第 1 期，245–290 页。[5] Cuntz, Joachim；Skandalis, Georges，《KK理论中的映射锥与正合列》。《算子理论杂志》15 (1986)，第 1 期，163–180 页。[6]Dadarlat, Marius；Pennig, Ulrich，《强自吸收 C^*代数的 K理论单位谱》。《代数与几何拓扑》15 (2015)，第 1 期，137–168 页。[7]Dadarlat, Marius；Pennig, Ulrich，《强自吸收 C^*代数的 Dixmier-Douady 理论 II：Brauer 群》。《非交换几何杂志》9 (2015)，第 4 期，1137–1154 页。[8]Dadarlat, Marius；Pennig, Ulrich，《强自吸收 C^*代数的 Dixmier-Douady 理论》。《纯粹与应用数学杂志》718 (2016)，153–181 页。

[9] Dadarlat, Marius；Rørdam, Mikael, 《含有非平凡投影的强自吸收 C^*代数》。《明斯特数学杂志》2 (2009)，35–44 页。[10]Davis, Edward, 《交换环的上环 II：整闭上环》。《美国数学会汇刊》110 (1964)，第 2 期，196–212 页。[11] Dell' ambrogio, Ivo, 《通过 Mackey 函子研究有限群的等变 Kasparov 理论》。《非交换几何杂志》8 (2014)，第 3 期，837–871 页。[12] Evans, David E.；Pennig, Ulrich, 《 $SU(n)$的等变高阶扭曲 K理论与指数函子扭曲》。《拓扑学杂志》15 (2022)，第 2 期，896–949 页。[13] Evans, David E.；Pennig, Ulrich, 《UHF 代数上圆群作用的等变高阶 Dixmier-Douady 理论》。《数学进展》410 (2022)，B 部分，论文编号 108745，共 40 页。[14] Dell'ambrogio, Ivo；Emerson, Heath；Meyer, Ralf, 《对应的等变 Lefschetz 不动点公式》。《数学文献》19 (2014)，141–193 页。[15] Gabe, James；Szab´o, G´abor, 《动力系统 Kirchberg-Phillips 定理》。《数学学报》232 (2024)，第 1 期，1–77 页。[16] Gong, Guihua；Lin, Huaxin；Niu, Zhuang, 《有限单可约$\mathcal{Z}$-稳定 C^*代数的分类 I：具有广义迹秩一的 C^*代数》。《加拿大皇家学会数学报告》42 (2020)，第 3 期，63–450 页。[17] Green, Philip, 《扭曲协变代数的局部结构》。《数学学报》140 (1978)，191–250 页。[18] Izumi, Masaki, 《具有 Rohlin 性质的 C^*代数上的有限群作用 I》。《杜克数学杂志》122 (2004)，233–280 页。[19] Izumi, Masaki, 《单不动点代数上的 C*代数的极小紧群作用》。即将在《数学物理评论》发表。[20] Angeleri H¨ugel, Lidia；Marks, Frederik；ˇSˇtov´ıˇcek, Jan；Takahasi, Ryo；Vit´oria, Jorge, 《交换环的平坦环满同态与泛局部化》。《牛津数学季刊》71 (2020)，第 4 期，1489–1520 页。[21] Kamikawa, Hiroro，撰写中。[22]Kasparov, Gennady, 《等变 KK理论与 Novikov 猜想》。《数学发明》91 (1988)，第 1 期，147–201 页。[23] Kirchberg, Eberhard；Phillips, N. Christopher, 《将正合 C^*代数嵌入 Cuntz 代数 $\mathcal{O}_2$》。《纯粹与应用数学杂志》525 (2000)，17–53 页。[24]Leinster, Tom, 《范畴论基础》。剑桥大学出版社，剑桥，2014。[25] Matsumura, Hideyuki, 《交换环论》。M. Reid 译。剑桥大学出版社，剑桥，1987。[26] Meyer, Ralf, 《 C^*代数上群作用在等变KK等价意义下的分类》。《K-理论年刊》6 (2021)，第 2 期，157–238 页。

[27] Meyer, Ralf；Nadareishvili, George，关于有限群在 C^*代数上的作用的泛系数定理。预印本，《东京大学数学科学杂志》33（2026），21–47。[28] Meyer, Ralf；Nest, Ryszard，通过范畴的局部化研究鲍姆-康恩猜想。《拓扑学》45（2006），第2期，209–259。[29] Neukirch, J¨urgen，《代数数论》。施普林格出版社，柏林、海德堡，1999。[30] Packer, Judith A.；Raeburn, Iain，C^*代数的扭曲交叉积。《剑桥哲学会数学会刊》106（1989），第2期，293–311。[31] Phillips, N. Christopher，等变 K理论与群作用在C^*代数上的自由性。《数学讲义》，第1284卷，施普林格出版社，柏林、海德堡，1987。[32] Phillips, N. Christopher，核纯无限单C^*代数的分类定理。《数学文献》5（2000），49–114。[33] Pimsner, Mihai V.，一类 C^*代数：同时推广Cuntz-Krieger代数和由 $\mathbb{Z}$生成的交叉积，载于《自由概率论》（加拿大安大略省滑铁卢，1995）。Fields Institute Communications，第12卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1997，第189–212页。[34] Rosenberg, Jonathan，循环群的作用下等变 K理论中的K ¨unneth定理。《代数、几何与拓扑》13（2013），第2期，1225–1241。[35] Rosenberg, Jonathan；Schochet, Claude，等变 K理论和 KK理论中的K ¨unneth定理及泛系数定理。《美国数学学会回忆录》62（1986），第348号。[36] Rosenberg, Jonathan；Schochet, Claude，Kasparov广义 K函子中的K ¨unneth定理及泛系数定理。《杜克数学杂志》55（1987），第2期，431–474。[37] Rotman, Joseph J.，《同调代数导论》，第2版。Universitext，施普林格出版社，纽约，2009。[38] Serre, Jean-Pierre，《有限群的线性表示》。《数学研究生教材》，第42卷，施普林格出版社，纽约，1977。[39] Schochet, Claude，C^*代数的拓扑方法II。几何分解与K ¨unneth公式。《太平洋数学杂志》98（1982），第2期，443–458。[40] Szab´o, G´abor，强自吸收 C^*动力系统。《美国数学学会汇刊》370（2018），第1期，99–130。[41]Szab´o, G´abor，强自吸收 C^*动力系统II。《非交换几何杂志》12（2018），第1期，369–406。[42] Szab´o, G´abor，强自吸收 C^*动力系统III。《数学进展》316（2017），356–380。[43]Toms, Andrew S.；Winter, Wilhelm，强自吸收 C^*代数。《美国数学学会汇刊》359（2007），第8期，3999–4029。

[44] Winter, Wilhelm, 《强自吸收》 C^*-代数是 $\mathcal{Z}$-稳定的。《非交换几何杂志》5 (2011)，第 2 期，253–264。