arXiv:2603.12973v1 [math.NA] 13 Mar 2026

非自伴特征值问题具有最优收敛率的自适应有限元方法☆

Shixi Wang[a]，Hai Bi[a]，Yidu Yang[a]，*

[a]贵州师范大学数学科学学院，贵阳*550025*，中国

摘要

本文首先讨论非自伴特征值问题自适应有限元方法的最优收敛性。借助相应源问题有限元解的误差估计子，我们针对重特征值与成簇特征值提出了新的理论误差估计子和可计算误差估计量，并证明了这两类估计量之间的等价性。我们针对特征值簇提出了一种自适应算法，并证明其达到最优收敛率。我们还给出数值实验，以支持理论结果。

关键词：有限元方法；非自伴特征值问题；后验误差估计；自适应算法，最优性；特征值簇。

1. 引言

自 Babuška 和 Rheinboldt [1] 于1978年开创性地开展工作以来，自适应有限元方法（AFEM）的理论和算法取得了显著进展；例如，参见专著[2, 3] 及近期综述论文 [4–6] 。特征值问题的后验误差分析与自适应计算已成为学术界的热门话题（参见 [7–19]）；尤其是多重特征值和簇特征值的自适应计算，吸引了学术界的广泛关注。

关于自伴特征值问题的自适应有限元方法收敛性与最优收敛率的证明，已有多项研究成果。2008年，Dai等人 [20]首次证明了自适应有限元方法对单特征值及其特征函数具有最优收敛率。2015年，Dai等人 [21]首次针对多重特征值提出了理论估计子，并证明了自适应有限元方法的收敛性与准最优复杂度。他们表明，在足够细的网格上，理论误差估计量等价于

☆项目获贵州省科学技术厅基金（黔科合基础研究（MS） 2026 第434号）和国家自然科学基金委员会（项目编号：11561014、11761022）资助。

*通讯作者电子邮箱： wangshixi@gznu.edu.cn (ShixiWang)、 bihaimath@gznu.edu.cn (Hai Bi)、 ydyang@gznu.edu.cn (Yidu Yang)

标准的可计算估计量。随后，Gallistl [22] 研究了线性有限元法下的聚簇特征值，并证明了自适应有限元方法的收敛性与准最优复杂度。这项研究得到了进一步拓展和发展。Bonito 和 Demlow [23] 利用任意多项式次数的单元，证明了自适应有限元方法对聚簇特征值具有最优收敛率；Boffi 等人 [24] 提出了一种 h自适应混合有限元法，可在离散拉普拉斯算子特征值簇时实现最优收敛率；Gallistl [25] 则分析了针对拉普拉斯算子和斯托克斯系统特征值簇的非协调自适应有限元方法。文献 [22, 23] 提出的可计算误差估计量与理论误差估计量之间的等价性论证具有一般性且简洁明了。文献[24, 25] 中关于自适应有限元方法最优性的分析方法同样具有一般性，且易于应用于其他特征值问题。然而，据作者所知，目前尚无文献报道非自伴特征值问题自适应有限元方法的最优收敛率。本文旨在填补这一空白。

我们的研究依赖于对相应源问题的自适应有限元方法最优收敛率的讨论。对于二阶椭圆型偏微分方程，重要文献见 [1–3, 5, 6, 26–36], ，为自适应伽辽金方法提供了相关研究。

与自伴特征值问题相比，非自伴特征值问题中特征值的升数可能大于1，从而产生缺陷特征值，且特征函数不再构成完备正交系。此外，还会出现阶数大于1的广义特征函数（见[1]第683页和第693页），因此关系式 $a(u,v) = \lambda(u,v)$ $_0$ （见(2.3)）不再成立。这给理论分析带来了挑战。

Feischl 等人 [31] 证明了一般线性二阶椭圆算子的自适应有限元方法以最优代数收敛率收敛。根据 Yang 等人[37], 中的论证，特征值问题伽辽金解的后验误差估计可归结为相应源问题伽辽金解的误差估计。基于 [31, 37], ，我们针对多重特征值和特征值簇提出了新的理论误差估计子和可计算估计量，并利用[22, 23]中的论证证明了它们的等价性。随后，我们提出一种自适应算法，并沿用 [22, 24] 中自适应有限元方法最优收敛率的证明思路，同时采用 [30, 31]中的论证，证明了非自伴特征值问题的自适应有限元方法的最优收敛率。

本文其余部分的安排如下。第 2 节介绍本研究所需的预备知识。第 3 节证明可计算误差估计量与理论误差估计量的等价性。第 4 节分析自适应有限元方法的最优性。最后，第 5 节给出数值算例。

本文中，字母 C （带或不带下标）表示一个一般的正定常数，它可能依赖于区域 Ω 和初始网格 $\mathcal{T}_0$，但不依赖于网格 $\mathcal{T}$（该网格是对 $\mathcal{T}_0$ 的细化），也不依赖于所关注的特征值簇。我们用记号 $a \lesssim b$ 表示 $a \leq Cb$，并记

$a \simeq b$ 当 $a \lesssim b$ 且 $b \lesssim a$ 时，为简单起见。

2. 预备知识

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$（$d = 2, 3$）为一个有界多面体区域。对于 $\omega \subset \Omega$，我们用 $H^1(\omega)$ 表示赋予范数 $\|v\|_{1,\omega}^2 := \|v\|_{L^2(\omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\omega)}^2$ 的通常索伯列夫空间。记 $\|\cdot\|_{1,\Omega} = \|\cdot\|_{1}$，$\|\cdot\|_{0,\omega} = \|\cdot\|_{L^2(\omega)}$，$\|\cdot\|_{0,\Omega} = \|\cdot\|_{0}$。令 $V = H_0^1(\Omega) = \{v : v \in H^1(\Omega),\ v|_{\partial\Omega} = 0\}$。令 $(u, v)_0 = \int_\Omega uv\,\mathrm{d}x$ 表示 $L^2(\Omega)$ 内积。

考虑以下非自伴椭圆算子的特征值问题

$$\mathcal{L}u := -\nabla \cdot (\boldsymbol{A}\nabla u) + \boldsymbol{b} \cdot \nabla u + cu = \lambda u \quad \text{in } \Omega, \tag{2.1}$$

$$u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \tag{2.2}$$

其中 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}(x))_{d\times d}$ 是一个对称矩阵，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(x) \in L^\infty(\Omega)^d$ 是一个向量，$c = c(x) \in L^\infty(\Omega)$ 是一个标量。为便于阐述，我们假设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{b}$ 和 c 均为分片充分光滑函数。

问题 (2.1)–(2.2) 的弱形式如下：求 $\lambda \in \mathbb{C}$、$0 \neq u \in V$，使得

$$a(u, v) = \lambda(u, v)_0 \quad \forall v \in V, \tag{2.3}$$

其中

$$a(u, v) := (\boldsymbol{A}\nabla u \cdot \nabla v)_0 + (\boldsymbol{b} \cdot \nabla u + cu, v)_0 \quad \text{for } u, v \in V.$$

半双线性型 $a(\cdot,\cdot)$ 是有界的，且

$$|a(u, v)| \lesssim \|\nabla u\|_0 \|\nabla v\|_0 \quad \forall u, v \in V.$$

我们假设系数满足[38]中命题 31.8 的条件。则由 [38] 中的命题 31.8，$a(\cdot,\cdot)$ 是 V-强制的：

$$a(u, u) \gtrsim \|\nabla u\|_0^2 \quad \forall u \in V. \tag{2.4}$$

我们定义拟范数 $\|v\|_V := a(v, v)^{1/2}$，并且有

$$\|v\|_V \simeq \|v\|_1 \quad \forall v \in V.$$

与 (2.3) 相关联的源问题如下：给定 $f \in L^2(\Omega)$，求满足

$$a(w, v) = (f, v)_0 \quad \forall v \in V. \tag{2.5}$$

给定一个初始单纯形网格 $\mathcal{T}_0$，其如 [39], 中所述是正则的，则具有网格尺寸 h_ℓ 的网格序列 $\{\mathcal{T}_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ 由最新顶点二分（NVB）细化策略生成。设

$$\mathbb{T} = \{\mathcal{T}_\ell : \mathcal{T}_\ell \text{ is a refinement of the initial mesh } \mathcal{T}_0\}$$

为网格的集合。对于 $\ell \in \mathbb{N}$， $\mathcal{T}_\ell \in \mathbb{T}$ 是正则的且为 γ-形状正则的，即

$$\gamma^{-1}|T|^{1/d} \leq \operatorname{diam}(T) \leq \gamma|T|^{1/d},$$

其中， $|T|$ 和 diam(T)分别表示 $T \in \mathcal{T}_\ell$的 d维体积和直径。

对于 $p \geq 1$，我们将 $\mathcal{T}_\ell$ 上次数为 $\leq p$的分片多项式集合记为 $\mathcal{P}^p(\mathcal{T}_\ell)$。设 $V_\ell \subset V$ 为定义在 $\mathcal{T}_\ell \in \mathbb{T}$上的协调拉格朗日有限元空间。 $V_\ell := \mathcal{P}^p(\mathcal{T}_\ell) \cap V$。

（2.3）的离散形式如下：求 $\lambda_\ell \in \mathbb{C}$、 $0 \neq u_\ell \in V_\ell$，使得

$$a(u_\ell, v) = \lambda_\ell (u_\ell, v)_0 \quad \forall v \in V_\ell. \tag{2.6}$$

（2.5）的离散形式如下：求 $w_\ell \in V_\ell$，使得

$$a(w_\ell, v) = (f, v)_0 \quad \forall v \in V_\ell. \tag{2.7}$$

由于 $a(w,\ v)$是强制的， $a(w,\ v)$满足Lax-Milgram引理，因此（2.5）和（2.7）是适定的。于是，我们可以定义解算子 $K : L^2(\Omega) \to V$和 $K_\ell : L^2(\Omega) \to V_\ell$ 如下：

$$a(Kf, v) = (f, v)_0 \quad \forall v \in V, \tag{2.8}$$
$$a(K_\ell f, v) = (f, v)_0 \quad \forall v \in V_\ell. \tag{2.9}$$

并且有

$$\|Kf\|_V \lesssim \|f\|_0, \quad \|K_\ell f\|_V \lesssim \|f\|_0 \quad \forall f \in L^2(\Omega). \tag{2.10}$$

令 $G_\ell :\ V \to V_\ell$ 为如下Ritz投影

$$a(G_\ell u, v) = a(u, v) \quad \forall v \in V_\ell. \tag{2.11}$$

则 $K_\ell = G_\ell \circ K$ ，并且有

$$\|K - K_\ell\|_V \to 0 \quad \text{as } h_\ell \to 0 \quad \text{and} \quad \|K - K_\ell\|_0 \to 0 \quad \text{as } h_\ell \to 0. \tag{2.12}$$

考虑伴随特征值问题：求 $\lambda^* \in \mathbb{C}$、 $0 \neq u^* \in V$，使得

$$a(v, u^*) = \overline{\lambda^*}(v, u^*)_0 \quad \forall v \in V. \tag{2.13}$$

求 $\lambda_\ell^* \in \mathbb{C}$、 $0 \neq u_\ell^* \in V_\ell$，使得

$$a(v, u_\ell^*) = \overline{\lambda_\ell^*}(v, u_\ell^*)_0 \quad \forall v \in V_\ell. \tag{2.14}$$

与（2.13）和（2.14）分别对应的源问题如下：给定 $g \in L^2(\Omega)$，求满足条件的 $w^* \in V$

$$a(v, w^*) = (v, g)_0 \quad \forall v \in V. \tag{2.15}$$

给定 $g \in L^2(\Omega)$，求满足条件的 $w_\ell^* \in V_\ell$

$$a(v, w_\ell^*) = (v, g)_0 \quad \forall v \in V_\ell. \tag{2.16}$$

令 K_* 和 $K_{\ell *}$ 分别为 (2.15) 和 (2.16) 的解算子。令 $G_{\ell *}: H_0^1(\Omega) \to V_\ell$ 为 Ritz 投影。于是 $K_{\ell *} = G_{\ell *} \circ K_*$，并且以下结论成立:

$$\|K_* - K_{\ell *}\|_V \to 0 \quad \text{as } h_\ell \to 0 \quad \text{and} \quad \|K_* - K_{\ell *}\|_0 \to 0 \quad \text{as } h_\ell \to 0. \tag{2.17}$$

(2.12) 和 (2.17) 表明，当 h 足够小时，谱逼近理论中的误差估计结论成立。

由 [40, 41]，可得源问题 (2.5) 的如下正则性估计；伴随问题 (2.15) 也有相同的结论。存在一个常数 $r > 0$，使得

$$\|w\|_{1+r} \lesssim \|f\|_0 \quad \forall f \in L^2(\Omega). \tag{2.18}$$

令 $\{\lambda_j\}$ 和 $\{\lambda_{j,\ell}\}$ 分别为 (2.3) 和 (2.6) 的特征值序列，按照模从小到大排列，每个特征值按其重数重复出现。记指标集为 $J = \{n+1, \ldots, n+N\}$。令 $\widehat{\lambda} = \frac{1}{N}\sum_{j\in J} \lambda_j$ 和 $\widehat{\lambda}_\ell = \frac{1}{N}\sum_{j\in J} \lambda_{j,\ell}$。设 $\{\lambda_j\}_{j\in J}$ 为一个特征值簇，即 $\lambda_n \neq \lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \ldots, \lambda_{n+N} \neq \lambda_{n+N+1}$，并以 σ 表示这些 N 特征值的倒数集合。假设分离条件 $M_J := \sup_{\mathcal{T}_\ell \in \mathbb{T}} \max_{j\in\{1,\ldots,\dim V_\ell\}\setminus J} \max_{k\in J} \frac{|\lambda_k|}{|\lambda_j - \lambda_k|} < \infty$ 成立。令 Γ 为一条 Jordan 闭曲线，且 $\Gamma \subset \rho(K)$，并令 σ 被 Γ 围住，而 Γ 不围住 K 的其他特征值。定义与 K 和 σ 相关的谱投影 $E = \frac{-1}{2\pi i}\int_\Gamma (z-K)^{-1} dz$，并定义与 K_ℓ 以及位于 Γ 内的 K_ℓ 的特征值相关的谱投影 $E_\ell = \frac{-1}{2\pi i}\int_\Gamma (z-K_\ell)^{-1} dz$。

我们假设初始网格尺寸 h_0 足够小，使得 $\dim R(E) = \dim R(E_\ell)$ 且 $\dim R(E_*) = \dim R(E_{\ell *})$（参见 [42] 第 684 页），其中 R 表示值域。记 $\widehat{R}(E) = \{v \in R(E) : \|v\|_V = 1\}$，以及 $\widehat{R}(E_\ell) = \{v \in R(E_\ell) : \|v\|_V = 1\}$，并记 $\widehat{R}(E_*) = \{v \in R(E_*) : \|v\|_V = 1\}$，以及 $\widehat{R}(E_{\ell *}) = \{v \in R(E_{\ell *}) : \|v\|_V = 1\}$。我们将 $R(E)$ 和 $R(E_*)$ 称为特征空间，并将 $R(E_\ell)$ 和 $R(E_{\ell *})$ 称为近似特征空间。

对于 V 中的两个闭子空间 A 和 B，我们定义间隙 $\widehat{\delta}(A, B)$，按照范数 $\|\cdot\|_V$ 的意义定义在 A 和 B 之间

$$\delta(A,B) = \sup_{\phi\in A, \|\phi\|_V=1} \inf_{\psi\in B} \|\phi - \psi\|_V, \quad \widehat{\delta}(A,B) = \max\{\delta(A,B), \delta(B,A)\}.$$

定义

$$\varepsilon_\ell = \sup_{u\in\widehat{R}(E)} \inf_{\chi\in V_\ell} \|u - \chi\|_V, \quad \varepsilon_\ell^* = \sup_{u\in\widehat{R}(E_*)} \inf_{\chi\in V_\ell} \|u - \chi\|_V.$$

我们假设以下条件 (C1) 或 (C2) 成立。

(C1). $\{u_{j,\ell}\}_{j\in J}$ 和 $\{u_{j,\ell}^*\}_{j\in J}$ 分别是 $R(E_\ell)$和 $R(E_{\ell *})$中关于$(\cdot,\cdot)_0$, 的标准正交基。

(C2). $\|u_{j,\ell}\|_0 = 1$, $\|u^*_{j,\ell}\|_0 = 1$，以及$(u_{i,\ell}, u^*_{j,\ell})_0 = 0$ $(i \neq j)$，并且存在一个与h无关的正定常数τ，使得对所有$j \in J$有$|(u_{j,\ell}, u^*_{j,\ell})_0| \geq \tau$。

注 2.1。分别通过求解 *(2.6)* 和 *(2.13)* 得到 $\{u_{j,\ell}\}_{j\in J} \subset R(E_\ell)$ 和 $\{u^*_{j,\ell}\}_{j\in J} \subset R(E_{\ell *})$ 后，如果条件 *(C1)* 对 $\{u_{j,\ell}\}_{j\in J}$ 和 $\{u^*_{j,\ell}\}_{j\in J}$ 不成立，则格拉姆–施密特过程将 $\{u_{j,\ell}\}_{j\in J}$ 和$\{u^*_{j,\ell}\}_{j\in J}$ 变为关于 $(\cdot,\cdot)$ 的标准正交基（仍分别记为） $\{u_{j,\ell}\}_{j\in J}$ 和 $\{u^*_{j,\ell}\}_{j\in J}$，其中 $R(E_\ell)$和 $R(E_{\ell *})$。于是， $\{u_{j,\ell}\}_{j\in J}$ 和$\{u^*_{j,\ell}\}_{j\in J}$ 满足条件 *(C1)*。

当特征值簇 $\{\lambda_{j,\ell}\}_{j\in J}$ 由 N 个简单特征值组成时，利用 *[43]*，中引理 *5* 的论证，可推知相应的特征函数 $\{u_{j,\ell}\}_{j\in J}$ 和 $\{u^*_{j,\ell}\}_{j\in J}$ 满足条件 *(C2)*。

由 [37], 中的定理3.5可得以下引理。

引理 2.1. 假设条件 *(C1)* 或 *(C2)* 成立。那么，当初始网格尺寸 h_0 足够小时，有

$$\widehat{\delta}(R(E), R(E_\ell)) \lesssim \sum_{j\in J} \|(K - K_\ell)u_{j,\ell}\|_V \lesssim N\widehat{\delta}(R(E), R(E_\ell)), \tag{2.19}$$

$$\widehat{\delta}(R(E_*), R(E_{\ell *})) \lesssim \sum_{j\in J} \|(K_* - K_{\ell *})u^*_{j,\ell}\|_V \lesssim N\widehat{\delta}(R(E_*), R(E_{\ell *})), \tag{2.20}$$

$$|\widehat{\lambda} - \widehat{\lambda}_\ell| \lesssim N^2\varepsilon_\ell\varepsilon^*_\ell \lesssim N^2 \sum_{j\in J} \left(\|(K - K_\ell)u_{j,\ell}\|^2_V + \|(K_* - K_{\ell *})u^*_{j,\ell}\|^2_V\right). \tag{2.21}$$

当特征值簇 $\{\lambda_j\}_{j\in J}$ 由非缺陷特征值组成时，即这些特征值的代数重数等于几何重数时，对于 $k \in J$，

$$|\lambda_k - \lambda_{k,\ell}| \lesssim N^2\varepsilon_\ell\varepsilon^*_\ell \lesssim N^2 \sum_{j\in J} (\|(K - K_\ell)u_{j,\ell}\|^2_V + \|(K_* - K_{\ell *})u^*_{j,\ell}\|^2_V). \tag{2.22}$$

注 2.2. 注意，$Ku_{j,\ell}$ 和 $K_\ell u_{j,\ell}$ 分别是方程 *(2.6)* 和 *(2.13)* 在右端项 $f = u_{j,\ell}$下的解。引理 *2.2* 揭示，近似特征值和近似特征空间的后验误差可由相关源问题近似解的后验误差推导得到。为计算集合 $\{K_\ell u_{j,\ell}\}_{j\in J}$，需要针对每个 $f = u_{j,\ell}$ *$(j \in J)$*求解线性方程组 *(2.13)*。值得注意的是，这些q 线性方程组具有相同的系数矩阵，但右端项不同。

在大多数情况下，特征值簇 $\{\lambda_j\}_{j\in J}$ 在离散化后将分裂为 N 单特征值 $\{\lambda_{j,\ell}\}_{j\in J}$ 。此时，令 $u_{j,\ell}$ 表示与 $\lambda_{j,\ell}$ *$(j \in J)$* 相关联的特征函数。则有

$$K_\ell u_{j,\ell} = \lambda^{-1}_{j,\ell} u_{j,\ell}, \tag{2.23}$$

这恰好是以 $u_{j,\ell}$ 为右端项的线性方程组 *(2.13)* 的解。

我们将 $\mathcal{E}_\ell$ 分解为 $= \mathcal{E}_\ell^0 \cup \mathcal{E}_\ell^\partial$，其中 $\mathcal{E}_\ell^0$ 和 $\mathcal{E}_\ell^\partial$ 分别表示划分 $\mathcal{T}_\ell$ 的内部面集合和边界面集合。令

$$[\![\boldsymbol{A}\nabla w \cdot \nu]\!]|_e = \boldsymbol{A}\nabla w|_{T^+} \cdot \nu^+ + \boldsymbol{A}\nabla w|_{T^-} \cdot \nu^-,$$

其中， e 是单元 T^+和 T^-的公共面，其单位外法向量分别为ν^+和 ν^-，且 $\nu = \nu^-$。

参照 Feischl 等人 [31], 的工作，源问题 (2.7) 的局部误差估计子为

$$\eta_\ell(f,T)^2 := h_T^2 \|R_T(f,w_\ell)\|_{0,T}^2 + \sum_{e\in\mathcal{E}_\ell, e\subset\partial T} h_e \|J_e(w_\ell)\|_{0,e}^2,$$

其中，单元残差 $R_T(f,\ w_\ell)$和跳跃残差 $J_e(w_\ell)$定义如下

$$\begin{aligned} R_T(f,w_\ell) &= f - \mathcal{L}w_\ell \\ &= f + \nabla\cdot(\boldsymbol{A}\nabla w_\ell) - \boldsymbol{b}\cdot\nabla w_\ell - cw_\ell \quad \text{for } T\in\mathcal{T}_\ell, \\ J_e(w_\ell) &= \begin{cases} [\![\boldsymbol{A}\nabla w_\ell\cdot\nu]\!] & \text{if } e\in\mathcal{E}_\ell^0, \\ 0 & \text{if } e\in\mathcal{E}_\ell^\partial. \end{cases} \end{aligned}$$

源问题 (2.7) 的局部误差估计子定义为

$$\eta_\ell^*(g,T)^2 := h_T^2 \|R_T^*(g,w_\ell^*)\|_{0,T}^2 + \sum_{e\in\mathcal{E}_\ell, e\subset\partial T} h_e \|J_e^*(w_\ell^*)\|_{0,e}^2,$$

其中，单元残差 $R_T^*(g,\ w_\ell^*)$和跳跃残差 $J_e^*(w_\ell^*)$定义如下

$$\begin{aligned} R_T^*(g,w_\ell^*) &= g - \mathcal{L}^* w_\ell^* \\ &= g + \nabla\cdot(\overline{\boldsymbol{A}}\nabla w_\ell^*) + \nabla\cdot(\overline{\boldsymbol{b}} w_\ell^*) - \overline{c} w_\ell^* \\ &= g + \nabla\cdot(\overline{\boldsymbol{A}}\nabla w_\ell^*) + \overline{\boldsymbol{b}}\cdot\nabla w_\ell^* + (\nabla\cdot\overline{\boldsymbol{b}} - \overline{c}) w_\ell^* \quad \text{for } T\in\mathcal{T}_\ell, \\ J_e^*(w_\ell^*) &= \begin{cases} [\![\overline{\boldsymbol{A}}\nabla w_\ell^*\cdot\nu]\!] & \text{if } e\in\mathcal{E}_\ell^0, \\ 0 & \text{if } e\in\mathcal{E}_\ell^\partial. \end{cases} \end{aligned}$$

对于给定的 $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{T}_\ell$，我们将误差估计子 $\eta_\ell(f,\ \mathcal{M})$和 $\eta_\ell^*(g,\ \mathcal{M})$定义为

$$\eta_\ell(f,\mathcal{M})^2 := \sum_{T\in\mathcal{M}} \eta_\ell(f,T)^2 \text{ and } \eta_\ell^*(g,\mathcal{M})^2 := \sum_{T\in\mathcal{M}} \eta_\ell^*(g,T)^2.$$

如[2, 3]和 [38], 第 34 章所示，误差估计子是可靠且有效的；另请参见 [31]。

引理 2.2。 假设初始网格尺寸 h_0 足够小。那么对于所有正则三角剖分 $\mathcal{T}_\ell$ 及其对应的解 w_ℓ 和 w_ℓ^*，若它们分别满足(2.7) 和(2.16)，则有

$$\|w - w_\ell\|_V \lesssim \eta_\ell(f,\mathcal{T}_\ell), \tag{2.24}$$

$$\|w^* - w_\ell^*\|_V \lesssim \eta_\ell^*(g, \mathcal{T}_\ell), \tag{2.25}$$
$$\eta_\ell(f, \mathcal{T}_\ell) \lesssim \|w - w_\ell\|_V + \mathrm{osc}_\ell(f, w_\ell), \tag{2.26}$$
$$\eta_\ell^*(g, \mathcal{T}_\ell) \lesssim \|w^* - w_\ell^*\|_V + \mathrm{osc}_\ell^*(g, w_\ell^*), \tag{2.27}$$

其中振荡项

$$\mathrm{osc}_\ell(f, w_\ell)^2 := \sum_{T\in\mathcal{T}_\ell} \Big(h_T^2 \|(1-\Pi_\ell^{2p-1})(\mathcal{L}(w_\ell) - f)\|_{0,T}^2 + \sum_{e\in\mathcal{E}_\ell^0, e\subset\partial T} h_e \|(1-\Pi_\ell^{2p-1})[\![\boldsymbol{A}\nabla w_\ell \cdot \nu]\!]\|_{0,e}^2 \Big),$$

$$\mathrm{osc}_\ell^*(g, w_\ell^*)^2 := \sum_{T\in\mathcal{T}_\ell} \Big(h_T^2 \|(1-\Pi_\ell^{2p-1})(\mathcal{L}^*(w_\ell^*) - g)\|_{0,T}^2 + \sum_{e\in\mathcal{E}_\ell^0, e\subset\partial T} h_e \|(1-\Pi_\ell^{2p-1})[\![\overline{\boldsymbol{A}}\nabla w_\ell^* \cdot \nu]\!]\|_{0,e}^2 \Big),$$

关于 L^2-正交投影 $\Pi_\ell^q\colon\ L^2(\Omega) \to \mathcal{P}^q(\mathcal{T}_\ell)$。

3. 可计算误差估计量与理论误差估计量

引理 2.1 告诉我们，近似特征空间和近似特征值的误差估计，分别归因于右端项为 $f = u_{j,\ell}$和 $g = u_{j,\ell}^*$ 的源问题 (2.5) 和 (2.15) 的有限元解的误差估计。因此，我们给出以下可计算误差估计量。

对于 $T \in \mathcal{T}_\ell$ 和 $j \in J$，我们在 T上定义可计算的局部误差估计子，分别为 $\eta_\ell(u_{j,\ell}, T)$ 和 $\eta_\ell^*(u_{j,\ell}^*, T)$。给定 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{T}_\ell$，我们将可计算误差估计量定义为 $\eta_\ell(u_{j,\ell}, \mathcal{M})$ 和 $\eta_\ell^*(u_{j,\ell}^*, \mathcal{M})$。

利用本文中的可计算误差估计量，并参考现有的标准算法，我们给出以下算法。

算法 1. 输入：初始三角剖分 $\mathcal{T}_0$，网格尺寸为 h_0，总体参数为 $\theta \in (0, 1]$.

自适应循环：对于所有 $\ell = 0, 1, 2, \ldots$，依次迭代执行步骤 (i)–(v)。

(i) 在 $\mathcal{T}_\ell$ 上求解 (2.6) 和 (2.13)，网格尺寸为 h_ℓ，得到离散解 $(\lambda_{j,\ell}, u_{j,\ell}, u_{j,\ell}^*)$，其中 $\|u_{j,\ell}\|_V = 1$ 和 $\|u_{j,\ell}^*\|_V = 1$ 对应 $j \in J$。(ii) 对所有 $T \in \mathcal{T}_\ell$，计算相应的误差估计量 $\eta_\ell(u_{j,\ell}, T)$ 和 $\eta_\ell^*(u_{j,\ell}^*, T)$。

(iii) 通过 **标记策略** 确定 $\mathcal{T}_\ell$ 的一个子集 $\mathcal{M}_\ell$，使其具有最小基数，并满足

$$\sum_{j\in J} (\eta_\ell(u_{j,\ell}, \mathcal{M}_\ell)^2 + \eta_\ell^*(u_{j,\ell}^*, \mathcal{M}_\ell)^2) \geq \theta \sum_{j\in J} (\eta_\ell(u_{j,\ell}, \mathcal{T}_\ell)^2 + \eta_\ell^*(u_{j,\ell}^*, \mathcal{T}_\ell)^2). \tag{3.1}$$

(iv) 通过 NVB 细化策略生成 $\mathcal{T}_{\ell+1} := \mathrm{Refine}(\mathcal{T}_\ell, \mathcal{M}_\ell)$。

(v) 增大 $\ell \to \ell+1$，并转到步骤 (i)。

输出：所有 $\ell \in \mathbb{N}$ 的近似特征对 $(\lambda_{j,\ell},\ u_{j,\ell},\ u^*_{j,\ell})$，以及误差估计子 $\eta_\ell(u_{j,\ell},\ T)$ 和 $\eta^*_\ell(u_{j,\ell},\ T)$。

步骤 (iii) 中的标记策略由 D¨orfler [26] 提出。

本文假设 $\{u_j\}_{j\in J}$ 和 $\{u^*_j\}_{j\in J}$ 分别是关于 $(\cdot,\ \cdot)_0$ 在 $R(E)$ 和 $R(E_*)$ 中的任意给定标准正交基。

定理 3.1。 假设初始网格尺寸 h_0 足够小，则以下估计成立

$$\|(K-K_\ell)|_{R(E)}\|_V \lesssim \sum_{j\in J}\|(K-K_\ell)u_j\|_V \lesssim N\|(K-K_\ell)|_{R(E)}\|_V, \tag{3.2}$$

$$\|(K_*-K_{\ell*})|_{R(E_*)}\|_V \lesssim \sum_{j\in J}\|(K_*-K_{\ell*})u^*_j\|_V \lesssim N\|(K_*-K_{\ell*})|_{R(E_*)}\|_V, \tag{3.3}$$

$$\widehat{\delta}(R(E),R(E_\ell)) \lesssim \sum_{j\in J}\|(K-K_\ell)u_j\|_V \lesssim N\widehat{\delta}(R(E),R(E_\ell)), \tag{3.4}$$

$$\widehat{\delta}(R(E_*),R(E_{\ell*})) \lesssim \sum_{j\in J}\|(K_*-K_{\ell*})u^*_j\|_V \lesssim N\widehat{\delta}(R(E_*),R(E_{\ell*})), \tag{3.5}$$

$$|\widehat{\lambda}-\widehat{\lambda}_\ell| \lesssim N^2\sum_{j\in J}\left(\|(K-K_\ell)u_j\|_V^2+\|(K_*-K_{\ell*})u^*_j\|_V^2\right). \tag{3.6}$$

当特征值簇 $\{\lambda_j\}_{j\in J}$ 由非缺陷特征值构成时，对于 $k\in J$，

$$|\lambda_k-\lambda_{k,\ell}| \lesssim N^2\sum_{j\in J}\left(\|(K-K_\ell)u_j\|_V^2+\|(K_*-K_{\ell*})u^*_j\|_V^2\right). \tag{3.7}$$

证明。 由 $u=\sum_{j\in J}(u,\ u_j)_0u_j$，我们可得

$$\begin{aligned}
\|(K-K_\ell)|_{R(E)}\|_V &= \sup_{u\in\widehat{R}(E)}\|(K-K_\ell)u\|_V\\
&= \sup_{u\in\widehat{R}(E)}\|(K-K_\ell)\sum_{j\in J}(u,u_j)_0u_j\|_V\\
&\le \sup_{u\in\widehat{R}(E)}\sum_{j\in J}|(u,u_j)_0|\|(K-K_\ell)u_j\|_V\\
&\lesssim \sum_{j\in J}\|(K-K_\ell)u_j\|_V.
\end{aligned}$$

我们得到（3.2）的第一个估计，而（3.2）的第二个估计显然成立。类似地，我们可以推出（3.3）。

参见 [37], 中的引理 3.4，我们有

$$\widehat{\delta}(R(E),R(E_\ell)) \simeq \|(K-K_\ell)|_{R(E)}\|_V.$$

然后结合式 (3.2)，可得式 (3.4)。类似地，我们可以推导出式 (3.5)。

由 [37], 的定理 2.2、(3.4)和(3.5)，我们有

$$\varepsilon_\ell \lesssim \widehat{\delta}(R(E), R(E_\ell)) \lesssim \sum_{j\in J} \|(K-K_\ell)u_j\|_V,$$

$$\varepsilon_\ell^* \lesssim \widehat{\delta}(R(E_*), R(E_{\ell *})) \lesssim \sum_{j\in J} \|(K_*-K_{\ell *})u_j^*\|_V.$$

然后结合(2.21)，我们得到(3.6)；结合(2.22)，我们得到(3.7)。 □

定理 3.1表明，近似特征空间和近似特征值的误差估计归因于源问题(2.5)和(2.15)的有限元解的误差估计，其右端项分别为 $f = u_j$和 $g = u_j^*$。因此，我们给出如下理论误差估计子。

对于 $T \in \mathcal{T}_\ell$ 和 $j \in J$，由于(2.19)与(3.4)以及(2.20)与(3.5)，我们将 T 上的理论局部误差估计子定义为 $\mu_\ell(u_j,T)^2 := \eta_\ell(u_j,T)^2$ 和$\mu_\ell^*(u_j^*,T)^2 := \eta_\ell^*(u_j^*,T)^2$。参照 [22, 23],，我们将记号 μ_ℓ和μ_ℓ^* 指定为本文中的理论误差估计子。对于给定的 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{T}_\ell$，我们将 $\mathcal{M}$ 上的理论误差估计子定义为

$$\mu_\ell(u_j,\mathcal{M})^2 := \sum_{T\in\mathcal{M}} \mu_\ell(u_j,T)^2 \text{ and } \mu_\ell^*(u_j^*,\mathcal{M})^2 := \sum_{T\in\mathcal{M}} \mu_\ell^*(u_j^*,T)^2.$$

分别考虑右端项为 $f = u_j$和 $g = u_j^*$的 (2.24)、(2.25)、(2.26) 和 (2.27)。则振荡项为

$$\begin{aligned}
\mathrm{osc}_\ell(u_j,K_\ell u_j)^2 := \sum_{T\in\mathcal{T}_\ell} \Big(& h_T^2 \|(1-\Pi_\ell^{2p-1})(\mathcal{L}(K_\ell u_j)-u_j)\|_{0,T}^2 \\
& + \sum_{e\in\mathcal{E}_\ell^0, e\subset\partial T} h_e \|(1-\Pi_\ell^{2p-1})[\![\boldsymbol{A}\nabla(K_\ell u_j)\cdot\nu]\!]\|_{0,e}^2 \Big), \\
\mathrm{osc}_\ell^*(u_j^*,K_\ell^* u_j^*)^2 := \sum_{T\in\mathcal{T}_\ell} \Big(& h_T^2 \|(1-\Pi_\ell^{2p-1})(\mathcal{L}^*(K_\ell^* u_j^*)-u_j^*)\|_{0,T}^2 \\
& + \sum_{e\in\mathcal{E}_\ell^0, e\subset\partial T} h_e \|(1-\Pi_\ell^{2p-1})[\![\overline{\boldsymbol{A}}\nabla(K_\ell^* u_j^*)\cdot\nu]\!]\|_{0,e}^2 \Big).
\end{aligned}$$

容易验证，当 h_0 的初始网格尺寸足够小时，

$$\mathrm{osc}_\ell(u_j,K_\ell u_j)^2 \le \frac{1}{2}\sum_{j\in J}\mu_\ell(u_j,\mathcal{T}_\ell)^2, \quad \mathrm{osc}_\ell^*(u_j^*,K_\ell^* u_j^*)^2 \le \frac{1}{2}\sum_{j\in J}\mu_\ell^*(u_j^*,\mathcal{T}_\ell)^2,$$

由于系数 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{b}$ 和 c 均为分片充分光滑函数。因此，当 h_0 的初始网格尺寸足够小时，由引理 2.2 可知，存在与 h_ℓ 无关的 C_{rel} 和 C_{eff}，使得

$$\sum_{j\in J}\|Ku_j - K_\ell u_j\|_V^2 \le C_{\mathrm{rel}}^2 \sum_{j\in J}\mu_\ell(u_j,\mathcal{T}_\ell)^2, \tag{3.8}$$

$$\sum_{j\in J}\|K_*u_j^*-K_{\ell*}u_j^*\|_V^2\le C_{\mathrm{rel}}^2\sum_{j\in J}\mu_\ell^*(u_j^*,\mathcal{T}_\ell)^2, \tag{3.9}$$

$$C_{\mathrm{eff}}^{-2}\sum_{j\in J}\mu_\ell(u_j,\mathcal{T}_\ell)^2\le\sum_{j\in J}\|Ku_j-K_\ell u_j\|_V^2, \tag{3.10}$$

$$C_{\mathrm{eff}}^{-2}\sum_{j\in J}\mu_\ell^*(u_j^*,\mathcal{T}_\ell)^2\le\sum_{j\in J}\|K_*u_j^*-K_{\ell*}u_j^*\|_V^2. \tag{3.11}$$

令 $\Lambda_\ell:=E_\ell\circ G_\ell$ 且 $\Lambda_{\ell*}:=E_{\ell*}\circ G_{\ell*}$。

根据 [22] 的命题5.1和 [23], 的引理1，我们可得如下定理。

定理3.2。 假设初始网格尺寸 h_0 足够小，使得

$$\max_{j\in J}\|u_j-\Lambda_\ell u_j\|_0\le\sqrt{1+(2N)^{-1}}-1, \tag{3.12}$$

$$\max_{j\in J}\|u_j^*-\Lambda_{\ell*}u_j^*\|_0\le\sqrt{1+(2N)^{-1}}-1. \tag{3.13}$$

那么对于 $T\in\mathcal{T}_\ell$,

$$\sum_{j\in J}\mu_\ell(u_j,T)^2\le\frac{303}{200}\sum_{j\in J}\eta_\ell(u_{j,\ell},T)^2+101\vartheta_\ell(T)^2, \tag{3.14}$$

$$\sum_{j\in J}\eta_\ell(u_{j,\ell},T)^2\le\frac{101}{50}\sum_{j\in J}\mu_\ell(u_j,T)^2+202\vartheta_\ell(T)^2, \tag{3.15}$$

$$\sum_{j\in J}\mu_\ell^*(u_j,T)^2\le\frac{303}{200}\sum_{j\in J}\eta_\ell^*(u_{j,\ell}^*,T)^2+101\vartheta_\ell^*(T)^2, \tag{3.16}$$

$$\sum_{j\in J}\eta_\ell^*(u_{j,\ell}^*,T)^2\le\frac{101}{50}\sum_{j\in J}\mu_\ell^*(u_j^*,T)^2+202\vartheta_\ell^*(T)^2, \tag{3.17}$$

其中， $\vartheta_\ell(T)^2:=\sum_{j\in J}(h_T^2\|R_{1,j}\|_{0,T}^2+\sum_{e\in\mathcal{E}_\ell,e\subset\partial T}h_e\|R_{2,j}\|_{0,e}^2)$，满足$R_{1,j}:=(u_j-\Lambda_\ell u_j)-\mathcal{L}(K_\ell(u_j-\Lambda_\ell u_j))$以及$R_{2,j}:=[\![A\nabla(K_\ell(u_j-\Lambda_\ell u_j))]\!]$; 类似地，我们可以定义 $\vartheta_\ell^*(T)$。此外，我们还有

$$\sum_{j\in J}(\mu_\ell(u_j,\mathcal{M}_\ell)^2+\mu_\ell^*(u_j,\mathcal{M}_\ell)^2)\ge\tilde{\theta}\sum_{j\in J}(\mu_\ell(u_j,\mathcal{T}_\ell)^2+\mu_\ell^*(u_j,\mathcal{T}_\ell)^2), \tag{3.18}$$

对于修正体积参数

$$\tilde{\theta}=\left(\frac{50}{101}\times\frac{200}{303}-CNh_\ell^{2r}\right)\theta\ge\frac{1}{4}\theta>0. \tag{3.19}$$

证明。 利用 (2.5)、(2.7) 和 (2.11)，我们计算得

$$\begin{aligned}u_j&=(u_j-\Lambda_\ell u_j)+\Lambda_\ell u_j\\&=(u_j-\Lambda_\ell u_j)+\sum_{m\in J}(\Lambda_\ell u_j,u_{m,\ell})_0u_{m,\ell}.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Then

$$K_\ell u_j = K_\ell(u_j - \Lambda_\ell u_j) + \sum_{m\in J}(\Lambda_\ell u_j, u_{m,\ell})_0 K_\ell u_{m,\ell}. \tag{3.21}$$

结合上述两个方程可得

$$u_j - \mathcal{L}(K_\ell u_j) = \sum_{m\in J}(\Lambda_\ell u_j, u_{m,\ell})_0 (u_{m,\ell} - \mathcal{L}(K_\ell u_{m,\ell})) + R_{1,j}, \tag{3.22}$$

$$[\![\boldsymbol{A}\nabla(K_\ell u_j)\cdot\nu]\!] = \sum_{m\in J}(\Lambda_\ell u_j, u_{m,\ell})_0 [\![\boldsymbol{A}\nabla(K_\ell u_{m,\ell})\cdot\nu]\!] + R_{2,j}. \tag{3.23}$$

我们现在定义以下向量

$$\begin{aligned} U &:= [u_j - \mathcal{L}(K_\ell u_j)], \quad U_\ell := [u_{m,\ell} - \mathcal{L}(K_\ell u_{m,\ell})], \\ W &:= [[\![\boldsymbol{A}\nabla(K_\ell u_j)\cdot\nu]\!]], \quad W_\ell := [[\![\boldsymbol{A}\nabla(K_\ell u_{m,\ell})\cdot\nu]\!]], \\ R_1 &:= [R_{1,j}], \quad R_2 := [R_{2,j}], \end{aligned}$$

其中 $n+1 \le j,\ m \le n+N$。我们还定义矩阵 $M \in \mathbb{C}^{N\times N}$，其元素为$M_{j,\ m} = (\Lambda_\ell u_j,\ u_{m,\ \ell})_0$，其中 j 表示行索引，m 表示列索引。在 L^2 意义下，由（3.22）和（3.23）给出的关系可以表示为

$$U = MU_\ell + R_1, \quad W = MW_\ell + R_2. \tag{3.24}$$

我们令 $\|\cdot\|_2$ 表示 $\ell_2(\mathbb{C}^N)$ 中的算子范数，并令 $\|\cdot\|_2$ 表示欧几里得长度。

设 $v \in \mathbb{C}^N$。我们有 $\|Mv\|_2^2 = v^{\mathsf{H}} M_{\mathsf{H}} M v \le \|M_{\mathsf{H}} M\|_2 \|v\|_2^2$.因此，我们可以推导出不等式 $\|M\|_2^2 \le \|M^{\mathsf{H}} M\|_2$.由于 $M^{\mathsf{H}}M$是自伴半正定的，因此 $\|M^{\mathsf{H}}M\|_2$ 等于$M^{\mathsf{H}}M$的最大特征值。

矩阵 MM_{H}的第 j行、第 m列元素为

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (\Lambda_\ell u_j, u_{i,\ell})_0 \overline{(\Lambda_\ell u_m, u_{i,\ell})_0} &= \sum_{i=1}^N (\Lambda_\ell u_j, (\Lambda_\ell u_m, u_{i,\ell})_0 u_{i,\ell})_0 \\ &= \left(\Lambda_\ell u_j, \sum_{i=1}^N (\Lambda_\ell u_m, u_{i,\ell})_0 u_{i,\ell}\right)_0 \\ &= (\Lambda_\ell u_j, \Lambda_\ell u_m)_0. \end{aligned} \tag{3.25}$$

因此，我们定义 $B := MM_{\mathsf{H}} = [(\Lambda_\ell u_j,\ \Lambda_\ell u_m)_0]$。线性代数中的一个基本结果表明，$B$ 与 $M^{\mathsf{H}}M$等谱。因此可得$\|M_{\mathsf{H}}M\|_2 = \|B\|_2$，且这两个量均对应于 B 的最大特征值。B 矩阵已在 [22]的引理5.1证明中得到全面分析。值得注意的是，在条件（3.12）下，B 是非奇异的；根据（5.2）及 [22], 中的后续结果，我们得到

$$\frac{2N-1}{2N} \le B_{ii} \le \frac{2N+1}{2N} \qquad \text{and} \qquad \sum_{j\ne i}|B_{ij}| \le \frac{N-1}{2N}. \tag{3.26}$$

格什戈林定理表明，矩阵 B 的特征值 $\{\sigma_i\}$ 满足以下关系

$$1 \leq 2\sigma_i \leq 3,\ 1 \leq i \leq N. \tag{3.27}$$

因此 $\|M\|_2^2 \leq \|M^{\mathsf{H}}M\|_2 = \|MM_{\mathsf{H}}\|_2 \leq 3/2$，并由杨氏不等式可得$\epsilon = 10^{-2}$,

$$\begin{aligned}
\int_T \|U\|_2^2 \mathrm{d}x &\leq \frac{3(1+\epsilon)}{2} \int_T \|U_\ell\|_2^2 \mathrm{d}x + \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right) \int_T \|R_1\|_2^2 \mathrm{d}x, \\
\int_e \|W\|_2^2 \mathrm{d}s &\leq \frac{3(1+\epsilon)}{2} \int_e \|W_\ell\|_2^2 \mathrm{d}s + \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right) \int_e \|R_2\|_2^2 \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

因此（3.14）成立。

矩阵 B 的可逆性确保矩阵 M 也是可逆的。通过上述计算，我们得到不等式 $\|M^{-1}\|_2^2 \leq \|(M^{-1})^{\mathsf{H}}M^{-1}\|_2 = \|B^{-1}\|_2$.鉴于 B既是正定的又是可对角化的，我们可以应用公式（3.27）得出 $\|B^{-1}\|_2 = 1/\min_{1\leq i\leq N} \sigma_i \leq 2$. 因此 $\|M^{-1}\|_2^2 \leq 2$，并由杨氏不等式可得 $\epsilon = 10^{-2}$,

$$\begin{aligned}
\int_T \|U_\ell\|_2^2 \mathrm{d}x &\leq 2(1+\epsilon) \int_T \|U\|_2^2 \mathrm{d}x + 2\left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right) \int_T \|R_1\|_2^2 \mathrm{d}x, \\
\int_e \|W_\ell\|_2^2 \mathrm{d}s &\leq 2(1+\epsilon) \int_e \|W\|_2^2 \mathrm{d}s + 2\left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right) \int_e \|R_2\|_2^2 \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

因此（3.15）成立。

类似地，我们可以得到（3.16）和（3.17）。

我们将在下文证明，与 $\sum_{j\in J} \mu_\ell(u_j,\ \mathcal{T}_\ell)^2$ 和 $\sum_{j\in J} \mu_\ell^*(u_j^*,\ \mathcal{T}_\ell)^2$ 相比，$\sum_{\kappa\in\mathcal{T}_\ell} \vartheta_\ell(\kappa)^2$ 和 $\sum_{\kappa\in\mathcal{T}_\ell} \vartheta_\ell^*(\kappa)^2$ 是高阶项。由逆估计、(2.10) 和迹估计，我们推得

$$\begin{aligned}
\sum_{T\in\mathcal{T}_\ell} \vartheta_\ell(T)^2 = \sum_{T\in\mathcal{T}_\ell} \sum_{j\in J} \Bigg(& h_T^2 \|u_j - \Lambda_\ell u_j\|_{0,T}^2 + h_T^2 \|\mathcal{L}(K_\ell(u_j - \Lambda_\ell u_j))\|_{0,T}^2 \\
& + \sum_{e\in\mathcal{E}_\ell, e\subset\partial T} h_e \|[\![\boldsymbol{A}\nabla(K_\ell(u_j - \Lambda_\ell u_j)) \cdot \nu]\!]\|_{0,e}^2 \Bigg) \\
\lesssim & \sum_{j\in J} (h_\ell^2 + 1 + A_{\max}^2) \|u_j - \Lambda_\ell u_j\|_0^2 \\
\lesssim & \sum_{j\in J} (h_\ell^2 + 1 + A_{\max}^2) \left(\|u_j - E_\ell u_j\|_0^2 + \|u_j - G_\ell u_j\|_0^2 \right).
\end{aligned} \tag{3.28}$$

由 [42], 尼采技术中的式（7.3）、式（2.18）、式（3.2）、式（3.4）和式（3.8），我们

推得

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J}\|u_j-E_\ell u_j\|_0^2+\|u_j-G_\ell u_j\|_0^2 &\lesssim \sum_{j\in J}\|(K-K_\ell)|_{R(E)}\|_0^2+\sum_{j\in J}\|u_j-G_\ell u_j\|_0^2\\ &\lesssim Nh_\ell^{2r}\|(K-K_\ell)|_{R(E)}\|_V^2+h_\ell^{2r}\sum_{j\in J}\|u_j-G_\ell u_j\|_V^2\\ &\lesssim Nh_\ell^{2r}\sum_{j\in J}\|(K-K_\ell)u_j\|_V^2+Nh_\ell^{2r}\widehat{\delta}(R(E),R(E_\ell))^2\\ &\lesssim Nh_\ell^{2r}\sum_{j\in J}\mu_\ell(u_j,\mathcal{T}_\ell)^2.\end{aligned}$$

因此，将上述估计代入 (3.28)，可得

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_\ell}\vartheta_\ell(T)^2\lesssim Nh_\ell^{2r}\sum_{j\in J}\mu_\ell(u_j,\mathcal{T}_\ell)^2. \tag{3.29}$$

类似地，我们可以得到

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_\ell}\vartheta_\ell^*(T)^2\lesssim Nh_\ell^{2r}\sum_{j\in J}\mu_\ell^*(u_j^*,\mathcal{T}_\ell)^2. \tag{3.30}$$

由于 h_ℓ 足够小，由 (3.1)、(3.14)、(3.16)、(3.15) 和 (3.17)，可推得 (3.18) 和 (3.19) 成立。至此，定理得证。

□

4. 自适应格式的最优收敛性

对于任意 $m\in\mathbb{N}$，记

$$\mathbb{T}(m)=\{\mathcal{T}\in\mathbb{T}:\#\mathcal{T}-\#\mathcal{T}_0\le m\}$$

为 $\mathbb{T}$ 中与 $\mathcal{T}_0$ 的基数相差 m 或更少的容许三角剖分集合。令 $\mathsf{W}=\{Ku_j:\ j\in J\}$ 和 $\mathsf{W}^*=\{K_*u_j^*:\ j\in J\}$ 表示广义特征函数簇。令 $V_\mathcal{T}$ 表示定义在网格 $\mathcal{T}$ 上的有限维空间。任意 $\mathbb{T}$ 中容许网格所达到的最优收敛率 $s\in(0,+\infty)$ 可用下式刻画:

$$|(\mathsf{W},\mathsf{W}^*)|_{\mathcal{A}_s}=\sup_{m\in\mathbb{N}}m^s\inf_{\mathcal{T}\in\mathbb{T}(m)}(\Xi_\mathcal{T}+\Xi_\mathcal{T}^*),$$

其中

$$\Xi_\mathcal{T}=\sum_{j\in J}\inf_{\chi_j\in V_\mathcal{T}}\|Ku_j-\chi_j\|_V,\quad \Xi_\mathcal{T}^*=\sum_{j\in J}\inf_{\chi_j\in V_\mathcal{T}}\|K_*u_j^*-\chi_j\|_V.$$

如果最优三角剖分 $\mathcal{T}\in\mathbb{T}(m)$ 满足收敛速率 $\Xi_\mathcal{T}+\Xi_\mathcal{T}^*=O(m^{-s})$，则 $|(\mathsf{W},\mathsf{W}^*)|_{\mathcal{A}_s}<\infty$ 成立。$\Xi_{\mathcal{T}_\ell}+\Xi_{\mathcal{T}_\ell}^*$ 与 $\sum_{j\in J}(\|(K-K_\ell)u_j\|_V+\|(K_*-K_{\ell*})u_j^*\|_V)$ 等价。

[31]的引理5.4告诉我们，以下引理成立。

引理 4.1. 假设 $\mathcal{T}_\ell$ 的网格尺寸足够小。那么存在一个常数 $C_{\mathrm{drel}} > 0$，使得对于三角剖分$\mathcal{T}_\ell \in \mathbb{T}$的所有细化 $\mathcal{T}_\star \in \mathbb{T}$，均有

$$\|K_\star u - K_\ell u\|_V \leq C_{\mathrm{drel}} \mu_\ell(u, \mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{T}_\star). \tag{4.1}$$

[31]的命题 3.6 告诉我们，以下引理成立。

引理 4.2. 假设初始网格尺寸 h_0 足够小。那么，对于三角剖分 $\mathcal{T}_\ell \in \mathbb{T}$的所有细化 $\mathcal{T}_\star \in \mathbb{T}$，以及任意 $\epsilon \in (0,1)$，有

$$\|K_\star u - K_\ell u\|_V^2 \leq \frac{1}{1-\epsilon}\|Ku - K_\ell u\|_V^2 - \|Ku - K_\star u\|_V^2. \tag{4.2}$$

引理 4.3. 假设初始网格尺寸 h_0 足够小。那么存在$\rho_1 \in (0,1)$和 $\beta \in (0,+\infty)$，使得由算法 *1* 生成的 $\mathcal{T}_\ell$和 $\mathcal{T}_{\ell+1}$满足

$$\sum_{j\in J} \mu_{\ell+1}(u_j, \mathcal{T}_{\ell+1})^2 \leq \rho_1 \sum_{j\in J} \mu_\ell(u_j, \mathcal{T}_\ell)^2 + \beta \sum_{j\in J} \|(K_{\ell+1} - K_\ell)u_j\|_V^2. \tag{4.3}$$

证明。 根据 [30], 推论 3.4、 [31], 引理 3.1 和 [24], 引理 6.10 中的论证，我们可以推出该引理。 □

引理 4.4. 假设初始网格尺寸 h_0 选得足够小，则存在 $\rho_2 \in (0,1)$和 $\beta \in (0,+\infty)$，使得该项

$$\xi_\ell^2 = \sum_{j\in J}(\mu_\ell(u_j, \mathcal{T}_\ell)^2 + \mu_\ell^*(u_j^*, \mathcal{T}_\ell)^2) + \beta \sum_{j\in J}(\|(K - K_\ell)u_j\|_V^2 + \|(K_* - K_{\ell *})u_j^*\|_V^2 \tag{4.4}$$

满足

$$\xi_{\ell+1}^2 \leq \rho_2 \xi_\ell^2 \quad \forall \ell \in \mathbb{N}. \tag{4.5}$$

证明。 证明采用了 [24] 中命题 6.11 的论证。令

$$\mu_\ell^2 = \sum_{j\in J}(\mu_\ell(u_j, \mathcal{T}_\ell)^2 + \mu_\ell^*(u_j^*, \mathcal{T}_\ell)^2),$$
$$e_\ell^2 = \sum_{j\in J}(\|(K - K_\ell)u_j\|_V^2 + \|(K_* - K_{\ell *})u_j^*\|_V^2).$$

由 (4.2) 和 (4.3)，可得

$$\mu_{\ell+1}^2 + \beta e_{\ell+1}^2 \leq \rho_1 \mu_\ell^2 + \frac{\beta}{1-\epsilon} e_\ell^2,$$

由式（3.8）和式（3.9），我们得到

$$\mu_{\ell+1}^2 + \beta e_{\ell+1}^2 \leq (\rho_1 + \epsilon' C_{\mathrm{rel}}^2 \beta)\mu_\ell^2 + \beta(\frac{1}{1-\epsilon} - \epsilon')e_\ell^2 \quad \forall \epsilon' \in (0,1).$$

我们取

$$\rho_2 = \max\{\rho_1 + \epsilon' C_{\mathrm{rel}}^2 \beta, \frac{1}{1-\epsilon} - \epsilon'\},$$

从而

$$\mu_{\ell+1}^2 + \beta e_{\ell+1}^2 \le \rho_2(\mu_\ell^2 + \beta e_\ell^2).$$

将 ϵ' 取得足够小，并将 ϵ 取得足够小，可得 $\rho_2 < 1$。 □

定理 4.1. 假设初始网格尺寸 h_0 和总体参数 θ 足够小，且 $|(\mathsf{W},\mathsf{W}^*)|_{\mathcal{A}_s} < \infty$。则有

$$\sum_{j\in J}(\|(K-K_\ell)u_j\|_V + \|(K_*-K_{\ell*})u_j^*\|_V) \lesssim (\#\mathcal{T}_\ell - \#\mathcal{T}_0)^{-s}|(\mathsf{W},\mathsf{W}^*)|_{\mathcal{A}_s}. \quad (4.6)$$

证明。 我们沿用定理 3.1（ [22] ）和定理 4.1（ [24]）证明中的思路。

对于 $0 < \tau \le |(\mathsf{W},\mathsf{W}^*)|_{\mathcal{A}_s}^2/\xi_0^2$，我们定义 $\varepsilon(\ell) = \sqrt{\tau}\,\xi_\ell$ （定义见 (4.4)），并令 $\xi_0 \ne 0$。令 $N(\ell) \in \mathbb{N}$ 为满足以下性质的最小值

$$|(\mathsf{W},\mathsf{W}^*)|_{\mathcal{A}_s}^2 \le \varepsilon(\ell)^2\, N(\ell)^{2s}.$$

显然， $N(\ell) > 1$，否则

$$|(\mathsf{W},\mathsf{W}^*)|_{\mathcal{A}_s} \le \varepsilon(\ell),$$

但这与 $\varepsilon(\ell)$ 的定义同 (4.4) 相矛盾。

由 $N(\ell)$ 的极小性可知，

$$N(\ell) \le 2|(\mathsf{W},\mathsf{W}^*)|_{\mathcal{A}_s}^{1/s}\varepsilon(\ell)^{-1/s} \quad \text{for all } \ell \in \mathbb{N}_0. \quad (4.7)$$

令 $\mathcal{T}_\ell \in \mathbb{T}$ 表示基数为

$$\#\widetilde{\mathcal{T}}_\ell \le \#\mathcal{T}_0 + N(\ell)$$

其含义是，定义在网格 $\sim$ 上的离散解算子 K_ℓ 和 $K_{\ell*}$ 满足

$$\sum_{j\in J}\|(K-\widetilde{K}_\ell)u_j\|_V^2 + \|(K_*-\widetilde{K}_{\ell*})u_j^*\|_V^2 \le N(\ell)^{-2s}|(\mathsf{W},\mathsf{W}^*)|_{\mathcal{A}_s}^2 \le \varepsilon(\ell)^2. \quad (4.8)$$

考虑叠加网格 $\mathcal{T}_\ell$ $\mathcal{T}_\ell$，它是网格 与 $\mathcal{T}_\ell$ 的最小公共细化。由 [30], 的引理 3.7 可得

$$\#(\mathcal{T}_\ell \setminus \widehat{\mathcal{T}}_\ell) \le \#\widehat{\mathcal{T}}_\ell - \#\mathcal{T}_\ell \le \#\widetilde{\mathcal{T}}_\ell - \#\mathcal{T}_0 \le N(\ell), \quad (4.9)$$

与（4.7）结合可得

$$\#(\mathcal{T}_\ell \setminus \widehat{\mathcal{T}}_\ell) \le N(\ell) \le 2|(\mathsf{W},\mathsf{W}^*)|_{\mathcal{A}_s}^{1/s}\varepsilon(\ell)^{-1/s}. \quad (4.10)$$

分别用 K_ℓ 和 $K_{\ell*}$ 表示定义在网格 $\mathcal{T}_\ell$ 上的离散解算子。

由 (4.2) 和 $\mathcal{T}_\ell = \widehat{\mathcal{T}}_\ell$ 和 $\mathcal{T}_\star = \widehat{\mathcal{T}}_\ell$，我们得到

$$\begin{aligned}&\sum_{j\in J}(\|(K-\widehat{K}_\ell)u_j\|_V^2+\|(K_*-\widehat{K}_{\ell*})u_j^*\|_V^2)\\&\qquad\le\frac{1}{1-\epsilon}\sum_{j\in J}(\|(K-\widetilde{K}_\ell)u_j\|_V^2+\|(K_*-\widetilde{K}_{\ell*})u_j^*\|_V^2),\end{aligned}$$

由此，$1/(1-\epsilon)\le 2$ 和 (4.8)，我们得到

$$\sum_{j\in J}(\|(K-\widehat{K}_\ell)u_j\|_V^2+\|(K_*-\widehat{K}_{\ell*})u_j^*\|_V^2)\le 2\varepsilon(\ell)^2. \tag{4.11}$$

现在，我们证明存在一个常数 C_1，使得

$$\sum_{j\in J}(\mu_\ell(u_j,\mathcal{T}_\ell)^2+\mu_\ell^*(u_j^*,\mathcal{T}_\ell)^2)\le C_1\sum_{j\in J}(\mu_\ell(u_j,\mathcal{T}_\ell\backslash\widehat{\mathcal{T}}_\ell)^2+\mu_\ell^*(u_j^*,\mathcal{T}_\ell\backslash\widehat{\mathcal{T}}_\ell)^2). \tag{4.12}$$

由三角不等式和 (4.1)，对于任意 $j\in J$，我们得到

$$\begin{aligned}\|(K-K_\ell)u_j\|_V^2&\le 2\|(K-\widehat{K}_\ell)u_j\|_V^2+2\|(\widehat{K}_\ell-K_\ell)u_j\|_V^2\\&\le 2\|(K-\widehat{K}_\ell)u_j\|_V^2+2C_{\rm drel}^2\mu_\ell(u_j,\mathcal{T}_\ell\setminus\widehat{\mathcal{T}}_\ell)^2,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\|(K_*-K_{\ell*})u_j^*\|_V^2&\le 2\|(K_*-\widehat{K}_{\ell*})u_j^*\|_V^2+2\|(\widehat{K}_{\ell*}-K_{\ell*})u_j^*\|_V^2\\&\le 2\|(K_*-\widehat{K}_{\ell*})u_j^*\|_V^2+2C_{\rm drel}^2\mu_\ell^*(u_j^*,\mathcal{T}_\ell\setminus\widehat{\mathcal{T}}_\ell)^2.\end{aligned}$$

假设 h_0 足够小，则可得到某个常数 C_2，使得结合（4.11）可推出

$$\begin{aligned}&\sum_{j\in J}(\|(K-K_\ell)u_j\|_V^2+\|(K_*-K_{\ell*})u_j^*\|_V^2)\\&\qquad\le C_2\varepsilon(\ell)^2+C_2C_{\rm drel}^2\sum_{j\in J}(\mu_\ell(u_j,\mathcal{T}_\ell\setminus\widehat{\mathcal{T}}_\ell)^2+\mu_\ell^*(u_j^*,\mathcal{T}_\ell\setminus\widehat{\mathcal{T}}_\ell)^2).\end{aligned}$$

令 $C_{\rm eq}$ 表示 $C_2\xi_\ell^2\le C_{\rm eq}\sum_{j\in J}(\mu_\ell(u_j,\ \mathcal{T}_\ell)^2+\mu_\ell^*(u_j^*,\ \mathcal{T}_\ell)^2)$ 的常数。由 (3.10)、(3.11)、$\varepsilon(\ell)$ 的定义以及上述估计，我们推得

$$\begin{aligned}&C_{\rm eff}^{-2}\sum_{j\in J}(\mu_\ell^2(u_j,\mathcal{T}_\ell)+\mu_\ell^*(u_j^*,\mathcal{T}_\ell)^2)\\&\le C_2\varepsilon(\ell)^2+C_2C_{\rm drel}^2\sum_{j\in J}(\mu_\ell^2(u_j,\mathcal{T}_\ell\setminus\widehat{\mathcal{T}}_\ell)+\mu_\ell^*(u_j^*,\mathcal{T}_\ell\setminus\widehat{\mathcal{T}}_\ell)^2)\\&\le\tau C_{\rm eq}\sum_{j\in J}(\mu_\ell^2(u_j,\mathcal{T}_\ell)+\mu_\ell^*(u_j^*,\mathcal{T}_\ell)^2)+C_2C_{\rm drel}^2\sum_{j\in J}(\mu_\ell^2(u_j,\mathcal{T}_\ell\setminus\widehat{\mathcal{T}}_\ell)+\mu_\ell^*(u_j^*,\mathcal{T}_\ell\setminus\widehat{\mathcal{T}}_\ell)^2).\end{aligned}$$

令 $C_1 = (C^{-2}{}_{\text{有效}} - \tau C_{\mathrm{eq}})^{-1} C_2 C_{\mathrm{drel}}^2 > 0$，我们得到 (4.12)。

根据 (3.19)，我们选择

$$0 < \theta \leq \frac{1}{4C_1}.$$

在算法 1 的步骤 (iii) 中，选择具有最小基数的 $\mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{T}_\ell$，使得

$$\sum_{j\in J}(\eta_\ell(u_{j,\ell},\mathcal{M}_\ell)^2 + \eta_\ell^*(u_{j,\ell}^*,\mathcal{M}_\ell)^2) \geq \theta \sum_{j\in J}(\eta_\ell(u_{j,\ell},\mathcal{T}_\ell)^2 + \eta_\ell^*(u_{j,\ell}^*,\mathcal{T}_\ell)^2).$$

估计式 (4.12) 与 θ 的定义结合 (3.18) 可知，$\widehat{\mathcal{T}}_\ell \setminus \mathcal{T}_\ell$ 也满足整体准则，即

$$\sum_{j\in J}(\eta_\ell(u_{j,\ell},\mathcal{T}_\ell \setminus \widehat{\mathcal{T}}_\ell)^2 + \eta_\ell^*(u_{j,\ell}^*,\mathcal{T}_\ell \setminus \widehat{\mathcal{T}}_\ell)^2) \geq \theta \sum_{j\in J}(\eta_\ell(u_{j,\ell},\mathcal{T}_\ell)^2 + \eta_\ell^*(u_{j,\ell}^*,\mathcal{T}_\ell)^2).$$

$\mathcal{M}_\ell$ 的最小性与 (4.10) 表明

$$\#\mathcal{M}_\ell \leq \#(\mathcal{T}_\ell \setminus \widehat{\mathcal{T}}_\ell) \leq 2|(\mathsf{W},\mathsf{W}^*)|_{\mathcal{A}_s}^{1/s}\tau^{-1/(2s)}\xi_\ell^{-1/s}. \tag{4.13}$$

根据 [28, 44]，存在一个常数 C_{BDV}，使得

$$\#\mathcal{T}_\ell - \#\mathcal{T}_0 \leq C_{\mathrm{BDV}}\sum_{k=0}^{\ell-1}\#\mathcal{M}_k \leq 2C_{\mathrm{BDV}}|(\mathsf{W},\mathsf{W}^*)|_{\mathcal{A}_s}^{1/s}\tau^{-1/(2s)}\sum_{k=0}^{\ell-1}\xi_k^{-1/s}. \tag{4.14}$$

由 (4.5)，对于 $k = 0$、.....、ℓ，有 $\xi_\ell^2 \leq \rho_2^{\ell-k}\xi_k^2$。由于 $\rho_2 < 1$，通过几何级数论证可得

$$\sum_{k=0}^{\ell-1}\xi_k^{-1/s} \leq \xi_\ell^{-1/s}\sum_{k=0}^{\ell-1}\rho_2^{(\ell-k)/(2s)} \leq \xi_\ell^{-1/s}\rho_2^{1/(2s)}\Big/\left(1-\rho_2^{1/(2s)}\right). \tag{4.15}$$

由 (4.14) 和 (4.15)，可得

$$\#\mathcal{T}_\ell - \#\mathcal{T}_0 \leq 2C_{\mathrm{BDV}}|(\mathsf{W},\mathsf{W}^*)|_{\mathcal{A}_s}^{1/s}\tau^{-1/(2s)}\xi_\ell^{-1/s}\rho_2^{1/(2s)}\Big/\left(1-\rho_2^{1/(2s)}\right).$$

由 (3.8)、(3.9)、(3.10) 和 (3.11)，可得 ξ_ℓ^2 与误差 $\sum_{j\in J}(\|(K-K_\ell)u_j\|_V^2 + \|(K_*-K_{\ell*})u_j^*\|_V^2)$ 等价。由此即得所述结论。

□

定理 4.2. 在定理 *4.1* 的条件下，假设条件 *(C1)* 或 *(C2)* 成立，则有

$$\widehat{\delta}(R(E),R(E_\ell)) \lesssim (\#\mathcal{T}_\ell - \#\mathcal{T}_0)^{-s}|(\mathsf{W},\mathsf{W}^*)|_{\mathcal{A}_s}, \tag{4.16}$$

$$\widehat{\delta}(R(E_*),R(E_{\ell*})) \lesssim (\#\mathcal{T}_\ell - \#\mathcal{T}_0)^{-s}|(\mathsf{W},\mathsf{W}^*)|_{\mathcal{A}_s}, \tag{4.17}$$

$$|\widehat{\lambda}-\widehat{\lambda}_\ell| \lesssim N^2(\#\mathcal{T}_\ell-\#\mathcal{T}_0)^{-2s}|(\mathsf{W},\mathsf{W}^*)|^2_{\mathcal{A}_s}. \tag{4.18}$$

当特征值簇 $\{\lambda_j\}_{j\in J}$ 由非缺陷特征值组成时，则

$$|\lambda_k-\lambda_{k,\ell}| \lesssim N^2(\#\mathcal{T}_\ell-\#\mathcal{T}_0)^{-2s}|(\mathsf{W},\mathsf{W}^*)|^2_{\mathcal{A}_s} \quad for\ k\in J. \tag{4.19}$$

证明。结合 (3.4) 和 (4.6)，可得 (4.16)。结合 (3.5) 和 (4.6)，可得 (4.17)。结合 (3.6) 和 (4.6)，可得 (4.18)。当特征值簇 $\{\lambda_j\}_{j\in J}$ 由非缺陷特征值组成时，根据 (3.7) 和 (4.6)，可得 (4.19)。

□

5. 数值实验

本节将给出一个数值示例，以支持理论分析。我们的程序使用 Python 软件包 scikit-fem [45]完成。

我们考虑 Kellogg问题，其区域为 $\Omega = \bigcup_{i=1}^4\Omega_i$ 其中 $\Omega_1=(0,1)^2,\Omega_2=(-1,0)\times(0,1),\Omega_3=(-1,0)^2,\Omega_4=(0,1)\times(-1,0)$。算子 $\mathcal{L}v=-\nabla\cdot(\boldsymbol{A}v)+\boldsymbol{b}\cdot\nabla v$ 定义于 $\boldsymbol{b}=(2,2)$，其中 $\boldsymbol{A}=10\boldsymbol{I}$ 位于 Ω_1 和 Ω_3, 中，而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ 位于 Ω_2 和 Ω_4中。

由 [46] 可知，第一个特征值为 17.7143168，精度为 10^{-6}。前十二个“精确”特征值

$$\begin{aligned}&\lambda_1=17.714316836537,\lambda_2=20.741585348761,\lambda_3=37.145042894655,\\&\lambda_4=43.608009384122,\lambda_5=48.640297883881,\lambda_6=49.129389042157,\\&\lambda_7=63.720910445531,\lambda_8=69.110565445000,\lambda_9=77.939634255303,\\&\lambda_{10}=78.541679776972,\lambda_{11}=94.585833879139,\lambda_{12}=94.921224922705\end{aligned}$$

是使用 P_3 元在通过算法 1 自适应加密的网格上获得的，其中 $dof>10^5$，初始网格如图 5（左）所示，自适应加密网格如图 5（右）所示。

对于总体参数 $\theta\in\{0.25,0.5,0.75,1.0\}$，使用 $P_p(p=1,2,3)$ 元时，簇特征值 $\{\lambda_{j,\ell}\}_{j\in J}(n=0$和 $N=12)$对应的全局误差估计量曲线 $\sum_{j\in J}(\eta_\ell(u_{j,\ell},\mathcal{T}_\ell)^2+\eta^*_\ell(u^*_{j,\ell},\mathcal{T}_\ell)^2)$ 如图 2 所示。结果表明，$\sum_{j\in J}(\eta_\ell(u_{j,\ell},\mathcal{T}_\ell)^2+\eta^*_\ell(u^*_{j,\ell},\mathcal{T}_\ell)^2)$ 是簇稳健且可靠的。

我们在图 3–5 中使用 P_p $(p=1,\ 2,\ 3)$ 元描绘近似特征值簇 $\{\lambda_{j,\ell}\}_{j\in J}$的误差曲线。由此可见，前十二个近似特征值均为非缺陷特征值，这一点得到了 [47], 中的数值证据支持；误差曲线近似平行于斜率为 $-p$ $(p=1,\ 2,\ 3)$ 的直线。该簇的误差达到了最优收敛率。数值结果与理论结果一致。

簇 $\{\lambda_{j,\ell}\}_{j\in J}$ 中的不同特征值表现出不同的数值敏感性和位数。尽管前两个近似特征值的误差趋势相对于 θ的取值并不稳定，但图 3–5 中其余特征值的误差趋势是稳定的。

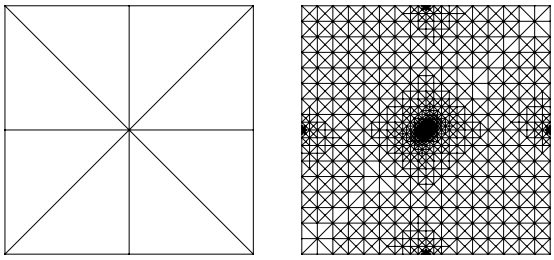

图1：初始网格（左）和使用 P_3 元得到的自适应加密网格（右），总体参数为 $\theta = 0.5$。

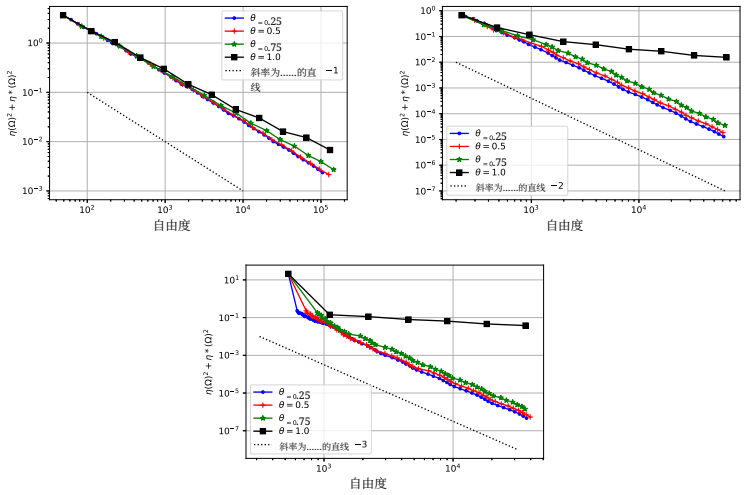

图2：使用 P_1 元（左上）、 P_2 元（右上）和 P_3 元（下）分别得到的聚簇特征值 $\{\lambda_{j,\ell}\}_{j\in J}$（$n = 0$ 和 $N = 12$）的全局误差估计量 $\sum_{j\in J}(\eta_\ell(u_{j,\ell}, \mathcal{T}_\ell)^2 + \eta_\ell^*(u_{j,\ell}^*, \mathcal{T}_\ell)^2)$。

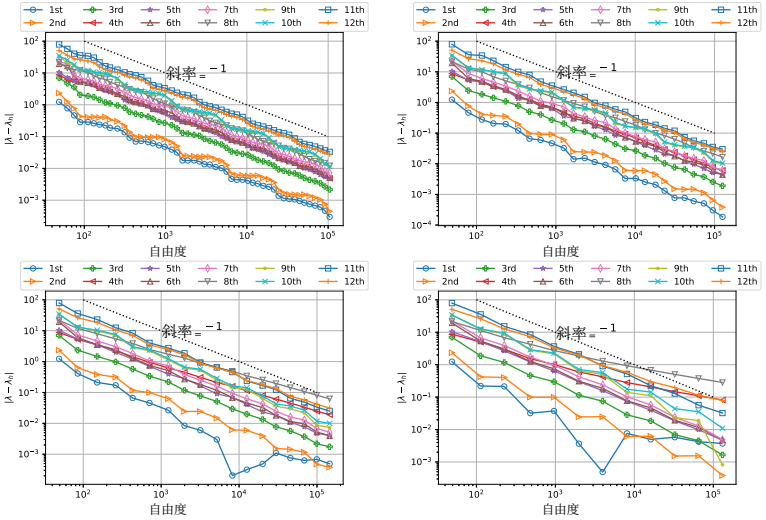

图3：当总体参数分别为 $\theta = 0.25$ （左上）、 $\theta = 0.5$ （右上）、 $\theta = 0.75$ （左下）和 $\theta = 1$ （右下）时，采用 P_1 单元在自适应加密网格上得到的聚簇特征值 $\{\lambda_{j,\ell}\}_{j\in J}$ （$n = 0$ 和 $N = 12$）的误差曲线。

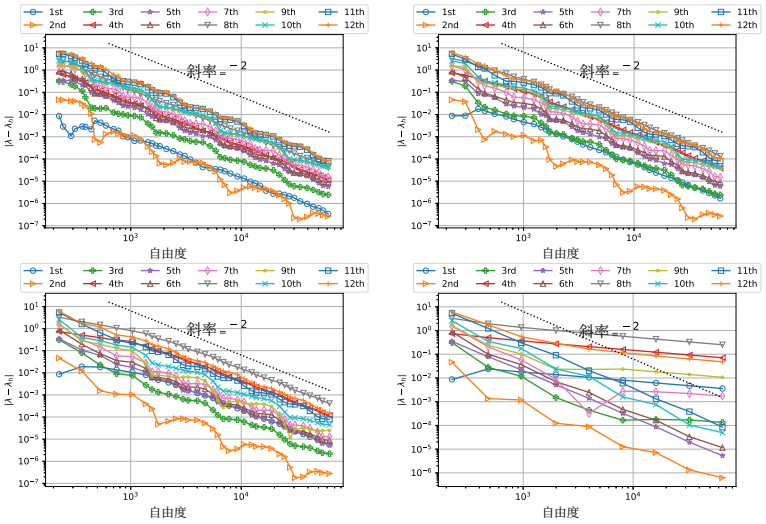

图4：当总体参数分别为 $\theta = 0.25$ （左上）、 $\theta = 0.5$ （右上）、 $\theta = 0.75$ （左下）和 $\theta = 1$ （右下）时，采用 P_2 单元在自适应加密网格上得到的聚簇特征值 $\{\lambda_{j,\ell}\}_{j\in J}$ （$n = 0$ 和 $N = 12$）的误差曲线。

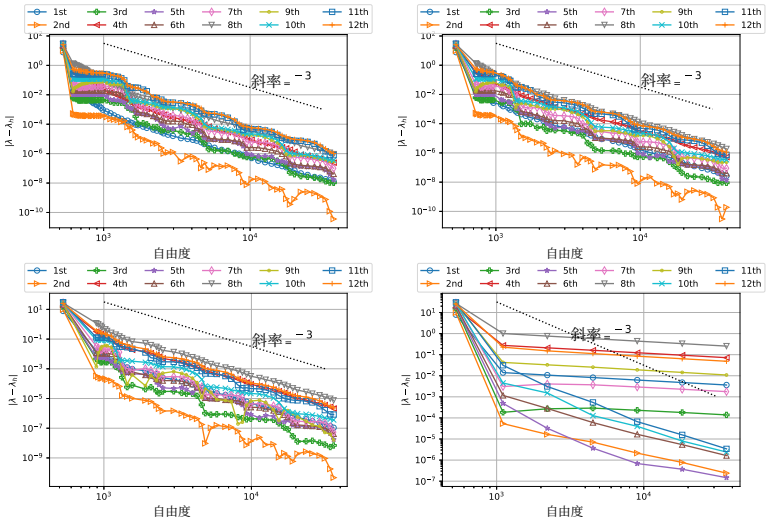

图5：采用 P_3 元在总体参数分别为 $\theta = 0.25$ （左上）、 $\theta = 0.5$ （右上）、 $\theta = 0.75$ （左下）和 $\theta = 1$ （右下）时，得到的自适应加密网格上聚簇特征值 $\{\lambda_{j,\ell}\}_{j\in J}$ （$n = 0$ 和 $N = 12$）的误差曲线。

6. 结论评论

本文首先证明了针对特征值簇的非自伴特征值问题的自适应有限元方法具有最优收敛性。该证明技巧不同于用于证明自伴特征值问题的自适应有限元方法最优收敛性的技巧。我们将特征值问题中近似特征值和近似特征空间的后验误差估计，归结为相应源问题的后验误差估计。因此，可以将相应源问题的最优性结果（拟正交性、收缩和离散可靠性）应用于分析特征值问题中自适应有限元方法的最优收敛性。

本文的研究与[31]的工作密切相关。通过使用Gårding不等式 $|a(u,\ u)| + C_{\mathrm{gard}}\|u\|_0^2 \geq \rho_{\mathrm{gard}}\|\nabla u\|_0^2 \quad \forall u \in V$替代强制性条件（2.4），并应用 [31], 第6.4节中的结果，本文的结论对于此类推广仍然成立。

数据可用性

数据可根据请求提供。

利益冲突声明

作者声明，他们不存在可能影响本文所报告工作的已知竞争性经济利益或个人关系。

本文中。

参考文献

[1] I. Babuška, W. Rheinboldt, 《自适应有限元计算的误差估计》, SIAM 数值分析杂志 15 (1978年) 736–754。[2] M. Ainsworth, J. Oden, 《有限元分析中的后验误差估计》, Wiley-Interscience, 纽约, 2000。[3] R. Verfürth, 《有限元方法的后验误差估计技术》, 数值数学与科学计算, 牛津大学出版社, 纽约, 2013。[4] R. H. Nochetto 和 A. Veeser, 《自适应有限元方法入门》, 载于多尺度与自适应：建模、数值方法与应用（Springer 柏林海德堡, 海德堡, 2012）, 《数学讲义》第2040卷, 第125–225页。[5] L. Chamoin, F. Legoll, 《有限元计算中后验误差估计导论》, SIAM 评论 65 (2023) 963–1028。[6] A. Bonito, C. Canuto, R. Nochetto, A. Veeser, 《自适应有限元方法》, 数值学报 33 (2024) 163–485。[7] R. Durán, L. Gastaldi, C. Padra, 《特征值问题混合近似的后验误差估计》, 应用科学中的数学模型与方法 9 (1999) 1165–1178。[8] R. Durán, C. Padra, R. Rodríguez, 《特征值问题有限元近似的后验误差估计》, 应用科学中的数学模型与方法 13 (2003) 1219–1229。[9] M. Larson, 《自伴椭圆特征值问题有限元近似的后验与先验误差分析》, SIAM 数值分析杂志 38 (2000) 608–625。[10] J. Oden, S. Prudhomme, T. Westermann, J. Bass, M. Botkin, 《弹性与壳体问题中特征频率的误差估计》, 应用科学中的数学模型与方法 13 (2003) 323–344。[11] J. Gedicke, C. Carstensen, 《对流扩散特征值问题的后验误差估计子》, 计算力学与工程方法 268 (2014) 160–177。[12] C. Carstensen, J. Gedicke, V. Mehrmann, A. Miedlar, 《非自伴特征值问题的自适应同伦方法》, Numerische Mathematik 119 (2011) 557–583。

[13] D. Boffi, L. Gastaldi，麦克斯韦特征值问题的自适应有限元方法，SIAM 数值分析杂志 57 (2019) 478–494。[14] V. Heuveline, R. Rannacher，椭圆特征值问题有限元近似的后验误差控制，计算数学进展 15 (2001) 107–138。[15] E. Garau, P. Morin, C. Zuppa，特征值问题的自适应有限元方法收敛性，应用科学中的数学模型与方法 19 (2009) 721–747。[16] R. Rannacher，应用于流体动力稳定性的自适应有限元特征值计算，载于：数学流体力学进展，Springer，柏林，海德堡，2010，第 26 页。[17] E. Cancès, G. Dusson, Y. Maday, B. Stamm, M. Vohralík，特征值和特征向量的可靠后验界：重数与簇，Mathematics of Computation 89 (2020) 2563–2611。[18]C. Carstensen, S. Puttkammer，具有最优收敛率的自适应可靠特征值下界，数值数学 156 (2024) 1–38。[19] D. Boffi, A. Khan，斯托克斯特征值问题的自适应混合有限元法，Mathematics of Computation (2025)。doi:10.1090/mcom/4151.[20] X. Dai, J. Xu, A. Zhou，自适应有限元特征值计算的收敛性与最优复杂度，数值数学 110 (2008) 313–355。[21] X. Dai, L. He, A. Zhou，多重特征值自适应有限元计算的收敛性与准最优复杂度，IMA 数值分析杂志 35 (2015) 1934–1977。[22] D. Gallistl，特征值簇的最优自适应有限元方法，数值数学 130 (2015) 467–496。[23] A. Bonito, A. Demlow，特征值簇高阶自适应有限元方法的收敛性与最优性，SIAM 数值分析杂志 54 (2016) 2379–2388。[24] D. Boffi, D. Gallistl, F. Gardini, L. Gastaldi，混合形式下特征值簇自适应有限元方法的最优收敛性，Mathematics of Computation 86 (2017) 2213–2237。[25] D. Gallistl，特征值簇的自适应非协调有限元近似，应用数学中的计算方法 14 (2014) 509–535。[26] W. Dörfler，泊松方程的收敛自适应算法，SIAM 数值分析杂志 33 (1996) 1106–1124。

[27] P. Morin, R. Nochetto, K. Siebert，数据振荡与自适应有限元方法的收敛性，SIAM 数值分析杂志 38 (2000) 466–488。[28] P. Binev, W. Dahmen, R. DeVore，具有收敛率的自适应有限元方法，数值数学 97 (2004) 219–268。[29] R. Stevenson，标准自适应有限元方法的最优性，《计算数学基础》7 (2007) 245–269。[30] J. Cascon, C. Kreuzer, R. Nochetto, K. Siebert，自适应有限元方法的准最优收敛率，SIAM 数值分析杂志 46 (2008) 2524–2550。[31] M. Feischl, T. Führer, D. Praetorius，针对某类非对称且可能非线性问题、具有最优收敛率的自适应有限元方法，SIAM 数值分析杂志 52 (2014) 601–625。[32] C. Carstensen, M. Feischl, M. Page, D. Praetorius，自适应公理，《计算机与应用数学》67 (2014) 1195–1253。[33] A. Buffa, C. Giannelli，采用层次样条的自适应等几何方法：误差估计子与收敛性，应用科学中的数学模型与方法 26 (2016) 1–25。[34] J. Hu, G. Yu，自适应混合有限元方法准最优收敛性的统一分析，SIAM 数值分析杂志 56 (2018) 296–316。[35] M. Feischl, inf-sup 稳定性蕴含拟正交性，Mathematics of Computation 91 (337) (2022) 2059–2094。[36] L. Beirão da Veiga, C. Canuto, R. Nochetto, G. Vacca, M. Verani，自适应虚拟元方法：无稳定化的后验误差分析与收缩性质，SIAM 数值分析杂志 61 (2023) 457–494。[37] Y. Yang, S. Wang, H. Bi，非自伴特征值问题中缺陷特征值有限元近似的后验误差估计，SIAM 数值分析杂志 62 (2024) 2419–2438。[38] A. Ern, J.-L. Guermond，《有限元 II——伽辽金近似、椭圆型与混合型偏微分方程》，《应用数学丛书》第 73 卷，Springer, Cham，2021。[39]P. Ciarlet，《椭圆问题的有限元方法》，North-Holland，阿姆斯特丹，1978年。[40] P. Grisvard，非光滑区域上的椭圆问题，工业与应用数学学会（SIAM），费城，PA，2011年，1985年精装版重印。

[41] C. Bernardi, R. Verfürth，非光滑系数椭圆方程的自适应有限元方法，数值数学 85 (2000) 579–608。[42] I. Babuška, J. Osborn，特征值问题，载于：P. Ciarlet, J. Lions（编），《有限元方法》（第 1 部分），《数值分析手册》第 2 卷，Elsevier Science Publishers，North-Holland，1991。[43] S. Wang, H. Bi, Y. Yang，含吸收介质的修正传输特征值问题中间断伽辽金方法的后验误差估计与自适应算法，Numerical Algorithms 100 (2025) 1085–1122。[44] R. Stevenson，二分法生成的局部加密单纯剖分的完备化，Mathematics of Computation 77 (2008) 227–241。[45] T. Gustafsson, G. McBain，scikit-fem：用于有限元组装的 Python 软件包，Journal of Open Source Software 5 (2369) (2020)。[46] S. Giani, L. Grubišicć, A. Mičedlar, J. Ovall，非自伴特征值问题近似的稳健误差估计，数值数学 133 (2016) 471–495。[47] R. Gasser, J. Gedicke, S. Sauter，非自伴椭圆微分算子具有大缺陷时特征值的基准计算，SIAM Journal on Scientific Computing 41 (2019) A3938–A3953。