arXiv:2603.12974v1 [math.RT] 13 Mar 2026

导出等价与去环化层级

LIANG CHEN

摘要。我们构造了一个与 Kershaw–Rickard 例子导出等价的有限维代数。对于 Kershaw–Rickard 例子，去环化层数和子导出去环化层数均为无穷大；而对于我们的代数，这两个不变量均为 0。因此，这些不变量的有限性在导出等价下并不保持。

1. 引言

受解决有限 finitistic 维猜想的尝试启发， [1], Gélinas 在 [3] 引入了去环化层数 del，这是一种 Syzygy 理论不变量，可为相反代数的大 finitistic 维提供上界。Guo 和 Igusa [4] 随后通过引入若干改进概念，进一步完善了这一概念，其中包括子导出去环化层数sub-ddel，它能给出更精确的同调界。

导出等价通常会保留同调有限性性质，例如整体维数以及小、大 finitistic 维数的有限性；参见例如 [2,5–8,11,12]。因此，Xi–Zhang 猜想，在诺特环 [14, 之间的导出等价下，del 的有限性是不变量2]。在本文中，我们给出一个反例：该猜想对于有限维代数（因而也对于诺特环）已不成立。对于 sub-ddel，相应的有限性命题也不成立。我们的主要结果如下。

定理 1.1。 存在导出等价的有限维代数 B 和 C 定义在域 k 上，使得

$$\mathrm{del}(B) = \text{sub-ddel}(B) = \infty \qquad and \qquad \mathrm{del}(C) = \text{sub-ddel}(C) = 0.$$

定理 1.1 的证明将在下一节给出。

2. 定理 1.1 的证明

全文中， k 表示一个域。除非另有说明，代数 指有限维 k-代数，模 指有限生成的左 模。对于代数 A，记 A-mod 为有限生成左 A-模的范畴，记 A-Mod 为所有左 A-模的范畴。我们将有界导出范畴记为$D^b(A) := D^b(A\text{-Mod})$。若存在三角等价 $D^b(A) \simeq D^b(A')$，则称两个代数 A 和 A'是导出等价的；参见 [12, 定理 6.4]。

设 A 为一个代数，并用 A-mod表示稳定模范畴，即 A-mod对所有经过射影模的态射所生成的理想取商所得的范畴。对于 X， $Y \in A$-mod， X 是 A-mod中 Y 的直和项，当且仅当存在

数学主题分类（*2020*）。 主要分类：16E10、16E35；次要分类：16G10。关键词与短语。 导出等价、去环化层数、子导出去环化层数、单点扩张、单点余扩张。

一个射影 A-模 P，使得 X 是 A-mod中 $Y \oplus P$ 的直和项。对于 $M \in A$-mod，令 $\Omega_A(M)$ 表示投射覆盖 $P \twoheadrightarrow M$的核。令 $\Omega_A^0(M) := M$，并对 $n \geqslant 0$定义 $\Omega_A^{n+1}(M) := \Omega_A(\Omega_A^n(M))$。模 $\Omega_A^n(M)$ 在同构意义下是良定义的。

我们现在回顾去环化层数和子导出去环化层数的定义。

定义 2.1 ([3, 定义 1.2])。设 $M \in A$-模。M的去环化层数 定义为

$$\operatorname{del}_A(M) := \inf\Big\{ n \geqslant 0 \;\Big|\; \begin{array}{l}\Omega_A^n(M) \text{ is a direct summand of } \Omega_A^{n+1}(N)\\ \text{in } A\text{-}\underline{\text{mod}},\ \text{for some } N \in A\text{-mod}\end{array}\Big\}.$$

若不存在这样的 n，则令 $\operatorname{del}_A(M) := \infty$。$A$ 的去环化层数为

$$\operatorname{del}(A) := \sup\{\operatorname{del}_A(S) \mid S \text{ is a simple } A\text{-module}\}.$$

定义 2.2 ([4, 注记 2.16])。设 $M \in A$-模。M 的子导出去环化层数 为

$$\text{sub-ddel}_A(M) := \inf\{\operatorname{del}_A(N) \mid M \hookrightarrow N \text{ in } A\text{-mod}\}.$$

若 M 不能嵌入任何去环化层数有限的模中，则此下确界为 ∞。A 的子导出去环化层数为

$$\text{sub-ddel}(A) := \sup\{\text{sub-ddel}_A(S) \mid S \text{ is a simple } A\text{-module}\}.$$

注记 2.3。由于 $M \hookrightarrow M$，对于所有 M，均有 $\text{sub-ddel}_A(M) \leqslant \operatorname{del}_A(M)$。

现在我们回顾 Kershaw–Rickard 例子。取一个域 k，其中含有一个无限乘法阶的元素 $q \in k^\times$，也就是说，对于所有 $n \geqslant 1$，都有 $q^n \neq 1$（例如，$k = \mathbb{Q}$ 和 $q = 2$）。Ringel–Zhang [13, §6] 定义了如下局部代数和模。令

$$\Lambda := k\langle x, y, z\rangle / \big(x^2,\ y^2,\ z^2,\ yz,\ xy + qyx,\ xz - zx,\ zy - zx\big).$$

对于 $\alpha \in k$，令 $M(\alpha)$ 为以 v, v', v'' 为基底的 k-向量空间，并赋予左 Λ-作用

$$xv = \alpha v', \qquad yv = v', \qquad zv = v'',$$

以及 $xv' = yv' = zv' = xv'' = yv'' = zv'' = 0$。我们用 $M(q)$ 表示 $\alpha = q$ 处的特殊模。设

$$B := \begin{pmatrix} k & 0 \\ M(q) & \Lambda \end{pmatrix}.$$

除相反环外，这就是 Kershaw–Rickard 例子 [9]。

引理 2.4 ([9, 推论 4.2], [4, 例子 3.8]). $\operatorname{del}(B) = \text{sub-ddel}(B) = \infty$.

定义

$$C := \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ D(M(q)) & k \end{pmatrix}.$$

这里 $D(-) := \text{同态集}_k(-,\ k)$。

我们首先证明 B 和 C 导出等价。为此，我们使用以下两个引理。

引理 2.5。 设 R、S 为环， ${}_SN_R$ 为双模。则存在一个环同构

$$\begin{pmatrix} S & N \\ 0 & R \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} R & 0 \\ N & S \end{pmatrix}.$$

证明。设

$$A := \begin{pmatrix} S & N \\ 0 & R \end{pmatrix}, \quad A' := \begin{pmatrix} R & 0 \\ N & S \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in A.$$

由于 ${}_A(Ae_1 \oplus Ae_2) \cong {}_A(Ae_2 \oplus Ae_1)$，我们得到

$$A \cong \mathrm{End}_A(Ae_1 \oplus Ae_2)^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{End}_A(Ae_2 \oplus Ae_1)^{\mathrm{op}} \cong A'. \qquad \square$$

引理 2.6 (Ladkani [10,注 4.13])。 设 R 为一个环， S 为一个除环。设 ${}_SN_R$ 为一个双模，作为左 S-向量空间是有限维的。设 $D(-){:=}$同态集$_S(-, S)$。则上三角矩阵环 $\begin{pmatrix} S & N \\ 0 & R \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} R & D(N) \\ 0 & S \end{pmatrix}$ 导出等价。

推论 2.7。 代数 B 和 C 导出等价。

证明。 将引理 2.6 应用于 $S = k$、 $R = \Lambda$ 和 $N = D(M(q))$（视为一个k–Λ-双模）。由此得到上三角矩阵环之间的导出等价

$$T_1 := \begin{pmatrix} k & D(M(q)) \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad T_2 := \begin{pmatrix} \Lambda & D(D(M(q))) \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

由于 $M(q)$ 是 k 上的有限维对象，我们有 $D(D(M(q))) \cong M(q)$，因此 $T_2 \cong \begin{pmatrix} \Lambda & M(q) \\ 0 & k \end{pmatrix}$。由引理 2.5 可知， $T_1 \cong C$ 且 $T_2 \cong B$。因此 B 与 C导出等价。 $\square$

接下来我们计算 C的去环化层数和子导出去环化层数。令 $e_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 和 $e_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 属于 C，并设 $P_1 := Ce_1$, $P_2 := Ce_2$。用 S_1（分别用S_2）表示 P_1（分别为 P_2）的简单顶。注意到 $P_2 = Ce_2$ 是简单射影模，因此 $S_2 \cong P_2$。于是根据定义 2.1， $\mathrm{del}_C(S_2) = 0$ 。为计算 $\mathrm{del}_C(S_1)$，我们先指出两个初等事实。

引理 2.8. 左理想 $\Lambda(yx)$ 在 k 上是一维的。

证明。 利用 Λ 的定义关系，我们计算得

$$\begin{aligned} x(yx) &= (xy)x = (-q\,yx)x = -q\,y(x^2) = 0, \\ y(yx) &= y^2x = 0, \\ z(yx) &= (zy)x = (zx)x = z(x^2) = 0. \end{aligned}$$

因此， x、y、z 在左侧消去 yx 。此外， Λ 的定义关系表明，$\mathbf{1}$、x、y、z、yx、zx 构成 Λ 的一个 k-基。由于 $x(yx) = 0$，我们还有 $(yx)(yx) = y(x(yx)) = 0$ ，以及 $(zx)(yx) = z(x(yx)) = 0$。因此， $\Lambda(yx) = k \cdot (yx)$，从而 $\dim_k \Lambda(yx) = 1$。 $\square$

引理 2.9. 元素 $yx \in \Lambda$ 从右侧消去 $D(M(q))$ ： 对于所有$f \in D(M(q))$，都有 $f \cdot (yx) = 0$。

证明。 $D(M(q)) =$同态集$_k(M(q)\ k)$ 上的右 Λ-作用由 $(f\cdot a)(m) = f(am)$ 给出。只需证明 $(yx)M(q) = 0$。利用 $M(q)$ 的定义的作用，我们得到

$$(yx)v = y(xv) = y(qv') = 0,$$
$$(yx)v' = y(xv') = 0,$$
$$(yx)v'' = y(xv'') = 0.$$

由于 v, v', v''构成 $M(q)$ 的 k-基，因此 $(yx)M(q) = 0$。于是，对于所有 $f \in D(M(q))$，$f\cdot(yx) = 0$。□

命题 2.10。删除$_C(S_1) = 0$。

证明。令 $U := \{\left(\begin{smallmatrix}\lambda(yx & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right) \mid \lambda \in \Lambda\} \subseteq P_1.)$。为验证 U 是 P_1 的 C-子模，取 $c = \left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ f & s\end{smallmatrix}\right) \in C$ 和 $u = \left(\begin{smallmatrix}\lambda(yx & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right) \in U)$。于是

$$cu = \left(\begin{smallmatrix}a\lambda(yx) & 0\\ f\cdot\lambda(yx) & 0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}a\lambda(yx) & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right) \in U,$$

由引理 2.9，$f\cdot\lambda(yx) = (f\cdot\lambda)\cdot(yx) = 0$。

作为一个 k-向量空间，$U \cong \Lambda(yx)$。由引理 2.8，$\Lambda(yx)$ 是一维的，因此 U 是一个简单的 C-模。由于 $e_2U = 0$，但 $e_2S_2 = S_2 \neq 0$，可得 $U \cong S_1$。

由于 P_1 是不可分解投射模，因此它是局部的。由于 $U \subsetneq P_1$，我们有 $U \subseteq$rad(P_1)。因此，$P_1 \twoheadrightarrow P_1/U$ 是一个投射覆盖，而短正合序列$0 \to U \to P_1 \to P_1/U \to 0$ 给出 $U \cong \Omega_C(P_1/U)$。因此，$S_1 \cong U$ 是一个叠代子模，并且根据定义 2.1 有 del$_C(S_1) = 0$。□

推论 2.11。$\mathrm{del}(C) = \text{sub-ddel}(C) = 0.$

证明。由命题 2.10，我们有 del$_C(S_1) = 0$。由于 S_2 是射影模，根据定义 2.1，del$_C(S_2) = 0$。因此，del$(C) = 0$。此外，根据备注 2.3，sub-ddel$(C) \leqslant$ del$(C) = 0$，从而 sub-ddel$(C) = 0$。□

定理 *1.1* 的证明。设 B 和 C 是上述定义的代数。引理 2.4 给出 del$(B) =$ sub-ddel$(B) = \infty$。根据推论 2.7，代数 B 和 C 导出等价。另一方面，推论 2.11 得出 del$(C) =$ sub-ddel$(C) = 0$。这就证明了定理 1.1。□

致谢。作者感谢 Changchang Xi 教授给予的有益讨论。

参考文献

[1] Bass, H.：有限维数与半初等环的同调推广。《美国数学会汇刊》**95**，466–488（1960）。https://doi.org/10. 1090/S0002-9947-1960-0157984-8.[2] Chen, H.X., Xi, C.C.：导出范畴的再拼接 III：有限维数。《伦敦数学会杂志》(2) **95**(2)，633–658（2017）。https://doi.org/10.1112/jlms.12026. [3] Gélinas, V.：深度、去环化层数与有限维数。《数学进展》**394**，108052（2022）。https://doi.org/10.1016/j.aim.2021.108052. [4] Guo, R., Igusa, K.：导出去环化层次与有限维数。《数学进展》**464**，110152（2025）。https://doi.org/10.1016/j.aim.2025.110152. [5] Happel, D.：倾斜理论。载于：有限维代数表示理论中的三角范畴，第93–151页。伦敦数学会讲义系列，119。剑桥大学出版社，剑桥（1988）。https://doi.org/10.1017/ CBO9780511629228.

[6] Kato, Y.：关于导出等价的凝聚环。《代数通讯》**30**，4437–4454（2002）。https://doi.org/10.1081/AGB-120013331. [7] Keller, B.：导子与倾斜。载于：Kostrikin, A.I., Shafarevich, I.R.（编）《代数 VIII：有限维代数的表示》，第130–141页。《数学科学百科全书》第73卷。Springer，柏林（1992）。https://doi.org/10.1007/978-3-642-58097-0. [8] Keller, B., Krause, H.：倾斜保持有限整体维数不变。《数学报告》**358**(5)，563–570（2020）。https://doi.org/10.5802/crmath.72. [9] Kershaw, L., Rickard, J.：一个具有无限去环化层级的有限维代数。《表示论年刊》**1**(1)，61–65（2024）。https://doi.org/10.5802/art.3. [10] Ladkani, S.：由倾斜模扩张产生的三角矩阵环的导出等价。《代数与表示论》**14**，57–74（2011）。https://doi.org/10.1007/ s10468-009-9175-0.[11] Pan, S.Y., Xi, C.C.：有限维数的有限性是导出等价下的不变量。《代数杂志》**322**，21–24（2009）。https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2009.03.017. [12] Rickard, J.：导出范畴的 Morita 理论。《伦敦数学会杂志》(2) **39**(3)，436–456（1989）。https://doi.org/10.1112/jlms/s2-39.3.436. [13] Ringel, C.M., Zhang, P.：Gorenstein投射模与半Gorenstein投射模。《代数与数论》**14**(1)，1–36（2020）。https://doi.org/10.2140/ant.2020.14.1. [14] Xi, C.C., Zhang, J.B.：稳定等价的新不变量与 Auslander–Reiten 猜想。《数学年刊》**394**，99（2026）。https://doi.org/10.1007/s00208-026-03422-8.

中国北京 100048，首都师范大学数学科学学院电子邮件地址：2210501003@cnu.edu.cn