arXiv:2603.12980v1 [math.AT] 13 Mar 2026

P平坦环谱的 Morava E-理论中的幂运算

Yuval Lotenberg

2026年3月16日

摘要

设 E_n 是高度为 n 的 Morava E-理论。设 R 是一个 p-进平坦交换环谱。那么，Tate 值 Frobenius 映射赋予 $\pi_0 R$ 一个 δ-环结构。另一方面，我们可以构造 $K(n)$-完备张量积 $L_{K(n)}(R \otimes E_n)$，它是一个 $K(n)$-局部 E_n-代数。于是 $\pi_0(L_{K(n)}(R \otimes E_n)) = LT_n \widehat{\otimes} \pi_0 R$ 具有由 Rezk 定义的单子 $\mathbb{T}(n)$ 上的代数结构。$\mathbb{T}(n)$-代数结构编码了 $L_{K(n)}(R \otimes E_n)$ 的幂运算。

本文描述了 $\pi_0(L_{K(n)}(R \otimes E_n))$ 上的 $\mathbb{T}(n)$-代数结构。

目录

1 引言 12 预备知识 53 函子构造 $\mathrm{Alg}_\delta \to \mathrm{Sh}(\mathrm{Def},\mathrm{Alg})$**4 适当 Tate 构造 125 与期望函子的比较 17**

10

1 引言

1.1 背景与主要结果

Let p 为一个固定的素数。一个连通的 p-完备谱 R 称为 p-进平坦的，若其 $\mathbb{F}_p$-homology，$\mathbb{F}_p \otimes R$，是离散对象（即集中在同伦次数 0）。

如果 R 是 p-进平坦的，那么 $\pi_0 R$ 自然带有 δ-环结构。这源于 Tate 值 Frobenius 映射 $\phi\colon R \to R^{tC_p}$：将 ϕ 与平凡映射 $R \to R^{tC_p}$的逆复合；对于 p-进平坦谱，该映射是一个等价，从而诱导出自同态$\pi_0 R \to \pi_0 R$，它是 Frobenius 态射的提升。由于 $\pi_0 R$ 是 p-无挠的，Frobenius 提升与 δ-环结构一一对应。（详情请见 第 2.1 节 。）

令 $E := E(n)$ 表示高度为 n 的 Morava E-理论，并令 $K(n)$ 表示高度为n 的 Morava K-理论。若 R 是一个 $K(n)$-局部 E-代数，则它具有相对于 E 的幂运算。这些运算已得到广泛研究（例如，参见 [Rez09], [BF15], [Nis25]）。特别地，Rezk 定义了一个单子 $\mathbb{T}$，使得 $\pi_0(R)$ 自然成为一个 $\mathbb{T}$-代数。$\mathbb{T}$-代数有一个底层的E_0-代数；对于一个 $K(n)$-局部的 $E(n)$-代数 R，它就是 $\pi_0 R$。

此外，Rezk 构造了一个从 $\mathbb{T}$-代数范畴到某个变形范畴上的层的函子（见 2.2），并确定了将其限制到 p-无挠$\mathbb{T}$-代数时的本质像。具体而言，这是满足某个同余判据的层子范畴 $\mathrm{Sh}(\mathrm{Def},\mathrm{Alg})^{\mathrm{cong}}$。

若 R 是一个 p-进平坦环谱，我们可以构造完备张量积 $L_{K(n)}(E\otimes R) = E\widehat{\otimes} R$，它是一个 $K(n)$-局部 E-代数。因此， $\pi_0(E\widehat{\otimes} R)$自然具有 $\mathbb{T}$-代数结构。

这些构造可纳入如下图表：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CAlg}^{\mathrm{flat}}_{/\mathbb{S}^\wedge_p} & \xrightarrow{L_{K(n)}(-\otimes E(n))} & \mathrm{CAlg}^{K(n),\mathrm{even}}_{E(n)} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_0} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_0} \\ \mathrm{Alg}_{\delta,\mathrm{tf},p\text{-complete}} & \overset{?}{\dashrightarrow} & \mathrm{Alg}_{\mathbb{T},\mathrm{tf}} \end{array} \tag{1}$$

其中 tf 表示无挠。由上图自然引出一个问题：虚线箭头是否存在？也就是说，能否从 $\pi_0 R$ 的 δ-环结构中恢复 $\pi_0(R\widehat{\otimes} E)$ 的 $\mathbb{T}$-代数结构，其中 R 是一个 p-进平坦环谱？如果可以，最好能为这个缺失的函子提供一个从 δ-环到 $\mathbb{T}$-代数的显式代数描述。

Exa例 1.1. 在高度为 $n = 1$ 的情形下，取 $\Gamma = \mathbb{G}_m$ 为乘法形式群， $E($ 1) iden等同于 p-完备复 K-理论。在这种情形下， $\mathbb{T}$-代数等价于 δ-环 .

具体来说，回顾一下， $\mathbb{T}$-代数对应于变形范畴上的层，并满足某个同余条件。对于任意一个使 $\mathbb{F}_p$ 变形的环 R，从 $\mathbb{G}_m$ 到 R的变形在同构意义下唯一，即 $\mathbb{G}_m$ 在 R上的变形。任意两个变形之间的 Frob 变形也唯一。因此，变形范畴上的层 B 的数据可归结为：对每个环 R，相容地选取一个 R-代数 $A_R = B_R(\mathbb{G}_m)$，此外还需给出一个自同态$B_R(\mathrm{Frob}) = \psi$： $A \to A$。由相容性可知，$A_R = R\widehat{\otimes} A_{\mathbb{Z}_p}$，因此只需理解 $A = A_{\mathbb{Z}_p}$ 的情形。代入 $R = \mathbb{F}_p$ 后可见，同余条件要求 $\psi/p =: A/p \to A/p$ 是 Frobenius 映射，即 ψ 是 Frobenius 提升。最后，在无挠情形下，Frobenius 提升与 δ-环结构一一对应。

这表明，缺失的虚线函子或许就是恒等函子。

本文给出了函子 Alg 的一个显式代数描述$_{\delta,\ \mathrm{tf},\ p\text{-complete}} \to \mathrm{Alg}_{\mathbb{T},\ \mathrm{tf}}$，并运用 Rezk 的理论，将 $\mathrm{Alg}_{\mathbb{T},\ \mathrm{tf}}$ 识别为变形范畴上的层。具体内容见第 3 节。特别地，我们得到

定理 1.2。 设 $(R,\ \delta)$ 是一个 p-完备无挠 δ-环，其相应的 Frobenius 提升为$\psi(x) = x^p + p\delta(x)$，其中 $x \in R$。设 $B \in \mathrm{Sh}(\mathrm{Def},\ \mathrm{Alg})$ 是 R 在以下函子复合下的像

$$\mathrm{Alg}_{\delta,\mathrm{tf},p\text{-complete}} \to \mathrm{Alg}_{\mathbb{T},\mathrm{tf}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sh}(\mathrm{Def},\mathrm{Alg})_{\mathrm{tf,cong}}$$

那么，对于一个以 S 为底的变形 G，我们有 $B_S(G) = S\widehat{\otimes} R$ （关于 S 的极大理想完备），而对于态射 f: $G \to G'$，它将 Frob^r 变形，层将其映为 $B_S(f) = \mathrm{Id}_S \otimes \psi^r$。

对于 δ-环之间的映射，该函子只给出与 E_0 的完备张量积—— $\mathbb{T}$-代数之间的映射就是底层环之间的映射。

特别是，

定理 1.3. 设 R 是一个 p-完备、 p-进平坦的交换环谱，并设 ψ :$\pi_0 R \to \pi_0 R$ 是与其 δ-环结构关联的 Frobenius 提升。

令 $B \in$ Sh(Def,Alg)表示与 $L_{K(n)}(R\otimes E)$上的 $\mathbb{T}$-代数结构关联的层。该层将 S 上的变形 G 映至环 $B_S(G) = S\widehat{\otimes}\pi_0 R$。对于形如 f: $G \to G'$、将 Frob^r变形的态射，该层给出 $B_S(f) = \mathrm{Id}_S \otimes\psi^r$。

此外，在高度 1 的情形下，对于一个 p-完备的 δ-环 R，关联层 B 将G映至 $B_{\mathbb{Z}_p}(G) = R$；对于 Frobenius 的唯一变形，它赋予来自 R的 δ-环结构的 Frobenius 提升。因此我们得到以下推论：

推论 1.4。 在高度 1 的情形下，图表（1）中缺失的虚线函子是恒等映射。

如果 S 是一个 $K(n)$-局部 E-代数，那么 $\pi_0(S)$ 有一个关联层 $B^{\pi_0 S} \in \mathrm{Sh}(\mathrm{Def}, \mathrm{Alg})$。对于一个 p-进平坦环谱 R，我们可以构造张量积 $L_{K(n)}(S \otimes R)$，它也是一个 $K(n)$-局部 E-代数。由于我们有

$$L_{K(n)}(S \otimes R) = S \widehat{\otimes}_E L_{K(n)}(E \otimes R)$$

（其中张量积取在 $\widehat{\otimes}_E$ 的 $K(n)$-局部范畴中），并且函子 交换代数$^{K(n)}$、$_{E\ n}$ ^{even} $_{()} \to \mathrm{Alg}_{\mathbb{T}}$ 和 $\mathrm{Alg}_{\mathbb{T}} \to \mathrm{Sh}(\mathrm{Def}, \mathrm{Alg})$ 都是幺半的（[Rez09]），因此我们得到：

推论 1.5。令 S 为一个 $K(n)$-局部 E-代数，并令 R 为一个 p-进平坦环谱。令$\psi : \pi_0 R \to \pi_0 R$ 为与 $\pi_0 R$ 的 δ- 环结构相关联的 Frobenius 提升。

$\pi_0(S \widehat{\otimes} R)$ 上的 $\mathbb{T}$-代数结构对应于层 $B \in \mathrm{Sh}(\mathrm{Def}, \mathrm{Alg})$，它将形变 G（定义在 P 上）映到环 $B_P(G) = B_P^{\pi_0 S}(G) \widehat{\otimes} \pi_0 R$；对于形变 Frob^r 的态射$f : G \to G'$：

$$B_P(f) = B_P^{\pi_0 S}(f) \otimes \psi^r$$

证明的一个关键部分，是从代数几何角度理解有限群的 E-上同调环。特别地，我们使用了一个成熟的结果：形式谱 $\mathrm{Spf}(E^0(B\Sigma_{p^n}))$ 与 E 上形式群的分类子群密切相关（参见 [Str98]）。

此外，对于阿贝尔群 A，我们利用形式概形 $\mathrm{Spf}(E^0(BA))$ 及其闭子概形的几何性质，它们分类从 A到形式群的同态。

最后，我们建立环 $\pi_0(R^{\tau A})$ 的几何解释，其中 $(-)^{\tau A}$ 表示其 e prop他 Tate 构造，见 第 2.5 节。这一解释将在 第 5 节。 5.

1.2 动机

研究映射空间 $\mathrm{Mor}(R, S)$ 是很有意义的，其中 p-进平坦环谱 R 和 S。这个空间可视为普通代数中平坦代数之间态射的同伦类比；理解其结构在谱代数几何中发挥着重要作用。然而，一般而言，这个空间十分复杂，其同伦群大多未知。尽管如此，在某些情况下已有显式计算（例如，参见[CNY24]）。

处理这个问题的一种方法是对 S应用色散收敛定理，从而得到$S = \lim_n L_{E(n)} S$（注意，色散收敛定理经典地表述为适用于有限环谱，但对 p-进平坦谱也成立）。因此：

$$\mathrm{Hom}(R, S) = \lim \mathrm{Hom}(R, L_{E(n)} S)$$

空间 $\mathrm{Hom}(R, L_{E(n)} S)$ 与空间 $\mathrm{Hom}(R, L_{K(n)} S)$ 有关，因为 $L_{E(n)} S$等价于拉回 $L_{E(n-1)} S \times_{L_{E(n-1)} L_{K(n)} S} L_{K(n)} S$。

我们有

$$L_{K(n)} S = \left(L_{K(n)}(S \otimes E(n))\right)^{h\mathbb{G}_n}$$

其中 $\mathbb{G}_n$ 是 Morava 稳定子群。下一步，我们要找出 $\mathrm{Hom}(R, L_{K(n)}(S \otimes E(n)))$ 中的 $\mathbb{G}_n$-等变映射。最后，我们利用这样一个事实：这等同于 $E(n)$-代数映射 $\mathrm{Hom}^{E(n)}(L_{K(n)}(R \otimes E(n))\ L_{K(n)}(S \otimes E(n)))$。

在这个项目中，我们旨在明确确定 $\pi_0(L_{K(n)}(R \otimes E(n)))$，这可能是这一宏大计划的第一步。

1.3 约定

我们采用以下约定：

1. 对于两个谱 X，Y，我们将它们的楔积记作 $X \otimes Y$，并称其为这些谱的张量积（有时也记作 $X \wedge Y$）。

2. 全文中，我们用记号 $\widehat{\otimes}$ 表示完备张量积。也就是说，对于两个完备局部环 R，S，$R\widehat{\otimes}S$ 是关于两个极大理想完备化的。对于完备局部环 R 和另一个环 A，$R\widehat{\otimes}A$ 将关于 R 的极大理想完备化。3. 在所有涉及 $K(n)$-局部环的张量积中，$\widehat{\otimes}$ 表示 $K(n)$-局部张量积。也就是说，对于 $K(n)$-局部范畴中的两个环谱 R，S，有 $R\widehat{\otimes}S = L_{K(n)}(R\otimes S)$；而对于一个 p-进平坦环谱 R，$R\widehat{\otimes}E$ 表示 $L_{K(n)}(R\otimes E)$。4. E 始终表示素数 p 处高度为 n 的 Morava E 理论，其中 n 和 p 在全文中固定不变。5. 全文中，所有环谱均假定为 $\mathbb{E}_\infty$。

1.4 组织结构与证明提纲

在第 2 节中，我们回顾有关 δ-环和形式群的一些代数背景。我们还回顾有关 p-进平坦谱以及 $K(n)$-局部 E-模范畴结构的一些事实。特别地，我们回顾 [Rez09] 的结果，该结果刻画了 $K(n)$-局部 E-模范畴中的幂运算。

在第 3 节中，我们讨论函子 $\mathrm{Alg}_\delta \to \mathrm{Alg}_{\mathbb{T}}$的代数构造，这种构造基本上不依赖于该函子的拓扑来源。

在第 4 节中，我们回顾适当 Tate 构造的一些事实，特别是它是正合的、松弛对称幺半的，并且具有一个松弛自然变换 $\Delta_G : X \to (X^{\otimes G})^{\tau G}$，称为 Tate 对角映射。我们还定义广义 Frobenius 映射 $R \to R^{\tau G}$，并将其与较经典的 Tate 值 Frobenius 映射 $R \to R^{tC_p}$联系起来，其中 R 是一个 p-进平坦环谱，而 G 是一个阿贝尔 p-群。

在第 5 节中，我们证明第 3 节所述的构造正是图表（1）中缺失的函子。论证分几个阶段进行：

- 在第 5.1 节中，我们回顾关于单子 $\mathbb{T}$的一些事实。

- 在第 5.2 节中，我们构造两个映射 $\pi_0(R\widehat{\otimes}E) \to \pi_0((R\widehat{\otimes}E)^{B\Sigma_{p^m}})/(I_{tr}) = (R\widehat{\otimes}E)^0(B\Sigma_{p^m})/(I_{tr})$，其中 I_{tr} 表示某个转移理想。我们证明，只需证明这两个映射相同即可。它们编码了 $\mathbb{T}$-代数在万有形变上的作用：预期的作用，以及由 $\mathbb{T}$-代数结构导出的作用。

- 在第 5.3 节中，我们使用某个单射

$$(R\widehat{\otimes}E)^0(B\Sigma_{p^m})/(I_{tr}) \to \bigoplus_{A\subseteq\Sigma_{p^m}} (R\widehat{\otimes}E)^0(BA)/(I_{tr})$$

  其中，A 遍历阿贝尔子群，以将问题归结为证明这两个映射在限制到阿贝尔子群后相同。

- 在第 5.4 节中，我们构造一个映射 $(R\widehat{\otimes}E)^0(BA)/(I_{tr}) \to \pi_0((R\widehat{\otimes}E)^{\tau A})$，并分析其基本性质。在第 5.5 节中，我们证明该映射是单射。因此，我们可以将此前定义的两个映射后复合以它，从而将证明归结为证明所得映射 $\pi_0(R\widehat{\otimes}E) \to \pi_0((R\widehat{\otimes}E)^{\tau A})$ 相同。

  证明依赖于对所涉及的环和映射的几何解释。

- 最后，在第 5 节.6 中，我们利用 $\pi_0(R)\otimes\pi_0(E) \to \pi_0(R\widehat{\otimes}E)$ 是一个满射这一事实，再次将问题归结为验证两个映射 $\pi_0(R)\otimes\pi_0(E) \to \pi_0((R\widehat{\otimes}E)^{\tau A})$ 相等。随后我们结合第 4 节和第 5 节中的思路，证明这两个映射确实相等。

1.5 致谢

我想感谢我的导师 Shachar Carmeli 在整个项目过程中给予我的指导和支持；感谢 Akhil Mathew 分享与这项工作相关的想法；也感谢 Noam Nissan 提供宝贵的见解，并抽出时间阅读和评论这项工作的草稿。

本项目部分获得 BSF 拨款 2024766 的资助。

2 预备知识

本节回顾一些背景知识。我们回顾 δ-环、形式群和变形理论的基本性质。随后，我们介绍 p-进平坦谱，回顾 Morava E-理论及其上的模，并总结高阶代数中适当 Tate 构造的关键事实。

在整篇论文中，我们固定一个素数 p。

2.1 δ-环

Defi定义 2.1 ([Joy85，定义 1])。一个 δ-环是一个环 R，并配有映射 $\delta\colon R \to R$，使得 h that $\delta(1) = 0$，δ 满足乘积法则

$$\delta(ab) = \delta(a)b^p + a^p\delta(b) + p\delta(a)\delta(b)$$

以及求和法则

$$\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b) + \frac{a^p + b^p - (a+b)^p}{p}$$

其中除以 p 是形式上的。

给定一个 δ-环 R，我们定义 $\psi(x) := x^p + p\delta(x)$。直接验证可知，$\psi$ 是一个环自同态（而 δ 本身不是）。此外，$\psi(a) \equiv a^p$ (模 pR)，因此 ψ 模 p 约化后即为弗罗贝尼乌斯自同态 $R \to R/p$。

定义 2.2. 环自同态 $\psi\colon R \to R$ 称为 Frobenius 提升，如果它模 pR 约化后与 Frobenius 同态 $R \to R/p$一致。

因此，存在一个从 δ-环范畴到配备 Frobenius 提升的环范畴的遗忘函子。若 R 是 p-无挠的，则 δ上的 R -环结构与 R 上的 Frobenius 提升一一对应（参见 [Joy85]）。

事实上，对于 p-无挠环，定义 δ-环的公理恰好保证映射 $x \mapsto x^p + p\delta(x)$ 是一个环自同态。我们将 δ-环范畴记作 Alg_δ，将无挠 δ-环范畴记作 $\mathrm{Alg}_{\delta,\ \mathrm{tf}}$。

2.2 形式群与变形

固定一个特征为 p 的完美域 κ，以及定义在 κ 上、高度为 n 的形式群 Γ。这意味着 Γ 的底层形式概形为 $\mathrm{Spf}\,\kappa[\![x]\!]$，并配有群结构 $\Gamma \times \Gamma \to \Gamma$；在坐标中，该群结构由幂级数 $f(x,\ y) \in \kappa[\![x,y]\!]$ 给出，满足

$$f(x,0) = f(0,x) = x \quad , \quad f(x,y) = f(y,x) \quad , \quad f(x,f(y,z)) = f(f(x,y),z)$$

对于 $m \geq 0$，我们通过递归定义 f 的 m 次级数：$[1](x) = x$ 以及 $[m](x) = f(x,\ [m-1](x))$。接着，由于我们选择的形式群的高度为 n，$[p](x)$ 的形式为 $[p](x) = \lambda x^{p^n} +$(高阶项)，其中 $\lambda \neq 0$。

定义 2.3（同态、同源）。给定形式群 Γ 和 Γ'，同态$g\colon \Gamma \to \Gamma'$ 是一个保持群结构的概形同态（即，$m_{\Gamma'} \circ (g \times g) = g \circ m_\Gamma$，其中 $m_\Gamma\colon \Gamma \times \Gamma \to \Gamma$ 是乘法映射）。注意，g 是同构，当且仅当它是形式概形同构。同源是形式群的一个同态 $g\colon \Gamma \to \Gamma'$，且 $g^*\colon \mathcal{O}_{\Gamma'} \to \mathcal{O}_\Gamma$ 有限自由。

定义 2.4（形式群变形）。设 Γ 是域 κ上的形式群。将 Γ 变形到完全局部环 R 上的变形是一个三元组（G, i, α），其中 G 是 R上的形式群，i: $\kappa \to R/\mathfrak{m}_R$是域嵌入，且 α: $p^*G \xrightarrow{\cong} i^*\Gamma$ 是一个同构，其中 p: $R \to R/\mathfrak{m}_R$是商映射。

这里 f^*G表示形式概形 G沿态射 f的拉回。

假设 R 具有特征 p，从而绝对 Frobenius $\phi(x) = x^p$ 是 R的自同态。构造拉回 ϕ^*G，我们得到相对 Frobenius 等源 Frob: $G \to \phi^*G$。反复应用这一构造，我们可以得到迭代相对 Frobenius 映射 Frob^r: $G \to (\phi^r)^*G$。

定义 2.5 (Frobenius 变形). 设 (G, i, α) 与 (G', i', α') 为 Γ 到R的变形，并设 f: $G \to G'$ 为一个同态。我们称 f 是 Frob^r 的变形，如果 $i \circ \phi^r = i'$且下列图表交换:

$$\begin{array}{ccc} i^*\Gamma & \xrightarrow{\mathrm{Frob}^r} & (\phi^r)^* i^*\Gamma \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha'} \\ p^*G & \xrightarrow{f} & p^*G' \end{array}$$

注记 2.6. 当 $r = 0$ 时，上述定义即还原为变形同态的标准定义。

设 Def$_R$ 表示 Γ 到 R 的变形范畴，其态射是迭代 Frobenius 映射的变形。注意，该范畴是分次的，即态射集按照所变形的 Frob 的幂次进行分次（而这构成态射数据的一部分）。

对应 $R \mapsto \mathrm{Def}_R^{\mathrm{op}}$ 定义了一个函子 $\mathcal{R}^{\mathrm{op}} \to$Cat（事实上，它关于某种适当的拓扑是一个层），其中 $\mathcal{R}$ 是完备局部环的全子范畴，由剩余域特征为 p 的完备局部环组成。

我们还考虑函子 $R \mapsto \mathrm{Alg}_R$，并将 Sh(Def,Alg) 定义为这些函子之间的自然变换范畴。该范畴的一个对象 B 对每个环 R 指定一个函子 B_R: $\mathrm{Def}_R^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Alg}_R$，并对每个态射 f: $R \to R'$ 给出自然同构 B_f: $f^*B_R \to B_{R'}f^*$，且满足适当的相容条件。

我们将 Sh(Def,Alg) 称为变形范畴上的层范畴。

注记 2.7。对象 Def 有时称为 heap，类似于叠，但其取值于范畴而非群胚。因此，范畴 Sh(Def,Alg) 可视为该 heap 上的代数层范畴。

2.3 p-进平坦谱

令 $\mathbb{S}_p^\wedge$ 表示 p-完备球谱。在本小节中，我们引入关于 $\mathbb{S}_p^\wedge$ 的 p-进平坦性的概念，并记述它的一些基本性质。

Le引理 2.8。设 X 是一个 p-完备连通谱。以下条件等价 t:

(i) $X \otimes \mathbb{F}_p$ 是离散对象。(ii) 作为一个 $\mathbb{S}_p^\wedge$-模， X 等价于若干个 $\mathbb{S}_p^\wedge$ 的 p-完备直和。

证明。对于 (i)⇒(ii)，假设 $X \otimes \mathbb{F}_p$ 是离散对象。那么它是一个普通的 $\mathbb{F}_p$-向量空间，因此具有 $X \otimes \mathbb{F}_p \simeq \bigoplus_{a \in A} \mathbb{F}_p$的形式。根据赫维茨定理，对于每个 $a \in A$，都存在一个映射f_a: $\mathbb{S}_p^\wedge \to X$，其在 $\mathbb{F}_p$-同调中的像代表相应的直和项。这些映射合并为一个态射 f: $(\bigoplus_{a \in A} \mathbb{S}_p^\wedge)_p^\wedge \to X$，它在 $\mathbb{F}_p$-同调上诱导一个同构。根据赫维茨定理， $\mathbb{F}_p$ 能够检测 p-完备谱之间的同构，因此 f 是一个同构。

蕴含关系 (ii)⇒(i) 显然：若 $X \simeq (\bigoplus_{a \in A} \mathbb{S}_p^\wedge)_p^\wedge$，则 $X \otimes \mathbb{F}_p \simeq \bigoplus_{a \in A} \mathbb{F}_p$。

□

定义 2.9。 一个连通的 p-完全环谱 X 称为 p-进平坦的，当且仅当它满足引理 2.8中的等价条件。

注意，如果 X 是 p-进平坦的，那么 $\pi_0(X)$在 $\mathbb{Z}_p$上是 p-进平坦的。此外，我们会经常用到这样一个事实：对于 p-进平坦谱 X和 p-完备谱 F，有 $\pi_0(X\widehat{\otimes}F) = \pi_0 X \widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\pi_0 F$，其中张量积均取 p-完备化。这两个事实都可以直接由如下表示得到： X 是若干个 $\mathbb{S}_p^\wedge$的 p-完备直和。

此外：

定理 2.10。 设 X 是一个 p-进平坦谱。那么，平凡映射 triv : $X \to X^{tC_p}$ 是一个等价，其中 X^{tC_p} 是 Tate 构造。

事实上，我们需要这一结果的一个推广，见 定理 2.16。最后，我们可以引入以下结构：当 δ-环结构定义在 $\pi_0 R$ 上，且 R 是 p-进平坦环谱时：

构造 2.11 ([NS18，定义 IV.1.1])。 假设 R 是一个 p-进平坦环谱。存在一个自然环映射 ϕ： $R \xrightarrow{\Delta} (R^{\otimes p})^{tC_p} \xrightarrow{m} R^{tC_p} \cong R$ 其中第一个映射是 Tate 对角映射（见 [NS18，定义 III.1.4], 和推论 4.5），第二个映射是乘法，而等价 $R^{tC_p} \simeq R$ 由平凡映射 $R \to R^{tC_p}$诱导。

应用 π_0、 $\pi_0\phi$之后： $\pi_0 R \to \pi_0 R$ 成为一个 Frobenius 提升。由于 $\pi_0 R$ 无挠，该 Frobenius 提升唯一对应于 $\pi_0 R$上的一个 δ-环结构。

2.4 Morava E-理论

设 $E :=$ $E(n)$表示与我们固定的、定义在 κ上的形式群 Γ 相关联的 Morava E-理论。 E 满足 $\pi_* E = LT_n[u^{\pm}]$，其中 LT_n 是 Γ的万有变形环。具体而言，Γ 到环 R 的变形唯一对应于环映射 $LT_n \to R$。设 $K(n)$表示 Morava K-理论，它是一个满足 $\pi_* K(n) = \mathbb{F}_p[v_n^{\pm 1}]$ 的环谱，其中 $|v_n| = 2(p^n - 1)$。设交换代数$^{K(n)}{}_{,\ E\ n}{}^{\text{ev}}{}_{()}$表示偶的 $K(n)$-局部 $E(n)$-代数范畴。设 $L_{K(n)}$ 表示关于 $K(n)$的谱上的局部化函子。

若 M 是一个 $K(n)$-局部 $E(n)$-模，我们可以构造其 m 重张量积 $M^{\otimes_E m}$。置换因子可使 Σ_m（即 m 个元素的置换群）作用于此模。我们定义 $\mathbb{P}_m(M) :=(M^{\otimes_E m})_{h\Sigma_m}$，即同伦轨道。进一步定义 $\mathbb{P}(M) := \bigoplus_{m\geq 0}\mathbb{P}_m(M)$。 $\mathbb{P}$ 是 $E(n)$-模范畴上的一个单子，而任意交换 $E(n)$-代数都通过乘法映射定义了该单子的一个代数。

关于 $\mathbb{P}_m$ 的一个非平凡事实是，若 M 是有限生成自由的 $E(n)$-模，那么$L_{K(n)}\mathbb{P}_m(M)$ 也是有限自由的（参见 [Rez09]）。

对于有限自由 $E(n)$-模，存在范畴等价 $\pi_* : \mathrm{ho}\left(\mathrm{Mod}^{\mathrm{ff}}_{E(n)}\right) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{ff}}_{E(n)_*}$，其中 ff 表示有限自由 E-代数（参见 [Rez09]）。这使我们能够在 $\mathrm{Mod}^{\mathrm{ff}}_{E(n)_*}$ 上定义函子 $\mathbb{T}_m$，它是 π_* 与 $L_{K(n)}\mathbb{P}_m$ 的复合，也是 π_* 的逆函子。我们通过沿有限自由模包含到所有模范畴中的包含映射作左 Kan 延拓，将 $\mathbb{T}_m$ 扩展到所有 $E(n)_*$ -模。令 $\mathbb{T} := \bigoplus_{m\geq 0}\mathbb{T}_m$，即可得到 E_*-模范畴上的一个单子。若 R 是一个 $K(n)$-局部 E-代数，则 $\pi_*(R)$ 具有 $\mathbb{T}$-代数结构。

存在一种构造环 Γ 的方法，使得 $\mathbb{T}$-代数自然地成为 Γ-代数，这把$\mathbb{T}$-代数等同于满足某个同余条件的 Γ-代数。具体而言，对于一个分次的 Γ-代数 B，该条件要求对所有 $x \in B_0$有 $\sigma x \equiv x^p$ （模 pB），其中 $\sigma \in \Gamma$ 是某个特殊元素。（关于 $\mathbb{T}$ 与 Γ之构造的更详细讨论，见 [Rez09] 。）

在 [Rez09], 中，Rezk 还证明了一个范畴等价：Sh(Def,Alg) $\approx$ Alg$_\Gamma$。此外，他刻画了 Sh(Def,Alg) 中哪些对象对应于满足该同余条件的 p-无挠 Γ-代数。为完整起见，我们现在描述这一条件，尽管它与我们的结果无关。

假设 R 的特征为 p。绝对 Frobenius ϕ 定义了一个基变换函子 ϕ^*: Alg$_R \to$

Alg_R ($\phi^*(A) = A \otimes_\phi R$)。存在一个自然变换 Frob：$\phi^* \Rightarrow \mathrm{Id}$，其定义使得映射 $A \to \phi^* A$ 与 Frob_A：$\phi^* A \to A$ 的复合给出 A 上的绝对 Frobenius（即映射 $A \otimes_\phi R \to A$ 映射 $a \otimes r \mapsto r a^p$）。

对象 $B \in \mathrm{Sh}(\mathrm{Def}, \mathrm{Alg})$ 满足*Frobenius* 同余条件，如果对于所有特征为 p 的 R，以及 $G \in \mathrm{Def}_R$，以下图表都交换：

$$\begin{array}{ccc} \phi^* B_R(G) & \xrightarrow[\simeq]{B_\phi} & B_R(\phi^* G) \\ & \searrow^{\mathrm{Frob}} & \downarrow{\scriptstyle B_R(\mathrm{Frob})} \\ & & B_R(G) \end{array}$$

非正式地说，这意味着在等价 B_ϕ 下，B 将形式群的 Frobenius 等源映射为代数的相对 Frobenius。

注 2.12。我们有意省略了部分讨论，这些讨论涉及如何处理 $\pi_* R$ 的偶部和奇部，其中 R 是一个 $K(n)$-局部 $E(n)$-代数。要处理不一定为偶的谱，我们需要扩充代数范畴（包括 $\mathrm{Sh}(\mathrm{Def}, \mathrm{Alg})$ 和 $\mathrm{Alg}_{\mathbb{T}}$），允许它们除了偶部之外还具有奇部。在本文中，我们只讨论偶 E-代数。

由于我们关注的是 $R \mathbin{\widehat{\otimes}} E$ 的关联层，其中 R 是一个 p-进平坦环谱，因此找出其底层 E_0-模将很有用：

命题 2.13。如果 X 是一个关于 p进拓扑平坦的谱，那么映射

$$\pi_0 X \otimes \pi_0 E \to \pi_0(X \otimes E) \to \pi_0(X \mathbin{\widehat{\otimes}} E) = \pi_0(L_{K(n)}(X \otimes E))$$

是相对于 $\pi_0 E = E_0$的极大理想对 $\pi_0 X \otimes \pi_0 E$ 进行的完备化。也就是说，

$$\pi_0(X \mathbin{\widehat{\otimes}} E) = \pi_0(L_{K(n)}(X \otimes E)) = \pi_0 X \mathbin{\widehat{\otimes}} \pi_0 E$$

证明。令 $X = (\bigoplus_{a \in A} \mathbb{S}_p^\wedge)_p^\wedge$。$K(n)$-局部化可分解为经过 p-完备化，因此：

$$X \mathbin{\widehat{\otimes}} E = L_{K(n)}(X \otimes E) = L_{K(n)} \left(\bigoplus_{a \in A} E \right)$$

根据 [HS99，命题 8。4]，$\pi_0(L_{K(n)}(\bigoplus_{a \in A} E))$ 可由 $\pi_0(\bigoplus_{a \in A} E) = \bigoplus_{a \in A} E_0$ 通过相对于以下对象的极大理想进行完备化而得：E_0。这正是完备张量积$\pi_0 X \mathbin{\widehat{\otimes}} \pi_0 E$。

□

推论 2.14。设 R 是一个 p进拓扑平坦的环谱。那么，作为 E_0-代数：

$$\pi_0(R) \mathbin{\widehat{\otimes}} E_0 = \pi_0(R \mathbin{\widehat{\otimes}} E)$$

证明。我们知道这作为 E_0-模是成立的，因此只需验证映射$\pi_0(R) \mathbin{\widehat{\otimes}} \pi_0(E) \to \pi_0(R \mathbin{\widehat{\otimes}} E)$ 是一个环映射。

由于复合

$$\pi_0(R) \otimes \pi_0(E) \to \pi_0(R \otimes E) \to \pi_0(R \mathbin{\widehat{\otimes}} E)$$

是一个环映射；将源对象相对于 E_0 的极大理想完成后，我们得到原映射也是一个环映射。

□

2.5 适当 Tate 构造

我们已经在–中讨论过普通 Tate 构造^{tC_p}，见 第 2.3 节；这里我们介绍一种有用的推广。

非正式地说，对于一个带有 X -作用的 G谱，其中 G 是有限群， X的 $X^{\tau G}$适当 Tate 构造刻画了那些并非由适当轨道上的转移映射产生的不动点现象 G/H。此构造具有函子性（–）$^{\tau G}$: Sp^{BG} →Sp，并且事实上是松对称幺半的；参见 命题 4.2。

为完整起见，我们回顾适当 Tate 构造的一种模型。

定义 2.15。 设 $X \in$Sp^{BG} 是一个带有 G-作用的谱，其中 G 是某个有限群。定义 $X^{\tau G}$ 为典范映射的余纤维

$$\mathrm{colim}_{G/H \in \mathrm{Orb}_G} X^{hH} \to X^{hG}$$

其中 Orb$_G$ 表示 G的轨道范畴，其对象为轨道 G/H ，态射为 G-等变映射 $G/H \to G/K$；而映射 $X^{hH} \to X^{hG}$ 是相对转移映射。

若 G 在 X 上的作用是平凡的，且 $H \subseteq G$ 是一个子群，则存在自然映射 can$_H^G$: $X^{\tau H} \to X^{\tau G}$，由包含 $X^{hH} \to X^{hG}$诱导。事实上，我们有复合 $X^{hH} \to X^{hG} \to X^{\tau G}$，且此映射与任意转移映射作前复合所得结果均为 0，因此它诱导出映射 $X^{\tau H} \to X^{\tau G}$。

若 R 是环谱，也可以得到一个广义 Frobenius 映射

$$\phi^G : R \xrightarrow{\Delta_G} \left(R^{\otimes G}\right)^{\tau G} \to R^{\tau G}$$

(See 推论 4.5）。事实上，Frobenius ϕ_H^G: $R^{\tau H} \to R^{\tau G}$ 存在一个相对版本， h
定义方式类似。

在特殊情形 $G = C_p$ 下，适当 Tate 构造与通常的 Tate 构造一致，即 (–)$^{\tau C_p}$ =(–)^{tC_p}，并且 $\phi^{C_p} = \phi$ 恢复了经典 Tate 值 Frobenius。

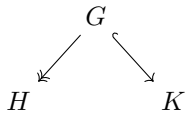
我们回顾以下关于 p-进平坦谱的结果。

The定理 2.16。 设 X 是一个 p-进平坦谱，且 G 是一个有限 p-群。赋予 X 以 th
平凡的 G-作用。则平凡映射 $X \to X^{\tau G}$ 是一个等价。

证明。 在 [Yua23，推论 6.7 中。1] 此结论是在 G 是一个 $\mathbb{F}_p$ 向量空间时证明的。同样的论证适用于任意有限 p-群，因为所用到的唯一性质是 BG 存在一个胞腔分解，且每个次数中只有有限多个胞腔。

□

令 $\mathcal{Q}$ 为对称幺半跨越范畴 Span(Finite Groups，满射，单射)。具体而言， $\mathcal{Q}$是一个 1-范畴，其对象是有限群，态射是如下形式的跨度



其中左侧的边 $G \twoheadrightarrow H$ 是满射，右侧的边 $G \hookrightarrow K$ 是单射。

定理 2.17。 [Yua23，定理 3。15] 存在一个 oplax 函子 τ: $\mathcal{Q} \to$ Fun(交换代数, 交换代数)。在对象上， τ 将有限群 G 映射为函子 (–)$^{\tau G}$，并赋予平凡作用。满射 $H \twoheadleftarrow G$ 被映射为典范映射 can$_H^G$: (–)$^{\tau H} \Rightarrow$ (–)$^{\tau G}$。单射 $H \hookrightarrow G$被映射为相对 Frobenius 映射 ϕ_H^G: (–)$^{\tau H} \Rightarrow$ (–)$^{\tau G}$。

对于复定向环谱，适当 Tate 构造有一个简单的代数描述：

定理 2.18 ([AMGR23，命题 5。10])。设 R 是一个复定向环谱，且 G 是一个有限群。那么典范映射 $R^{hG} \to R^{\tau G}$ 将 $R^{\tau G}$ 表示为R^{hG} 关于 G的约化复正则表示的欧拉类的局部化。也就是说，若 $e = e(\widetilde{\rho_G})$，则 $R^{\tau G} = R^{hG}[e^{-1}]$。

3 函子构造 $\mathrm{Alg}_\delta \to \mathrm{Sh}(\mathrm{Def},\mathrm{Alg})$

在本节中，我们构造我们的函子 $\mathrm{Alg}_{\delta,\mathrm{tf}} \to \mathrm{Alg}_{\mathbb{T}}$。回顾一下，存在一个函子 $\mathrm{Alg}_{\mathbb{T}} \to \mathrm{Sh}(\mathrm{Def},\mathrm{Alg})$，当限制到 p-无挠代数时，它是全忠实的，并且具有一个已被充分理解的本质像。具体而言，我们构造一个函子 $\mathrm{Alg}_\delta \to \mathrm{Sh}(\mathrm{Def},\mathrm{Alg})$，并证明它落入无挠 δ-环的 $\mathbb{T}$-代数子范畴。这对我们来说已经足够，因为在 p-进平坦环谱 R的情形下，$\pi_0 R$ 是 p-无挠的（因为它是一个 p-进平坦 $\mathbb{Z}_p$-模）。

首先，构造一个从配备自同态的环范畴 Alg_ψ 到范畴 $\mathrm{Sh}(\mathrm{Def},\mathrm{Alg})$ 的函子对我们是有用的。

构造 3.1. 设 A 是配备自同态 $\psi\colon A \to A$ 的环。我们定义一个对象 $B^A \in \mathrm{Sh}(\mathrm{Def},\mathrm{Alg})$。对于环 $R \in \mathcal{R}$（即 R 是局部环且 R/m_R 具有特征p），以及 R 上的变形 (G, i, α)，我们定义 $B^A_R(G) := A \widehat{\otimes} R$，其中张量积是关于 R 的极大理想完备化的。

对于一个使 Frob^r 变形的态射 $f\colon G \to G'$，我们定义 $B^A_R(f) := \psi^r \widehat{\otimes} \mathrm{Id}_R$。

对于一个映射 $f\colon R \to R'$，我们必须给出一个自然同构 $B^A_f\colon f^* B^A_R \to B^A_{R'} f^*$。对于 R 上的一个变形 (G, i, α)，我们有

$$(f^* B^A_R)(G) = f^*(A \widehat{\otimes} R) = (A \widehat{\otimes} R) \widehat{\otimes}_R R'$$

我们还有，$(B^A_{R'} f^*)(G) = A \widehat{\otimes} R'$。由于下式成立，它们自然同构：

$$(A \widehat{\otimes} R) \widehat{\otimes}_R R' \cong A \widehat{\otimes} (R \widehat{\otimes}_R R') \cong A \widehat{\otimes} R'$$

命题 3.2。 $B^A_R\colon \mathrm{Def}_R^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Alg}_R$ 是函子性的。

证明。 我们来验证 $B^A_R\colon \mathrm{Def}_R^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Alg}_{\psi^0 \widehat{\otimes}}$ $_R =$ $_R$ $_G$ $=$ 是一个定义良好的函子。首先， $B^A(\mathrm{Id}\,)\ \mathrm{Id}\ \mathrm{Id}_{A \widehat{\otimes} R}$。

接下来，我们需要检查，对于 $f\colon G \to G'$ 和 $f'\colon G' \to G''$，有 $B^A_R(f' \circ f) = B^A_R(f') \circ B^A_R(f)$。如果 f 使 Frob^r 变形，且 f' 使 $\mathrm{Frob}^{r'}$ 变形，那么 $i' = i \circ \phi^r$ 和 $i'' = i' \circ \phi^{r'}$，因此 $i'' = i \circ \phi^{r+r'}$。此外，我们有以下交换图：

$$\begin{array}{ccccc} i^*\Gamma & \xrightarrow{\mathrm{Frob}^r} & (\phi^r)^* i^*\Gamma & \xrightarrow{\mathrm{Frob}^{r'}} & (\phi^{r+r'})^* i^*\Gamma \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha'} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha''} \\ p^*G & \xrightarrow{f} & (p')^* G' & \xrightarrow{f'} & (p'')^* G \end{array}$$

上面两个箭头的复合恰好是 $\mathrm{Frob}^{r+r'}$；因此 $f' \circ f$ 形变了 $\mathrm{Frob}^{r+r'}$。Hen ce

$$B^A_R(f' \circ f) = \psi^{r+r'} \widehat{\otimes} \mathrm{Id}_R = (\psi^{r'} \widehat{\otimes} \mathrm{Id}_R) \circ (\psi^r \widehat{\otimes} \mathrm{Id}_R) = B^A_R(f') \circ B^A_R(f)$$

□

命题 3.3。 层 B^A，由构造 3.1构造，满足所需的相容条件。

证明。 首先，注意到 $B^A_{\mathrm{Id}_R}\colon B^A_R \to B^A_R$ 是同构 $A \widehat{\otimes} R \widehat{\otimes} R \to A \widehat{\otimes} R$，在识别 $R \widehat{\otimes} R \simeq R$ 下它是恒等映射。

进一步，假设我们有 $f\colon R \to R'$ 和 $g\colon R' \to R''$。我们需要验证

$$B^A_{g\circ f} = B^A_g f^* \circ g^* B^A_f$$

对于给定的 R 上的变形，第一个变换给出同构 $(A \mathbin{\widehat{\otimes}} R) \mathbin{\widehat{\otimes}}_R R'' \to A \mathbin{\widehat{\otimes}} R''$。后者给出复合：

$$((A \mathbin{\widehat{\otimes}} R) \mathbin{\widehat{\otimes}}_R R') \mathbin{\widehat{\otimes}}_{R'} R'' \xrightarrow{\sim} (A \mathbin{\widehat{\otimes}} R') \mathbin{\widehat{\otimes}}_{R'} R'' \xrightarrow{\sim} A \mathbin{\widehat{\otimes}} R''$$

在识别 $(gf)^*(R \mathbin{\widehat{\otimes}} A) \cong g^* f^*(R \mathbin{\widehat{\otimes}} A)$ 下，这两个映射一致。 □

到目前为止，我们只定义了函子在对象上的作用。现在来描述函子在态射上的作用：

构造 3.4。设 $F\colon A \to A'$ 是一个带有自同态的环映射，即 $F \circ \psi_A = \psi_{A'} \circ F$。我们构造一个变换 $B^A \Rightarrow B^{A'}$。

对于 R 上的变形 G，它给出映射 $B^A_R(G) = A \mathbin{\widehat{\otimes}} R \xrightarrow{F \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{Id}_R} A' \mathbin{\widehat{\otimes}} R$。对于 Frob^m 的变形 $g\colon G \to G'$，以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} B^A_R(G) = A \mathbin{\widehat{\otimes}} R & \xrightarrow{F \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{Id}_R} & B^{A'}_R(G) = A' \mathbin{\widehat{\otimes}} R \\ \downarrow{\scriptstyle \psi^r \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{Id}_R} & & \downarrow{\scriptstyle \psi^r \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{Id}_R} \\ B^A_R(G) = A \mathbin{\widehat{\otimes}} R & \xrightarrow[F \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{Id}_R]{} & B^{A'}_R(G) = A' \mathbin{\widehat{\otimes}} R \end{array}$$

因此，这个变换确实是自然的。

断言。上述定义的变换 $B^A \Rightarrow B^{A'}$ 与 B^A 和$B^{A'}$的相容性相容。

证明。设 $f\colon R \to R'$ 是 $\mathcal{R}$中的环映射，我们需要证明下图交换

$$\begin{array}{ccc} f^* B^A_R & \xrightarrow{\sim} & B^A_{R'} f^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ f^* B^{A'}_R & \xrightarrow{\sim} & B^{A'}_{R'} f^* \end{array}$$

事实上，只需对对象验证这一点即可；这是直接的，因为对于 R上的形变 G，下图交换

$$\begin{array}{ccc} (A \mathbin{\widehat{\otimes}} R) \mathbin{\widehat{\otimes}}_R R' & \xrightarrow{\sim} & A \mathbin{\widehat{\otimes}} R' \\ \downarrow{\scriptstyle (F \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{Id}_R) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{Id}_{R'}} & & \downarrow{\scriptstyle F \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{Id}_{R'}} \\ (A' \mathbin{\widehat{\otimes}} R) \mathbin{\widehat{\otimes}}_R R' & \xrightarrow{\sim} & A \mathbin{\widehat{\otimes}} R' \end{array}$$

□

备注 3.5。由相容性，变换 $B^A \Rightarrow B^{A'}$ 由底层环的映射 $B^A_{E_0}(\mathbb{G}) \to B^A_{E_0}(\mathbb{G})$唯一确定，其中 $\mathbb{G}$ 是 E_0上的万有形变。这只是以下事实的反映： Γ-代数的映射就是底层环的映射。在我们的情形中，映射 $A \to A'$ 被映射为其基变换 $A \mathbin{\widehat{\otimes}} E_0 \to A' \mathbin{\widehat{\otimes}} E_0$。

因此，我们得到一个函子 $\mathrm{Alg}_\psi \to \mathrm{Sh}(\mathrm{Def}, \mathrm{Alg})$。我们可以将这个函子与函子 $\mathrm{Alg}_\delta \to \mathrm{Alg}_\psi$ 复合，该函子将一个 δ-环关联到 Frobenius 提升 $\psi(x) = x^p + p\delta(x)$。这就给出了我们所需的函子 $\mathrm{Alg}_\delta \to \mathrm{Sh}(\mathrm{Def}, \mathrm{Alg})$。

在本文后文中，我们将证明该函子使图表 (1) 交换（更准确地说，将缺失的函子与函子 $\mathrm{Alg}_{\mathbb{T}} \to \mathrm{Sh}(\mathrm{Def},\mathrm{Alg})$ 复合后，我们将得到刚刚描述的函子）。由此可知，所得的层 B^A 必须满足 Frobenius 同余条件。尽管如此，直接验证该条件成立并不困难。

命题 3.6。 层 B^A（由构造 3.1构造）满足同余条件，前提是 $\psi : A \to A$ 是 Frobenius 提升。

证明。 设 ψ: $A \to A$ 是 Frobenius 自同态的一个提升，即 $\psi(x) \equiv x^p$ 模 pA。设 R 是一个特征为 p的环，并令 ϕ: $R \to R$ 为绝对弗罗贝尼乌斯自同态。令 $G \in$Def$_R$。那么：

$$\phi^* B_R^A(G) = \phi^*(A \mathbin{\widehat{\otimes}} R) = (A \mathbin{\widehat{\otimes}} R) \mathbin{\widehat{\otimes}}_R R_0$$

其中 $R_0 = R$ 表示由 ϕ给出的 R-模结构。

我们需要验证下图的交换性：

$$\begin{array}{ccc} (A \mathbin{\widehat{\otimes}} R) \mathbin{\widehat{\otimes}}_R R_0 & \xrightarrow{\sim} & A \mathbin{\widehat{\otimes}} R \\ & \searrow^{\text{Frob}} & \downarrow{\scriptstyle B_R(\text{Frob})=\psi \ \widehat{\otimes}\ \text{Id}_R} \\ & & A \mathbin{\widehat{\otimes}} R \end{array}$$

The 上方的态射由 $a \otimes r \otimes r_0 \mapsto a \otimes (r_0 r^p)$ 给出。因此，此映射与.....的复合 th $\psi \mathbin{\widehat{\otimes}} \text{Id}_R$ 由 $a \otimes r \otimes r_0 \mapsto \psi(a) \otimes (r_0 r^p)$ 给出。

相对 Frobenius 映射由 $a \otimes r \otimes r_0 \mapsto r_0 (a \otimes r)^p$ 给出。由于 $R \otimes pA = 0$ 的特征为 p，而 R 也具有特征 p，我们有：

$$r_0(a \otimes r)^p = r_0(a^p \otimes r^p) = r_0(\psi(a) \otimes r^p) = \psi(a) \otimes (r_0 r^p)$$

因此该图表可交换。

□

推论 3.7。 构造 $A \mapsto B^A$以及 构造 3.4中描述的映射作用，定义了一个函子 Alg$_\delta \to$ Sh(Def,Alg)。将其限制在 p-无挠环上时，此函子取值于 $\mathbb{T}$-代数的全子范畴。

4 适当 Tate 构造

本节将确立若干关于适当 Tate 构造的有用事实，该构造定义于定义 2.15。在 第 4.1 节 中，我们将进一步讨论该构造的函子性。在 第 4.2 节中，我们将介绍有用的 Tate 对角映射。最后，在 第 4.3 节中，我们将专门讨论 p-进平坦环谱，其中 Tate 对角线彼此之间有良好的相互作用。

4.1 正合性与乘法性

固定一个有限群 G。

命题 4.1. 适当 Tate 构造 $(-)^{\tau G} : \text{Sp}^{BG} \to$Sp 是正合的。

证明。 假设 $X \to Y \to Z$ 是一个带有 G 作用的谱的（余）纤维序列。那么，由于转移映射具有自然性，我们有以下交换图：

$$\begin{array}{ccccc} \text{余极限}_{G/H \in \text{Orb}_G} X^{hH} & \longrightarrow & \text{余极限}_{G/H \in \text{Orb}_G} Y^{hH} & \longrightarrow & \text{余极限}_{G/H \in \text{Orb}_G} Z^{hH} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X^{hG} & \longrightarrow & Y^{hG} & \longrightarrow & Z^{hG} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X^{\tau G} & \longrightarrow & Y^{\tau G} & \longrightarrow & Z^{\tau G} \end{array}$$

中间一行是一个余纤维序列，因为 $(-)^{hG}$ 是正合的。

我们来解释为什么顶行是一个余纤维序列。 $X^{h(-)}$: $G/H \mapsto X^{hH}$ 是函子 $\mathrm{Orb}_G \to$Sp，类似地， Y 和 Z。由于相对转移是自然的，存在自然变换 $X^{h(-)} \Rightarrow Y^{h(-)}$ 和 $Y^{h}{}_{(-)} \Rightarrow Z^{h(-)}$。根据 [Lur17，命题 1.1.3。1], 范畴 $\mathrm{Fun}(\mathrm{Orb}_G, \mathrm{Sp})$ 是稳定的，且余纤维逐对象地计算。由于每个 $X^{hH} \to Y^{hH} \to Z^{hH}$ 都是一个余纤维序列，因此以下也是：

$$X^{h(-)} \Longrightarrow Y^{h(-)} \Longrightarrow Z^{h(-)}$$

最后，由于余极限函子 $\mathrm{colim} : \mathrm{Fun}(\mathrm{Orb}_G, \mathrm{Sp}) \to \mathrm{Sp}$ 是正合的，因此顶行是一个余纤维序列。于是底行也是一个余纤维序列（这是稳定无穷范畴中的九引理）。

□

回忆一下，函子 $(-)^{hG}\colon \mathrm{Sp}^{BG} \to \mathrm{Sp}$ 是松对称幺半的；该函子是幺半平凡作用函子 $\mathrm{Sp} \to \mathrm{Sp}^{BG}$ 的右伴随，因此根据 [Lur17，推论 7.3.2，7] 它是松对称幺半的。

命题 4.2。 适当 Tate 构造 $(-)^{\tau G}\colon \mathrm{Sp}^{BG} \to \mathrm{Sp}$ 具有规范的松对称幺半结构，使得自然变换 $(-)^{hG} \Rightarrow (-)^{\tau G}$ 成为松对称幺半的。

证明。 在 [NS18，定理 I.3 中，1], 证明了规范变换 $(-)^{hG} \Rightarrow (-)^{tG}$（普通 Tate 构造）在对 $(-)^{tG}$ 选择唯一的松对称结构后，成为松对称的。我们可以仿照该证明，将普通 Tate 构造替换为适当 Tate 构造。

在证明中， [NS18], 作者取 $\mathcal{C} =$ 谱空间范畴^{BG}，以及 $\mathcal{D} =$ 谱空间范畴$^{BG}_{\mathrm{Ind}}$，其中 $\mathrm{Sp}^{BG}_{\mathrm{Ind}}$ 是由形如^{BG} 的谱生成的稳定子范畴，$\bigoplus_{g\in G} X$，其中 G 通过置换作用——这些恰好是从子群 $\{e\} \subseteq G$诱导的谱。利用包含 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$的一些性质，以及普通 Tate 构造 $(-)^{tG}$ 经过 $\mathcal{C}/\mathcal{D}$ （因为从 $\{e\}$ 诱导的谱的普通 Tate 构造为 0），证明便形式化地完成了。

我们也可以令 $\mathcal{D}$ 为谱空间范畴 Sp^{BG}的另一个稳定子范畴，即 Sp^{BG} 的最小稳定子范畴，它包含所有具有 G 作用且由任意子群$H \subseteq G$诱导的谱。也就是说，形如 $\bigoplus_{gH\in G/H} gX$的谱，其中 $X \in$ 属于谱空间范畴 Sp^{BH}。请注意，这严格大于 $\mathrm{Sp}^{BG}_{\mathrm{Ind}}$；后者由仅从平凡子群 $\{e\}$诱导的谱生成。

如 [NS18], 为了完成证明，我们需要证明一个与 [NS18，引理 I.3 平行的结论。8]对于 $\mathcal{D}$，我们将在本证明之后的引理 4.3中完成。

那么 $(-)^{\tau G}$ 可经由 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{D}$，因为它消去所有诱导谱（[Yua23，注 226]），证明的其余部分也以相同方式进行。

□

引理 4.3. 设 $X \in$谱空间范畴^{BG}。

(i) 若 $X \in \mathcal{D}$，则 $X^{\tau G} = 0$。

(ii) 对所有 $Y \in \mathcal{D}$， $X \otimes Y \in \mathcal{D}$ （即 $\mathcal{D}$ 是一个 $\otimes$-理想）。

(iii) 自然映射：

$$\mathrm{colim}_{Y\in\mathcal{D}/X} Y \to X$$

and

$$\mathrm{colim}_{Y\in\mathcal{D}/X} \mathrm{cofib}(Y \to X)^{hG} \longrightarrow \mathrm{colim}_{Y\in\mathcal{D}/X} \mathrm{cofib}(Y \to X)^{\tau G} = X$$

是等价。

证明。 对于 (i)，由 $(-)^{\tau G}$的正合性，满足 $(-)^{\tau G}$ 消失的全子范畴是稳定的。因此，只需证明适当 Tate 构造在诱导谱上消失。Yua23 的备注 2 讨论了这一点。 [Yua23，备注 2。26]。

对于 (ii)，给定 $X \in$ 空间范畴^{BG}，其中由满足 $X \otimes Y \in \mathcal{D}$ 的对象构成的全子范畴 Y 再次是稳定的，

因此只需假设 $Y = \bigoplus_{gH \in G/H} gZ$ 是诱导的。但在这种情况下，存在一个 H-等变包含映射 $X \otimes Z \to X \otimes Y$，它由包含其中一个直和项给出。该映射与下面的 G-等变映射伴随

$$\bigoplus_{gH \in G/H} g(X \otimes Z) \to X \otimes Y$$

这是一个等价。但左侧是诱导得到的，因此 $X \otimes Y \in \mathcal{D}$。

最后，对于 (iii)，首先注意到这个余极限是滤过的，因为 $\mathcal{D}$ 是稳定的。

对于第一个映射，只需验证对所有 $i \in \mathbb{Z}$，映射：

$$\operatorname{colim}_{Y \in \mathcal{D}/X} \pi_i Y \to \pi_i X$$

是一个同构。这就证明了第一个等价，因为余极限是滤过的，因此与 π_i 交换。通过平移，我们可以假设 $i = 0$。设 $\alpha\colon \mathbb{S} \to X$ 表示 $\pi_0 X$ 中的一个元素。那么存在一个 G-等变映射 $Y := \bigoplus_{g \in G} \mathbb{S} \to X$，其在 $\mathbb{S}$ 的某个副本上的取值为 α（由 G-等变性，这就确定了整个映射）。于是，这个副本的包含映射 $\mathbb{S} \to Y$ 是 $\pi_0(Y)$ 中的一个元素，并映到 α。

对于单射性，假设 $Y \in \mathcal{D}$，且 $\beta \in \ker(\pi_0 Y \to \pi_0 X)$。那么存在相应的映射 $\mathbb{S} \to Y$，使得 $\mathbb{S} \to Y \to X$ 为 0。令 $Y := \operatorname{cofib}\left(\bigoplus_{g \in G} \mathbb{S} \to Y\right)$，它是 $\mathcal{D}$ 中的一个对象，并带有一个诱导映射 $Y \to X$，使得存在分解 $Y \to Y \to X$。根据构造，β 在 $\pi_0 Y$ 中消失；由于余极限是滤过的，这意味着它在余极限中消失。

对于第二个映射，注意对所有 $Y \in \mathcal{D}/X$，都有一个纤维序列：

$$\operatorname{colim}_{G/H} \operatorname{cofib}(Y \to X)^{hH} \to \operatorname{cofib}(Y \to X)^{hG} \to \operatorname{cofib}(Y \to X)^{\tau G} = X^{\tau G}$$

（最后一个等式成立，是因为 $(-)^{\tau G}$ 是正合的，并且 $Y^{\tau G} = 0$。）对 Y 取滤过余极限后，左侧项消失，因为：

$$\begin{aligned}
\operatorname{colim}_{Y \in \mathcal{D}/X} \left(\operatorname{colim}_{G/H} \operatorname{cofib}(Y \to X)^{hH}\right) &= \operatorname{colim}_{G/H} \left(\operatorname{colim}_{Y \in \mathcal{D}/X} \operatorname{cofib}(Y \to X)^{hH}\right) \\
&= \operatorname{colim}_{G/H} \left(\operatorname{colim}_{Y \in \mathcal{D}/X} \operatorname{cofib}(Y \to X)\right)^{hH} \\
&= \operatorname{colim}_{G/H} \left(\operatorname{cofib}\left(\operatorname{colim}_{Y \in \mathcal{D}/X} Y \to X\right)\right)^{hH} \\
&= 0
\end{aligned}$$

第二个等式中，我们用到了以下事实：小极限，即 $(-)^{hH}$，与滤过余极限可交换 [Lur09，命题 5.3.3。3]，最后一个等式则由 (iii) 中的第一个等价得出。

□

4.2 Tate 对角线

记 $T_G\colon \mathrm{Sp} \to \mathrm{Sp}$ 为函子 $T_G(X) = \left(X^{\otimes G}\right)^{\tau G}$，其中 G 通过置换各因子起作用。

P命题 4.4。对于有限群 G，$T_G\colon \mathrm{Sp} \to \mathrm{Sp}$ 是正合且松对称幺半的。

证明。松对称幺半性是显然的，因为 $(-)^{\otimes G}$ 是松对称幺半的，而 $(-)^{\tau G}$ 也是如此，正如 命题 4.1 中所讨论的。

正合性的证明将沿用 [NS18 命题 III.1 中的证明思路。1] 对于 $G = C_p$ 的情形。

首先，我们来看看 T_G 保持直和。固定某个 X_0，$X_1 \in \mathrm{Sp}$。注意，G 通过左平移作用于集合 $\{0,1\}^G$，并令 P 为该作用的轨道集合。特别地，我们有单元素轨道 $0 = (0, \ldots\ldots, 0)$ 和 $1 = (1, \ldots\ldots, 1)$。其他所有轨道都是非平凡的（这是因为该作用的不动点只有 0 和 1，因为 G 在自身上的作用是传递的）。

我们有：

$$T_G(X_0 \oplus X_1) = \left(\bigoplus_{(i_g)\in\{0,1\}^G} \left(\bigotimes_{g\in G} X_{i_g} \right) \right)^{\tau G}$$
$$= T_G(X_0) \oplus T_G(X_1) \oplus \bigoplus_{O\in P\setminus\{0,1\}} \left(\bigoplus_{(i_g)\in O} \bigotimes_{g\in G} X_{i_g} \right)^{\tau G}$$

对于 $O = O((i_g)) \in P \setminus \{0,1\}$，该直和项：

$$\bigoplus_{(i_g)\in O} \bigotimes_{g\in G} X_{i_g}$$

由i_g的稳定子 stab$((i_g))$ 诱导而来，作用在 stab$((i_g))$-谱 $\bigotimes_{g\in G} X_{i_g}$上。由于适当 Tate 构造在诱导的 G-谱上消失（[Yua23，注 2。26]），我们得出$T_G(X_0 \oplus X_1) \simeq T_G(X_0) \oplus T_G(X_1)$。

要证明正合性，只需检验 T_G 与扩张相容。事实上，假设 $X_0 \to \widetilde{X} \to X_1$ 是一个纤维序列。那么我们得到 $\left(\widetilde{X}\right)^{\otimes G}$ 的一个滤过，其连续的滤过步骤由 $(X_0)^{\otimes G}$ 给出，然后：

$$\bigoplus_{(i_g)\in O} \bigotimes_{g\in G} X_{i_g}$$

按总和 $\sum_{g\in G} i_g$ 排序。但由于 $(-)^{\tau G}$ 正合，会消去所有非平凡轨道，因此我们得到一个纤维序列：

$$((X_0)^{\otimes G})^{\tau G} \to ((\widetilde{X})^{\otimes G})^{\tau G} \to ((X_1)^{\otimes G})^{\tau G}$$

□

推论 4.5. 设 G 是一个有限群。那么存在唯一的松对称自然变换：

$$\Delta_G \colon \mathrm{Id}_{\mathrm{Sp}} \Rightarrow T_G$$

我们称之为（广义）Tate 对角映射。

证明。 $\mathrm{Id}_{\mathrm{Sp}}$ 是从谱空间范畴 $\to$到谱空间范畴 ([Nik16，推论 6.9]) 的松对称幺半正合函子中的初始对象。□

稍后，在 命题 5.11 中，我们将看到，Tate 对角映射 $\Delta_G \colon X \to (X^{\otimes G})^{\tau G}$ 符合我们的直觉预期：它是空间上对角映射 $\Omega^\infty X \to \left((\Omega^\infty X)^{\times G}\right)^{hG}$的同伦相干版本；该映射不是可加的，因此不是谱映射。

对于环谱 R，我们有 Tate 值 Frobenius 映射：

定义 4.6. 设 R 是一个环谱， G 是一个有限群。那么，相对于 G 的（广义）Tate 值 Frobenius 映射是如下映射：

$$\phi^G \colon R \xrightarrow{\Delta_G} (R^{\otimes G})^{\tau G} \xrightarrow{m^{\tau G}} R^{\tau G}$$

其中 $m \colon R^{\otimes G} \to R$ 是 R 的乘法映射。

由于 Δ_G 是一个松对称变换，乘法也具有松对称性，并且 $(-)^{\tau G}$ 是一个松对称函子，因此我们得到

推论 4.7. 设 G 是一个有限群。那么 Tate 值 Frobenius 映射可组装成一个弱对称自然变换 ϕ^G: CAlg(Sp) $\Rightarrow$ CAlg(Sp)。

注 4.8. Tate 值 Frobenius 也有一个相对版本，对于 $H \subseteq G$，它给出一个映射：

$$\phi_H^G \colon R^{\tau H} \to R^{\tau G}$$

我们不会在这里定义这个映射。 定理 2.17 给出了相对 Frobenius 的一个良好的函子性性质。

4.3 平坦环谱上的广义 Frobenius 映射

设 R 是定义在 p-进完备球谱上的 p-进平坦环谱。回忆一下，对于所有阿贝尔 $R \to R^{\tau A}$ -群 p，平凡映射 A都是等价。一个直接推论是，对于所有满射 $A \twoheadrightarrow B$，典范映射 $R^{\tau B} \to R^{\tau A}$ 都是等价，因为根据定理 2.17，我们有如下交换图表：

$$R \xrightarrow[\mathrm{can}_1^B]{} R^{\tau B} \xrightarrow[\mathrm{can}_B^A]{} R^{\tau A}, \quad R \xrightarrow{\mathrm{can}_1^A} R^{\tau A}$$

并且由于 can_1^A 和 can_1^B 都是等价，因此 can_B^A 也是等价。

命题4.9。 设 R 是一个 p-进平坦环，且 A 是一个有限阿贝尔 p-群，其阶为 $|A| = p^m$。那么广义 Frobenius 映射

$$R \xrightarrow{\phi^A} R^{\tau A} \xrightarrow{(\mathrm{can}^A)^{-1}} R$$

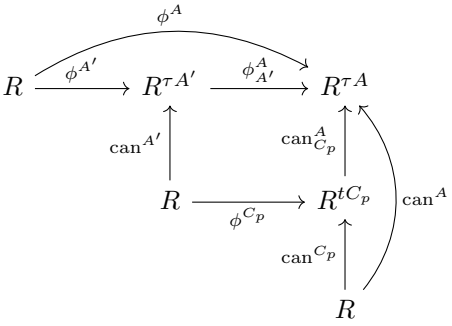
等价于 Frobenius 映射 $R \xrightarrow{\phi} R^{tC_p} \xrightarrow{(\mathrm{can}^{C_p})^{-1}} R$ 的 m 重复复合。

证明。 我们对 m进行归纳。对于 $m = 0$，结论显然成立。

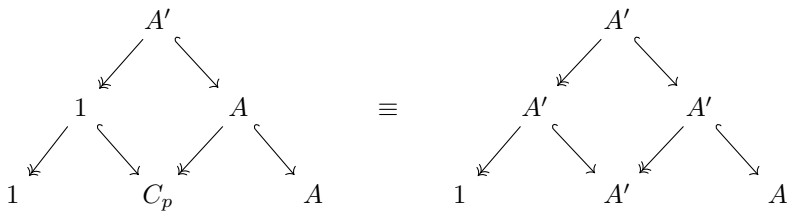
在归纳步骤中，我们可以选取一个阶为 p^{m-1} 的子群 $A' \subseteq A$ （例如，写出 $A \cong C_{p^k} \times B$ 并选取 $A' = C_{p^{k-1}} \times B \subseteq A$）。于是得到以下阿贝尔群正合序列：

$$0 \to A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow C_p \to 0$$

我们断言下图表是交换的：



第一行与右列的交换性直接由（相对）Frobenius 映射和典范映射的函子性得出，见定理 2.17。方形的交换性源于两个复合在跨度范畴中重合：



因此，复合 $R \xrightarrow{\phi^A} R^{\tau A} \xrightarrow{(\mathrm{can}^{A})^{-1}} R$ 与如下复合相同：

$$R \xrightarrow{\phi^{A'}} R^{\tau A'} \xrightarrow{(\mathrm{can}^{A'})^{-1}} R \xrightarrow{\phi^{C_p}} R^{tC_p} \xrightarrow{(\mathrm{can}^{C_p})^{-1}} R$$

由归纳法可知，$R \xrightarrow{\phi^{A'}} R^{\tau A'} \xrightarrow{\text{可以}A'} R$ 是 Frobenius 自同态的（$m-1$）重复复合，从而完成证明。

□

5 与期望函子的比较

在本节中，我们最终证明，在第 3 节中给出的构造使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CAlg}^{\text{flat, ff}}_{/\mathbb{S}^\wedge_p} & \xrightarrow{(-)\widehat{\otimes} E} & \mathrm{CAlg}^{K(n),\text{even}}_{E} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_0} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_0} \\ \mathrm{Alg}_{\delta,\text{torsion-free}} & \xrightarrow{A\mapsto B^A} & \mathrm{Alg}_{\mathbb{T}} \end{array} \tag{2}$$

在第 5.1 节中，我们回顾与 $\mathbb{T}$-代数 $\pi_0 R$相关的层结构，其中 R 是一个$K(n)$-局部 E-代数。

在第 5.2 节中，我们将讨论特化到 p-进平坦环谱的情形，并将问题化归为万有情形，即证明只需证明我们的构造与 $\pi_0(R\widehat{\otimes} E)$在万有形变上相一致。这些万有形变对应于相对于对称群的幂运算。因此，我们只需理解这些幂运算。

在第 5.3 节中，我们再次将问题归结为理解对称群的阿贝尔子群上的幂运算。在第 5.4 节中，我们通过证明 Tate 值 Frobenius 映射可经由幂运算分解，将阿贝尔幂运算与 Tate 值 Frobenius 映射联系起来。具体而言，我们建立了 Tate 值 Frobenius 映射的 π_0 如下分解：

$$\pi_0\phi^A : \pi_0 R \xrightarrow{\overline{P_A}} (R^0(BA)/(I_{tr}))^{\mathrm{free}} \xrightarrow{\overline{G_R}} \pi_0(R^{\tau A})$$

其中，幂运算 P_A 需模去某个转移理想，并约化为其自由部分；而G_R 是我们证明存在的典范映射。

在第 5.5 节中，我们证明映射 G_R 是单射，因此只需理解 Tate 值 Frobenius 的 π_0，便足以理解幂运算。最后，在第 5.6 节中，我们确定 Tate 值 Frobenius 的 π_0 ，并证明它符合我们的预期。

5.1 关于 $\mathbb{T}$-代数的回顾

假设 R 是一个 $K(n)$-局部 E-代数。那么 $\pi_0 R$ 具有一个 $\mathbb{T}$-代数的结构。在 [Rez09],Rezk 构造了一个函子 $\mathrm{Alg}_{\mathbb{T}} \to \mathrm{Sh}(\mathrm{Def}, \mathrm{Alg})$，将其限制在 p-无挠代数上时是全忠实的。本章中，我们描述 $\pi_0 R$ 在此函子下的像。

我们先引入一些记号：

定义 5.1。令 $(-)^{\mathrm{free}}$: Ring $\to$ Ring 表示环上的函子，它将一个环商去其 p-挠部分（此函子也可以定义在阿贝尔群上）。它是将 p-无挠环包含到所有环中的左伴随。商映射 $S \to S^{\mathrm{free}}$ 是伴随的单位。

定义 5.2. 对于子群 $G \subseteq \Sigma_{p^m}$，我们定义 $L[G] := (E^0(BG)/(I_{tr}))^{\mathrm{free}}$，其中 I_{tr} 是 $E^0(BG)$ 中的转移理想。具体而言，I_{tr} 由所有真子群 $H \subsetneq G$对应的转移映射$E^0(BH) \to E^0(BG)$的像生成。

这个环有两个从 E_0 出发的自然映射。第一个是平凡映射 $s[G]\colon E_0 \to L[G]$，它以典范方式使 $L[G]$ 成为一个 E_0-代数。第二个映射来自关于 G 的幂运算，

$$t[G]\colon E_0 \to \pi_0((E^{\otimes p^m})^{hG}) \to \pi_0(E^{hG}) = E^0(BG) \to E^0(BG)/(I_{tr}) \to (E^0(BG)/(I_{tr}))^{\text{free}} = L[G]$$

其中第一个映射是对角映射，第二个映射是 E中的乘法。

注意，映射 $t[G]$ 取决于嵌入 $G \hookrightarrow \Sigma_p$ ^{m}.

在 $G = \Sigma_{p^m}$的情形下，我们将记 $L[G] = L[m]$、 $s[G] = s[m]$和 $t[G] = t[m]$。如果上下文清楚，我们将省略 s 和 t中的第 m个指标。

注 5.3. 对于 $G = \Sigma_{p^m}$，有如下定理： $E^0(B\Sigma_{p^m})/(I_{tr})$ 是 E_0 ([Str98，定理 8.6]) 上的自由对象。因此，

$$L[m] = \left(E^0(B\Sigma_{p^m})/(I_{tr})\right)^{\text{free}} = E^0(B\Sigma_{p^m})/(I_{tr})$$

如果 R 是一个 $K(n)$-局部 E-代数，那么 R 上的幂运算会导出如下映射：

$$P_m : R^0(X) \to R^0(X \times B\Sigma_{p^m})$$

由于 $E^0(B\Sigma_{p^m})$ 是有限自由 E_0-模（[Str98，定理 3.2]），根据 K¨unneth 公式，在$K(n)$-局部范畴中

$$R^0(X \times B\Sigma_{p^m}) \cong R^0X \mathbin{\widehat{\otimes}}_{E^0} E^0(B\Sigma_{p^m})$$

这个同构是自然的，特别是它与转移映射可交换。因此：

$$R^0(X \times B\Sigma_{p^m})/(I_{tr}) \cong R^0(X) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{E_0} E^0(B\Sigma_{p^m})/(I_{tr}) \tag{3}$$

我们还可以定义约化幂运算：

$$\overline{P_m}\colon R^0(X) \xrightarrow{P_m} R^0X \mathbin{\widehat{\otimes}}_{E^0} E^0(B\Sigma_{p^m}) \to R^0X \mathbin{\widehat{\otimes}}_{E_0} L[m]$$

定理 5.4 ([Rez09，命题 3.24])。 P_m 是一个环同态。

令 $X = *$，我们得到映射 ψ_m: $\pi_0R \to \pi_0R \mathbin{\widehat{\otimes}}_{E_0} L[m]$。注意，映射 $t[m]$ 恰好是在 $X = *$ 和 $R = E$ 情形下的映射 P_m ，因此它们也是环同态。注意，映射 $s[m]$和 $t[m]$也保持进拓扑，因为它们是由 E-模的映射诱导的。

现在我们可以描述 π_0R 如何成为 Def 上的一个层，其中 R 是一个 $K(n)$-局部的 E-代数。族 $\{L[m]\}_{m\geq 0}$ 确定了一个余单子，使得成为其上的余模等价于成为一个环 A ，其结构映射 ψ_m: $A \to A \mathbin{\widehat{\otimes}}_{E_0} L[m]$ 与余乘法映射 $L[m] \mathbin{\widehat{\otimes}} L[k] \to L[m+k]$ 相容。于是，在 p-无挠的情形下，这些余模范畴与满足同余判据的 $\mathbb{T}$-代数范畴之间存在等价。我们将描述如何恢复与此类余模相关联的层结构。

首先，我们需要理解环 $L[m]$。这个环对 Frob^m 的变形进行分类。也就是说，映射 $L[m] \to R$ 与 Frob^m 在环 R 上的变形一一对应。特别地，映射 $s[m]\colon E_0 \to L[m]$ 对变形的源进行分类，而映射 $t[m]\colon E_0 \to L[m]$ 对目标进行分类。也就是说，令 $\mathbb{G} = \mathsf{Spf}(E^*(\mathbb{CP}^\infty)) = \mathsf{Spf}(E_0[\![x]\!])$ 为泛变形，则映射 $g\colon L[m] \to R$ 对应于形如 $(g \circ s)^*\mathbb{G} \to (g \circ t)^*\mathbb{G}$ 的变形。

特别地，假设 R 是一个 $K(n)$-局部 E-代数，我们来描述由 π_0R 诱导的层 A 。对于形式群 $E_0 \to S$ 的任意变形，它给出 $A_S(G) = \pi_0R \mathbin{\widehat{\otimes}}_{E_0} S$。设$g\colon L[m] \to S$ 表示 Frob^m 的一个变形，其形式为 $(g \circ s)^*\mathbb{G} \to (g \circ t)^*\mathbb{G}$。对幂运算 $\psi_m\colon \pi_0R \to \pi_0R \mathbin{\widehat{\otimes}}_{E_0} L[m]$ 进行基变换，我们得到一个映射：

$$\widetilde{\psi_m}\colon \pi_0R \mathbin{\widehat{\otimes}}_{E_0} L[m]_t \to \pi_0R \mathbin{\widehat{\otimes}}_{E_0} L[m]_s$$

其中下标 s 与 t 指定了 $L[m]$ 的 E_0-代数结构（标准结构由 $\widetilde{\ }$ 通过 s给出）。为了得到 $A_S(g)$，我们需要将映射 ψ_m 基变换到 S。具体而言， $A_S(g)$ 由以下给出：

$$\begin{aligned} A_S((g\circ t)^*\mathbb{G}) &= \pi_0 R \mathbin{\widehat{\otimes}}_{E_0} S_{g\circ t} \\ &= \pi_0 R \mathbin{\widehat{\otimes}}_{E_0} L[m]_t \mathbin{\widehat{\otimes}}_{L[m]} S \xrightarrow{\widetilde{\psi_m}\otimes \mathrm{Id}_S} \pi_0 R \mathbin{\widehat{\otimes}}_{E_0} L[m]_s \mathbin{\widehat{\otimes}}_{L[m]} S \\ &= \pi_0 R \mathbin{\widehat{\otimes}}_{E_0} S_{g\circ s} = A_S((g\circ s)^*\mathbb{G}) \end{aligned}$$

5.2 化归为万有形变

现在让我们专门考虑以下情形： $R = R' \mathbin{\widehat{\otimes}} E$，其中 R' 是 p-进平坦的。令 A 表示与 $\pi_0(R) = \pi_0(R') \mathbin{\widehat{\otimes}} E_0$相关联的层。我们回顾一下，第 5 节的目标是证明 $A = B^{\pi_0(R')}$。

幂运算 ψ_m 具有如下形式：

$$\widetilde{\psi_m}\colon \pi_0(R) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{E_0} L[m]_t = \pi_0(R') \mathbin{\widehat{\otimes}} L[m] \to \pi_0(R) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{E_0} L[m]_s = \pi_0(R') \mathbin{\widehat{\otimes}} L[m]$$

对于 S上的形式群 G ，正如预期，

$$A_S(G) = \pi_0(R' \mathbin{\widehat{\otimes}} E) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{E_0} S = \pi_0(R') \mathbin{\widehat{\otimes}} E_0 \mathbin{\widehat{\otimes}}_{E_0} S = \pi_0(R') \mathbin{\widehat{\otimes}} S = B_S^{\pi_0(R')}(G)$$

对于由映射 $g\colon L[m] \to S$ 表示的 Frob^m 的变形，我们得到：

$$A_S(g)\colon \pi_0 R \mathbin{\widehat{\otimes}}_{E_0} S = \pi_0 R \mathbin{\widehat{\otimes}}_{E_0} L[m]_t \mathbin{\widehat{\otimes}}_{L[m]} S \xrightarrow{\widetilde{\psi_m}\otimes \mathrm{Id}_S} \pi_0 R \mathbin{\widehat{\otimes}}_{E_0} L[m]_s \mathbin{\widehat{\otimes}} S = \pi_0(R) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{E_0} S$$

构造 $B^{\pi_0(R')}$ 给出了映射：

$$B_S^{\pi_0(R')}(g)\colon \pi_0(R') \mathbin{\widehat{\otimes}} S \xrightarrow{\phi^m \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{Id}_S} \pi_0(R') \mathbin{\widehat{\otimes}} S$$

其中 $\phi\colon \pi_0(R') \to \pi_0(R')$ 是 $\pi_0(R')$ 上 Frobenius 提升的。

因此，我们的目标是证明 $\widetilde{\psi_m}\colon \pi_0(R') \mathbin{\widehat{\otimes}} E_0 \to \pi_0(R') \mathbin{\widehat{\otimes}} L[m]$ 等于 $\phi^m \mathbin{\widehat{\otimes}} t[m]$，因为沿结构映射 $t[m]\colon E_0 \to L[m]$ 进行基变换后，我们得到 $\widetilde{\psi_m} = \phi^m \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{Id}_{L[m]}$。

因此我们得到以下结果：

引理 5.5。 如果我们证明映射 $\psi_m\colon \pi_0 R \mathbin{\widehat{\otimes}} E_0 \to \pi_0 R \mathbin{\widehat{\otimes}} L[m]$ 和映射 $\phi^m \mathbin{\widehat{\otimes}} t[m]$一致，那么就可以推出图表（2）交换，正如所希望的那样。

换言之，我们需要证明， $R \mathbin{\widehat{\otimes}} E$ 的（约化） p^m-幂运算与 E 的幂运算张量积 R的 Tate 值 Frobenius 的第 m次迭代相同。

证明。 根据前面的讨论，这些数据确定了函子 $\mathrm{Alg}_\delta \to \mathrm{Sh}(\mathrm{Def}, \mathrm{Alg})$ 在对象上的作用，并表明该图表在对象上交换。在态射上的交换性显然成立，因为 $\mathbb{T}$-代数的态射就是底层环的态射（注记 3.5），其中两个函子都对应于到 E_0 的（完备）基变换。 □

S在 $t[m]$中省略指标 m 后，我们需要证明 $\psi = \phi^m \mathbin{\widehat{\otimes}} t\colon \pi_0(R') \mathbin{\widehat{\otimes}} E_0 \to \pi_0(R') \mathbin{\widehat{\otimes}} L[m$].

5.3 阿贝尔子群

接下来，我们将证明，幂运算由其在 Σ_{p^m}的阿贝尔子群上的限制所决定。也就是说，我们用受限幂运算 $\pi_0 R \to \pi_0 R \mathbin{\widehat{\otimes}} L[m]$ 来替代幂运算 $\pi_0 R \to \pi_0 R \mathbin{\widehat{\otimes}} L[A]$，其中 A 是一个阿贝尔 p-群。这些幂运算定义于定义 5.2。我们的主要工具将是推论 5.9。

对于任意子群 $A \subseteq \Sigma_{p^m}$，都有一个限制映射 $R^0(B\Sigma_{p^m}) \to R^0(BA)$。我们将需要以下结果：

定理 5.6 ([Rez09])。 转移理想 $R^0(B\Sigma_{p^m})$ 由子群 $\Sigma_{p^m-p^k}\times\Sigma_{p^k}$ 对应的转移映射的像生成，其中 $0\le k\le m-1$。

特别地，转移理想由来自非传递作用子群的转移生成。

引理 5.7。 设 $A\subsetneq\Sigma_{p^m}$ 是一个传递作用的真阿贝尔子群。转移理想在 $R^0(B\Sigma_{p^m})$ 中的像经由限制映射 $R^0(B\Sigma_{p^m})\to R^0(BA)$ 落在 $R^0(BA)$ 的转移理想内。

证明。 这由双陪集公式得出：来自子群K 的转移在 A 上的限制是来自形如 $A\cap gKg^{-1}$ 的子群的转移的直和，其中 $g\in\Sigma_{p^m}$。由于我们知道可以假设 K 的作用是非传递的，因此 gKg^{-1} 的作用也是如此，所以可得 $A\cap gKg^{-1}\subsetneq A$，因此该转移是适当的，并落在 $R^0(BA)$ 的转移理想内。 □

于是我们得到一个映射：

$$R^0(B\Sigma_{p^m})/(I_{tr})\to\bigoplus_{A\subsetneq\Sigma_{p^m}}R^0(BA)/(I_{tr})\to\bigoplus_{A\subsetneq\Sigma_{p^m}}\left(R^0(BA)/(I_{tr})\right)^{\mathrm{free}}\tag{4}$$

其中求和遍历阶为 p^m 且传递作用的阿贝尔子群。

定理 5.8。 当 $R=E$ 时，映射 (4) 是单射。

这一点在 [HS23]，中有陈述，不过为使论述完整，我们稍后也会在 第 5.5 节 中证明这一点 .

推论 5.9。 设 $R=R'\mathbin{\widehat{\otimes}}E$，其中 R' 在 $\mathbb{S}$ 上是 p-阿德性平坦的。那么映射：

$$R^0(B\Sigma_{p^m})/(I_{tr})\to\bigoplus_{A\subsetneq\Sigma_{p^m}}\left(R^0(BA)/(I_{tr})\right)\to\bigoplus_{A\subsetneq\Sigma_{p^m}}\left(R^0(BA)/(I_{tr})\right)^{\mathrm{free}}$$

是单射，其中 A 仍遍历阶为 p^m 的阿贝尔子群，它们传递地作用。证明。 首先，注意到 $E^0(B\Sigma_{p^m})/(I_{tr})$ 在 E_0 上是自由的 p，特别是 [Rez09]) 可知它是无

$$R^0(B\Sigma_{p^m})/(I_{tr})=\pi_0(R')\mathbin{\widehat{\otimes}}E^0(B\Sigma_{p^m})/(I_{tr})$$

无 p-挠的。

最后，我们利用映射 (4) 对 E 的单射性，以及到 $\pi_0R'\mathbin{\widehat{\otimes}}E_0$ 的基变换；后者在 E_0 上是平坦的，因此保持单射性。我们还利用 $\pi_0(R')$ 是 p-挠的这一事实，因此与其作张量积可与 $(-)^{\mathrm{free}}$ 函子交换。 □

接下来，我们考虑以下图表：

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_0R & \xrightarrow{P_m} & R^0(B\Sigma_{p^m}) & \longrightarrow & R^0(B\Sigma_{p^m})/(I_{tr}) & = & \left(R^0(B\Sigma_{p^m})/(I_{tr})\right)^{\mathrm{free}}\\
 & \searrow^{P_A} & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
 & & R^0(BA) & \longrightarrow & R^0(BA)/(I_{tr}) & \longrightarrow & \left(R^0(BA)/(I_{tr})\right)^{\mathrm{free}}
\end{array}$$

为了验证此图表交换，我们观察以下交换图：

$$\begin{array}{ccccc}
\Omega^\infty R & \xrightarrow{\Delta} & \Omega^\infty\left(R^{\otimes p^m}\right)^{h\Sigma_{p^m}} & \xrightarrow{m} & \Omega^\infty R^{h\Sigma_{p^m}}\\
\| & & \downarrow & & \downarrow\\
\Omega^\infty R & \xrightarrow{\Delta} & \Omega^\infty\left(R^{\otimes p^m}\right)^{hA} & \xrightarrow{m} & \Omega^\infty R^{hA}
\end{array}$$

由 $(-)^{h\Sigma_{p^m}}\Rightarrow(-)^{hA}$ 的自然性，此图表交换。后复合第一行得到 P_m，与第二行后复合则得到 P_A （由于 A 传递地作用，$|A|=p^m$）。

将情形特化为 $R=R'\mathbin{\widehat{\otimes}}E$，我们看到幂运算 ψ_m：$\pi_0(R'\mathbin{\widehat{\otimes}}E)\to\pi_0(R'\mathbin{\widehat{\otimes}}E)\mathbin{\widehat{\otimes}}_{E_0}L[m]$ 限制为 R 的幂运算 P_A。类似地，$t[m]$ 限制到 A 上为 $t[A]$。

综合第 5.2 节的结果，我们得到：

推论 5.10. 设 $R = R' \mathbin{\widehat{\otimes}} E$，其中 R' 是一个 p-进平坦环谱。

假设我们知道，对于所有阿贝尔且传递的 $A \subseteq \Sigma_{p^m}$，都有 $P_A = \phi^m \mathbin{\widehat{\otimes}} t[A]$，其中 $\overline{P_A}$ 是 R 的幂运算，而 $t[A]$ 是 E 的幂运算。

于是 $\psi_m = \phi^m \mathbin{\widehat{\otimes}} t$，因此由 引理 5.5，图表（2）交换。

证明。 由于 推论 5.9 中的映射是单射，只需验证将其复合后等式 $\psi_m = \phi^m \mathbin{\widehat{\otimes}} t[m]$仍成立。

特别地，只需检查这些映射在分别与每个限制映射 $R^0(B\Sigma_{p^m})/(I_{tr}) \to \left(R^0(BA)/(I_{tr})\right)^{\text{free}}$ 复合后相等。

根据上文的讨论，幂运算 ψ_m 变为 P_A。

类似地，$\phi^m \otimes t[m]$ 变为 $\phi^m \otimes t[A]$：这是因为，根据（3），映射 $R^0(B\Sigma_{p^m})/(I_{tr}) \to \left(R^0(BA)/(I_{tr})\right)^{\text{free}}$ 是映射 $E^0(B\Sigma_{p^m})/(I_{tr}) \to \left(E^0(BA)/(I_{tr})\right)^{\text{free}}$ 到 $\pi_0(R') \mathbin{\widehat{\otimes}} E_0$ 的基变换，而且 $\pi_0(R') \mathbin{\widehat{\otimes}} E_0$ 是 p-无挠的。 □

也就是说，我们需要证明下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \pi_0(R' \mathbin{\widehat{\otimes}} E) & \xrightarrow{\overline{P_A}} & ((R' \mathbin{\widehat{\otimes}} E)^0(BA)/(I_{tr}))^{\text{free}} \\ \| & & \| \\ \pi_0(R') \mathbin{\widehat{\otimes}} E_0 & \xrightarrow[\phi^m \mathbin{\widehat{\otimes}} t[A]]{} & \pi_0(R') \mathbin{\widehat{\otimes}} L[A] \end{array}$$

5.4 与 Proper Tate 的复合

设 R 是一个环谱。设 $A \subseteq \Sigma_{p^m}$ 是一个阶为 p^m 的阿贝尔子群。假设 A 是传递的。注意，由于 A 的传递性和交换性，$|A| = p^m$。

回顾一下，我们关注的幂运算为 P_A：$\pi_0 R \to \left(R^0(BA)/(\overline{I_{tr}})\right)^{\text{free}}$。接下来两个小节的目标是将 Tate 值 Frobenius 映射 $\pi_0 R \to \pi_0(R^{\tau A})$ 的 π_0 分解为经过 P_A 的映射，并证明所得映射 $\left(R^0(BA)/(I_{tr})\right)^{\text{free}} \to \pi_0(R^{\tau A})$ 在 $R = R' \mathbin{\widehat{\otimes}} E$ 的情况下是单射，其中 R' 是 p-进平坦的。

我们先从非约化幂运算的分解开始。

命题 5.11。 设 A 为任意有限群（不一定是阿贝尔群）。松对称幺半变换：

$$\Omega^\infty(\Delta_A) \colon \Omega^\infty \Rightarrow \Omega^\infty T_A$$

可分解为：

$$\Omega^\infty R \xrightarrow{\Delta_{\Omega^\infty R}} \left((\Omega^\infty R)^{\times A}\right)^{hA} \to \Omega^\infty\left((R^{\otimes A})^{hA}\right) \to \Omega^\infty\left((R^{\otimes A})^{\tau A}\right)$$

其中 $T_A(R) = (R^{\otimes A})^{\tau A}$。

证明。 两者都是松对称幺半变换 $\Omega^\infty \to \Omega^\infty T_A$。但 Ω^∞ 是谱空间范畴 Sp 中松对称幺半函子的初始对象 $\to \mathcal{S}$（[Nik16，推论 6。9]），因此二者相同。 □

推论 5.12。 设 A 为有限群，R 为环谱。设 ϕ：$R \to R^{\tau A}$ 为 Tate 值 Frobenius 映射。则 $\pi_0\phi$：$\pi_0 R \to \pi_0(R^{\tau A})$ 可分解为：

$$\pi_0 R \xrightarrow{P_A} \pi_0(R^{hA}) \to \pi_0(R^{\tau A})$$

其中 P_A：$\pi_0 R \to \pi_0(R^{hA})$ 是关于 A的幂运算。

证明。 我们有如下交换图表：

$$\begin{array}{ccccc} \Omega^\infty R & \xrightarrow{\Omega^\infty \Delta_A} & \Omega^\infty((R^{\otimes A})^{\tau A}) & \xrightarrow{m} & \Omega^\infty(R^{\tau A}) \\ {\scriptstyle \Omega^\infty \Delta}\downarrow & & \uparrow & & \uparrow \\ ((\Omega^\infty R)^{\times A})^{hA} & \longrightarrow & \Omega^\infty((R^{\otimes A})^{hA}) & \xrightarrow[m]{} & \Omega^\infty(R^{hA}) \end{array}$$

左侧矩形由前面的命题 命题 5.11保证交换，而右侧矩形由 $(-)^{hA} \Rightarrow (-)^{\tau A}$ 的自然性保证交换。

取 π_0，顶行的复合变为 $\pi_0\phi$，底行变为 p_A。 □

回想适当 Tate 构造嵌入余纤维序列：

$$\mathrm{colim}_{G/H \in \mathrm{Orb}_G} R^{hH} \to R^{hG} \to R^{\tau G}$$

其中 Orb_G 是 G 的轨道范畴。特别地，由于转移映射 $R^{hH} \to R^{hG}$ 经由余极限分解，该复合：

$$R^0(BH) \xrightarrow{\mathrm{tr}} R^0(BG) = \pi_0(R^{hG}) \to \pi_0(R^{\tau G})$$

为零映射。因此典范映射 $\pi_0(R^{hA}) \to \pi_0(R^{\tau A})$ 典范地经由转移理想的商分解。

推论 5.13. 对于带有 G 作用的谱 R，典范映射 $R^{hG} \to R^{\tau G}$ 的 π_0 分解为：

$$\pi_0(R^{hG}) \to \pi_0(R^{hG})/(I_{tr}) \xrightarrow{G_R} \pi_0(R^{\tau G})$$

其中 G_R：$\pi_0(R^{hG})/(I_{tr}) \to \pi_0(R^{\tau A})$ 关于 R 是自然的。当 R 为环谱时，G_R 是乘法映射。

证明。 其存在性已在上文讨论。自然性（分别地，在 R 是环谱的情形下，乘法性）是以下事实的推论：典范映射 $R^{hG} \to R^{\tau G}$ 和商映射 $\pi_0(R^{hG}) \to \pi_0(R^{hG})/(I_{tr})$ 具有自然性（分别地，乘法性）。 □

Coro推论 5.14。 设 A 是有限群，R 是环谱。我们有如下 Tate 值 Frobenius 的分解

分解 Tate 值 Frobenius 的作用：

$$\begin{array}{ccccc} \pi_0 R & \xrightarrow{P_A} & \pi_0(R^{hA}) = R^0(BA) & \longrightarrow & R^0(BA)/(I_{tr}) \\ & \searrow^{\pi_0\phi_A} & \downarrow & \swarrow_{G_R} & \\ & & \pi_0(R^{\tau A}) & & \end{array}$$

接下来，我们证明这一分解与 proper Tate 的松弛结构相容：

命题 5.15。映射：

$$G_R \colon \pi_0(R^{BA})/(I_{tr}) \to \pi_0(R^{\tau A})$$

与函子 $(-)^{\tau A}$ 的松对称幺半结构以下述方式相容：对于谱 R，S，以下图表交换

$$\begin{array}{ccc} \pi_0((R \otimes S)^{BA})/(I_{tr}) & \xrightarrow{G_{R\otimes S}} & \pi_0((R \otimes S)^{\tau A}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \pi_0(R) \otimes \pi_0(S^{BA})/(I_{tr}) & \xrightarrow[\mathrm{can}_R \otimes G_S]{} & \pi_0(R^{\tau A}) \otimes \pi_0(S^{\tau A}) \end{array}$$

其中，左侧映射由典范映射 $R \otimes S^{BA} \to (R \otimes S)^{BA}$ 诱导，而该映射本身由等价 $\Sigma^\infty_+ BA \xrightarrow{\sim} \mathbb{S} \otimes \Sigma^\infty_+ BA$ 诱导。

证明。 典范映射 $R^{BA} \to R^{\tau A}$ 根据 命题 4.2是松对称幺半的，因此映射 $\pi_0(R^{BA}) \to \pi_0(R^{\tau A})$ 也是如此。

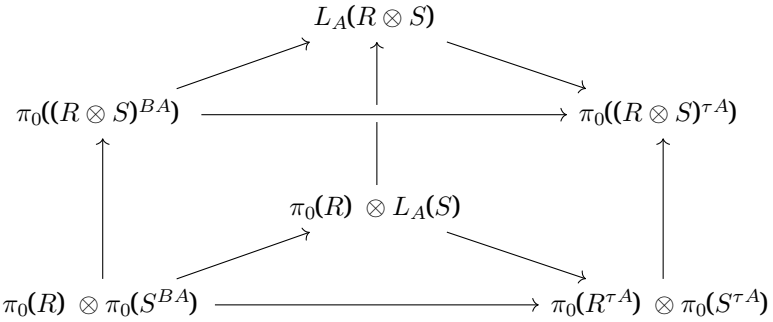
假设 $H \subseteq A$ 是真子群。转移映射 $S^0(BH) \to S^0(BA)$ 可以视为由 Becker-Gottlieb转移 $t: \Sigma^\infty_+ BA \to \Sigma^\infty_+ BH$ 诱导而来。因此，我们有以下交换方块：

$$\begin{array}{ccc} (R\otimes S)^{BH} & \xrightarrow{t^*} & (R\otimes S)^{BA} \\ \uparrow & & \uparrow \\ R\otimes S^{BH} & \xrightarrow{\mathrm{Id}_R\otimes t^*} & R\otimes S^{BA} \end{array}$$

应用 π_0 （及其松对称结构）后，我们看到从 BH 到$\pi_0(R)\otimes\pi_0(S^{BA})$的转移落在 $\pi_0\left((R\otimes S)^{BA}\right)$中的转移理想内。这意味着下图是良定义的（且可交换）：

$$\begin{array}{ccc} \pi_0((R\otimes S)^{BA}) & \longrightarrow & \pi_0\left((R\otimes S)^{BA}\right)/(I_{tr}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \pi_0(R)\otimes\pi_0(S^{BA}) & \longrightarrow & \pi_0(R)\otimes\left(\pi_0(S^{BA})/(I_{tr})\right) \end{array}$$

记 $L_A(R) = \pi_0(R^{BA})/(I_{tr})$，我们观察到下图



前面的方形交换，因为 $(-)^{BA} \Rightarrow (-)^{\tau A}$ 是松对称幺半的，而左侧方形根据前面的图表交换。此外，由于映射 $\pi_0(S^{BA}) \to L_A(S)$ 是满射（且张量积 $\pi_0(R)\otimes(-)$ 保持满射性），两个方形的交换性意味着第三个方形也交换。

□

由于我们关注到 $(R^0(BA)/(I_{tr}))^{\mathrm{free}}$ 的幂运算，我们定义：

定义 5.16。对于带有 A 作用的谱 R，我们定义一个映射

$$\overline{G_R} = \overline{G_R^A}\colon \left(R^0(BA)/(I_{tr})\right)^{\mathrm{free}} \to \pi_0(R^{\tau A})^{\mathrm{free}}$$

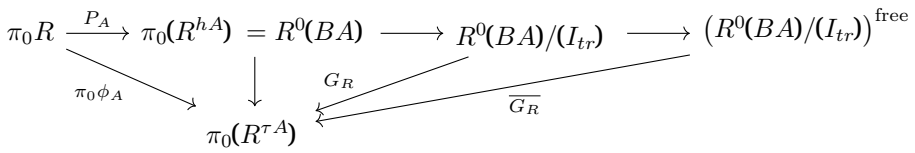
将其定义为对映射 G_R 应用 $(-)^{\mathrm{free}}$ 函子。注意， G_R 关于 R 是自然的，因为 G_R 关于 R 是自然的。

现在我们专门考虑情形 $R = R' \mathbin{\widehat{\otimes}} E$，其中 R' 是 p-进平坦的，并设 A 为阿贝尔的。则 $R^0(BA) = \pi_0(R') \mathbin{\widehat{\otimes}} E^0(BA)$ 是 p-无挠的。在 [HKR00 的推论 5.10], 中证明了$E^0(BA)$ 是无挠的，并且由于 $\pi_0(R')$ 在 $\mathbb{Z}_p$ 上是 p-进平坦的，与它作完备张量积不会引入 p-挠。因此 $\pi_0(R^{\tau A})$ 也是 p-无挠的，因为根据定理 2.18，它是 $R^0(BA)$ 的局部化。

因此，映射 $G_R\colon\ R^0(BA)/(I_{tr}) \to \pi_0(R^{\tau A})$ 实际上可分解为：

$$G_R\colon R^0(BA)/(I_{tr}) \to \left(R^0(BA)/(I_{tr})\right)^{\mathrm{free}} \xrightarrow{\overline{G_R}} \pi_0(R^{\tau A})^{\mathrm{free}} = \pi_0(R^{\tau A})$$

推论 5.17。 设 $R = R' \widehat{\otimes} E$，其中 R' 是一个 p-进平坦环谱。则下图交换：



推论 5.18。 由于 $(-)^{\text{free}}$ 构造是对称幺半的，命题 5.15 表明以下图表对环谱 R，S，

$$\begin{array}{ccc} \left(\pi_0((R\otimes S)^{BA})/(I_{tr})\right)^{\text{free}} & \xrightarrow{\overline{G_{R\otimes S}}} & \pi_0((R\otimes S)^{\tau A})^{\text{free}} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \pi_0(R)^{\text{free}} \otimes \left(\pi_0(S^{BA})/(I_{tr})\right)^{\text{free}} & \xrightarrow[\text{can}_R \otimes \overline{G_S}]{} & \pi_0(R^{\tau A})^{\text{free}} \otimes \pi_0(S^{\tau R})^{\text{free}} \end{array}$$

5.5 阿贝尔 p-群的 Morava E-理论

令 $R = R' \widehat{\otimes} E$，其中 R' 是一个 p-进平坦环谱。固定一个阿贝尔群 A，并令 $X = \mathrm{Spf}(E_0)$。

本节的目标是证明典范映射

$$\overline{G_R}\colon \left(R^0(BA)/(I_{tr})\right)^{\text{free}} \to \pi_0(R^{\tau A})^{\text{free}} = \pi_0(R^{\tau A})$$

在上一小节中构造的，是单射。我们采用代数几何的方法。$\left(R^0(BA)/(I_{tr})\right)^{\text{free}}$ 的几何解释在文献中已广为人知（例如参见[AHS02] 和 [HS23]），我们在此回顾这些解释。接着，我们为$\pi_0(R^{\tau A})$ G_R构建一种几何解释，并用它来分析该映射。

令 $A^* = \mathrm{Hom}(A, \mathbb{C}^\times)$ 为 A 的对偶群。元素 $a \in A$ 可视为 A^* 的一个特征（通过求值），因而它导出 BA^* 上的一个线丛 V_a，也就是说，一个映射 $BA^* \to BS^1$。此映射对应于形式群 $G = \mathrm{Spf}(R^0(BS^1))$ 的一个 $R^0(BA^*)$-点。也就是说，我们有一个映射 $\chi\colon A \to \Gamma(\mathrm{Spf}(R^0(BA^*)))\ G)$。

由于 $V_{a+b} = V_a \otimes V_b$，映射 χ 是群同态。因此，它由一个概形 $\mathrm{Spf}(R^0(BA^*))$ 上的一个 A 的 G 型 $\widehat{\otimes}$-hom同态分类：

$$\widetilde{\chi}\colon \mathrm{Spf}(R^0(BA^*)) \to \mathrm{Hom}(A, G)$$

定理 5.19 ([AHS02，命题 7。3])。 设 $R = R' \widehat{\otimes} E$，其中 R' 是一个 p-进平坦环 R'；并设 A 是一个有限阿贝尔群。映射 $\widetilde{\chi}\colon \mathrm{Spf}(R^0(BA^*)) \to \mathrm{Hom}(A, G)$ 是一个同构。

特别地，若 $A = C_{p^{m_1}} \times \cdots \times C_{p^{m_k}}$，则有：

$$R^0(BA^*) = \frac{\pi_0 R[\![x_1, ..., x_k]\!]}{([p^{m_1}](x_1), ..., [p^{m_k}](x_k))} \tag{5}$$

其中 x_i 是线丛 V_{a_i}的第一陈类，a_i 是 $C_{p^{m_i}}$的某个生成元。接下来我们求出 $\pi_0(R^{\tau A^*})$。

命题5.20。 设 $A = C_{p^{m_1}} \times \cdots \times C_{p^{m_k}}$。令 $S \subseteq \pi_0(R^{BA^*})$ 为由以下形式的表达式生成的乘法集合：

$$[i_1](x_1) +_F [i_2](x_2) +_F \cdots +_F [i_k](x_k)$$

其中 $1 \le i_1 \le p^{m_1} - 1$、$1 \le i_2 \le p^{m_2} - 1$、...、$1 \le i_k \le p^{m_k} - 1$ 和 $+_F$ 是关于形式群律的和。然后 $\pi_0(R^{\tau A^*}) = S^{-1}\pi_0(R^{BA^*})$。

证明。 我们将使用 定理 2.18 来计算 $\pi_0(R^{\tau A^*})$

令 $L_i = V_{a_i}$ 为与 a_i对应的 A^* 表示。那么，张量积 $\{L_1^{\otimes i_1} \otimes \cdots \otimes L_k^{\otimes i_k}\}$ 是 A^*的不可约表示。对于约化正则表示，我们对除以下表示之外的所有这些表示求和：

$$1 = L_1^{\otimes 0} \otimes \cdots \otimes L_k^{\otimes 0}$$

于是我们有：

$$\begin{aligned} e(\widetilde{\rho_{A^*}}) &= e\left(\bigoplus_{i_1,\ldots,i_k \neq 0,\ldots,0} L_1^{\otimes i_1} \otimes \cdots \otimes L_k^{\otimes i_k}\right) \\ &= \prod_{i_1,\ldots,i_k \neq 0,\ldots,0} e\left(L_1^{\otimes i_1} \otimes \cdots \otimes L_k^{\otimes i_k}\right) \\ &= \prod_{i_1,\ldots,i_k \neq 0,\ldots,0} \left(e\left(L_1^{\otimes i_1}\right) +_F \cdots +_F e\left(L_k^{\otimes i_k}\right)\right) \\ &= \prod_{i_1,\ldots,i_k \neq 0,\ldots,0} \left([i_1]\left(e(L_1)\right) +_F \cdots +_F [i_k]\left(e(L_k)\right)\right) \\ &= \prod_{i_1,\ldots,i_k \neq 0,\ldots,0} \left([i_1]\left(x_1\right) +_F \cdots +_F [i_k]\left(x_k\right)\right) \end{aligned}$$

将这个乘积求逆等价于分别将每个因子求逆。 □

现在我们专门讨论 Morava E-理论的情形。令 $\mathbb{G}$:=形式谱$(E^0(\mathbb{CP}^\infty))$ 为万有形变，它是定义在 X =形式谱(E_0) 上的一个形式群概形。令 $A = C_{p^{m_1}} \times \cdots \times C_{p^{m_k}}$。取一个整数 M，使得 $M > m_1$，……，m_k。我们可以定义一个对同态 $A \to \mathbb{G}$ 进行分类的（形式）子概形 $\mathbb{G}[A] \subseteq \mathbb{G}$。由于 A 中的所有元素的阶都整除 p^M，每个这样的同态都可经由 $\mathbb{G}[C_{p^M}]$分解。我们知道 $\mathbb{G}[C_{p^M}]$的函数环为：

$$\mathcal{O}_{\mathbb{G}[C_{p^M}]} = \frac{E_0[\![x]\!]}{([p^M](x))}$$

由于该群的高度为 n，在 $[p^M](x)$ 中，第一个可逆系数是 $x^{p^{Mn}}$ 的系数，而此前的所有系数都属于极大理想。因此， $E_0[\![x]\!]/([p^M](x))$ 实际上是有限自由的。这是魏尔斯特拉斯预备引理的推论（[Bou72，第 VII 章，§3，命题 6]）。具体而言，我们可以写成 $[p^M](x) = u_M(x)P_M(x)$，其中 $u_M(x)$ 是一个可逆幂级数； $P_M(x)$ 是一个次数为 p^{Mn} 的首一多项式，除 $x^{p^{Mn}}$ 的系数外，其余系数都属于 E_0 的极大理想；并且 u_M、 P_M 是唯一的。

像 P_M 这样，除首项系数外所有系数都属于极大理想的首一多项式，称为 *distinguished*。

因此，我们有：

$$\frac{E_0[\![x]\!]}{([p^M](x))} = \frac{E_0[\![x]\!]}{(P_M(x))} = \frac{E_0[x]}{(P_M(x))}$$

而这个环作为一个 E_0-模由 1 自由生成， x，……， $x^{p^{Mn}-1}$。这由 [Bou72，第 VII 章，§3，命题 5]。

特别地，我们可以扩展其点函子，使其也允许非幂零元素，

定义 5.21. 令 X =形式谱(E_0)，并令 $\mathbb{G}$ 为与 Morava$E$-理论相关联的 X 上的形式群。我们将 $\mathbb{G}$ 中的 p^M-挠定为以下 X-概形：

$$\mathbb{G}[p^M] = \mathrm{Spec}_X\left(\frac{E_0[\![x]\!]}{([p^M](x))}\right) = \mathrm{Spec}_X\left(\frac{E_0[x]}{(P_M(x))}\right)$$

根据前面的讨论， $\mathbb{G}[p^M]$ 在 X上是有限的。特别地，形式群律在 $E_0[x]/(P_M(x))$中变为一个多项式，因此 $\mathbb{G}[p^M]$ 继承了一个在 X上的有限群概形结构。

注 5.22。 注意，由于我们扩展了点函子，因此不存在态射 $\mathbb{G}[p^M] \to \mathbb{G}$。也就是说，商映射 $E_0[\![x]\!] \to E_0[\![x]\!]/(P_M(x))$并不诱导映射 $\mathbb{G}[p^M] \to \mathbb{G}$，因为$\mathbb{G}[p^M]$ 的点允许 x具有非幂零像。我们可以将 $\mathbb{G}[p^M]_{\mathrm{rest}}$ 定义为由 $[p^M](x)$截出的 $\mathbb{G}$ 的闭子概形。于是有一个闭嵌入 $\mathbb{G}[p^M]_{\mathrm{rest}} \hookrightarrow \mathbb{G}$，以及一个“忘掉”幂零性的态射 $\mathbb{G}[p^M]_{\mathrm{rest}} \to \mathbb{G}[p^M]$。

现在定义一个子概形 $\mathbb{G}[A] \subseteq \mathbb{G}[p^M]^k$，它将同态 $A \to \Gamma(Y,\ \mathbb{G}[p^M])$ 分类，其中 Y 是一个 X-概形。这是对我们先前定义 $\mathbb{G}[A]$ 的方式的推广，允许出现非幂零元。

具体而言，对于 $A = C_{p^{m_1}} \times \cdots \times C_{p^{m_k}}$，

$$\mathbb{G}[A] = \mathrm{Spec}_X \left(\frac{E_0[\![x_1, \ldots, x_k]\!]}{([p^{m_1}](x_1), \ldots, [p^{m_k}](x_k))} \right)$$

这里我们再次利用上方的环是有限且平坦的这一点，因为对于 $x_i{}^{p^{m_i n}}$，$[p^{m_i}](x_i)$ 有一个可逆系数。此外，我们有一个闭嵌入 $\mathbb{G}[A] \hookrightarrow \mathbb{G}[p^M]^k$（其中 k 是 A 的秩），它将限制映射到生成元。此映射不是典范的，且取决于生成元的选取。

我们也记 $\mathbb{A}^1 := \mathbb{A}^1_X = \mathbf{Spec} x(E_0[x])$。存在闭嵌入 $\mathbb{G}[p^M] \hookrightarrow \mathbb{A}^1$，在环上由商映射 $E_0[x] \to E_0[x]/(P_M(x))$ 给出。注意，$\mathbb{A}^1$ 不继承群概形结构，因为 $\mathbb{G}$ 的形式群律不一定由多项式给出。

断言。 闭嵌入 $\mathbb{G}[p^M] \to \mathbb{G}[p]$ 在环上对应的映射为 $E_0[x]/(P_1(x)) \to E_0[x]/(P_M(x))$，将 $x \mapsto x$ 送至。

证明。 这可由下列交换图显然得出：

$$\begin{array}{ccc} E_0[\![x]\!]/([p](x)) & \xrightarrow{x \mapsto x} & E_0[\![x]\!]/([p^M](x)) \\ {\scriptstyle x \mapsto x}\downarrow{\scriptstyle \simeq} & & {\scriptstyle \simeq}\downarrow{\scriptstyle x \mapsto x} \\ E_0[x]/(P_1(x)) & \longrightarrow & E_0[x]/(P_M(x)) \end{array}$$

□

我们将 $P(x)$ 记为：$= P_1(x)$，将 $u(x)$ 记为：$= u_1(x)$。也就是说，$[p](x) = u(x)P(x)$，其中 $u(x)$ 是可逆幂级数，而 $P(x)$ 是次数为 p^n 的特异多项式。

我们用记号 $O(x^r)$ 表示一个多项式或幂级数，它整除 x^r，也就是说，它具有 $a_r x^r + a_{r+1}x^{r+1} + \cdots$ 的形式。

断言。 多项式 $P_M(x)$ 满足 $P_M(x) = u \cdot p^M x + O(x^2)$，其中 $u \in (E_0)^\times$

证明。 我们知道 $[p^M](x) = p^M x + O(x^2)$。$u(x)$ 可逆，因此 $u_M(x) = u_0 + u_1 x + O(x^2)$，且 $u_0 \in (E_0)^\times$。设 $P_M(x) = a_0 + a_1 x + O(x^2)$。那么：

$$[p^M](x) = p^M x + O(x^2) = u_M(x)P_M(x) = u_0 a_0 + (u_1 a_0 + u_0 a_1)x + O(x^2) \in E_0[\![x]\!]$$

因此 $u_0 a_0 = 0$，这意味着 $a_0 = 0$。所以 $p^M = u_0 a_1$，即 $a_1 = (u_0)^{-1} p^M$。 □

我们引入一个有用的记号：

定义 5.23。 设 Y是一个 X-概形，且 $p \in \Gamma(Y,\ \mathbb{G}[p^M])$ 是 $\mathbb{G}[p^M]$ 的一个 Y-点。我们将 p 在闭嵌入 $\mathbb{G}[p^M] \to \mathbb{A}^1$ 下的像记为 $x(p) \in \mathbb{A}^1(Y) \simeq \mathcal{O}_Y$。

现在我们引入 $\mathbb{G}[A]$ 的两个子概形，它们分别对映射 $A \to \Gamma(Y,\ \mathbb{G}[p^M])$ 进行分类；这些映射的行为在某种程度上类似于单射性。

定义 5.24。 设 $A = C_{p^{m_1}} \times \cdots \times C_{p^{m_k}}$是一个阶为 $p^{m_1} \cdots p^{m_k} = p^m$ 的阿贝尔 p-群。令 $\mathbb{G}[A] \subseteq \mathbb{G}[p^M]^k$ 如前定义。具体而言，

$$\mathbb{G}[A] = \mathrm{Spec}_X \left(\frac{E_0[\![x_1, \ldots, x_k]\!]}{([p^{m_1}](x_1), \ldots, [p^{m_k}](x_k))} \right)$$

我们定义 $\mathbb{G}[A]$ 的以下子概形：

- 我们将 Mon$(A,\mathbb{G})$ 定义为通过对以下形式的表达式取逆而得到的开子概形

$$[i_1](x_1) +_F \cdots +_F [i_k](x_k)$$

其中 $1 \le i_1 \le p^{m_1}-1, 1 \le i_2 \le p^{m_2}-1, \ldots, 1 \le i_k \le p^{m_k}-1$。回顾一下，$\mathbb{G}[p^M]$ 是一个有限群概形，而 $[i_j]$ 表示 $\mathbb{G}[p^M]$中的第 i_j级数。

- 定义 Level$(A,\mathbb{G})$，使其点函子将概形 Y 映射到 $\mathbb{G}$ 上、Y上的 A-级结构。Y上的一个 Level A-结构是一个映射 ϕ: $A \to \Gamma(Y,\mathbb{G}[p^M])$，满足：

$$[\phi A[p]] := \sum_{a \in A[p]} [x(\phi(a))] \le \mathbb{G}[p] \times_X Y \tag{6}$$

其中 $A[p]$ 是 A中的 p-挠子群；$[x(\phi(a))]$ 是由 $\phi(a)$ 在 $\mathbb{A}^1$中的像所定义的除子，与定义 5.23的记法相容；并且 $\mathbb{G}[p]$ 是 p的挠子群 $\mathbb{G}$，视为 $\mathbb{A}^1$的除子。也就是说，我们要求此除子不等式在 $\mathbb{A}^1$中成立。

注意，$\mathbb{G}[p] \subseteq \mathbb{A}^1$ 正是由多项式 $P_1(x) = P(x)$ 定义的除子，因为$\mathbb{G}[p] =$Spec$x(E_0[x]/(P(x)))$。

注记 5.25。在 [Str97], Level$(A,\ \mathbb{G})$ 的定义略有不同。在那里，映射 ϕ: $A \to \Gamma(Y,\ \mathbb{G})$ 是一个 Level A-层结构，若其满足相同的除子不等式（6），但该不等式被解释为 $\mathbb{G}$ 上的除子不等式。我们将用记号 Level$(A,\ \mathbb{G})_{\text{rest}}$ 来指称此定义。

由于 $\mathbb{A}^1$ 可视为 $\mathbb{G}$ 的点函子在非幂零元素上的延拓（忽略群结构），因此我们的定义可视为 Strickland 的定义在这一非幂零情形下的自然延拓。

本质上，成为层结构的条件包含两个部分：首先，要求它是一个群同态，这可在 $\mathbb{G}[p^M]$上检测；其次，除子不等式可在 $\mathbb{A}^1$中验证。

我们再次强调，这些概形是 $\mathbb{G}[A]$ 的子概形，而不是 $\mathbb{G}$ 的子概形。这些子概形具有许多有用的性质。

引理 5.26 ([Str97，命题 7.2。])。对于一个阿贝尔 p-群 A以及一个形式群 $\mathbb{G}$，Level$(A,\mathbb{G}) \subseteq \mathbb{G}[A]$ 是一个闭子概形。

引理 5.27。令 Level$(A,\mathbb{G})_{\text{rest}}, \mathbb{G}[A]_{\text{rest}}$ 表示 Level$(A,\mathbb{G})$ $\mathbb{G}[A]$，其点函子限制在幂零元上。则 $\mathcal{O}_{\mathbb{G}[A]_{\text{rest}}} = \mathcal{O}_{\mathbb{G}[A]}$ 且 $\mathcal{O}_{\text{Level}(A,\mathbb{G})_{\text{rest}}} = \mathcal{O}_{\text{Level}(A,\mathbb{G})}$。

证明。等式 $\mathcal{O}_{\mathbb{G}[A]_{\text{rest}}} = \mathcal{O}_{\mathbb{G}[A]}$ 根据定义成立。

我们来解释为什么 $\mathcal{O}_{\text{Level}(A,\mathbb{G})_{\text{rest}}} = \mathcal{O}_{\text{Level}(A,\mathbb{G})}$ 成立。令 Div$(\mathbb{A}^1)$ 为分类 $\mathbb{A}^1$ 的除子的概形。那么存在一个闭子概形 $E \hookrightarrow$ Div$(\mathbb{A}^1)$，它分类满足 $D \le \mathbb{G}[p] \times_X Y$ 的除子 $D \in$Div$(\mathbb{A}^1)(Y)$（除子不等式是一个闭条件）。

存在一个态射 $\mathbb{G}[A] \to$Div$(\mathbb{A}^1)$，使得同态 ϕ: $A \to \Gamma(Y,\ \mathbb{G}[p^M])$ 被映射到 $[\phi A[p]]$。于是，根据定义：

$$\text{Level}(A,\mathbb{G}) = \mathbb{G}[A] \times_{\text{Div}(\mathbb{A}^1)} E$$

对于限制函子，同样有：

$$\text{Level}(A,\mathbb{G})_{\text{rest}} = \mathbb{G}[A]_{\text{rest}} \times_{\text{Div}(\mathbb{A}^1)} E$$

因此：

$$\mathcal{O}_{\text{Level}(A,\mathbb{G})} = \mathcal{O}_{\mathbb{G}[A]} \otimes_{\mathcal{O}_{\text{Div}(\mathbb{A}^1)}} \mathcal{O}_E = \mathcal{O}_{\mathbb{G}[A]_{\text{rest}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\text{Div}(\mathbb{A}^1)}} \mathcal{O}_E = \mathcal{O}_{\text{Level}(A,\mathbb{G})_{\text{rest}}}$$

□

引理 5.28。空间范畴$(A,\ \mathbb{G})$ 对以下映射进行分类：ϕ: $A \to \Gamma(Y,\ \mathbb{G}[p^M])$，它们处处都是单射。也就是说，$x(\phi(a)) \in \mathcal{O}_Y$ 对所有 $a \ne 0$ 都是可逆的。关于记号 定义 5.23 中给出的 $x(\phi(a))$。

证明。这由空间范畴$(A,\ \mathbb{G})$的定义直接得到；按照构造，它是通过将所有形如$[i_1](x_1)+_F[i_2](x_2)+_F\cdots+_F[i_k](x_k)$的表达式取逆而形成的。□

上面的讨论可由下图概括：

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Mon}(A,\mathbb{G}) & & & & & & \\ & \searrow & & & & & \\ \mathrm{Level}(A,\mathbb{G}) & \longrightarrow & \mathbb{G}[A] & \longrightarrow & \mathbb{G}[p^M]^k & \longrightarrow & \mathbb{A}^k \end{array}$$

现在我们将该图表与拓扑联系起来：

命题 5.29。令A为一个阿贝尔p-群，令$\mathbb{G}$为与 Morava E-理论相关联的形式群。则$\mathcal{O}_{\mathrm{Level}(A,\mathbb{G})}=\left(E^0(BA^*)/(I_{tr})\right)^{\mathrm{free}}$，其中商映射$E^0(BA^*)\to\left(E^0(BA^*)/(I_{tr})\right)^{\mathrm{free}}$对应于闭嵌入$\mathrm{Level}(A,\ \mathbb{G})\to\mathbb{G}[A]$。

证明。我们再次采用记号$\mathrm{Level}(A,\ \mathbb{G})_{\mathrm{rest}}$，并用$\mathbb{G}[A]_{\mathrm{rest}}$表示限制在幂零元上的点函子。

在 [HS23中，命题 5。2], 表明，商映射$q:\ E^0(BA^*)\to\left(E^0(BA^*)/(I_{tr})\right)^{\mathrm{free}}$对应于形式概形的闭嵌入$\mathrm{Level}(A,\ \mathbb{G})_{\mathrm{rest}}\to\mathbb{G}[A]_{\mathrm{rest}}$。

注意以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Level}(A,\mathbb{G})_{\mathrm{rest}} & \hookrightarrow & \mathbb{G}[A]_{\mathrm{rest}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Level}(A,\mathbb{G}) & \hookrightarrow & \mathbb{G}[A] \end{array}$$

应用函子$\mathcal{O}_{(-)}$，并利用引理 5.27，我们得到：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathrm{Level}(A,\mathbb{G})_{\mathrm{rest}}} & \xleftarrow{q} & \mathcal{O}_{\mathbb{G}[A]_{\mathrm{rest}}} \\ \| & & \| \\ \mathcal{O}_{\mathrm{Level}(A,\mathbb{G})} & \longleftarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{G}[A]} \end{array}$$

因此，包含$\mathrm{Level}(A,\mathbb{G})\to\mathbb{G}[A]$也对应于商映射$q:\ E^0(BA^*)\to(E^0(BA^*)/(I_{tr}))^{\mathrm{free}}$。特别地，$\mathcal{O}_{\mathrm{Level}(A,\mathbb{G})}=\left(E^0(BA^*)/(I_{tr})\right)^{\mathrm{free}}$。

□

对于$\mathrm{Mon}(A,\mathbb{G})$，我们也有类似的结果。

命题 5.30。设A是一个阿贝尔p-群，$\mathbb{G}$是与 Morava$E$-理论相关联的形式群。那么$\mathcal{O}_{\mathrm{Mon}(A,\mathbb{G})}=\pi_0(E^{\tau A^*})$，且开嵌入$\mathrm{Mon}(A,\mathbb{G})\to\mathbb{G}[A]$对应于环映射$E^0(BA^*)\to\pi_0(E^{\tau A^*})$。

证明。根据定义，$\mathcal{O}_{\mathrm{Mon}(A,\mathbb{G})}$由$\mathcal{O}_{\mathbb{G}[A]}$通过将所有形如以下形式的表达式求逆得到

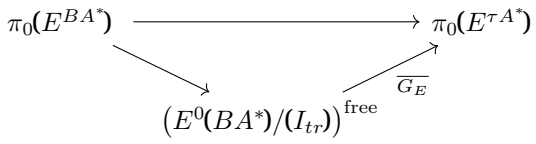
$$[i_1]\,(x_1)+_F\cdots+_F[i_k]\,(x_k)$$

在命题 5.20 中，我们证明了这是局部化$E^0(BA^*)\to\pi_0(E^{\tau A^*})$。□

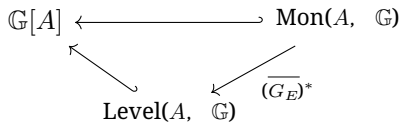
命题 5.31. 设A是一个阿贝尔p-群，$\mathbb{G}$是与 Morava$E$-理论相关联的形式群。那么，开嵌入$\mathrm{Mon}(A,\ \mathbb{G})\to\mathbb{G}[A]$可分解为$\mathrm{Mon}(A,\ \mathbb{G})\to\mathrm{Level}(A,\ \mathbb{G})\to\mathbb{G}[A]$。此外，映射$\mathrm{Mon}(A,\ \mathbb{G})\to\mathrm{Level}(A,\ \mathbb{G})$是由环上的同态$G_E:\ \left(E^0(BA^*)/(I_{tr})\right)^{\mathrm{free}}\to\pi_0(E^{\tau A^*})$诱导的。

证明。 根据 命题 5.30，我们知道映射 $E^0(BA^*) \to \pi_0(E^{\tau A^*})$ 对应于开嵌入 $\mathrm{Mon}(A, \mathbb{G}) \to \mathbb{G}[p^M]$。根据 命题 5.29，映射 $E^0(BA^*) \to \left(E^0(BA^*)/(I_{tr})\right)^{\mathrm{free}}$对应于闭嵌入 $\mathrm{Level}(A, \mathbb{G}) \to \mathbb{G}[A]$。

回顾一下，根据 G_E 的定义，我们有如下交换图：



（此图出现在 推论 5.17之前）。取谱，我们得到：



这意味着存在一个开嵌入 $\mathrm{Mon}(A, \mathbb{G}) \to \mathrm{Level}(A, \mathbb{G})$，它对应于环的映射 G_E。

□

W我们回顾一下， $X = \mathrm{Spf}(E_0)$。如果 Y 是一个 X-概形，我们将 $Y_{\mathbb{Q}}$ 的有理化 of$Y$ – t
将 Y 基变换到 $X_{\mathbb{Q}} := X \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}) = \mathrm{Spf}(E_0 \otimes \mathbb{Q})$。

命题 5.32. 设 A 是一个阿贝尔 p-群， $\mathbb{G}$ 是与 Morava$E$-理论相关联的形式群。包含 $\mathrm{Mon}(A, \mathbb{G}) \to \mathrm{Level}(A, \mathbb{G})$ 在有理化后成为同构。

证明. 设 $Y = \mathrm{Spec}x(S)$ 是一个有理试验概形，其中 $X = \mathrm{Spf}(E_0)$。也就是说， S 是一个 $(E_0 \otimes \mathbb{Q})$-代数。我们要证明

$$\mathrm{Mon}(A, \mathbb{G})(Y) \to \mathrm{Level}(A, \mathbb{G})(Y)$$

是双射。它显然是单射的（两边都分类映射 $A \to \Gamma(Y, \mathbb{G}[p^M])$ ，现在我们证明其满射性。设 ϕ: $A \to \Gamma(Y, \mathbb{G}[p^M])$ 是一个层结构。我们断言，要验证对于所有 $a \in A$， $x(\phi(a)) \in \mathcal{O}_Y = S$ 可逆，只需验证当$a \in A[p]$时 $x(\phi(a))$ 可逆，其中 $x(\phi(a))$ 在定义 5.23 中定义。

这是因为对于任意的 $a \in A$，存在某个整数 k，使得 $0 \neq p^k a \in A[p]$，并且

$$\begin{aligned} x(\phi(p^k a)) &= [p^k](x(\phi(a))) = u_k(x(\phi(a))P_k(x(\phi(a))) \\ &= u_k(x(\phi(a)) \cdot \left(u \cdot p^k x(\phi(a)) + O(x(\phi(a))^2)\right) \\ &= u_k(x(\phi(a)) \cdot u \cdot p^k \cdot x(\phi(a)) \cdot (1 + O(x(\phi(a)))) \end{aligned}$$

其中 $u \in (E_0)^\times$。这里， $[p^k]$ 是 $\mathbb{G}[p^M]$中的 p^k-级数。注意， $u_k(x)$定义为幂级数，而不是多项式，但这里我们指的是 $u_k(x)$在 $E_0[\![x]\!]/([p^M](x)) \simeq E_0[x]/(P_M(x))$中的像。

如果我们证明 $x(\phi(p^k a))$在 S中可逆，那么 $x(\phi(a))$也可逆，因为前者是后者的倍数。

因此，令 $a \in A[p]$。由于 $[\phi A[p]] \leq \mathbb{G}[p]$，我们有：

$$x(x - x(\phi(a))) \mid f_{[\phi A[p]]} \mid f_{\mathbb{G}[p]}(x) = P(x) = u \cdot px + O(x^2) \in E_0[x]$$

其中 $u \in (E_0)^\times$。由于 x 是非零因子，这意味着 $x - x(\phi(a)) \mid up + O(x)$。因此，首项 $-x(\phi(a))$ 必须整除首项 up。由于 up 可逆， $x(\phi(a))$ 也可逆。

□

定理 5.33. 设 $R = R' \widehat{\otimes} E$，其中 R' 是一个 p-进平坦环谱。设 A 是一个阿贝尔p-群，其阶为 p^m，秩至多为 n（即它是至多 n 个循环群的直积）。

因此，典范同态：

$$\overline{G_R} \colon \left(R^0(BA)/(I_{tr})\right)^{\text{free}} \to \pi_0(R^{\tau A})$$

是单射。

证明。由于我们知道 R 具有 $R' \widehat{\otimes} E$的形式，其中 R' 是 p-进平坦的，因此有：

$$\left(R^0(BA)/(I_{tr})\right)^{\text{free}} = (\pi_0(R') \widehat{\otimes} E_0) \otimes_{E_0} \left(E^0(BA)/(I_{tr})\right)^{\text{free}}$$

类似地，通过直接计算（使用 定理 2.18）：

$$\pi_0(R^{\tau A}) = (\pi_0(R') \widehat{\otimes} E_0) \otimes_{E_0} \pi_0(E^{\tau A})$$

（这里重要的是先完成，再与 $\pi_0(E^{\tau A})$ 张量积！）由于 G_R 是对欧拉类的局部化，直接计算表明，因子 $(\pi_0(R') \widehat{\otimes} E_0)$ 在映射G_R下保持不变，即有：

$$\overline{G_R} = (\pi_0(R') \widehat{\otimes} E_0) \otimes_{E_0} \overline{G_E}$$

由于 $\pi_0(R') \widehat{\otimes} E_0$ 在（经典代数意义下）作为 E_0 的模是平坦的，且 $\pi_0(R')$ 是 p-进平坦的，因此只需检验映射的单射性

$$\overline{G_E} \colon \left(E^0(BA)/(I_{tr})\right)^{\text{free}} \to \pi_0(E^{\tau A})$$

由于这两个环都是 p-无挠的，只需证明有理化后这一结论成立。但有理化后，这个映射对应于 $A^*, G)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Level}(A^*, G)_{\mathbb{Q}}$ 的命题 5.32中的同构，因此环的映射是单射。

□

最后，我们回到定理 5.8的证明：

定理 *5.8*的证明。根据 [Str98，定理 9。2], 我们知道，$\mathrm{spec}(E^0(B\Sigma_{p^m})/(I_{tr})) = \mathrm{Sub}_m(\mathbb{G})$，这是分类 $\mathbb{G}$ 阶子群的概形 p^m。

在 [Str97], Strickland 为阿贝尔 p-群引入了一个闭子概形 A：

$$\mathrm{Type}(A, \mathbb{G}) := \mathrm{Level}(A, \mathbb{G})/\mathrm{Aut}(A)$$

根据 [Str97，定理 7。4],给定一个层结构 ϕ：$A \to \Gamma(Y, \mathbb{G}[p^M])$，那么 $[\phi A]$ 是$\Gamma(Y, \mathbb{G}[p^M])$的一个子群。这诱导出映射 $\mathrm{Level}(A, \mathbb{G}) \to \mathrm{Sub}_m(\mathbb{G})$（子群 $[\phi A]$ 是 ϕ的像）。这个态射对应于限制：

$$E^0(B\Sigma_{p^m})/(I_{tr}) \to \left(E^0(BA^*)/(I_{tr})\right)^{\text{free}}$$

这已在 [HS23，命题 8 中得到证明。3] 在更一般的情形下。

显然，对于 $f \in \mathrm{Aut}(A)$，我们有 $[\phi A] = [(\phi \circ f)A]$，因此该映射下降为一个显然的映射 $\mathrm{Type}(A, \mathbb{G}) \to \mathrm{Sub}_m(\mathbb{G})$。

令 A 遍历 Σ_{p^m} 中阶为 p^m 且秩至多为 n的阿贝尔 p-子群，我们得到一个态射

$$\prod_A \mathrm{Type}(A, \mathbb{G}) \to \mathrm{Sub}_m(\mathbb{G})$$

其中，在 [Str97，定理 12 中4], 证明了其诱导出环上的单射。商映射 $\mathrm{Level}(A, \mathbb{G}) \to \mathrm{Type}(A, \mathbb{G})$ 总是诱导出环上的单射：它是不动元素环到环境环的包含。因此，复合

$$\prod_A \mathrm{Level}(A, \mathbb{G}) \to \prod_A \mathrm{Type}(A, \mathbb{G}) \to \mathrm{Sub}_m(\mathbb{G})$$

在环上是单射，这正是我们需要的单射。 □

5.6 完成证明

固定一个阿贝尔 p-群 A，对于环谱 R，我们用记号 ϕ_R 表示 Frobenius 映射 $R \to R^{\tau A}$。

设 R 是 p-进平坦的，且 A 是一个阿贝尔 p-群。本章的目标是完成证明，即证明图表 (2) 可交换，最终只需证明 推论 5.10 的前提对$R \mathbin{\widehat{\otimes}} E$成立。也就是说，我们要证明：

命题 5.34。 对于 R 一个 p-进平坦环谱，以下两个映射

$$\overline{P_A},\ \phi^m \mathbin{\widehat{\otimes}} t[A] \colon \pi_0(R \mathbin{\widehat{\otimes}} E) \to \left((R \mathbin{\widehat{\otimes}} E)^0(BA)/(I_{tr})\right)^{\mathrm{free}}$$

相同。

证明。 在 定理 5.33 中，我们已经看到映射

$$\overline{G_{R \mathbin{\widehat{\otimes}} E}} \colon \left((R \mathbin{\widehat{\otimes}} E)^0(BA)/(I_{tr})\right)^{\mathrm{free}} \to \pi_0((R \mathbin{\widehat{\otimes}} E)^{\tau A})$$

是单射。因此，要证明 命题 5.34，我们可以证明两个映射与映射 $G_{R \mathbin{\widehat{\otimes}} E}$复合后相同。此外，典范映射 $\pi_0(R) \otimes \pi_0(E) \to \pi_0(R \mathbin{\widehat{\otimes}} E)$ 是 E_0在极大理想处的完备化，这由推论 2.14得出。特别地，由于我们的映射都是完备局部环之间的映射，当且仅当它们在 $\pi_0(R) \otimes \pi_0(E)$ 上相同时，它们才相同。也就是说，只需证明下图可交换：

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_0(R \mathbin{\widehat{\otimes}} E) & \xrightarrow{\overline{P_A}} & \left((R \mathbin{\widehat{\otimes}} E)^0(BA)/(I_{tr})\right)^{\mathrm{free}} \\ \pi_0(R) \otimes \pi_0(E) & \nearrow & & & & \searrow & \\ & & & & & & \pi_0((R \mathbin{\widehat{\otimes}} E)^{\tau A}) \\ & \searrow & & & & \nearrow & \\ & & \pi_0(R \mathbin{\widehat{\otimes}} E) & \xrightarrow{\phi^m \mathbin{\widehat{\otimes}} t[A]} & \left((R \mathbin{\widehat{\otimes}} E)^0(BA)/(I_{tr})\right)^{\mathrm{free}} & & \end{array} \tag{7}$$

复合：

$$\pi_0(R \mathbin{\widehat{\otimes}} E) \xrightarrow{\overline{P_A}} \left((R \mathbin{\widehat{\otimes}} E)^0(BA)/(I_{tr})\right)^{\mathrm{free}} \xrightarrow{\overline{G_{R \mathbin{\widehat{\otimes}} E}}} \pi_0((R \mathbin{\widehat{\otimes}} E)^{\tau A})$$

是 Frobenius 映射 $\phi_{R \mathbin{\widehat{\otimes}} E}$，根据推论 5.17。注意以下图表是可交换的，因为 Tate 值 Frobenius 是自然的且松对称幺半：

$$\begin{array}{ccc} \pi_0(R \mathbin{\widehat{\otimes}} E) & \xrightarrow{\phi_{R \mathbin{\widehat{\otimes}} E}} & \pi_0((R \mathbin{\widehat{\otimes}} E)^{\tau A}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \pi_0(R \otimes E) & \xrightarrow{\phi_{R \otimes E}} & \pi_0((R \otimes E)^{\tau A}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \pi_0(R) \otimes \pi_0(E) & \xrightarrow{\phi_R \otimes \phi_E} & \pi_0(R^{\tau A}) \otimes \pi_0(E^{\tau A}) \end{array}$$

因此，在图表（7）中，沿上方路径的复合是映射

$$\pi_0(R) \otimes \pi_0(E) \xrightarrow{\phi_R \otimes \phi_E} \pi_0(R^{\tau A}) \otimes \pi_0(E^{\tau A}) \to \pi_0((R \mathbin{\widehat{\otimes}} E)^{\tau A})$$

现在来看下方路径。考虑以下交换图：

$$\begin{array}{ccccc} \pi_0(R \mathbin{\widehat{\otimes}} E) & \xrightarrow{\phi^m \mathbin{\widehat{\otimes}} t[A]} & (\pi_0((R \mathbin{\widehat{\otimes}} E)^{hA})/(I_{tr}))^{\mathrm{free}} & \xrightarrow{\overline{G_{R \mathbin{\widehat{\otimes}} E}}} & \pi_0((R \mathbin{\widehat{\otimes}} E)^{\tau A}) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & (\pi_0((R \otimes E)^{hA})/(I_{tr}))^{\mathrm{free}} & \xrightarrow{\overline{G_{R \otimes E}}} & \pi_0((R \otimes E)^{\tau A})^{\mathrm{free}} \longleftarrow \pi_0((R \otimes E)^{\tau A}) \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ \pi_0(R) \otimes \pi_0(E) & \xrightarrow[\phi^m \otimes t[A]]{} & \pi_0(R) \otimes \left(\pi_0(E^{hA})/(I_{tr})\right)^{\mathrm{free}} & \xrightarrow[\mathrm{can}_R \otimes \overline{G_E}]{} & \pi_0(R^{\tau A}) \otimes \pi_0(E^{\tau A}) \end{array}$$

左侧矩形可交换，因为两个竖直映射都是关于 E_0 的极大理想的完备化，依据 推论 2.14 和等式（3）。

中间上方正方形因映射 G_R 的自然性而交换，正如定义 5.16中所述。中间下方正方形根据推论 $\overline{5.18}$交换。

最后，右侧的三角形都因 $(-)^{\text{free}}$ 的函子性而交换；此外， $\pi_0(R^{\tau A})$、 $\pi_0(E^{\tau A})$ 和 $\pi_0((R\widehat{\otimes}E)^{\tau A})$ 都是 p-无挠的。

因此，图表 (7) 中的下方路径为：

$$\pi_0(R)\otimes\pi_0(E)\xrightarrow{(\mathrm{can}_R\ \circ\ \phi^m)\otimes(\overline{G_E}\ \circ\ t[A])}\pi_0(R^{\tau A})\otimes\pi_0(E^{\tau A})\to\pi_0((R\widehat{\otimes}E)^{\tau A}) \tag{8}$$

可以 $\mathrm{can}_R\circ\phi^m=\overline{G_R}\circ t[A]=\phi_E$。因此，（8）中的态射可识别为映射 $\pi_0(R^{\tau A})\otimes\pi_0(E^{\tau A})\to\pi_0((R\widehat{\otimes}E)^{\tau A})$ 与态射 $\phi_R\otimes\phi_E$的复合。这与沿上方路径的复合一致，从而完成证明。

By Corollary 5.17 $\overline{G_R}\circ t[A]=\phi_E$ 此外， by Propos. Mon 4.9 to deduce that

□

参考文献

[AHS02] Matthew Ando、Michael Hopkins 和 Neil Strickland。σ 定向是一个 h-无穷映射。《美国数学杂志》，126，2002年5月。[AMGR23] David Ayala、Aaron Mazel-Gee 和 Nick Rozenblyum。导出 Mackey 函子与c_{p^n}-等变上同调，2023年。[BF15] Tobias Barthel 和 Martin Frankland。Morava E-理论的完备幂运算。《代数与几何拓扑》，15(4)：2065–2131，2015年9月。[Bou72] N. Bourbaki。《交换代数：第1—7章》。《数学原本》第1卷。英文版。施普林格，1972年。[CNY24] Shachar Carmeli、Thomas Nikolaus 和 Allen Yuan。球面群环之间的映射，2024年。[HKR00] Michael Hopkins、Nicholas Kuhn 和 Douglas Ravenel。广义群特征与复定向上同调理论。《美国数学会杂志》，13，2000年7月。[HS99] Mark Hovey 和 Neil P. Strickland。Morava K-理论与局部化。《美国数学会回忆录》，139：0–0，1999年。[HS23] Zhen Huan 和 Nathaniel Stapleton。由阿贝尔群的 Morava E-理论得到的 p-可除群上的层结构。《数学杂志》，303(3)：64，2023年。[Joy85] Andre Joyal。 δ-环与 Witt 向量。《加拿大科学院数学报告》，VII，1985年。[Lur09] Jacob Lurie。《高阶拓扑斯理论》，《数学年刊研究》第170卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2009年。[Lur17] Jacob Lurie。《高阶代数》。可见于 www.math.harvard.edu/~lurie/papers/ HA.pdf，2017年。[Nik16] Thomas Nikolaus。稳定 ∞-运算子与乘法 Yoneda 引理，2016年。[Nis25] Noam Nissan。高度 2 处的 Delta 运算，2025年。[NS18] Thomas Nikolaus 和 Peter Scholze。论拓扑循环同调。《数学学报》，221(2)：203–409，2018年。

[Rez09] Charles Rezk。Morava E-理论中幂运算的同余判据。《同调、同伦与应用》，11，2009年2月。[Str97] Neil P. Strickland。形式群的有限子群。《纯粹与应用代数杂志》，121(2)：161–208，1997年。[Str98] N.P. Strickland。对称群的 Morava E-理论。拓扑，37(4)：757–779，1998年。[Yua23] Allen Yuan。通过高阶 Frobenius 构造空间的整模型。《美国数学会杂志》，36：107–175，2023年。