arXiv:2603.13002v1 [math.CT] 13 Mar 2026

拟阿贝尔范畴中的泛满态射与单态射类

Max Zinchenko

摘要

本文解决了 [5], 中提出的开放问题，并给出了非严格泛满态射与单态射的例子。

引言

论文 [5] 介绍了同调代数中一个具有根本重要性的定理，也称为拟阿贝尔范畴的蛇引理。该定理要求竖直箭头是严格的（另见[10] ，其中讨论了非加性情形）。然而，在 [1] 中，这一要求有所放宽，取而代之的是所谓的泛性；本文将对此概念进行深入讨论。此外，Glotko 和 Kuzminov 在他们的工作中提出了以下公理:

公理 1： 泛单态射在拉回下保持不变。

公理 1*： 泛满态射在推出下保持不变。

值得注意的是，这些公理是否在任意拟阿贝尔范畴中成立，仍是一个悬而未决的问题。尽管 [1] 推广了 [5], ，但它并未给出非整范畴中非严格泛满态射或泛单态射的实例，也没有给出满足这两条公理中任一条的范畴实例。

1 预阿贝尔范畴与拟阿贝尔范畴

本节将回顾后文所需的基本定义。回顾一下，如果一个加性范畴中的每个态射都有核和余核，则称该范畴为预阿贝尔 范畴。预阿贝尔范畴中的每个态射都有一个典范分解:

$$\begin{array}{ccccccc} \operatorname{Ker} f & \xrightarrow{\ker f} & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{\operatorname{coker} f} & \operatorname{Coker} f \\ & & \downarrow{\scriptstyle \operatorname{coim} f} & & \uparrow{\scriptstyle \operatorname{im} f} & & \\ & & \operatorname{Coim} f & \xrightarrow{\overline{f}} & \operatorname{Im} f & & \end{array}$$

态射 f 是严格的，当且仅当 f 是同构。注意， f 是严格单态射（满态射），当且仅当 f 是核（余核）。

本节余下部分中，假设该范畴是预阿贝尔范畴。

设 $\mathcal{A}$ 是一个范畴。若对于 $\mathcal{A}$ 中的任意态射 g 以及下方推出方块中的任意态射 $f \in \mathcal{X}$，态射类 $\mathcal{X}$ 在推出下稳定，

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle g}\downarrow & \mathrm{PO} & \downarrow \\ Z & \xrightarrow[f']{} & P \end{array}$$

$f' \in \mathcal{X}$。对拉回稳定 的定义是对偶的。

如果 $\mathcal{A}$ 中的余核在拉回下稳定，则称 $\mathcal{A}$ 为左拟阿贝尔。对偶地，如果 $\mathcal{A}$中的核在推出下稳定，则称 $\mathcal{A}$ 为右拟阿贝尔。如果 $\mathcal{A}$既是左拟阿贝尔又是右拟阿贝尔，则称其为拟阿贝尔。

如果 $\mathcal{A}$ 中的满态射在拉回下稳定，则称 $\mathcal{A}$ 为左积分。对偶地，如果 $\mathcal{A}$ 中的单态射在推出下稳定，则称 $\mathcal{A}$ 为右积分。如果 $\mathcal{A}$ 既是左积分又是右积分，则称其为积分。

命题 1。**1**[3, 第 173] 拟阿贝尔范畴是左积分的，当且仅当它是右积分的。

2 挠理论

设 $\mathcal{A}$ 为一个预阿贝尔范畴。 $\mathcal{A}$ 中的一个挠对 是由$\mathcal{A}$的两个全子范畴构成的有序对（$\mathcal{T}, \mathcal{F}$），满足以下条件：

1. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{T}, \mathcal{F}) = 0$;

2. 对所有 M in $\mathcal{A}$，都存在一个短正合列

$$0 \longrightarrow A \overset{i_M}{\rightarrowtail} M \overset{p_M}{\twoheadrightarrow} B \longrightarrow 0$$

其中 $A \in \mathcal{T}$, $B \in \mathcal{F}$ 和 i_M, p_M 分别是严格单态射和满态射；

根据 [4, 命题 2.5], ，存在一个函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{T}$，它是恒等函子的幂等根核子函子，使得 $\mathcal{T} = \{M \in \mathcal{A} \mid F(M) \cong M\}$。此外， F是典范包含 $\mathcal{T} \hookrightarrow \mathcal{A}$的右伴随；因此 F 保极限。

由此可知， $\mathcal{T}$中的推出和拉回可以通过环境阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$来计算。事实上，设 $f\colon A \to B$ 和 $g\colon A \to X$ 是 $\mathcal{T}$ 中的态射，并考虑它们在 $\mathcal{A}$ 中的推出：

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle g}\downarrow & \mathrm{PO} & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f'} & Y \end{array}$$

根据拉回的定义， $Y :=$ 余核$(A \xrightarrow{[f,-g]} B \oplus X)$。根据 [4, 命题 2.9], $B \oplus X \in \mathcal{T}$，因此 $Y \in \mathcal{T}$也成立。现在设 $f\colon A \to B$ 和 $g\colon X \to B$ 是 $\mathcal{T}$中的态射，并考虑它们的

在 $\mathcal{A}$中的拉回：

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f'} & X \\ \downarrow & \text{PB} & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

一般而言， D 不一定属于 $\mathcal{T}$，因为挠类不一定在核下闭。然而，由于F保持极限， $F(D)$ 是 $\mathcal{T}$ 中 f 与 g 的拉回。

$$\begin{array}{ccc} F(D) & \xrightarrow{Ff'} & X \\ \downarrow & \text{PB} & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

并且由 [4,命题 2。5],我们有 $Ff' = f' \circ \mu$，其中 $\mu\colon \quad F(D) \rightarrowtail D$。

3 定义 与泛极单态射和单态射的存在性

我们约定 ，除非另有说明，任何范畴都假定为拟阿贝尔范畴 e.

若单态射在推出下稳定，则称其为泛单态射 。对偶地，定义泛满态射 。泛单态射类和泛满态射类分别记为 M_u 和 P_u。

显然， $M \subseteq M_u \subseteq M_c$，其中 M 表示所有单态射构成的类， M_c 表示严格单态射构成的类。泛满态射也有类似的包含链。注意，当且仅当该范畴是积分的，等式 $M = M_u$ 成立。此外，存在拟阿贝尔范畴的例子使得真包含关系 $M \subsetneq M_u = M_c$ 成立；当然，在阿贝尔范畴中，这三个包含关系都是等式。

若态射 f 的规范分解中，态射 f 属于 M_u，则称态射 f 属于类 MO_u 。¯对偶地，定义类 PO_u 。

命题 3.1. 存在一个非整拟阿贝尔范畴，其中存在一个非严格的泛单态射。

证明。 考虑赋范空间范畴 **Norm**；其非整性和拟阿贝尔性见 [7, 命题 3.2.17] 和 [6, 定理 3.2]。其对象是赋范空间，态射是连续线性映射。

设 A 是一个不完备赋范空间， $A \xrightarrow{i} \hat{}A$ 是其完备化态射。态射 i 是一个双态射，而且不是严格的，因为 $i(A)$ 在 $\hat{}A$ 中不是闭的。设 $A \xrightarrow{g} G$ 是 **赋范空间范畴** 中任意一个态射，并考虑以下推出：

$$\begin{array}{ccccc} A & & \xrightarrow{\quad i \quad} & & \hat{A} \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle (0,id)} \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \text{PO} & & G \oplus \hat{A} \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ G & \xrightarrow{(id,\ 0)} & \underset{G \oplus A}{\hat{}} & \xrightarrow{\quad p \quad} & D \end{array}$$

ˆ这里 $D := {}^{G \oplus A}\!/_{ran\begin{bmatrix} -g \\ i \end{bmatrix}}$, p 是典范投影，对于映射 $f\colon X \to Y$, $ran(f) = f(X)$。

记 $j := p \circ (id,\ 0)$。根据定义， $j(m) = p((m,\ 0))$，即 $j(m) = 0$ 当且仅当 $(m,\ 0) \in \cancel{ran}\begin{bmatrix} -g \\ i \end{bmatrix}$。

我们来证明不存在含有 $m \neq 0$ 的此类配对。假设存在一个序列 $\{a_n\}$，使得 $i(a_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ 且 $-g(a_n) \xrightarrow{n\to\infty} m$。由于 $i(a_n) = a_n$ 对所有 n 都成立，且 A 与 $\hat{}_A$ 中的范数相同，因此可得 $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$，进而 $g(a_n) \longrightarrow g(0) = 0$。因此，不存在满足 $m \neq 0$ 属于 $ran\begin{bmatrix} -g \\ i \end{bmatrix}$的配对 $(m,\ 0)$。于是 $p((m,\ 0)) = 0 \Longleftrightarrow m = 0$，由此我们得出 j 是一个单态射。

□.

我们介绍有关可除群的基本定义和基本事实，并展示另一个有趣的泛单态射示例。本节中，我们只考虑阿贝尔群。可除群范畴记作**Div**。

阿贝尔群 $(G, +)$ 称为可除群，如果对每个正整数 n 和每个 $g \in G$，都存在$y \in G$ 使得 $ny = x$。

引理 3.1。[9, 定理 21。3] 每个阿贝尔群 A 都可分解为直和 $A = D \oplus R$其中 D 是可除群，而 R 是约化群，即不含非零可除子群的群。

引理 3.2。 可除群的同态像仍是可除群。

引理 3.3。[9, 定理 21。1] 可除群恰好是阿贝尔群范畴中的内射对象。

引理 3.4。（**可除群结构定理**）[9, 定理 23。1] 对于可除群 D，有如下分解：

$$G \cong \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{p\in P} \mathbb{Z}_{p^\infty}^{\lambda_p}$$

其中

$$\mathbb{Z}_{p^\infty} = \varinjlim {}^{\mathbb{Z}}\!/_{p^n\mathbb{Z}} = {}^{\mathbb{Z}[1/p]}\!/_{\mathbb{Z}}$$

是普吕弗群。

对于阿贝尔群 A，用 $D(A)$ 表示其可除部分。

命题 3.2. 态射 $f\colon \mathbb{Q} \to {}^{\mathbb{Q}}\!/_{\mathbb{Z}}$ 是一个双态射。此外， f 是一个泛单态射，但不是泛满态射。

证明。 态射 f 是一个满态射，因为它是满射。令 $i\colon \mathbb{Z}_{p^\infty} \hookrightarrow {}^{\mathbb{Q}}\!/_{\mathbb{Z}}$ 为典范嵌入，其中

$${}^{\mathbb{Q}}\!/_{\mathbb{Z}} \cong \bigoplus_{p\in P} \mathbb{Z}_{p^\infty}.$$

回忆一下，

$$\mathbb{Z}_{p^\infty} \cong {}^{\mathbb{Z}[1/p]}\!/_{\mathbb{Z}}.$$

考虑 f 沿着 i 在**阿贝尔群范畴**中的拉回:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[1/p] & \xrightarrow{f'} & \mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ \mathbb{Q} & \xrightarrow[f]{} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{array}$$

由于 **Div** 是阿贝尔范畴 **Ab**中的一个挠类，取可除部分与取极限可交换。事实上，该函子

$$D\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Div}, \qquad A \mapsto D(A),$$

是典范包含 **Div** $\hookrightarrow$**Ab**的右伴随。

因此，**Div** 中的拉回为 $D(\mathbb{Z}[1/p])$。由于 $\mathbb{Z}[1/p]$ 不可除，我们有$D(\mathbb{Z}[1/p]) = 0$. 因此，**Div** 中沿着 i 对 f 取的拉回为

$$0 \to \mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z},$$

它不是满态射。因此， f 不是泛满态射。

另一方面，显然,

$$\mathrm{Ker}_{\mathbf{Ab}}\, f = \mathbb{Z}.$$

由于 $D(\mathbb{Z}) = 0$，可得

$$D(\mathrm{Ker}_{\mathbf{Ab}}\, f) = \mathrm{Ker}_{\mathbf{Div}}\, f = 0,$$

因此， f 是**可除群范畴**中的单态射。

现在考虑沿任意态射 g 对 f 作推出，其中 g 属于**阿贝尔群范畴**:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \hookrightarrow & \mathbb{Q} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ {\scriptstyle \psi}\vdots & & \downarrow{\scriptstyle g} & \mathrm{PO} & \downarrow \\ \mathrm{Ker}_{\mathbf{Ab}}\, f' & \hookrightarrow & X & \xrightarrow{f'} & Y \end{array}$$

由 [2,引理 3], 态射 ψ 是满态射。根据第一同构定理,

$$\mathrm{Ker}_{\mathbf{Ab}}\, f' \cong \mathbb{Z} \qquad \text{or} \qquad \mathrm{Ker}_{\mathbf{Ab}}\, f' \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

无论哪种情况,

$$D(\mathrm{Ker}_{\mathbf{Ab}}\, f') = 0,$$

因为 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 的可除部分都平凡。因此,

$$\mathrm{Ker}_{\mathbf{Div}}\, f' = 0,$$

因此， f' 是**可除群范畴**中的单态射。因此， f 是泛单态射。

□.

4 主定理

定理 4.1。 在任意拟阿贝尔范畴中，公理 1 和 1^* 均成立。

根据 [3, 第 193] , 页的推论，每个拟阿贝尔范畴都等价于 $\mathcal{T}$某个阿贝尔范畴中的一个挠类 $\mathcal{A}$。由于等价保持极限、余极限、单态射和满态射，因此只需在这样的挠类中进行讨论。现在我们来证明一个辅助命题。

命题4.1. 设 $f\colon A \to B$ 是 $\mathcal{A}$中的一个态射。每个满态射

$$\alpha\colon \operatorname{Ker} f \twoheadrightarrow G$$

都可以实现为某个适当推出所诱导的核之间的态射。

证明. 设 $\alpha\colon \operatorname{Ker} f \twoheadrightarrow G$是一个满态射，并令 $N := \operatorname{Ker}\ \alpha$。于是存在一个单态射$i\colon N \rightarrowtail A$。

考虑沿着 $q := \operatorname{Coker}(i)$ 对 f 取推出。由于该图表是有限的，我们可以在模范畴中进行讨论。

$$\begin{array}{ccccc} N & & & & \\ \downarrow & & & & \\ \operatorname{Ker} f & \hookrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & {\scriptstyle q}\downarrow & \mathrm{PO} & \downarrow \\ G & & A/N & \xrightarrow{f'} & Y \end{array}$$

我们断言

$$q(a) \in \operatorname{Ker} f' \iff a \in \operatorname{Ker} f$$

对于蕴含关系（$\Leftarrow$），令 $a \in \operatorname{Ker}\ f$。那么

$$(f(a), -q(a)) = (0, -q(a))$$

因此 $-q(a) \in \operatorname{Ker}\ f'$，从而 $q(a) \in \operatorname{Ker}\ f'$。

反过来，假设 $q(a) \in \operatorname{Ker}\ f'$。那么，根据推出的定义，存在 $b \in A$使得

$$(0, q(a)) = (f(b), -q(b)).$$

因此 $b \in \operatorname{Ker}\ f$且 $q(a+b) = 0$，所以 $a + b \in N$。由于 $N \subseteq \operatorname{Ker}\ f$，可得 $a \in \operatorname{Ker}\ f$。因此,

$$\operatorname{Ker} f' = \{q(a) \mid a \in \operatorname{Ker} f\} = q(\operatorname{Ker} f) = {}^{\operatorname{Ker} f}\!/_{N} = G$$

□.

接下来证明定理 4.1。

现在我们描述 $\mathcal{T}$ 中的泛单态射。设 $f\colon\ A \to B$ 是 $\mathcal{T}$ 中的一个单态射。注意， f 不必是 $\mathcal{A}$ 中的单态射。对于 $\mathcal{T}$ 中的任意态射 $g\colon\ A \to X$，考虑

$\mathcal{A}$ 中的推出：

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Ker}_{\mathcal{A}}\, f & \hookrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow{\scriptstyle \psi} & & {\scriptstyle g}\downarrow & \mathrm{PO} & \downarrow \\ \mathrm{Ker}_{\mathcal{A}}\, f' & \hookrightarrow & X & \xrightarrow[f']{} & Y \end{array}$$

其中 $\mathrm{Ker}_{\mathcal{A}}\, f$ 是 f 在 $\mathcal{A}$中的核。由于这是阿贝尔范畴中的一个推出，ψ 根据 [2, 引理 3]是一个满态射。单态射 f 是泛的，当且仅当对于每个 g，诱导态射f' 在 $\mathcal{T}$中再次是单态射。等价地，

$$F(\mathrm{Ker}_{\mathcal{A}}\, f') = 0$$

对于每个这样的推出方块，或者换句话说，

$$F\psi = \mathrm{id}_0\,.$$

根据命题4.1，我们得到如下刻画：

$$f \text{ is universal } \iff Fp = \mathrm{id}_0 \text{ for every epimorphism } p\colon \mathrm{Ker}_{\mathcal{A}}\, f \twoheadrightarrow G.$$

现在我们可以验证拉回下的稳定性。设 $\delta\colon\ Z \to B$ 是 $\mathcal{T}$ 中的任意态射，并考虑 f 沿 δ 在 $\mathcal{A}$ 中的拉回：

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Ker}_{\mathcal{A}}\, Ff' & \hookrightarrow & F(D) & & \\ \downarrow{\scriptstyle r} & & \downarrow{\scriptstyle \mu} & \searrow^{Ff'} & \\ \mathrm{Ker}_{\mathcal{A}}\, f' & \hookrightarrow & D & \xrightarrow{f'} & Z \\ \| & & \downarrow & \mathrm{PB} & \downarrow{\scriptstyle \delta} \\ \mathrm{Ker}_{\mathcal{A}}\, f & \hookrightarrow & A & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}$$

如上所述，$\mathcal{T}$中的拉回可通过应用 F得到。

由于

$$f' \circ \mu \circ \ker_{\mathcal{A}} Ff' = Ff' \circ \ker_{\mathcal{A}} Ff' = 0,$$

存在唯一的态射

$$r\colon\ \mathrm{Ker}_{\mathcal{A}}(Ff') \rightarrowtail \mathrm{Ker}_{\mathcal{A}}\, f'$$

使得

$$(\ker_{\mathcal{A}}\, f') \circ r = \mu \circ \ker_{\mathcal{A}} Ff'.$$

由于 $\mu \circ \ker_{\mathcal{A}} Ff'$ 是单态射，因此 r 也是。为了证明 Ff' 是泛的，考虑沿态射 $h\colon \mathrm{Ker}_{\mathcal{A}}(Ff') \to R$ 对 Ff' 作任意推出。依次计算这个推出 —— 先沿 μ，再沿 f' —— 我们得到一个图表，其中右侧的推出与 f' 相关：

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \overset{Ff'}{\frown} & & & \\ \text{核}_{\mathcal{A}}\, Ff' & \hookrightarrow & F(D) & \overset{\mu}{\rightarrowtail} & D & \xrightarrow{f'} & Z \\ {\scriptstyle \psi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} & \mathrm{PO} & \downarrow & \mathrm{PO} & \downarrow \\ \text{核}_{\mathcal{A}}\, \xi & \hookrightarrow & R & \underset{\mu'}{\rightarrowtail} & R' & \xrightarrow[\theta]{} & W \\ & & & \underset{\xi}{\smile} & & & \end{array}$$

考虑右侧的推出：

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{Ker}_{\mathcal{A}} f & \hookrightarrow & D & \xrightarrow{f'} & Z \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow & \mathrm{PO} & \downarrow \\ \operatorname{Ker}_{\mathcal{A}} \theta & \hookrightarrow & R' & \xrightarrow[\theta]{} & W \end{array}$$

由于 f 是泛的，上述刻画表明 $F\varphi = \mathrm{id}_0$,，因此 $F(\operatorname{Ker}_{\mathcal{A}} \theta) = 0$。仿照上述论证，我们得到一个单态射

$$\zeta\colon \operatorname{Ker}_{\mathcal{A}} \xi \rightarrowtail \operatorname{Ker}_{\mathcal{A}} \theta.$$

由于 $\mathcal{A}$ 中的单态射恰好是核，且 F 保极限，因此 $F\zeta$ 仍是一个核。但 $F(\operatorname{Ker}_{\mathcal{A}} \theta) = 0$，因此

$$F\zeta = \mathrm{id}_0 .$$

因此，

$$F(\operatorname{Ker}_{\mathcal{A}} \xi) = 0,$$

这表明 Ff' 是泛单态射。因此，公理 **1** 成立。公理 1^* 由对偶性得出。定理得证。

5 泛 rs空间范畴中的单态射与满态射。

首先，我们证明等式 $M_u = M_c$。事实是，范畴 **Ban** 是拟阿贝尔且非整的 [6, 定理 3。2]。

引理 5.1。[7, 命题 3.2。16] 在赋范空间和巴拿赫空间范畴中，任意态射都具有如下分解：

$$\begin{array}{ccccccc} u^{-1}(0) & \xrightarrow{\ker u} & E & \xrightarrow{u} & F & \xrightarrow{\operatorname{coker} u} & F\big/\overline{u(E)} \\ & & {\scriptstyle\operatorname{coim} u}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle\operatorname{im} u} & & \\ & & E\big/u^{-1}(0) & \xrightarrow[\overline{u}]{} & \overline{u(E)} & & \end{array}$$

如果存在一个正的 δ，使得对于所有 $x \in X$都有 $\|u(x)\| \geq \delta\|x\|$，则赋范空间之间的连续线性算子 $u : X \to Y$ 被称为有下界。注意，这样的算子是单射的：如果 $u(a) = u(b)$，那么 $u(a - b) = 0$，而有下界性推出 $0 = \|u(a - b)\| \geq \delta\|a - b\|$，因此$a - b = 0$ 和 $a = b$。所以，有下界的连续线性算子是单态射。

引理 5.2. 单态射有下界，当且仅当它到其值域上的开映射。证明. 设 $u\colon X \to Y$ 是一个单态射，即一个单射连续线性算子。那么

$\|u(x)\| \geq \delta\|x\|$ 当且仅当 $\|x\| \leq \frac{1}{\delta}\|u(x)\|$，即 $u^{-1} : u(X) \to X$ 是连续的；这等价于 $u\colon X \to u(X)$ 是一个同胚，因而是一个开映射。□。

注意，在巴拿赫空间范畴中，连续线性算子有下界，当且仅当它是单射且其值域是闭的。算子有下界时其值域为闭的这一事实在 [8, 第 21] 页证明。我们证明其逆命题：若一个算子是单射且其值域为闭的，则该算子有下界。事实上，设 $u\colon X \to Y$ 是巴拿赫空间之间的单射连续线性算子，且 $u(X)$ 是闭的；则 $u(X)$ 是 Y 的巴拿赫子空间，且 $u\colon X \to u(X)$ 是双射。由巴拿赫开映射定理的一个推论可知，$u^{-1}\colon u(X) \to X$ 是连续线性算子，因此 $\|u^{-1}(u(x))\| \le C\|u(x)\|$，这意味着 $\|u(x)\| \ge \frac{\|x\|}{C}$。由于在 Ban 中，严格态射恰好是值域闭的态射 [7, 命题 3.2.16 (e)], ，这就推出了所需的类相等。

—

我们来回顾泛函分析中的一些基本定理：

引理 5.3。[8, p. 21] $u\colon X \to Y$ 有下界，当且仅当存在一个由单位向量 $\{x_n\}$ 组成的序列，位于 X 中，使得 $u(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$。

设 $u : X \to Y$ 是一个没有下界的单态射。由引理 5.3，存在一个序列 $\{x_n\}$，位于 X 中，满足 $\|x_n\|_X = 1$，且使得 $u(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$。定义 $p(x) := \|u(x)\|_Y$，对于那些n，其中 $p(x_n) \neq 0$，令 $y_n := \frac{x_n}{p(x_n)}$。那么 $p(y_n) = 1$，且 $\|y_n\|_X = \frac{1}{p}\,x_n() \xrightarrow{n\to\infty} \infty$。因此，集合$S := \{x \in X\colon p(x) \le 1\}$ 在 X中无界。

令 X^* 为连续线性泛函 $f\colon X \to \mathbb{K}$ 的空间，其中 $\mathbb{K}$ 是基域。固定 $x \in S$，并考虑由规则 $T_x(\psi) = \psi(x)$ 定义的算子 $T_x\colon X^* \to \mathbb{K}$。众所周知，$T_x$ 是 X^* 上的连续线性泛函，且 $\|T_x\| = \|x\|$。

引理 5.4. 存在 $\varphi \in X^*$，使得 $\sup\{|\varphi(x)| : p(x) \le 1\} = \infty$。证明。反设对每个 $\psi \in X^*$，都有 $\sup\{|\psi(x)| : x \in S\} < \infty$。于是 $\sup\{|T_x(\psi)| : x \in S\} < \infty$；由一致有界原理可得 $\sup\{\|T_x\| : x \in S\} < \infty$。由于 $\|T_x\| = \|x\|$，我们得出 $\sup\{\|x\| : x \in S\} < \infty$，这与 S 无界矛盾。□。

由条件 $\sup\{|\varphi(x)| : p(x) \le 1\} = \infty$ 可得，对每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $a_n \in X$，使得 $p(a_n) \le 1$ 且 $|\varphi(a_n)| \ge n$。定义 $b_n := \frac{a_n}{\varphi(a_n)}$；则 $\varphi(b_n) = 1$ 且 $p(b_n) \le \frac{1}{n}$。考虑沿 φ 对 u 作推出：

$$\begin{array}{ccccc} X & & \xrightarrow{\quad u \quad} & & Y \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \varphi} & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle (0,\ id)} \\ & & \mathrm{PO} & & \mathbb{K}\oplus Y \\ & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathbb{K} & \xrightarrow{(id,\ 0)} & \mathbb{K}\oplus Y & \xrightarrow{\quad p \quad} & D \end{array}$$

这里 $D := \mathbb{K}\oplus Y \big/ \overline{ran\begin{bmatrix} -u \\ \varphi \end{bmatrix}}$ p 是典范投影。

记 $j := p \circ (id,\ 0)$。根据定义，$j(m) = p((m,\ 0))$，即若 $(m,\ 0) \in ran\begin{bmatrix} -u \\ \varphi \end{bmatrix}$，则 $j(m) = 0$。证明 $(1,\ 0) \in ran\overline{\begin{bmatrix} -u \\ \varphi \end{bmatrix}} \circ \begin{bmatrix} -u \\ \varphi \end{bmatrix}(b_n) = \begin{bmatrix} -u \\ \varphi(b_n)\,(b_n) \end{bmatrix} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$。因此 $j(1) = 0$，由此可得 j 不是单态射。

因此，我们 已证明，**Ban** 中的泛单态射恰好是算子 s

有下界，且由于它们是严格的，我们得到 $M_u = M_c$。现在证明 $P_u = P_c$。

备注： 下面的引理是一个众所周知的结果，但我们在文献中尚未找到对此事实的记载。

引理 5.5. Ban 中的严格满态射恰好是满射算子。证明。 设 $f\colon X \to Y$是一个满射。那么 $f(X) = Y$，因此其像既稠密又闭，从而该态射既是满态射又是严格的。

反过来，假设 f 是一个严格满态射。那么 Coker $f = 0$。另一方面，由引理 5.1，

$$\operatorname{Coker} f = {}^{B}\!\diagup\!_{\overline{f(A)}}.$$

因此 ${}^{B}\!\diagup\!_{\overline{f(A)}} = 0$.。由于 f是严格的， $f(A)$ 是闭的，所以 $\overline{f(A)} = f(A)$。因此， ${}^{B}\!\diagup\!_{f(A)} = 0$，从而 $B = f(A)$。 □。

命题 5.1. $f : X \to Y$在 **Ban** 中是泛满态射，当且仅当 f 是一个满射。证明。 ($\Longleftarrow$) 这显然由拟阿贝尔性的公理可得。($\Longrightarrow$) 假设 $f\colon X \to Y$不是满射。取一个元素 $y_0 \in Y \setminus f(X)$。定义 $\varphi\colon \mathbb{K} \to Y$，其定义规则为 $\varphi(\lambda) := \lambda y_0$。考虑以下拉回：

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{K} \\ \downarrow & \text{PB} & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

这里 $D = \{(a,\ \lambda)\colon\ f(a) = \varphi(\lambda)\}$。不过，只有当 $\lambda = 0$ 时，才可能有 $f(a) = \lambda y_0$。那么， $\pi(D) = \{0\}$ 在 $\mathbb{K}$ 中不稠密，因此不是满态射。

□.

由于在 **Ban** 中有 $M_u = M_c$ 和 $P_u = P_c$，根据拟阿贝尔性的公理，显然公理 1 和 1* 也成立。请注意，在引理 $P_u = P_c$ 的证明中，我们完全没有用到完备性；因此，这个类等式在 **赋范空间范畴** 中也成立。对于巴拿赫空间，我们基本上已经证明，泛单态射恰好是有下界的算子。不过，任意赋范空间 X 都是一个巴拿赫空间 X^*，而除引理 5.3 外，其他地方都不需要完备性；引理 5.3 也很容易推广到赋范空间。因此，我们得到，**赋范空间范畴** 中的泛单态射恰好是有下界的算子（也就是说，是映到其值域上的开映射的单射算子）。

致谢

作者谨向雅罗斯拉夫·科皮洛夫教授致以诚挚的谢意，感谢他给予的指导、有益的讨论和持续的支持。

参考文献

[1] N. V. Glotko 和V. I. Ku´zminov，半阿贝尔范畴中的上同调序列（俄文），《西伯利亚数学杂志》**43** (2002)，第1期，41-50；英文译本见：《西伯利亚数学杂志》**43**

(2002)，第1期，28-35。[2] Ya. Kopylov，Ra˘ikov 半阿贝尔范畴中的精确对，《Cahiers de topologie et g´eom. Diff´er. Cat´eg.》45 (3) (2004) 162-178[3] W. Rump，几乎阿贝尔范畴。《Cahiers de topologie et g´eom´etrie diff´erentielle cat´egoriques》42(3):163–225，2001。[4] A. Tattar，《挠对与拟阿贝尔范畴》。《Algebr Represent Theor》24，1557–1581 (2021)。https://doi.org/10.1007/s10468-020-10004-y[5] Ya. A. Kopylov 和 V. I. Ku´zminov，半阿贝尔范畴中的核-余核序列，《西伯利亚数学杂志》**41**(2000)，第3期，615-624；英文译本见：《西伯利亚数学杂志》**41** (2000)，第3期，509-517。[6] S. Hassoun、A. Shah 和 S.-A. Wegner，积分范畴及容许交性质的例子与反例，《Cahiers Topologie G´eom. Diff´erentielle Cat´eg.》62，第3期，329-354[7] J.-P. Schneiders，拟阿贝尔范畴与层。《M´em. Soc. Math. Fr. (N.S.)》，(76):vi+134，1999。[8] G J. Murphy，C^*-代数与算子理论，（英文）Zbl 0714.46041，马萨诸塞州波士顿等：Academic Press, Inc.，1990。[9] L. Fuchs，《无限阿贝尔群》第I卷。（英文）Zbl 0209.05503，《纯粹与应用数学》，第36卷。纽约—伦敦：Academic Press。xi，290页，1970。[10] M. Grandis，关于同调代数与同伦代数的范畴论基础。（英文）Zbl 0814.18006，《Cah. Topologie G´eom. Diff´er. Cat´egoriques》33，第2期，135-175，1992。