arXiv:2603.13022v1 [math.RT] 13 Mar 2026

正合范畴的消解完备化

MARIANNE LAWSON、JANINA C. LETZ 与 JULIA SAUTER

Abstract. 对于一个正合范畴，我们给出环境范畴的两种构造，使得初始范畴在其中是解消的：一种在导出范畴中，另一种在 Gabriel–Quillen 嵌入中。对于第一种构造，我们用不同的无环性条件描述一个预aisle及其右正交子范畴。我们给出该对成为 t-结构的充要条件。

Contents

引言 1
1. 无环性与消解子范畴 2 2. Ext-分解 6 3. 在导出范畴中 10 4. Ext-消解的函子性视角 19 5. 在左商范畴中 24 6. 消解完备化 30 参考文献 33

Introduction

正合范畴出现在数学的各个领域；例如，表示论、代数几何、代数拓扑或泛函分析。一个常见目标是寻找此类范畴之间的导出等价，即它们的导出范畴是三角等价的。例如，这正是倾斜理论的核心 [Hap88, 第 III 章],[Ric89],[AHHK07, 第 5]章。其中许多三角等价基于由 [HvR20b]对解消子范畴得到的导出等价。

对于正合范畴 $\mathcal{E}$，我们描述 $\mathcal{E}$ 的分解完备化 $\mathcal{R}$；也就是说$\mathcal{E}$ 可以识别为 $\mathcal{R}$ 的一个解消子范畴，并且它在以下意义下具有普适性：每当 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ 是解消的，$\mathcal{F}$ 就可以识别为 $\mathcal{R}$ 的一个解消子范畴。我们给出两种构造 $\mathcal{E}$的环境范畴的方法：

- 我们将 $\mathcal{LH}(\mathcal{E})$构造为 $\mathsf{D}(\mathcal{E})$ 的一个全子范畴，从而推广了 [Hub95、Sch99、HKvRW23]中的构造。它由一些复形组成：这些复形在正次数上是 $\mathcal{E}$-无环的，并满足一种较弱的无环条件，称为左 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}$-无环性；在负次数上则满足该条件。这一概念受到 [Rum21]的启发。

Date：2026年3月16日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 18G10，18G80，16E35，18E10。*Key words and phrases.* 解消子范畴、左心、t-结构、可消去函子、Ext-核、导出范畴、导出等价、正合范畴。

•我们将 $\mathcal{R}(\mathcal{E})$构造为函子范畴 Mod($\mathcal{E}$) 在局部可消去函子范畴 Eff($\mathcal{E}$) 处局部化所得范畴的一个全正合子范畴。也就是说，我们在 Gabriel–Quillen 嵌入中扩张 $\mathcal{E}$ 。这一构造受到 [Rum20、HKvRW23]的启发。

对于这些构造，我们在命题 6.2 和 6.3 以及定理 6.4 中证明了以下结果：

定理 A. 设 $\mathcal{E}$ 是一个弱幂等完备小正合范畴。那么， $\mathcal{LH}(\mathcal{E})$ 和 $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ 都是 $\mathcal{E}$ 的解析完备化，并且存在一个等价$\mathcal{LH}(\mathcal{E}) \to \mathcal{R}(\mathcal{E})$。

类似于 $\mathcal{LH}(\mathcal{E})$ 和 $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ 的构造，我们还构造了有限可解完备化 $\mathcal{LH}^b(\mathcal{E})$ 和 $\mathcal{R}^b(\mathcal{E})$，它们给出了有界导出范畴之间的等价。

在构造 $\mathcal{LH}(\mathcal{E})$ 中，我们得到一对 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$，它与 t-结构十分接近。事实上，当 $\mathcal{E}$ 有核时，这就是 [Hub95, Sch99] 中描述的 t-结构。然而，我们并不认为一般情况下这对对象会构成 t-结构，因为正合范畴的有界导出范畴未必支持任何 t-结构，见 [Nee24]。此外，利用这一构造及其对偶构造，我们在定理 3.19 中证明了以下结果：

定理 B。 设 $\mathcal{E}$ 是一个弱幂等完备正合范畴。存在一对 $(\mathcal{U}、\mathcal{V})$ 全子范畴，它们属于 $\mathrm{D}^b(\mathcal{E})$ ，使得

(1) $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 对直和项、同构及扩张封闭；*(2)* $\Sigma\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V} \subseteq \Sigma\mathcal{V}$；以及 *(3)* $(\Sigma\mathcal{U})^{\perp} = \mathcal{V}$ 和 $\Sigma\mathcal{U} = {}^{\perp}\mathcal{V}$。

事实上，我们构造了两对具有这些性质、一般而言彼此不相等的子范畴。每一对 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 都给出 $\mathcal{E}$ 的一个极大非负 扩张 $\mathcal{H} = \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$；这意味着 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(\mathcal{E})}(\mathcal{H}, \Sigma^{<0}\mathcal{H}) = 0$，且 $\mathcal{H}$ 在该性质下是极大的。

左 Ext-无循环性的概念对于构造 $\mathcal{LH}(\mathcal{E})$ 和 $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ 至关重要。这并不令人意外，因为它在解消扩张下保持不变。左 Ext-无循环性包含两个概念，即左 $\mathcal{E}$-无环性和 Hom-无环性。前者是对 $\mathcal{E}$-无环性的轻微推广，后者则刻画了应用 Yoneda 函子后的无环性。

为了获得无界导出范畴之间的等价，我们为 $n \geq 1$ 构造 $\mathcal{E}$ 的 n-解消完备化 。此外，这一构造保留全局维数的有限性。1-解析完备化是 D($\mathcal{E}$) 的全子范畴，由可表示为单态射的两项复形组成； [Sch99、HKvRW23] 已研究过此范畴。

致谢。 作者的研究部分得到了德国研究基金会（DFG）的资助：第一作者获项目编号 507660524 资助，第二和第三作者获项目编号 491392403（TRR 358）资助。作者谨此感谢 Sven-Ake Wegner 富有见地的讨论与贡献。

1. Acyclicity and resolving subcategories

在阿贝尔范畴中，序列$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$的无环性有一个规范的定义；也就是说，当 $0 \to \ker(g) \to M \to \mathrm{coker}(f) \to 0$是一个短正合列时，

该序列就是无环的。在阿贝尔范畴中，无环性有多种等价刻画。然而，在正合范畴中，这些刻画可能导出不同的概念。最常见的概念由 [Nee90，第 1]节引入。我们关注的是另一种无环性概念，其动机来自 [Rum21，定义 3]中引入的 Ext-核。后者与消解子范畴密切相关。

1.1. **正合范畴与正合函子**。设 $\mathcal{A}$是一个加性范畴。称 $\mathcal{A}$ 中的一对态射（i，p）为核-余核对，若 ker(p) $= i$ 且 coker(i) $= p$。正合结构是满足一组特定公理的核-余核对的集合；该概念由 [Qui73]引入。正合范畴 $\mathcal{E}$ 是配备了正合结构的加性范畴。通常，我们用 $\mathcal{E}$ 同时指其底层加性范畴和正合结构。我们将 $\mathcal{E}$ 的正合结构中的核-余核对称为 $\mathcal{E}$<style id='25'>-正合对。若（i，p）是一个 $\mathcal{E}$-正合对，则称 i 为 $\mathcal{E}$<style id='34'>-膨胀，称 p为 $\mathcal{E}$<style id='38'>-收缩。我们用 ε 表示 $\mathcal{E}$-膨胀，用 ε 表示 $\mathcal{E}$-收缩。在其他文献中，膨胀和收缩分别称为容许单态射和容许满态射。关于正合范畴的概述，参见 [B¨uh10]。

1.2. **无环性**。我们回顾正合范畴中无环性的不同概念；其中第一个由 [Nee90 第 1]节引入。

定义 1.3。设 $\mathcal{E}$ 为一个正合范畴。若序列 $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ 满足 $gf = 0$，则称其为

(1) $\mathcal{E}$-无环（在 M 中），如果存在一个分解

$$\begin{array}{ccccc} L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \\ & \searrow^{\varepsilon} \quad \nearrow_{\varepsilon} & & \searrow^{\varepsilon} \quad \nearrow_{\varepsilon} & \\ & K & & C & \end{array}$$

其中 $L \to K$ 和 $M \to C$ 是 $\mathcal{E}$-收缩，$K \to M$ 和 $C \to M$ 是$\mathcal{E}$-膨胀，使得 $K \to M \to C$ 是一个 $\mathcal{E}$-合冲；

(2) 左 $Ext_{\mathcal{E}}$-无环（在 M 中），如果对任意 a：满足 $ga = 0$的 $A \to M$，都存在一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} B & \dashrightarrow^{\varepsilon} & A & & \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a} & \searrow^{0} & \\ L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

其中 $B \to A$ 是一个 $\mathcal{E}$-收缩；(3) 分裂无环（在 M 中），如果它是 $\mathcal{E}^{\oplus}$-无环（在 M中）；以及 (4) 左Hom-无环（在 M 中），如果它是左 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}^{\oplus}}$-无环（在 M中）。

这里，$\mathcal{E}^{\oplus}$ 是与 $\mathcal{E}$具有相同底层加性范畴、并配备分裂正合结构的正合范畴。

在 [Rum21的命题 9] 中已经证明：对于阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$，若将其视为配备阿贝尔正合结构的正合范畴，则序列 $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ 是 $\mathcal{A}$-无环的，当且仅当它是左$\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}$-无环的，当且仅当 $0 \to$ 核(g) $\to M \to$ 余核(f) $\to 0$ 是正合的。

注记 1.4。 左Ext$_{\mathcal{E}}$-无环性这一概念受到 [Rum21定义 3]中所引入的Ext-核的启发。事实上，态射 $L \to M$ 是$M \to N$的$Ext_{\mathcal{E}}$-核，当且仅当 $L \to M \to N$是左Ext$_{\mathcal{E}}$-无环的。类似地，态射$L \to M$ 是 $M \to N$的弱核，当且仅当 $L \to M \to N$ 是左Hom-无环的。特别地，左Hom-无环性的概念与 n-正合序列密切相关；参见 [Jas16定义2.4]。在 [Rum21定义 5] 中， $\mathcal{E}$ 上的复形称为左正合的，如果它在每个次数上都是左Ext$_{\mathcal{E}}$-无环的。

根据定义，我们立即得到以下推论

$$\begin{array}{ccc} \text{split acyclic} & \Longrightarrow & \mathcal{E}\text{-acyclic} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{left Hom-acyclic} & \Longrightarrow & \text{left } \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}\text{-acyclic}\,. \end{array} \tag{1.4.1}$$

我们归纳出左 Ext$_{\mathcal{E}}$-无环序列的一些性质。

引理 1.5. 设 $\mathcal{E}$ 为一个正合范畴， $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ 是 $\mathcal{E}$ 中满足 $gf = 0$ 的序列。若 f 是单态射，则序列 $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ 是左 *Ext*$_{\mathcal{E}}$-无环的，当且仅当它是左 *Hom*-无环的。

特别地，序列 $0 \to M \xrightarrow{g} N$ 是左 *Ext*$_{\mathcal{E}}$-无环的，当且仅当 g 是单态射。

证明。 由 (1.4.1) 可知，只需证明正向蕴含。假设该序列是左 Ext$_{\mathcal{E}}$-无环的。设 $a\colon A \to M$ 是满足 $ga = 0$ 的态射。则存在一个 $\mathcal{E}$- 收缩 $p\colon B \to A$ 以及一个态射 $h\colon B \to L$，使得 $ap = fh$。设 $i\colon K \to B$ 是 p 的核。于是 $fhi = 0$，且由于 f 是单态射，我们有 $hi = 0$。因此存在一个态射 $v\colon A \to L$，使得 $h = vp$。因此 $ap = fh = fvp$。由于 p 是一个 $\mathcal{E}$-收缩，我们有 $a = fv$，故 $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ 是左 Hom-无环的。□

1.6. 正合子范畴。 我们回顾正合范畴中子范畴的术语。

设 $\mathcal{E}$ 是一个正合范畴。一个加性子范畴 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$ 是
（1）扩张封闭的，如果对于任意带有 L， $N \in \mathcal{C}$ 也有$M \in \mathcal{C}$的 $\mathcal{E}$-合冲 $L \to M \to N$；（2）膨胀封闭的，如果对于任意带有 L， $M \in \mathcal{C}$ 也有 $N \in \mathcal{C}$的 $\mathcal{E}$-合冲 $L \to M \to N$；（3）亏映射封闭的，如果对于任意带有 M， $N \in \mathcal{C}$ 也有$L \in \mathcal{C}$的 $\mathcal{E}$-合冲 $L \to M \to N$；（4）对直和项封闭的，如果对于任意 $M \oplus M' \in \mathcal{C}$， M也有， $M' \in \mathcal{C}$；（5）厚的，如果它对扩张、膨胀和亏映射封闭，并且对直和项封闭；（6）$Serre$的，如果对于任意 $\mathcal{E}$-合冲 $L \to M \to N$，有 $M \in \mathcal{C}$ 当且仅当L， $M \in \mathcal{C}$。

注意，子范畴是亏映射封闭的，当且仅当它对 $\mathcal{E}$-亏映射的核封闭。

如果 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$ 是扩张封闭的，那么在 $\mathcal{C}$上存在一个诱导的正合结构，由满足 L、M、$N \in \mathcal{C}$ 的 $\mathcal{E}$-合冲 $L \to M \to N$ 组成。我们称其为 $\mathcal{E}$（来自 $\mathcal{E}$）的完全正合结构，定义在 $\mathcal{C}$上。

对于正合范畴 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{F}$，函子 $\mathrm{F}\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ 称为

(1) 正合，如果它将 $\mathcal{E}$-正合对映为 $\mathcal{F}$-正合对；(2) 正合嵌入，如果它是一个忠实正合函子，且在对象上是单射；(3) 全正合嵌入，如果它是一个满的正合嵌入，并且只要 $\tilde{\mathrm{F}}(L) \to M \to \mathrm{F}(N)$ 是一个 $\mathcal{F}$-正合对，且 $L, N \in \mathcal{E}$，就存在 $M \in \tilde{\mathcal{E}}$，使得 $\mathrm{F}(M) = M$，并且该 $\mathcal{F}$-正合对是某个 $\mathcal{E}$-正合对的像。

如果 F 是一个满的正合嵌入，那么我们可以将 $\mathcal{E}$ 与其在 $\mathcal{F}$ 中的像等同，并将 $\mathcal{E}$ 视为 $\mathcal{F}$ 的正合子范畴。此外，当 F 是一个全正合嵌入时，$\mathcal{E}$ 上的正合结构由所有对象属于 $\mathcal{E}$ 的 $\mathcal{F}$-合冲组成。

若正合范畴 $\mathcal{E}$ 是正合范畴 $\mathcal{F}$ 的一个**正合子范畴**，则它是一个加性子范畴，且包含函子是一个满的正合嵌入。当包含函子是一个全正合嵌入时，我们称 $\mathcal{E}$ 为**全正合子范畴**。此时，$\mathcal{E}$ 上的正合结构与来自 $\mathcal{F}$ 的完全正合结构重合。

1.7. **解消子范畴**。设 $\mathcal{F}$ 为一个正合范畴。若全正合子范畴 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ 满足以下条件，则称其在 $\mathcal{F}$ 中**解消**：

（R1）对于任意 $M \in \mathcal{F}$，存在一个 $\mathcal{F}$-收缩 $L \to M$，使得 $L \in \mathcal{E}$；以及

（R2）$\mathcal{E}$ 在 $\mathcal{F}$ 中是**亏映射封闭**的。

我们称 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ 在 $\mathcal{F}$ 中**半解消**，如果它满足

(R1') 对任意 $M \in \mathcal{F}$，都存在一个满态射 $L \to M$，使得 $L \in \mathcal{E}$；以及 (R2') 对于 $\mathcal{F}$ 中满足 M的 $N \in \mathcal{E}$ 每个满态射 $M \to N$，其核属于 $\mathcal{E}$。

如果 $\mathcal{F}$ 是左阿贝尔的，那么解消与半解消是等价的。然而，一般而言，(R1) $\implies$ (R1')，且 (R2') $\implies$ (R2)。

注 1.8。解消子范畴有许多略有不同的概念。最初，解消子范畴是针对模范畴的子范畴引入的 [AB69, (3.11)]。后来，这一概念被推广到阿贝尔范畴 [˜St'14, 定义 2.1] 以及正合范畴 [Eno17, 定义 2.3]。对于左阿贝尔范畴，[Rum20, 定义 2]中还出现了另一种概念；对于满射正合范畴，[HvR20b, 定义 3.1]中也有另一种概念；这些都不是 Enomoto 定义的推广。我们采用 [HvR20b, 定义 3.1], 中的定义，而半解消则采用 [Rum20, 定义 2]中的概念。

设 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ 是一个解消子范畴。由公理 (R1 & R2) 可推出，对每个 $M \in \mathcal{F}$，都存在一个 $\mathcal{F}$-无环序列

$$\cdots \to X^{n-1} \to X^n \to \cdots \to X^{-1} \to X^0 \to M \to 0 \tag{1.8.1}$$

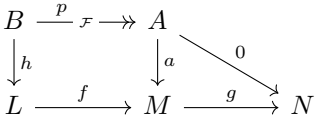
使得对所有 $i \leq 0$ 都有 $X^i \in \mathcal{E}$。

若对每个 $M \in \mathcal{F}$，都存在一个整数 $n \leq 0$ 和一个形如 (1.8.1) 的序列，使得对 $i < n$ 有 $X^i = 0$，则称解消子范畴 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ 为**有限凝聚**的。

对于解消子范畴，Ext-无环性的概念以下述意义得以保留：

引理 1.9. 设 $\mathcal{F}$ 是一个正合范畴，$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ 是一个解消子范畴。序列 $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ 满足 L、M、$N \in \mathcal{E}$，当且仅当它是左 $Ext_{\mathcal{F}}$-无环的，才是左 $Ext_{\mathcal{E}}$-无环的。

证明。 对于正向推导，设 $a\colon A \to M$ 是 $\mathcal{E}$ 中满足 $ga = 0$的一个态射。由于该序列是左 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}$-无环的，我们有如下交换图表



其中 p 是一个 $\mathcal{F}$-收缩。由 (R1)，存在一个 $\mathcal{F}$-收缩 $q\colon C \to B$，使得$C \in \mathcal{E}$。由 (R2)，复合 qp 是一个 $\mathcal{E}$-收缩，并且 $apq = fhq$。

反过来，我们假设序列 $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ 是左 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}$-无环的。设$a\colon A \to M$ 是 $\mathcal{F}$ 中的一个态射，且满足 $ga = 0$。由 (R1)，存在一个 $\mathcal{F}$-收缩 $\hat{}\hat{}q\colon A \to A$，使得 $A \in \mathcal{E}$。那么 aq 是 $\mathcal{E}$ 中的一个态射，且满足 $gaq = 0$。因此，存在一个 $\mathcal{E}$-收缩 $p\colon B \to A$ 以及一个态射 $h\colon B \to L$，使得 $aqp = fh$aneqp 是一个 $\mathcal{F}$- 收缩。□

作为此引理的直接推论，任何对象属于 $\mathcal{E}$的 $\mathcal{F}$-无环序列都是左 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}$-无环的。我们将构造一些 $\mathcal{E}$ 的环境范畴，使反向结论成立；参见引理 5.1。

2. Ext resolutions

由解消子范畴得到的（1.8.1）中的序列在下文中起着重要作用。事实上，可以将 $\cdots \to X^{-1} \to X^{-0}$ 视为 M的一个分解。根据引理 1.9，我们关注那些在负次数上左Ext-无环的此类序列。

设 $\mathcal{E}$ 是一个正合范畴。我们将 $\mathcal{E}$ 上的复形范畴记作 Ch($\mathcal{E}$)。我们对复形采用上同调记法；也就是说，将复形X 写作

$$\cdots \to X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \to \cdots .$$

复形 X 若在每个次数上都是 $\mathcal{E}$-无环的，则称其为 $\mathcal{E}$-无环。若复形的映射锥是 $\mathcal{E}$-无环的，则称复形态射为 $\mathcal{E}$-拟同构。

定义 2.1. 设 $\mathcal{E}$ 是一个正合范畴。一个*Ext*$_{\mathcal{E}}$-分解 是一个集中在非负次数上的复形 X，且在负次数上左$\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}$-无环。若 $X^n = 0$ 对 $n \ll 0$成立，则称一个$\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}$-分解 X 有界。

在此定义中，我们不要求 Ext-分解对任何对象进行“分解”，因为被分解的对象不一定属于 $\mathcal{E}$。我们仍使用“分解”这一术语，因为它将是第 3 节和第 5 节中构造的 $\mathcal{E}$ 的环境范畴中的某个对象的分解。

2.2. **粘合 Ext-无环复形**。 我们将证明，Ext-无环性与映射锥的构造相容。尤其是，它在同伦范畴中表现良好；参见第 3 节。

引理 2.3. 设 $\mathcal{E}$ 是一个正合范畴。设 $f\colon X \to Y$ 是 $\mathrm{Ch}(\mathcal{E})$中的一个态射。若 X 在次数 $n+1$ 上是左 *Ext*$_{\mathcal{E}}$-无环的，且 Y在次数 n上是左 *Ext*$_{\mathcal{E}}$-无环的，则$\mathrm{cone}(f)$ 在次数 n上是左 *Ext*$_{\mathcal{E}}$- 无环的。

证明。设 $g\colon A\binom{a}{b}\longrightarrow X^{n+1}\oplus Y^n$ 是一个满足如下图表的态射

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle \binom{a}{b}} & \searrow^{0} & \\ \cdots\to X^n\oplus Y^{n-1} & \xrightarrow[\begin{pmatrix}-d_X^n & 0\\ f^n & d_Y^{n-1}\end{pmatrix}]{} & X^{n+1}\oplus Y^n & \xrightarrow[\begin{pmatrix}-d_X^{n+1} & 0\\ f^{n+1} & d_Y^n\end{pmatrix}]{} & X^{n+2}\oplus Y^{n+1}\to\cdots \end{array}$$

交换。底行是在次数 $n-1$、n 和 $n+1$ 上的锥(f)。

由于 $d_X^{n+1}a=0$ 和 X 在次数 $n+1$ 上左 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}$-无环，存在一个 $\mathcal{E}$-收缩 $p\colon B\to A$，以及一个态射 $h\colon B\to X^n$，使得下图交换

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{p}\ \varepsilon\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow & A & \searrow^{0} & \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a} & & \\ X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} & \xrightarrow{d_X^{n+1}} & X^{n+2}\,. \end{array}$$

根据假设，我们有 $f^{n+1}a+d_Y^nb=0$。由此得到

$$0=(f^{n+1}a+d_Y^nb)p=f^{n+1}ap+d_Y^nbp=f^{n+1}d_X^nh+d_Y^nbp=d_Y^n(f^nh+bp)\,.$$

由于 Y 在次数 n 上左 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}$-无环，我们找到一个 $\mathcal{E}$-收缩 $q\colon C\to B$，以及一个态射 $g\colon C\to Y^{n-1}$，使得下图交换

$$\begin{array}{ccccc} C & \xrightarrow{q}\ \varepsilon\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow & B & \searrow^{0} & \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^nh+bp} & & \\ Y^{n-1} & \xrightarrow{d_Y^{n-1}} & Y^n & \xrightarrow{d_Y^n} & Y^{n+1}\,. \end{array}$$

结合这些恒等式，得到下面的交换方块

$$\begin{array}{ccccccc} C & \xrightarrow{q}\ \varepsilon\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow & B & \xrightarrow{p}\ \varepsilon\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow & A & \searrow^{0} & \\ \downarrow{\scriptstyle \binom{-hq}{g}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \binom{a}{b}} & & \\ X^n\oplus Y^{n-1} & \xrightarrow[\begin{pmatrix}-d_X^n & 0\\ f^n & d_Y^{n-1}\end{pmatrix}]{} & X^{n+1}\oplus Y^n & \xrightarrow[\begin{pmatrix}-d_X^{n+1} & 0\\ f^{n+1} & d_Y^n\end{pmatrix}]{} & X^{n+2}\oplus Y^{n+1} & & \end{array}$$

其中，顶行的复合 pq 是一个 $\mathcal{E}$-收缩。 □

引理 2.4。设 $\mathcal{E}$ 是一个正合范畴。设 $f\colon X\to Y$ 是$\mathrm{Ch}(\mathcal{E})$中的一个同伦缩回；也就是说，存在一个链映射 $g\colon Y\to X$，使得 gf 与 X 上的恒等映射同伦。若 Y 在次数 n 左 *Ext*$_{\mathcal{E}}$-无环，则 X 也如此。

证明。设 f 和 g 如陈述所述，并设 h 是见证 gf 与 id_X 同伦的同伦。设 $a\colon A\to X^n$ 是一个满足 $d_X^na=0$ 的态射。那么

$$d_Y^nf^na=f^{n+1}d_X^na=0\,.$$

由于 Y 在次数 n 左 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}$-无环，存在一个 $\mathcal{E}$-收缩 $p\colon B\to A$ 以及一个态射 $u\colon B\to Y^{n-1}$，使得 $f^nap=d_Y^{n-1}u$。现在我们有

$$\begin{aligned} ap=\mathrm{id}_{X^n}ap&=(g^nf^n+d_X^{n-1}h^n+h^{n+1}d_X^n)ap\\ &=g^nd_Y^{n-1}u+d_X^{n-1}h^nap=d_X^{n-1}(g^{n-1}u+h^nap)\,. \end{aligned}$$

因此，X 在次数 n上是左 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}$-无环的。 □

推论 2.5。 设 $\mathcal{E}$ 是一个正合范畴。设 $f\colon\ X \to Y$ 是$\mathrm{Ch}(\mathcal{E})$中的一个态射。

(1) 若 X 和 锥(f) 在次数 n 上均为左 *Ext*$_{\mathcal{E}}$-无环，则 Y 也如此。*(2)* 若 Y 在次数 n 上为左 *Ext*$_{\mathcal{E}}$-无环，且 锥(f) 在次数$n-1$上为左 *Ext*$_{\mathcal{E}}$-无环，则 X 在次数 n 上为左 *Ext*$_{\mathcal{E}}$-无环。

证明。 $f\colon X \to Y$ 的柱体和余柱体分别为

$$\mathrm{cyl}(f) := \mathrm{cone}(\Sigma^{-1}\,\mathrm{cone}(f) \to X) \quad \text{and}$$
$$\mathrm{cocyl}(f) := \mathrm{cone}(\Sigma^{-1}Y \to \Sigma^{-1}\,\mathrm{cone}(f))\,,$$

众所周知，存在同伦等价 $Y \to \mathrm{cyl}(f)$ 和 $X \to \mathrm{cocyl}(f)$。由此，结论可由引理 2.3 和 2.4 得出。□

2.6. **Ext-分解之间的态射**。 Ext-分解的性质不如经典分解强。事实上，诱导出一个态射以及此类态射的唯一性，只能在拟同构意义下成立。

引理 2.7。 设 $\mathcal{E}$ 是一个正合范畴， X 是一个集中于非正次数的 $\mathcal{E}$ 上的复形，且 Y 是一个 *Ext*$_{\mathcal{E}}$-分解。一个交换图

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & X^{-2} & \xrightarrow{d_X^{-2}} & X^{-1} & \xrightarrow{d_X^{-1}} & X^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle f^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle f^0} & & \downarrow{\scriptstyle f^1=0} & & \\
\cdots & \longrightarrow & Y^{-2} & \xrightarrow{d_Y^{-2}} & Y^{-1} & \xrightarrow{d_Y^{-1}} & Y^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

在 $\mathcal{E}$-拟同构意义下，可以将其扩展为复形态射。具体而言，存在一个集中于非正次数的复形 W 、一个 $\mathcal{E}$-拟同构 $g\colon W \to X$ 以及一个链映射 $f\colon W \to Y$，其中 $g^n = \mathrm{id}$ 且 $f^n = f^n$，对 $n \geq -1$成立。

证明。 我们对上同调次数使用归纳法，构造复形 W、$\mathcal{E}$-拟同构 $g\colon W \to X$ 以及链映射 $f\colon W \to Y$。

令对$W^n = X^n$和 $d_W^n := d_X^n$，f^n并令 $g^n = \mathrm{id}_{X^n}$，对 $n \geq -1$成立。此外，令

我们断言，对每个 n，都存在一个交换图

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & X^{n-1} & & & & & & Y^{n-1} & & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle d_X^{n-1}} & & & & & & \downarrow{\scriptstyle d_Y^{n-1}} & & \\
 & & X^n & \xleftarrow{\varepsilon\ q^n} & P^n & \xleftarrow{\varepsilon\ p^n} & W^n & \xrightarrow{\hat{f}^n} & Y^n & & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle d_X^n} & \searrow^{a^n} & & \searrow^{b^n} & \downarrow{\scriptstyle d_W^n} & & \downarrow{\scriptstyle d_Y^n} & & \\
 & & X^{n+1} & \xleftarrow[q^{n+1}]{\varepsilon} & P^{n+1} & \xleftarrow[p^{n+1}]{\varepsilon} & W^{n+1} & \xrightarrow[\hat{f}^{n+1}]{} & Y^{n+1} & &
\end{array} \tag{2.7.1}$$

其中 P^n 是跨度 $X^n \to P^{n+1} \to W^{n+1}$ 和 $a^n d_X^{n-1} = 0$的拉回。

对于 $n \geq -1$，我们令 $P^n = X^n$, $a^n = b^n = d_X^n$，并将其余态射取为恒等态射。显然，图表 (2.7.1) 可交换，且以 P^{n+1}, W^{n+1}, X^n 和 P^n 为顶点的方块是拉回方块，并且 $a^n d_X^{n-1} = 0$。

我们假设，对于某个 $n \leq -1$，(2.7.1) 中的态射和对象存在且具有所需性质。由于 P^n 是一个拉回且 $a^n d_X^{n-1} = 0$，因此存在一个态射$a^{n-1}\colon X^{n-1} \to P^n$，使得

$$d_X^{n-1} = q^n a^{n-1} \quad \text{and} \quad b^n a^{n-1} = 0\,.$$

由于 $q^n a^{n-1} d_X^{n-2} = 0$ 且 $b^n a^{n-1} d_X^{n-2} = 0$，拉回的泛性质给出 $a^{n-1} d_X^{n-2} = 0$。令 P^{n-1} 为 a^{n-1} 沿 p^n 的拉回，其典范态射为 $q^{n-1}\colon P^{n-1} \to X^{n-1}$和 $b^{n-1}\colon P^{n-1} \to W^n$。我们得到

$$\begin{aligned} d_Y^n \hat{f}^n b^{n-1} &= \hat{f}^{n+1} d_W^n b^{n-1} = \hat{f}^{n+1} b^n p^n b^{n-1} \\ &= \hat{f}^{n+1} b^n a^{n-1} q^{n-1} = 0\,. \end{aligned}$$

由于 Y 在次数 n上是左 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}$-无环的，因此存在一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} P^{n-1} & \xleftarrow{p^{n-1}} & W^{n-1} & \xrightarrow{\hat{f}^{n-1}} & Y^{n-1} \\ & \searrow^{b^{n-1}} & & & \downarrow{\scriptstyle d_Y^{n-1}} \\ & & W^n & \xrightarrow{\hat{f}^n} & Y^n\,. \end{array}$$

令 $d_W^{n-1} := b^{n-1} p^{n-1}$，便得到具有所需性质的图表 (2.7.1)，其中$n-1$。

由构造可得

$$d_W^n d_W^{n-1} = b^n p^n b^{n-1} p^{n-1} = b^n a^{n-1} q^{n-1} p^{n-1} = 0$$

ˆ，因此 W是一个复形。由 (2.7.1) 的交换性可知， $f\colon W \to Y$是一个链映射，且 $g^n := q^n p^n$ 也定义了一个链映射 $g\colon W \to X$。还需注意到这些序列

$$P^n \xrightarrow{\binom{b^n}{q^n}} W^{n+1} \oplus X^n \xrightarrow{(\,-p^{n+1}\ a^n\,)} P^{n+1}$$

对所有 n，都是 $\mathcal{E}$-合冲。因此，cone(g)在每个次数上都是 $\mathcal{E}$-无环的，且 g 是一个 $\mathcal{E}$-拟同构。根据构造， W集中在非正次数。□

引理 2.8. 设 $\mathcal{E}$ 是一个正合范畴，且 $f\colon X \to Y$是$\mathrm{Ch}(\mathcal{E})$ 中的一个态射，其中X和 Y 是 $Ext_{\mathcal{E}}$-分解。若存在一个态射 $h^0\colon X^0 \to Y^{-1}$使得$f^0 = h^0 d_Y^{-1}$，则存在一个 $\mathcal{E}$-拟同构 $g\colon W \to X$，使得 fg是零伦的。

证明. 我们对上同调次数使用归纳法，构造复形 W、 $\mathcal{E}$-拟同构 $g\colon W \to X$以及映射 $h\colon W \to \Sigma^{-1}Y$，使得 h是一个同伦，它证明 fg 是零伦的。

令 $W^n = X^n$ 为 $n \geq 0$。我们断言，对每个 n，都存在一个交换图表

(2.8.1)

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & X^{n-1} & \xrightarrow{f^{n-1}} & Y^{n-1} \\ & & & & & & \downarrow{\scriptstyle d_X^{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle d_Y^{n-1}} \\ W^n & \xrightarrow{p^n}\varepsilon\twoheadrightarrow & P^n & \xrightarrow{q^n}\varepsilon\twoheadrightarrow & X^n & \xrightarrow{f^n} & Y^n & & \\ \downarrow{\scriptstyle d_W^n} & \searrow^{b^n} & & \swarrow_{a^n} & \downarrow{\scriptstyle d_X^n} & & \downarrow{\scriptstyle d_Y^n} & & \\ W^{n+1} & \xrightarrow{p^{n+1}}\varepsilon\twoheadrightarrow & P^{n+1} & \xrightarrow{q^{n+1}}\varepsilon\twoheadrightarrow & X^{n+1} & \xrightarrow{f^{n+1}} & Y^{n+1} & & \end{array}$$

以及态射 $h^{n+1}\colon W^{n+1} \to Y^n$和 $h^n\colon W^n \to Y^{n-1}$，使得 P^n是跨度 $X^n \to P^{n+1} \to W^{n+1}$的拉回，并且

$$f^n q^n p^n = d_Y^{n-1} h^n + h^{n+1} d_W^n \quad \text{and} \quad a^n d_X^{n-1} = 0\,.$$

对于 $n \geq 0$，我们令 $P^n = X^n$ 和 $a^n = b^n = d_X^n$。当 $n = 0$时，态射h^0 是所作假设的一部分，并且我们进一步令 $h^n = 0$ ，其中 $n > 0$。按照这些赋值，该断言对 $n \geq 0$成立。

我们假设，对于某个 $n \leq 0$，(2.8.1) 中的态射和对象存在且具有所需性质。由于 P^n 是一个拉回，存在一个态射 $a^{n-1}\colon X^{n-1} \to P^n$，使得

$$d_X^{n-1} = q^n a^{n-1} \quad \text{and} \quad 0 = b^n a^{n-1}\,.$$

由于 $q^n b^n d_X^{n-2} = 0$ 和 $b^n a^{n-1} d_X^{n-2} = 0$，拉回的泛性质给出 $a^{n-1} d_X^{n-2} = 0$。令 P^{n-1} 为 a^{n-1} 沿 p^n 的拉回，其典范态射为 $q^{n-1}\colon P^{n-1} \to X^{n-1}$ 和 $b^{n-1}\colon P^{n-1} \to W^n$。我们得到

$$\begin{aligned} &d_Y^{n-1}(f^{n-1}q^{n-1} - h^n b^{n-1}) \\ &= f^n d_X^{n-1} q^{n-1} - f^n q^n p^n b^{n-1} + h^{n+1} d_W^n b^{n-1} = 0\,. \end{aligned}$$

由于对于 $n \leq 0$， Y 在次数 $n-1$ 上是左 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}$-无环的，因此存在一个对象 W^{n-1}、一个态射 $h^{n-1}\colon W^{n-1} \to Y^{n-2}$，以及一个 $\mathcal{E}$-收缩 $p^{n-1}\colon W^{n-1} \to P^{n-1}$，使得

$$f^{n-1}q^{n-1}p^{n-1} = h^n b^{n-1} p^{n-1} + d_Y^{n-2} h^{n-1}\,.$$

还需证明 $d_W^{n-1} := b^{n-1}p^{n-1}$。

根据构造， W 是一个复形，而由 $g^n := q^n p^n$ 给出的 $g\colon W \to X$ 是一个链映射。还需注意，以下序列

$$P^n \to X^n \oplus W^{n+1} \to P^{n+1}$$

是 $\mathcal{E}$-合冲。因此，复形 cone(g) 在每个次数上都是 $\mathcal{E}$-无环的， g 是一个$\mathcal{E}$-拟同构，而 fg 是零伦的。□

注记 2.9。 引理 2.7 中诱导的态射不一定唯一。不过，给定两个提升 $X \xleftarrow{\sim} W \to Y$和 $X \xleftarrow{\sim} W' \to Y$，存在拟同构$V \xrightarrow{\sim} W$和 $V \xrightarrow{\sim} W'$，使得它们到 X 的复合相同。因此，可以将引理 2.8 应用于 $V \to W \to Y$与 $V \to W' \to Y$之差。这将得到另一个拟同构和一个零伦态射。从这个意义上说，引理 2.7 中诱导的态射是唯一的。

3. In the derived category

在上一节中，我们看到左 Ext-无循环性在复形的许多运算下表现良好。特别是，我们可以在同伦范畴和导出范畴的背景下考察左 Ext-无循环性。我们用它来定义阿贝尔范畴的导出范畴中标准 t-结构的一个类比。尽管由此得到的有序对不一定是 t-结构，但其「心」是初始正合范畴一个有趣的扩张。

设 $\mathcal{E}$ 是一个正合范畴，其底层加性范畴为 $\mathcal{A}$。我们用 K($\mathcal{A}$) 表示 $\mathcal{A}$ 的同伦范畴，用 D($\mathcal{E}$) 表示 $\mathcal{E}$ 的导出范畴；回顾一下，导出范畴 D($\mathcal{E}$) = K($\mathcal{A}$)/thick(Ac($\mathcal{E}$)) 是同伦范畴关于由 $\mathcal{E}$-无环复形生成的厚子范畴的 Verdier 商；参见 [Nee90，构造 1.5]。当 $\mathcal{E}$ （弱）幂等完备时，$\mathcal{E}$-无环复形本身已构成一个厚子范畴。我们写作 $\mathcal{A}$ ，以强调同伦范畴的构造只依赖于加性结构，而不依赖于正合结构。

我们考察同伦范畴和导出范畴的不同有界性条件：我们用 $\mathrm{D}^b(\mathcal{E})$ 表示有界复形的导出范畴，用 $\mathrm{D}^-(\mathcal{E})$ 表示右有界复形的导出范畴，用 $\mathrm{D}^+(\mathcal{E})$ 表示左有界复形的导出范畴。

推论 3.1. 设 $\mathcal{E}$ 是一个正合范畴，其底加性范畴为 $\mathcal{A}$。对于 $*\in\{\emptyset,b,+,-\}$，下列结论成立：

(1) $\mathrm{K}^*(\mathcal{A})$ 中在次数n 处左 $Ext_{\mathcal{E}}$-无环的复形所构成的子范畴，在直和项、同构和扩张下封闭。*(2)* $\mathrm{D}^*(\mathcal{E})$ 中在次数 n处左 $Ext_{\mathcal{E}}$-无环的复形所构成的子范畴，在直和项、同构和扩张下封闭。

证明. (1) 中的范畴依引理 2.4 在直和项和同构下封闭，并且依引理 2.3 是扩张封闭的。由于根据 (1.4.1)，$\mathcal{E}$-无环性蕴含左 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}$-无环性，故 (1) 中的子范畴包含所有 $\mathcal{E}$- 无环复形。因此 (1) 蕴含 (2)。□

3.2. **t-结构的候选**。阿贝尔范畴的导出范畴具有一个标准 t-结构，其心就是初始阿贝尔范畴。正合范畴的导出范畴未必存在这样的 t-结构，因为任何 t-结构的心都是阿贝尔范畴。在对正合范畴施加额外假设后，可以在正合范畴的导出范畴上构造一个 t-结构；参见 [Hub95，第 2 节。1], [Sch99，第 1.2 节。2] 以及 [HKvRW23，命题 3.5]。这些构造都要求核的存在。利用左 Ext-无环性，我们定义一对子范畴，将这些构造推广开来。我们将给出这对范畴构成 t-结构的充要条件。

设 $\mathcal{E}$ 是一个正合范畴，且 $*\in\{\emptyset,b,+,-\}$。我们将 $\mathrm{D}^*(\mathcal{E})$ 中分别包含正次数和负次数上 $\mathcal{E}$-无环复形的全子范畴记为 $\mathcal{U}^*(\mathcal{E})$ 和$\mathcal{V}^*(\mathcal{E})$。对于阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$，这对 $(\mathcal{U}(\mathcal{A})\ \mathcal{V}(\mathcal{A}))$ 是标准 t-结构。然而，一般而言，$\mathcal{U}(\mathcal{E})\cap\mathcal{V}(\mathcal{E})$ 未必是阿贝尔范畴。

我们用 $\mathcal{V}^*_\ell(\mathcal{E})$ 和 $\mathcal{U}^*_r(\mathcal{E})$ 表示 $\mathrm{D}^*(\mathcal{E})$ 的全子范畴，它们分别包含在负次数上左 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}$-无环以及在正次数上右 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}$-无环的复形。由 (1.4.1) 可得

$$\mathcal{U}^*(\mathcal{E})\subseteq\mathcal{U}^*_r(\mathcal{E})\quad\text{and}\quad\mathcal{V}^*(\mathcal{E})\subseteq\mathcal{V}^*_\ell(\mathcal{E})\,.$$

另请注意，$(\mathcal{U}^*(\mathcal{E}))^{\mathrm{op}}=\mathcal{V}^*(\mathcal{E}^{\mathrm{op}})$ 和 $(\mathcal{U}^*_r(\mathcal{E}))^{\mathrm{op}}=\mathcal{V}^*_\ell(\mathcal{E}^{\mathrm{op}})$。下文我们考虑这一对 $(\mathcal{U}^*(\mathcal{E})\ \mathcal{V}^*_\ell(\mathcal{E}))$，对偶的结果适用于 $(\mathcal{U}^*_r(\mathcal{E})\ \mathcal{V}^*(\mathcal{E}))$。

命题 3.3。设 $\mathcal{E}$是一个正合范畴。对于 $*\in\{\emptyset,b,+,-\}$，这一对$(\mathcal{U}^*(\mathcal{E})\ \mathcal{V}^*_\ell(\mathcal{E}))$ 满足以下条件：

(1) $\mathcal{U}^*(\mathcal{E})$ 和 $\mathcal{V}^*_\ell(\mathcal{E})$ 对直和项、同构和扩张封闭；*(2)* $\Sigma\mathcal{U}^*(\mathcal{E})\subseteq\mathcal{U}^*(\mathcal{E})$ 和 $\mathcal{V}^*_\ell(\mathcal{E})\subseteq\Sigma\mathcal{V}^*_\ell(\mathcal{E})$；以及 *(3)* $(\Sigma\mathcal{U}^*(\mathcal{E}))^\perp=\mathcal{V}^*_\ell(\mathcal{E})$ 属于 $\mathrm{D}^*(\mathcal{E})$。

证明。第 (1) 部分是推论 3.1 的直接结果。第 (2) 部分由构造可得。剩下需要证明 (3)。

我们首先证明 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^*(\mathcal{E})}(\Sigma\mathcal{U}^*(\mathcal{E})\ \mathcal{V}^*_\ell(\mathcal{E}))=0$。令 $X\in\Sigma\mathcal{U}^*(\mathcal{E})$、$Y\in\mathcal{V}^*_\ell(\mathcal{E})$，并令 f: $X\to Y$ 为 $\mathrm{D}^*(\mathcal{E})$ 中的一个态射。不失一般性，我们可以假设

f 是一个复形态射，因为 $\mathcal{U}^*(\mathcal{E})$ 和 $\mathcal{V}_\ell^*(\mathcal{E})$ 在拟同构下封闭。由于 X 在非负次数上是 $\mathcal{E}$-无环的，存在一个 $\mathcal{E}$-拟同构

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & X^{-2} & \xrightarrow{d_X^{-2}} & \ker(d_X^{-1}) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{=} & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & X^{-2} & \xrightarrow{d_X^{-2}} & X^{-1} & \xrightarrow{d_X^{-1}} & X^0 & \longrightarrow & \cdots .
\end{array}$$

因此，我们可以假设 X 集中在负次数上。我们对粗截断 $f^{\leqslant 0}$: $X = X^{\leqslant 0} \to Y^{\leqslant 0}$ 应用引理 2.8，得到一个 $\mathcal{E}$-拟同构 $g\colon W \to X$，使得 $f^{\leqslant 0} g$ 是零伦的。因此， fg 是零伦的，并且 f 在 $\mathsf{D}(\mathcal{E})$ 中为零。

令 $X \in (\Sigma\mathcal{U}^*(\mathcal{E}))^\perp$ 属于 $\mathsf{D}^*(\mathcal{E})$。对于 $n \leq -1$，取一个态射 $a\colon A \to X^n$，使得 $d_X^n a = 0$。我们可以将 a 视为一个链映射 $\hat{a}\colon \Sigma^{-n}A \to X$。由于对 $n \leq -1$ 有 $\Sigma^{-n}A \in \Sigma\mathcal{U}^*(\mathcal{E})$，态射 $\hat{a}$ 在 $\mathsf{D}^*(\mathcal{E})$ 中为零，也就是说，存在一个 $\mathcal{E}$-拟同构 $g\colon Y \to \Sigma^{-n}A$，使得 $\hat{a}g$ 是零伦的。复形 $W := \mathsf{cone}(g)$ 是 $\mathcal{E}$-无环的，我们令 $j\colon \Sigma^{-n}A \to W$ 为典范态射。由于同伦范畴是三角化的，存在一个态射 $h\colon W \to X$，使得 hj 与 $\hat{a}$ 同伦；这意味着存在一个态射 $\sigma\colon A \to X^{n-1}$，使得 $\hat{a}^n - h^n j^n = d_X^{n-1}\sigma$。

我们考虑如下图表

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & A & & & & \\
 & & & & \downarrow{j^n} \searrow^{0} & & & & \\
\cdots & \longrightarrow & W^{n-1} & \xrightarrow{d_W^{n-1}} & W^n & \xrightarrow{d_W^n} & W^{n+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow{h^n} & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{d_X^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} & \longrightarrow & \cdots .
\end{array}$$

由于 W 在每个次数上都是 $\mathcal{E}$-无环的，微分 d_W^{n-1} 分解为 ip，其中 p 是一个$\mathcal{E}$-收缩，且 $i = \ker(d_W^n)$: $K \to W^n$ 是一个 $\mathcal{E}$-膨胀。由于 $d_W^n j^n = 0$，存在唯一的态射 u: $A \to K$ 使得 $j^n = iu$。由于 p 是一个 $\mathcal{E}$-收缩，我们沿 u取 p 的拉回。这给出一个 $\mathcal{E}$-收缩 q: $B \to A$ 以及一个态射v: $B \to W^{n-1}$使得 $uq = pv$。由此得到

$$h^n j^n q = h^n iuq = h^n ipv = h^n d_W^{n-1} v = d_X^{n-1} h^{n-1} v\,.$$

将此与 hj 同伦于$\hat{a}$这一事实相结合，便得到

$$aq = \hat{a}^n q = (h^n j^n + d_X^{n-1}\sigma)q = d_X^{n-1}(h^{n-1}v + \sigma q)\,.$$

由于这对任意 a 和任意 $n \geq 1$都成立，我们已证明 X 在负次数上是左$\mathsf{Ext}_{\mathcal{E}}$-无环的。因此 $X \in \mathcal{V}_\ell^*(\mathcal{E})$。□

注记 3.4。我们通常不认为 ${}^\perp\mathcal{V}_\ell^*(\mathcal{E}) = \Sigma\mathcal{U}^*(\mathcal{E})$ 成立。虽然除了 $\Sigma\mathcal{U}^*(\mathcal{E})$ 之外，尚不清楚哪些复形包含在 ${}^\perp\mathcal{V}_\ell^*(\mathcal{E})$ 中，但子范畴$\Sigma\mathcal{U}_r^*(\mathcal{E})$ 通常不包含在 ${}^\perp\mathcal{V}_\ell^*(\mathcal{E})$ 中：设 $\mathcal{E}$是一个弱幂等完备正合范畴，且 $L \to M \to N$ 是 $\mathcal{E}$中的一个核-余核对。复形

$$X := (\cdots \to 0 \to L \to M \to N \to 0 \to \cdots)$$

其中 M 位于次数 0，在非正次数上是左 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}$-无环的，在非负次数上是右 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}$-无环的；也就是说 $X \in \mathcal{U}_r^*(\mathcal{E}) \cap \mathcal{V}_\ell^*(\mathcal{E})$。然而，恒等态射 id_X 在 $\mathrm{D}^*(\mathcal{E})$ 中为零，当且仅当 $L \to M \to N$ 是一个 $\mathcal{E}$-合冲。

最后，我们给出 $(\mathcal{U}^*(\mathcal{E})\ \mathcal{V}_\ell^*(\mathcal{E}))$ 成为一个 t-结构的条件。态射 $M \to N$ 在正合范畴 $\mathcal{E}$ 中的 $Ext_{\mathcal{E}}$-核 是满足 $L \to M \to N$ 为左 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}$-无环的态射 $L \to M$。由于 t- 结构的心是阿贝尔的，以下结果可推出 [Rum21，命题 6]。

命题 3.5. 设 $\mathcal{E}$ 为一个正合范畴。那么对于任意 $* \in \{\emptyset, -\}$，有序对$(\mathcal{U}^*(\mathcal{E})\ \mathcal{V}_\ell^*(\mathcal{E}))$ 是 $\mathrm{D}^*(\mathcal{E})$ 上的一个 *t-* 结构，当且仅当 $\mathcal{E}$ 中的每个态射都有一个 $Ext_{\mathcal{E}}$- 核。

证明。 我们假设 $\mathcal{E}$ 中的每个态射都有一个 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}$-核。令 $X \in \mathrm{D}^*(\mathcal{E})$。我们按如下方式定义一个复形 $V \in \mathcal{V}_\ell^*(\mathcal{E})$：令 $V^n = X^n$ 和 $d_V^n = d_X^n$，其中 $n \geq -1$。对于 $n < -1$，令 d_V^n 为 d_V^{n+1} 的 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}$-核。根据构造， $V \in \mathcal{V}_\ell^*(\mathcal{E})$，并且我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & X^{-3} & \xrightarrow{d_X^{-3}} & X^{-2} & \xrightarrow{d_X^{-2}} & X^{-1} & \xrightarrow{d_X^{-1}} & X^0 & \xrightarrow{d_X^0} & X^1 & \longrightarrow & \cdots \\
 & & & & & & \downarrow{=} & & \downarrow{=} & & \downarrow{=} & & \\
\cdots & \longrightarrow & V^{-3} & \xrightarrow{d_V^{-3}} & V^{-2} & \xrightarrow{d_V^{-2}} & V^{-1} & \xrightarrow{d_V^{-1}} & V^0 & \xrightarrow{d_V^0} & V^1 & \longrightarrow & \cdots .
\end{array}$$

将引理 2.7 应用于此图表，可得一个 $\mathcal{E}$-拟同构 $g\colon W \to X$，以及一个延拓此图表的链映射 $f\colon W \to V$；这意味着对于 $n \geq -1$， $f^n = g^n = \mathrm{id}$。根据构造， f 的映射锥在非正次数上是 $\mathcal{E}$-无环的，因此 $\mathrm{cone}(f) \in \Sigma^2\mathcal{U}^*(\mathcal{E})$。还需注意，$X \xleftarrow{\sim} W \to V$ 是 $\mathrm{D}^*(\mathcal{E})$ 中的一个态射。因此， $\Sigma^{-1}\,\mathrm{cone}(f) \to X \to V \to \mathrm{cone}(f)$ 是 $\mathrm{D}^*(\mathcal{E})$ 中所需的正合三角。

现在假设 $(\mathcal{U}(\mathcal{E})\ \mathcal{V}_\ell(\mathcal{E}))$ 是一个 t-结构。设 $f\colon L \to M$ 是 $\mathcal{E}$ 中的一个态射。考虑复形 X，其中 f 是次数为 -1 时的微分，其余次数上的微分为零。于是存在一个正合三角 $U \to X \to V \to \Sigma U$，其中 $U \in \Sigma\mathcal{U}(\mathcal{E})$ 且 $V \in \mathcal{V}_\ell(\mathcal{E})$。不失一般性，可假设对于 $n \geq 0$，$U^n = 0$。于是

$$\mathrm{cone}(U \to X) = (\cdots \to U^{-2} \xrightarrow{-d_U^{-2}} U^{-1} \to L \xrightarrow{f} M \to 0 \to \cdots) \cong V \in \mathcal{V}_\ell(\mathcal{E})\,.$$

因此 $U^{-1} \to L$ 是 f的一个$\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}$-核。 □

3.6. **心**。 设 $\mathcal{E}$ 为一个正合范畴。由 [Dye05]，， $\mathrm{D}^*(\mathcal{E})$的三角结构在 $\mathcal{U}^*(\mathcal{E}) \cap \mathcal{V}_\ell^*(\mathcal{E})$上诱导出一个正合结构。具体而言，序列 $L \to M \to N$ 是一个合冲，当且仅当它可嵌入$\mathrm{D}^*(\mathcal{E})$中的一个正合三角 $L \to M \to N \to \Sigma L$。我们将这一正合结构称为容许正合结构（在$\mathrm{D}^*(\mathcal{E})$中）。

我们注意到

$$\mathcal{U}(\mathcal{E}) \cap \mathcal{V}_\ell(\mathcal{E}) = \mathcal{U}^-(\mathcal{E}) \cap \mathcal{V}_\ell^-(\mathcal{E}) \quad \text{and} \quad \mathcal{U}^+(\mathcal{E}) \cap \mathcal{V}_\ell^+(\mathcal{E}) = \mathcal{U}^b(\mathcal{E}) \cap \mathcal{V}_\ell^b(\mathcal{E})$$

因为右方的有界性对交集没有影响。

定义3.7。 设 $\mathcal{E}$ 为一个正合范畴。我们用

(1) $\mathcal{LH}(\mathcal{E})$ 底层加性范畴为 $\mathcal{U}(\mathcal{E}) \cap \mathcal{V}_\ell(\mathcal{E})$ 的正合范畴，并配备容许正合结构；

这意味着 $\mathcal{LH}(\mathcal{E})$ 包含 $\mathrm{D}(\mathcal{E})$ 中在负次数左 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}$-无环、在正次数 $\mathcal{E}$-无环的复形；

(2) $\mathcal{LH}^b(\mathcal{E})$ 底层加性范畴为 $\mathcal{U}^b(\mathcal{E}) \cap \mathcal{V}_\ell^b(\mathcal{E})$ 的正合范畴，并配备容许正合结构；这意味着 $\mathcal{LH}^b(\mathcal{E})$ 包含在正次数及次数 $< n$ （其中 $n \leq 0$ 为某个整数）上 $\mathcal{E}$-无环、且在负次数左 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}$-无环的有界复形。

我们用 $\mathcal{RH}(\mathcal{E})$ 和 $\mathcal{RH}^b(\mathcal{E})$ 表示对偶构造。

我们得到一列全正合子范畴

$$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{LH}^b(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{LH}(\mathcal{E}) .$$

引理 3.8. 设 $\mathcal{E}$ 是一个正合范畴。则

(1) $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{LH}(\mathcal{E})$ 是一个解消子范畴；*(2)* $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{LH}^b$ $(\mathcal{E})$ 是一个有限解消子范畴。

证明. 我们首先证明 $\mathcal{E}$ 在 $\mathcal{LH}(\mathcal{E})$ 中是解消的。设 $X \in \mathcal{LH}(\mathcal{E})$。不妨设 X 集中于非正次数。粗截断给出正合三角

$$\Sigma^{-1} X^{\leqslant -1} \to X^0 \to X \to X^{\leqslant -1} .$$

由于 $\Sigma^{-1} X^{\leqslant -1} \in \mathcal{LH}(\mathcal{E})$ 和 $X^0 \in \mathcal{E} \subseteq \mathcal{LH}(\mathcal{E})$，这诱导出一个 $\mathcal{LH}(\mathcal{E})$-合冲。因此 $X^0 \to X$ 是一个 $\mathcal{LH}(\mathcal{E})$-收缩，且 (R1) 得到满足。

设 $X \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} N$ 是一个 $\mathcal{LH}(\mathcal{E})$-合冲，其中 $M, N \in \mathcal{E}$。这意味着在 $\mathrm{D}(\mathcal{E})$ 中存在一个正合三角 $X \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} N \to \Sigma X$。因此

$$X \cong \Sigma^{-1} \operatorname{cone}(p) = (\cdots \to 0 \to M \xrightarrow{-p} N \to 0 \to \cdots) \in \mathcal{LH}(\mathcal{E}) ,$$

其中 M 和 N 分别位于次数 0 和 1。由于该复形在次数 1 处是 $\mathcal{E}$-无环的，态射 p 是一个 $\mathcal{E}$-收缩。特别地， p在 $\mathcal{E}$ 中有一个核，并且$X \cong \ker(p) \in \mathcal{E}$。因此 (R2) 成立。至此，(1) 的证明完成。

由于 $\mathcal{LH}^b(\mathcal{E})$ 是 $\mathcal{LH}(\mathcal{E})$ 的全正合子范畴， $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{LH}^b(\mathcal{E})$ 的解消子范畴。根据定义， $\mathcal{LH}^b(\mathcal{E})$ 中的每个对象都同构于一个复形

$$X = (\cdots \to 0 \to X^n \to X^{n+1} \to \cdots X^{-1} \to X^0 \to 0 \to \cdots)$$

对某个在负次数上左 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}$-无环的 $n \leq 0$。由于对每个 $0 \geq i \geq n$, $X^{\leqslant i-1} \to \Sigma^{-i} X^i \to X^{\leqslant i}$ 都是一个 $\mathcal{LH}^b(\mathcal{E})$-合冲，序列

$$\cdots \to 0 \to X^n \to X^{n+1} \to \cdots X^{-1} \to X^0 \to X$$

对任意 $0 \geq i \geq n$，它都是 $\mathcal{LH}^b(\mathcal{E})$-无环的，且 $X^i \in \mathcal{E}$。因此， $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{LH}^b(\mathcal{E})$ 是有限解消的。□

命题 3.9。 设 $\mathcal{F}$ 是一个正合范畴。

(1) 若 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ 是一个解消子范畴，则存在正合范畴之间的等价 $\mathcal{LH}(\mathcal{E}) \to \mathcal{LH}(\mathcal{F})$。 *(2)* 若 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ 是一个有限解消子范畴，则存在正合范畴之间的等价$\mathcal{LH}^b(\mathcal{E}) \to \mathcal{LH}^b(\mathcal{F})$。

证明。 设 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ 是解消的。由 HvR20b 的定理 3.11], , 包含函子 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$提升为三角范畴之间的等价 $\mathrm{D}^-(\mathcal{E}) \to \mathrm{D}^-(\mathcal{F})$。根据引理 1.9，此等价限制为一个函子 $\mathcal{LH}(\mathcal{E}) \to \mathcal{LH}(\mathcal{F})$。由于该限制根据 (1.8.1) 是本质满的，因此它是一个等价。

当 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ 是有限凝聚的时，由同样的论证可知，该等价限制为等价 $\mathcal{LH}^b(\mathcal{E}) \to \mathcal{LH}^b(\mathcal{F})$。□

由引理 3.8 可立即得到以下推论。

推论 3.10. 设 $\mathcal{E}$ 为一个正合范畴。则存在等价

$$\mathcal{LH}(\mathcal{E}) \to \mathcal{LH}(\mathcal{LH}(\mathcal{E})) \quad and \quad \mathcal{LH}^b(\mathcal{E}) \to \mathcal{LH}^b(\mathcal{LH}^b(\mathcal{E}))$$

正合范畴的。 □

由于 $\mathcal{E}$ 在 $\mathcal{LH}(\mathcal{E})$ 中是解消的，且在 $\mathcal{LH}^b(\mathcal{E})$ 中是有限凝聚的，故存在三角等价

$$\mathrm{D}^-(\mathcal{E}) \to \mathrm{D}^-(\mathcal{LH}(\mathcal{E})) \quad \text{and} \quad \mathrm{D}^b(\mathcal{E}) \to \mathrm{D}^b(\mathcal{LH}^b(\mathcal{E}))$$

由 [HvR20b，定理 3.11]。容易验证，一个拟逆由取全复形给出。

引理 3.11. 设 $\mathcal{E}$ 是一个正合范畴，且 X 是$\mathcal{LH}^b(\mathcal{E})$上的一个有界复形。那么， X 在负次数上是 $\mathcal{LH}^b(\mathcal{E})$-无环的，当且仅当 X 的全复形在负次数上是左 $Ext_{\mathcal{E}}$-无环的。

证明. 我们对 $n \leq 0$ 使用归纳法，证明当复形 X 满足 $X^{<n} = 0$时该结论成立。

对于 $n = 0$，根据使用锥构造全复形的构造以及引理 2.3，该结论成立。

我们假设该结论对某个 $n \leq 0$成立。设 $X^{<n-1} = 0$。复形X 在次数 n 上是 $\mathcal{LH}^b(\mathcal{E})$-无环的，当且仅当微分 d_X^{n-1} 是一个 $\mathcal{LH}^b(\mathcal{E})$-膨胀；这又当且仅当 cone(d_X^{n-1}) $\in \mathcal{LH}^b(\mathcal{E})$。因此， X 在负次数上是 $\mathcal{LH}^b(\mathcal{E})$-无环的，当且仅当

$$\tilde{X} = (\cdots \to 0 \to \mathrm{cone}(d_X^{n-1}) \to X^{n+1} \to \cdots)$$

是一个复形 $\mathcal{LH}^b(\mathcal{E})$，并且在负次数上是 $\mathcal{LH}^b(\mathcal{E})$-无环的。 X 的全复形˜同构于 X的全复形。由归纳法即可得出该结论。

□

推论 3.12. 设 $\mathcal{E}$ 是一个正合范畴。那么，等价$\mathrm{D}^b(\mathcal{E}) \to \mathrm{D}^b(\mathcal{LH}^b(\mathcal{E}))$ 限制为一个等价 $\mathcal{V}_\ell^b(\mathcal{E}) \to \mathcal{V}^b(\mathcal{LH}^b(\mathcal{E}))$. □

3.13.**三角范畴的极大非负子范畴**。我们以考察 $\mathcal{LH}^*(\mathcal{E})$、对偶构造 $\mathcal{RH}^*(\mathcal{E})$以及命题 3.3 中的那些对的某些性质，来结束本节。

定义 3.14. 设 $\mathcal{T}$是一个三角范畴。称 $\mathcal{T}$中的全子范畴 $\mathcal{C}$ 为非负的，若 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{C}, \Sigma^{<0}\mathcal{C}) = 0$。若对于每个非负的 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{T}$， $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ 都蕴含 $\mathcal{C} = \mathcal{D}$，则称 $\mathcal{C}$ 是极大非负的。

这一性质此前已由 [Jør21]考察过。

根据构造，子范畴 $\mathcal{LH}^*(\mathcal{E})$和 $\mathcal{RH}^*(\mathcal{E})$在 $\mathrm{D}^*(\mathcal{E})$中是非负的。然而，一般而言，它们未必是极大非负的。我们有如下关于 $\mathrm{D}^b(\mathcal{E})$的极大非负子范畴的刻画。

定理 3.15。 设 $\mathcal{E}$ 是一个弱幂等完备正合范畴。以下条件等价:

(1) $\mathcal{E}$ 在$\mathrm{D}^b(\mathcal{E})$中是极大非负的；*(2)* $\mathcal{E} = \mathcal{LH}^b(\mathcal{E}) = \mathcal{RH}^b(\mathcal{E})$；*(3)* $\mathcal{V}_\ell^b(\mathcal{E}) = \mathcal{V}^b(\mathcal{E})$ 且 $\mathcal{U}_r^b(\mathcal{E}) = \mathcal{U}^b(\mathcal{E})$；*(4)* $\mathcal{E}$ 中的每个单态射都是一个 $\mathcal{E}$-膨胀，且每个满态射都是一个 $\mathcal{E}$-收缩。

(2–4)的等价性可由下述内容推出：

引理 3.16. 设 $\mathcal{E}$ 是一个弱幂等完备正合范畴。以下条件等价：

(1) $\mathcal{E} = \mathcal{LH}^b(\mathcal{E})$；*(2)* $\mathcal{V}^b_\ell(\mathcal{E}) = \mathcal{V}^b(\mathcal{E})$；*(3)* $\mathcal{E}$ 中的每个单态射都是一个 $\mathcal{E}$-膨胀。

证明。 </style}蕴含关系 (2) $\implies$ (1) 显然。

假设 (1) 成立。设 $f\colon L \to M$ 是一个单态射。考虑满足 $d^{-1} = f$ 的两项复形。根据引理 1.5，该复形是负次数上的左 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}$-无环复形。由假设，它与一个集中在次数 0 的复形拟同构。因此， f 是一个 $\mathcal{E}$-膨胀。

假设 (3) 成立。设 $X \in \mathcal{V}^b_\ell(\mathcal{E})$，且 n 是 X 不满足 $\mathcal{E}$-无环条件的最小次数。则 X 与一个满足 $Y_{<n} = 0$ 的复形 Y 拟同构。假设 $n < 0$。那么 d^n_Y 必须是一个单态射，并根据假设是一个 $\mathcal{E}$-膨胀。这就产生了矛盾，因此 $n = 0$ 且 $Y \in \mathcal{V}^b(\mathcal{E})$。□

定理 *3.15* 的证明。 我们假设 (1) 成立。由于 $\mathcal{LH}^b(\mathcal{E}) \supseteq \mathcal{E}$ 是非负的，故等号成立。类似地，我们得到 $\mathcal{RH}^b(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$。

我们假设 (3) 成立。设 $\mathcal{C} \supseteq \mathcal{E}$ 是 $\mathrm{D}^b(\mathcal{E})$ 的一个非负子范畴。由命题 3.3 可得

$$\mathcal{C} \subseteq (\Sigma^{>0}\mathcal{C})^\perp \subseteq (\Sigma^{>0}\mathcal{E})^\perp = (\Sigma\mathcal{U}^b(\mathcal{E}))^\perp = \mathcal{V}^b(\mathcal{E})\,.$$

利用命题 3.3 的对偶命题，我们得到 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}^b(\mathcal{E})$。因此 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}^b(\mathcal{E}) \cap \mathcal{V}^b(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$。□

注 3.17。 由定理 3.15 可知：若 $\mathcal{E}$ 在 $\mathrm{D}^b(\mathcal{E})$ 中是极大非负的，则 $\mathcal{E}$ 的正合结构是其底层加性范畴上的极大正合结构。容易看出，在这种情况下， $\mathcal{E}$ 是阿贝尔范畴当且仅当它是预阿贝尔的。

事实上，若 $\mathcal{E}$ 是一个非阿贝尔拟阿贝尔范畴上的极大正合结构，则它在 $\mathrm{D}^b(\mathcal{E})$ 中不是极大非负的。

极大非负子范畴的一个重要例子是 t-结构的心。更一般地，我们通过一种比 t-结构更弱的概念得到非负子范畴：

定义 3.18. 设 $\mathcal{T}$ 是一个三角化范畴。若一对全子范畴 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 属于 $\mathcal{T}$ 满足

(1) $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 对直和项、同构及扩张封闭；(2) $\Sigma\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V} \subseteq \Sigma\mathcal{V}$；且 (3) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma\mathcal{U}, \mathcal{V}) = 0$，则称其为 t-对。

我们称 $\mathcal{H} = \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ 为 t-对 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 的心。

若 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 满足 $(\Sigma\mathcal{U})^\perp = \mathcal{V}$，则称该 t-对为左极大。若$\Sigma\mathcal{U} = {}^\perp\mathcal{V}$，则称其为右极大。若其既左极大又右极大，则称其为极大。

在命题 3.3 中，我们已证明 $(\mathcal{U}^*(\mathcal{E})\ \mathcal{V}^*_\ell(\mathcal{E}))$ 是 $\mathrm{D}^*(\mathcal{E})$ 中的左极大 t-对；对偶地，$(\mathcal{U}^*_r(\mathcal{E})\ \mathcal{V}^*(\mathcal{E}))$ 是 $\mathrm{D}^*(\mathcal{E})$ 中的右极大 t-对。依次应用这些构造，我们得到一个极大 t-对：

定理 3.19. 设 $\mathcal{E}$ 是一个弱幂等完备正合范畴。则$(\mathcal{U}^b_r(\mathcal{LH}^b(\mathcal{E}))\ \mathcal{V}^b_\ell(\mathcal{E}))$ 与 $(\mathcal{U}^b_r(\mathcal{E})\ \mathcal{V}^b_\ell(\mathcal{RH}^b(\mathcal{E})))$ 是 $\mathrm{D}^b(\mathcal{E})$ 中的极大 *t*-对。

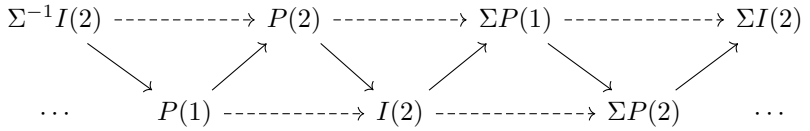
证明. 由应用于 $(\mathcal{LH}^b(\mathcal{E}))^{\mathrm{op}}$ 的命题 3.3，我们得到 (1)、(2) 以及 (3) 的第二部分，并利用推论 3.12 得到 $(\Sigma\mathcal{U}_r^b(\mathcal{LH}^b(\mathcal{E})))^\perp \supseteq \mathcal{V}_\ell(\mathcal{E})$。此外，我们得到

$$\Sigma\mathcal{U}_r^b(\mathcal{LH}^b(\mathcal{E})) \supseteq \Sigma\mathcal{U}^b(\mathcal{E}) \quad \Longrightarrow \quad (\Sigma\mathcal{U}_r^b(\mathcal{LH}^b(\mathcal{E})))^\perp \subseteq (\Sigma\mathcal{U}^b(\mathcal{E}))^\perp = \mathcal{V}_\ell^b(\mathcal{E})\,;$$

后者再次由命题 3.3 成立。 □

定理 3.19 中 t-对的心是 $\mathcal{RH}^b(\mathcal{LH}^b(\mathcal{E}))$ 和 $\mathcal{LH}^b(\mathcal{RH}^b(\mathcal{E}))$。它们一般不必重合：

例子 3.20. 设 k 是一个域，且 $\Lambda = k(1 \leftarrow 2)$ 由 Dynkin 型 A_2 的箭图表示给出的有限维 k-代数。有限维 Λ-模范畴 $\mathrm{mod}(\Lambda)$ 是 Krull–Schmidt 的，并且有三个不可分解对象 $P(1)$、$P(2) = I(1)$ 和 $I(2)$。有界导出范畴 $\mathrm{D}^b(\mathrm{mod}(\Lambda))$ 是一个 Auslander–Reiten 范畴；这意味着它是 Krull–Schmidt 的，并且每个不可分解对象都位于一个几乎分裂三角形中。Auslander–Reiten 箭图是



其中虚线箭头从正合三角的第一个对象指向第三个对象。我们考虑正合范畴 $\mathcal{E} = \mathrm{add}(I(1) \oplus I(2))$。于是

$$\mathcal{RH}^b(\mathcal{E}) = \mathrm{add}(P(1) \oplus P(2) \oplus I(2)) \cong \Lambda\text{-mod} \quad \text{and}$$
$$\mathcal{LH}^b(\mathcal{E}) = \mathrm{add}(P(2) \oplus I(2) \oplus \Sigma P(1))\,.$$

二者都是 t-结构的心，因此是极大非负的。特别是，我们有

$$\mathcal{LH}^b(\mathcal{RH}^b(\mathcal{E})) = \mathcal{RH}^b(\mathcal{E}) \neq \mathcal{LH}^b(\mathcal{E}) = \mathcal{RH}^b(\mathcal{LH}^b(\mathcal{E}))\,.$$

$\mathcal{RH}^b(\mathcal{LH}^b(\mathcal{E}))$ 与 $\mathcal{LH}^b(\mathcal{RH}^b(\mathcal{E}))$ 之间的有界导出等价，可视为由投射维数至多为 n的倾斜模所诱导的 Artin 代数导出等价的一种推广；更一般地，也可视为由阿贝尔范畴中的倾斜对象所诱导的导出等价的推广，参见下例。

例 3.21. 设 A是域 k 上的有限维代数，A-mod 表示有限维左 A-模范畴。对于 $n \geq 1$，设 $T \in A$-mod 是一个 n-倾斜模，即 T是自正交的（对所有 $i \geq 1$，$\mathrm{Ext}_A^i(T,\ T) = 0$），$\mathrm{pd}_A T \leq n$，且存在一个正合序列 $0 \to A \to T^0 \to \cdots \to T^n \to 0$，其中$T^i \in$属于 $\mathrm{add}(T)$，参见 [Hap88，第 III 章]。该范畴

$$T^{\perp_{>0}} \coloneqq \left\{ M \in A\text{-mod} \,\middle|\, \mathrm{Ext}_A^i(T, X) = 0 \,\forall i \geq 1 \right\} \subseteq A\text{-mod}$$

是扩张封闭的，我们令 $\mathcal{E}$ 成为赋予完全正合结构的 $T^{\perp_{>0}}$。那么 $\mathcal{E}$ 在 A-mod 中是余消解的。此外，对于任意 $M \in A$-mod，取一个内射分解可得到一个正合序列

$$0 \to M \to I^0 \to I^1 \to \cdots \to I^{n-1} \to \Omega^{-n} M \to 0$$

其中 I^i 是 $0 \leq i \leq n-1$ 的内射 A-模。此外，通过维数移位，当 $\mathrm{pd}\ T \leq n$ 时，对于所有 $i \geq 1$，有 $\mathrm{Ext}^i_A(T, \Omega^{-n}M) = \mathrm{Ext}^{i+n}_A(T, M) = 0$。因此，$\Omega^{-n}M \in \mathcal{E}$ 和 $\mathcal{E} \subseteq A$-mod 是 n-余消解的；参见第 6.9 节。特别地，

$$A\text{-mod} = \mathcal{RH}^b(\mathcal{E}) = \mathcal{LH}^b(\mathcal{RH}^b(\mathcal{E})).$$

设 $B \coloneqq \mathrm{End}_A(T)^{\mathrm{op}}$。根据 [Miy86 定理 1.5]，将 T视为左 B-模，则它是 n-倾斜的。等价地，$C \coloneqq \mathrm{Hom}_k(T, k) \in B$-mod，其中 $\mathrm{D} = \mathrm{Hom}_k(-, k)$ 是一个 n-余倾斜模；例如参见 [AHC01，第 2]节。与前述情况对偶地，

$$\prescript{0<}{}{\perp} C \coloneqq \left\{ N \in B\text{-mod} \,\middle|\, \mathrm{Ext}^i_B(N, C) = 0 \,\forall i \geq 1 \right\} \subseteq B\text{-mod}$$

它是扩张封闭的，我们令 $\mathcal{F}$ 带有 $\prescript{0<}{}{\perp} C$ 完全正合结构。于是 $\mathcal{F}$是 n-解消的 B-mod 的子范畴。特别地，

$$B\text{-mod} = \mathcal{LH}^b(\mathcal{F}) = \mathcal{RH}^b(\mathcal{LH}^b(\mathcal{F}))\,.$$

Miyashita 的一个经典结果 [Miy86，定理 1.16] 给出了正合范畴之间的等价

$$\mathrm{Hom}_A(T, -)\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}\,.$$

因此，由我们的构造可推出 A-mod 与 B-mod 之间所诱导的导出等价：

$$A\text{-mod} = \mathcal{RH}^b(\mathcal{E}) \supseteq \mathcal{E} \cong \mathcal{F} \subseteq \mathcal{LH}^b(\mathcal{F}) = B\text{-mod}$$

诱导出三角等价

$$\mathrm{D}^*(A\text{-mod}) \leftarrow \mathrm{D}^*(\mathcal{E}) \cong \mathrm{D}^*(\mathcal{F}) \to \mathrm{D}^*(B\text{-mod})$$

根据 $* \in \{\emptyset, b\}$ 使用 [HvR20a]

Artin 环上的有限生成模是 Auslander 意义下的对偶化 R-簇；参见 [AR74]。借助这一点，我们找到了 n-余倾斜模 C。一般而言，这是不可能的。

阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中的对象 T 是 n-倾斜的，当且仅当 $\mathcal{E} = T^{\perp_{>0}}$ 有由 add(T) 给出的足够多的投射对象，且 $\mathcal{E}$ 是 n-余消解的。假设 $B = \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(T)^{\mathrm{op}}$ 是诺特的，因此有限生成左 B-模范畴是阿贝尔范畴。那么 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(T, -)\colon \mathcal{E} \to B$-mod 是全忠实且正合的，并将 $\mathcal{E}$识别为 B-mod 的一个解消子范畴 $\mathcal{F}$。由此得到

$$\mathcal{A} = \mathcal{RH}^b(\mathcal{E}) \supseteq \mathcal{E} \cong \mathcal{F} \subseteq \mathcal{LH}(\mathcal{F}) = B\text{-mod}\,.$$

这未必能得到导出等价，因为有界性条件并不匹配。如果 $\mathcal{F}$ 是有限凝聚的，那么 $\mathcal{LH}(\mathcal{F}) = \mathcal{LH}^b(\mathcal{F})$，根据 [HvR20a]，我们便得到 $\mathcal{A}$ 与 B-mod 之间的有界导出等价。例如，若 $\mathrm{gldim}(B) < \infty$，则 $\mathcal{F}$ 是有限凝聚的。这方面的例子包括诺特概形上相干层中的倾斜丛，参见 [Be˘ı78、Bae88]。

接下来，我们给出一个例子，说明 $\mathrm{D}^b(\mathcal{E})$ 中的极大非负子范畴并非阿贝尔。

例 3.22。设 $\Lambda = k[T]/(T^2)$，其中 k 是任意域，且 $\mathcal{E} = \mathrm{add}(\Lambda) \subseteq \Lambda$-mod。$\mathcal{E}$ 上唯一的正合结构是分裂正合结构，并且所有满态射和所有单态射都是分裂的。因此，由定理 3.15 可知，范畴 $\mathcal{E}$ 在 $\mathrm{D}^b(\mathcal{E})$ 中是极大非负的。然而，范畴 $\mathcal{E}$ 不是阿贝尔范畴，因为存在一个态射，即 $\Lambda \xrightarrow{\cdot T} \Lambda$，它没有满态射-单态射分解。另一方面，$\mathcal{E}$ 在 $\mathrm{D}^-(\mathcal{E}) = \mathrm{D}^-(\Lambda\text{-mod})$ 中不是极大非负的，因为它真包含于 Λ-mod。

这个例子表明，定理 3.19 中的 t-对一般而言不必是 t-结构。此外，由于这些 t-对是极大的，因此它们不包含于任何 t-结构中。

问题 3.23. 设 $\mathcal{E}$ 是一个既非阿贝尔、又极大非负的正合范畴，位于 $\mathsf{D}^b(\mathcal{E})$ 中。$\mathsf{D}^b(\mathcal{E})$ 上是否存在一个有界 t-结构？或者等价地，$\mathsf{D}^b(\mathcal{E})$ 中是否存在一个阿贝尔的极大非负子范畴？

4. 关于 Functorial view on Ext-resolutions

设 $\mathcal{A}$是一个小加性范畴。右 $\mathcal{A}$-模的范畴就是加性函子范畴 $\mathsf{Mod}(\mathcal{A}) := \mathsf{Add}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathcal{A}b)$。根据 [Fre03 定理 5.11]„ 范畴 $\mathsf{Mod}(\mathcal{A})$ 是阿贝尔的，且（余）核恰好是逐点的（余）核。我们用

$$\mathbb{Y}(-)\colon \mathcal{A} \to \mathrm{Mod}(\mathcal{A}), \quad M \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, M)$$

表示米田嵌入。函子 $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(-, X)$ 称为可表函子。在函子范畴 $\mathsf{Mod}(\mathcal{A})$ 中，可表函子是投射的。

称对象 $\mathsf{F} \in \mathsf{Mod}(\mathcal{A})$ 为有限表示的，如果存在一个态射$f\colon\ M \to N$ in $\mathcal{A}$，使得

$$\mathbb{Y}(M) \xrightarrow{\mathbb{Y}(f)} \mathbb{Y}(N) \to \mathsf{F} \to 0$$

在 $\mathsf{Mod}(\mathcal{A})$ 中正合。$\mathsf{Mod}(\mathcal{A})$ 中有限表示对象的子范畴关于扩张和膨胀封闭。我们将配备完全正合结构的 $\mathsf{Mod}(\mathcal{A})$ 中有限表示对象的正合范畴记为 $\mathsf{mod}(\mathcal{A})$。

4.1. 具有 Ext-分解的函子。设 $\mathcal{E}$ 为一个小正合范畴。我们关注 $\mathsf{Mod}(\mathcal{E})$ 中由具有 Ext- 分解的函子组成的子范畴；也就是说，这些函子形如 $\mathsf{coker}(\mathbb{Y}(d_X^{-1}))$，其中 X 是一个 $\mathsf{Ext}_{\mathcal{E}}$-分解。我们称这样的函子具有 $Ext_{\mathcal{E}}$-分解。对于这类函子，我们证明了马蹄引理的一个类比结果。与经典情形不同，该构造涉及一个类似于第 2.6 节结果中的拟同构。

引理 4.2。设 $\mathcal{E}$ 为一个小正合范畴。设 $0 \to \mathsf{E} \to \mathsf{F} \to \mathsf{G} \to 0$ 是 $\mathrm{Mod}(\mathcal{E})$ 中的一个短正合列，且E 和G 分别具有 $Ext_{\mathcal{E}}$-分解 X 和 Z。则存在一个复形 W、一个 $\mathcal{E}$-拟同构 $g\colon\ W \to Z$ 以及一个链映射 $f\colon\ \Sigma^{-1}W \to X$，使得$\mathsf{F} \cong \mathrm{coker}(\mathbb{Y}(d^{-1}{}_{\mathrm{cone}(f)}))$。

特别地，复形 锥(f) 是 F 的 $Ext_{\mathcal{E}}$-分解。

证明。 我们采用与经典马蹄引理相同的论证；例如参见 [Wei94，引理 2.2。8]。由此得到如下交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \ker(\alpha') & \rightarrowtail & \ker(\beta') & \twoheadrightarrow & \ker(\gamma') & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Y}(X^{-1}) & \xrightarrow{\binom{1}{0}} & \mathbb{Y}(X^{-1}) \oplus \mathbb{Y}(Z^{-1}) & \xrightarrow{(0\ 1)} & \mathbb{Y}(Z^{-1}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha'} & & \downarrow{\scriptstyle \beta'} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma'} & & \\
0 & \longrightarrow & \ker(\alpha) & \rightarrowtail & \ker(\beta) & \twoheadrightarrow & \ker(\gamma) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Y}(X^{0}) & \xrightarrow{\binom{1}{0}} & \mathbb{Y}(X^{0}) \oplus \mathbb{Y}(Z^{0}) & \xrightarrow{(0\ 1)} & \mathbb{Y}(Z^{0}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathsf{E} & \rightarrowtail & \mathsf{F} & \twoheadrightarrow & \mathsf{G} & \longrightarrow & 0\,.
\end{array}$$

由于底部两行按构造正合，态射 β 存在，并且由五引理可知它是一个满态射。中间一行由蛇引理可知正合，且到中间一行的垂直映射按构造都是满态射。再次由蛇引理可知，顶行正合。由交换性，复合

具有 $\mathbb{Y}\left(\begin{pmatrix} d_X^{-1} & f^0 \\ 0 & d_Z^{-1} \end{pmatrix}\right)$ 的形式。$\mathbb{Y}(X^{-1}) \oplus \mathbb{Y}(Z^{-1}) \to \ker(\beta) \to \mathbb{Y}(X^0) \oplus \mathbb{Y}(Z^0)$

诱导态射 $\mathbb{Y}(Z^{-2}) \to \ker(\gamma')$ 可经由 $\ker(\beta')$ 分解，因为 $\mathbb{Y}(Z^{-2})$ 是投射的。因此，复合 $\mathbb{Y}(Z^{-2}) \to \mathbb{Y}(X^{-1}) \oplus \mathbb{Y}(Z^{-1})$ 给出一个态射 $f^{-1}\colon Z^{-2} \to X^{-1}$，从而得到以下交换图

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\Sigma^{-1}Z : \cdots & \longrightarrow & Z^{-3} & \xrightarrow{-d_Z^{-3}} & Z^{-2} & \xrightarrow{-d_Z^{-2}} & Z^{-1} & \xrightarrow{-d_Z^{-1}} & Z^0 & \longrightarrow 0 \longrightarrow & \cdots \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle f^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle f^0} & & \downarrow & \downarrow & \\
X \quad : \cdots & \longrightarrow & X^{-2} & \xrightarrow{d_X^{-2}} & X^{-1} & \xrightarrow{d_X^{-1}} & X^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow 0 \longrightarrow & \cdots\,.
\end{array}$$

由引理 2.7，存在一个 $\mathcal{E}$-拟同构 $g\colon \Sigma^{-1}W \to \Sigma^{-1}Z$ 以及一个链映射 $h\colon \Sigma^{-1}W \to X$，将此图表扩展。这意味着对于 $n \geq -2$，$W^n = Z^n$ 和 $g^n = \mathrm{id}$。因此，W、g 和 f 满足所述结论。□

由此引理可知，$\mathsf{Mod}(\mathcal{E})$ 中由具有（有界）$\mathsf{Ext}_{\mathcal{E}}$-分解的函子构成的子范畴是扩张封闭的。因此我们可以定义以下正合范畴：

定义 4.3. 设 $\mathcal{E}$ 是一个小正合范畴。我们记

(1) $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ 为 $\mathsf{Mod}(\mathcal{E})$ 的严格全子范畴，它由具有 $\mathsf{Ext}_{\mathcal{E}}$-分解的函子构成，并赋予完全正合结构。(2) $\mathcal{M}^b(\mathcal{E})$ 为 $\mathsf{Mod}(\mathcal{E})$ 的严格全子范畴，它由具有有界 $\mathsf{Ext}_{\mathcal{E}}$-分解的函子构成，并赋予完全正合结构。

存在如下完全正合子范畴序列

$$\mathcal{M}^b(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{E}) \subseteq \mathrm{mod}(\mathcal{E}) \subseteq \mathrm{Mod}(\mathcal{E})\,.$$

引理 4.4. 设 $\mathcal{E}$ 是一个小正合范畴，且 $\mathsf{F} \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$。若 $\mathsf{F} \cong$ 余核$(\mathbb{Y}(f))$，其中 $f\colon M \to N$ 是 $\mathcal{E}$中的某个态射，则存在一个分裂满态射 t 和一个 $\mathit{Ext}_{\mathcal{E}}$-分解 X，使得 $d_X^{-1} = f \oplus t$。特别地，X 是 F的一个 $\mathit{Ext}_{\mathcal{E}}$-分解。

如果$\mathsf{F} \in \mathcal{M}^b(\mathcal{E})$，那么 $\mathit{Ext}_{\mathcal{E}}$-分解可以取为有界的。

证明。 由于 F $\in \mathcal{M}(\mathcal{E})$，存在一个 Ext$_{\mathcal{E}}$-分解 Y，其中 F $\cong$ 余核($\mathbb{Y}(d_Y^{-1})$)。于是存在交换图表

$$\begin{array}{ccccc} Y^{-1} & \xrightarrow{u^{-1}} & M & \xrightarrow{v^{-1}} & Y^{-1} \\ \downarrow{\scriptstyle d_Y^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle d_Y^{-1}} \\ Y^0 & \xrightarrow{u^0} & N & \xrightarrow{v^0} & Y^0 \end{array}$$

以及态射 $\sigma\colon Y^0 \to Y^{-1}$ 和 $\tau\colon N \to M$，使得

$$\mathrm{id}_{Y^0} - v^0u^0 = d_Y^{-1}\sigma \quad \text{and} \quad \mathrm{id}_N - u^0v^0 = f\tau\,.$$

我们得到一个复形的同构

$$\begin{array}{ccccccc} Y^{-3} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_Y^{-3} \end{pmatrix}} & Y^0 \oplus M \oplus Y^{-2} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&d_Y^{-2} \\ 0&0&0 \end{pmatrix}} & Y^0 \oplus M \oplus Y^{-1} \oplus N & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0&0&d_Y^{-1}&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}} & Y^0 \oplus N \\ \downarrow{\scriptstyle =} & & \downarrow{\scriptstyle =} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\ Y^{-3} & \longrightarrow & Y^0 \oplus M \oplus Y^{-2} & \longrightarrow & Y^0 \oplus M \oplus Y^{-1} \oplus N & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&f&0&0 \end{pmatrix}} & Y^0 \oplus N\,. \end{array}$$

顶行是 Y 与一个分裂无环复形的直和；因此它在负次数上是左 Ext$_{\mathcal{E}}$-无环的。因此，底行是一个 Ext$_{\mathcal{E}}$-分解，而第 (-1) 个微分是 $f \oplus t$，其中 t 是一个分裂满态射。□

引理 4.5。 设 $\mathcal{E}$ 是一个小正合范畴。那么 $\mathcal{M}(\mathcal{E})$和 $\mathcal{M}^b(\mathcal{E})$ 在$\mathrm{mod}(\mathcal{E})$中对收缩封闭。

证明。 设 E $\to$ F $\to$ G 是一个 mod($\mathcal{E}$)-合冲。我们假设 F,G $\in \mathcal{M}(\mathcal{E})$，且 G 存在一个 Ext$_{\mathcal{E}}$-分解 Z。由于 E 是有限表示的，存在一个态射$d_X^{-1}: X^{-1} \to X^0$，使得 E $\cong$ coker($\mathbb{Y}(d_X^{-1})$)。按照引理 4.2 证明中的相同论证，我们由 d_X^{-1} 和 Z 得到一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} Z^{-2} & \xrightarrow{-d_Z^{-2}} & Z^{-1} \\ \downarrow{\scriptstyle f^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle f^0} \\ X^{-1} & \xrightarrow{d_X^{-1}} & X^0\,, \end{array}$$

使得 F $\cong$ coker($\mathbb{Y}(\begin{pmatrix} d_X^{-1} & f^0 \\ 0 & d_Z^{-1} \end{pmatrix})$)。利用引理 4.4，存在一个分裂满态射 t 和一个 Ext$_{\mathcal{E}}$-分解 Y，使得

$$d_Y^{-1} = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & d_X^{-1} & f^0 \\ 0 & 0 & d_Z^{-1} \end{pmatrix}.$$

将 d_X^{-1} 替换为 $t \oplus d_X^{-1}$ 后，也可以假设 $d_Y^{-1} = \begin{pmatrix} d_X^{-1} & f^0 \\ 0 & d_Z^{-1} \end{pmatrix}$。由引理 2.7 可得一个复形 W，满足 $d_W^{-1} = d_Y^{-1}$，一个 $\mathcal{E}$-拟同构 $W \to X$，以及一个复形态射

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & W^{-2} & \xrightarrow{d_Y^{-2}} & X^{-1} \oplus Z^{-1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_X^{-1} & f^0 \\ 0 & d_Z^{-1} \end{pmatrix}} & X^0 \oplus Z^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (0\ 1)} & & \downarrow{\scriptstyle (0\ 1)} & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & Z^{-2} & \xrightarrow{d_Z^{-2}} & Z^{-1} & \longrightarrow & Z^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots\,. \end{array}$$

该态射的去悬锥在负次数上是左 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}$-无环的，且移去 $Z^0 \xrightarrow{1} Z^0$ 后，它在正次数上为零。容易验证，其第 (-1) 个微分是 E 的一个表示。因此 $\mathrm{E} \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$。还需注意，若 W 和 Z 有界，则它们的映射锥也有界。因此，F，$\mathrm{G} \in \mathcal{M}^b(\mathcal{E})$ 蕴含 $\mathrm{E} \in \mathcal{M}^b(\mathcal{E})$。□

Yoneda 函子限制为函子 $\mathcal{E} \to \mathcal{M}(\mathcal{E})$ 和 $\mathcal{E} \to \mathcal{M}^b(\mathcal{E})$。然而，这些函子未必是（完全）正合嵌入，因为 $\mathcal{E}$-收缩未必会映射为 $\mathrm{Mod}(\mathcal{E})$ 中的满态射。为了解决这个问题，我们考虑 $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ 和 $\mathcal{M}^b(\mathcal{E})$ 的局部化。

4.6. 按满射渗透子范畴进行局部化。我们回顾 [HvR20a] 中引入的正合范畴的局部化。这一构造在局部化上赋予一个（膨胀/收缩）正合结构。不过，我们不会考虑由此诱导的正合结构，因为它与 $\mathrm{Mod}(\mathcal{A})$ 的局部化上的正合结构不相容；参见第 4.12节。

设 $\mathcal{E}$ 是一个正合范畴。若一个全子范畴 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$ 是 Serre 子范畴，且对于 $\mathcal{E}$ 中满足 $M \in \mathcal{C}$ 的每个态射 $L \to M$，它都是 $\mathcal{E}$-可容许的；也就是说，该态射可分解为一个 $\mathcal{E}$-收缩，后接一个 $\mathcal{E}$-膨胀，则称 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$ 为满射渗透的。

注记4.7。这是遵循 [HKvR22]的亏映射渗流的定义。在[HvR20a的定义6.1] 中，这一概念称为容许满射渗透，而亏映射渗流是一个较弱的概念；见 [HvR20a的引理6.3]。

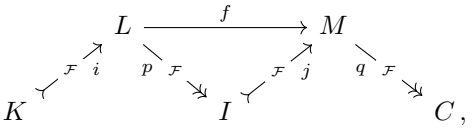
设 $\mathcal{C}$ 是正合范畴 $\mathcal{E}$的亏格满射渗透子范畴。类 $S_{\mathcal{C}}$由核属于 $\mathcal{C}$ 的 $\mathcal{E}$-收缩与余核属于 $\mathcal{C}$ 的 $\mathcal{E}$-膨胀的有限复合构成，它是一个右乘法系，亦称右分式演算；见[HvR20a的定理6.14]。于是

$$\mathcal{E}/\mathcal{C} := \mathcal{E}[S_{\mathcal{C}}^{-1}]$$

是 $\mathcal{E}$ 关于 $\mathcal{C}$的局部化。

引理4.8。 设 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ 是正合范畴 $\mathcal{F}$的亏映射封闭的全正合子范畴。设 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$ 是在 $\mathcal{F}$中亏映射渗流的子范畴。则 $\mathcal{C}$在 $\mathcal{E}$ 中亏映射渗流，且典范函子 $\mathcal{E}/\mathcal{C} \to \mathcal{F}/\mathcal{C}$ 是一个满嵌入。

证明。 我们首先证明 $\mathcal{C}$ 在 $\mathcal{E}$ 中是亏映射渗流的。由于 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{F}$ 中的 Serre 子范畴，且 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ 是全正合子范畴，因此 $\mathcal{C}$ 也是 $\mathcal{E}$ 中的 Serre 子范畴。设 $f\colon L \to M$ 是 $\mathcal{E}$ 中满足 $M \in \mathcal{C}$ 的一个态射。根据假设， f 是 $\mathcal{F}$-可容许的；也就是说，存在一个分解



其中 (i,p) 和 (j,q) 是 $\mathcal{F}$-正合对。由于 $M \in \mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}$ 是 Serre 子范畴，我们也有 $I, C \in \mathcal{C}$。由于 $L, I \in \mathcal{E}$，且 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ 是亏映射封闭的，我们有 $K \in \mathcal{E}$。特别地，(i,p) 和 (j,q) 是 $\mathcal{E}$- 正合对。

对于第二个断言，只需证明根据 Kra22，引理 1.2， $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ 相对于 $\mathcal{F}$ 中的右乘法系 $S_{\mathcal{C}}$ 是右共尾的 [5]; 如果对于每个 s，都有 $M \to N$： $S_{\mathcal{C}}$ 中的态射，且满足 $N \in \mathcal{E}$，那么存在一个 t: $L \to M$，满足 $L \in \mathcal{E}$，使得 st： $L \to N$是 $S_{\mathcal{C}}$中的态射，则称 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ 相对于 $S_{\mathcal{C}}$ 是右共尾的。

设 $s\colon\ M \to N$ 是 $S_{\mathcal{C}}$ 中的态射，且满足 $N \in \mathcal{E}$。根据 HvR20a，第 6 节，态射 s 是 $\mathcal{F}$-可容许的，并且 $C =$coker(s)和 $K =$ker(s)属于 $\mathcal{C}$。由此得到两个$\mathcal{F}$-合冲

$$K \rightarrowtail_{\mathcal{F}} M \twoheadrightarrow_{\mathcal{F}} I \quad \text{and} \quad I \rightarrowtail_{\mathcal{F}} N \twoheadrightarrow_{\mathcal{F}} C \ .$$

由于 $\mathcal{E}$ 在 $\mathcal{F}$ 中是亏映射封闭的，且 $N,\ C \in \mathcal{E}$，我们也有 $I \in \mathcal{E}$。由于 $\mathcal{E}$ 在 $\mathcal{F}$ 中对扩张封闭，且 $K,\ I \in \mathcal{E}$，因此可得 $M \in \mathcal{E}$。对于 $t = \mathrm{id}_M$，复合$st\colon\ M \to N$属于 $S_{\mathcal{C}}$，且 $M,\ N \in \mathcal{E}$。因此，$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ 在 $S_{\mathcal{C}}$ 中右共尾。□

4.9. **可消函子**。设 $\mathcal{E}$ 是一个小正合范畴。若存在一个 $\mathcal{E}$-收缩 d，使得 F $\cong$ coker($\mathbb{Y}(d)$)，则对象 F $\in$ Mod($\mathcal{E}$) 称为可消去的。我们用 eff($\mathcal{E}$) 表示 Mod($\mathcal{E}$) 中可消对象所构成的严格全子范畴。可消函子是更大一类函子（即局部可消函子）中的有限表示对象。若对于任意 $A \in \mathcal{E}$ 和满足 F(A) 的 $x \in$，都存在一个 $\mathcal{E}$-收缩 $p\colon\ B \to A$，使得 F(p)(x) $= 0$，则对象 F $\in$Mod($\mathcal{E}$) 称为局部可消去的。我们用 Eff($\mathcal{E}$) 表示局部可消对象所构成的严格全子范畴。可得

$$\mathrm{eff}(\mathcal{E}) = \mathrm{Eff}(\mathcal{E}) \cap \mathrm{mod}(\mathcal{E})\,; \tag{4.9.1}$$

参见 [Eno21，引理 2.13]，另见 [HKvR22，命题 3.20]。

注 4.10。文献中（局部）可消函子的记号并不统一。在 [Gro57，2.2] 和 [Kel90，附录 A] 中，局部可消函子称为可消函子；而在 [HKvR22，定义 3.19] 中，局部可消函子称为弱可消函子。本文采用的记号遵循 [Kra22，第 2 节3]。

由 [Kel90，附录 A],可知，子范畴 Eff($\mathcal{E}$) $\subseteq$ Mod($\mathcal{E}$) 是 Serre 子范畴；而由[HKvR22，命题 3.23、推论 3.24], 可知，子范畴 eff($\mathcal{E}$) $\subseteq$ mod($\mathcal{E}$) 是亏映射渗流的。因此局部化存在，并且

$$\mathrm{mod}(\mathcal{E})/\,\mathrm{eff}(\mathcal{E}) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{E})/\,\mathrm{Eff}(\mathcal{E})$$

是到一个阿贝尔范畴中的全嵌入。此外，将 mod($\mathcal{E}$)/eff($\mathcal{E}$) 视为 Mod($\mathcal{E}$)/Eff($\mathcal{E}$) 的子范畴时，它是扩张封闭的；这由 [Nor24，定理 3.4]得出。

我们将 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$ 记为底层加性范畴为 mod($\mathcal{E}$)/eff($\mathcal{E}$) 并赋予完全正合结构的正合范畴。这是 [Rum20 第 3] 节中引入的左商范畴。根据 [Rum20 定理 4]，$\mathcal{E}$ 在 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$ 中是半解消的。

注记 4.11。根据 [Kel90 附录 A], ，局部化 Mod($\mathcal{E}$)/Eff($\mathcal{E}$) 等价于 Mod($\mathcal{E}$) 的左正合函子子范畴。根据 [Nor24 定理 3.4]，子范畴 mod($\mathcal{E}$)/eff($\mathcal{E}$) 可识别为紧对象子范畴。

注记 4.12。mod($\mathcal{E}$)/eff($\mathcal{E}$) 上的完全正合结构未必与由局部化诱导的正合结构一致。$\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$ 上的正合结构是极大正合结构，它包含 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$中的所有核-余核对。然而，在 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$ 中存在一些核-余核对，它们并非由 mod($\mathcal{E}$) 中的合冲诱导而来。例如，对于具有 Ext$_{\mathcal{E}}$-分解 X 的 F $\in \mathcal{M}(\mathcal{E})$，序列

$$\mathrm{coker}(d_X^{-2}) \to \mathbb{Y}(X^0) \to \mathsf{F}$$

根据引理 5.2，它是 mod($\mathcal{E}$)/eff($\mathcal{E}$) 中的一个核-余核对。然而，它不是 mod($\mathcal{E}$) 中的核-余核对，因为态射 coker(d_X^{-2}) $\to$ ker($\mathbb{Y}(X^0)$ $\to$ F) 在 mod($\mathcal{E}$) 中未必是同构。

推论4.13。 设 $\mathcal{E}$ 是一个小正合范畴。那么$\mathrm{eff}(\mathcal{E})$是 $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ 和 $\mathcal{M}^b(\mathcal{E})$中的亏映射渗流子范畴。

证明。 由引理4.8可知这一点，因为 eff($\mathcal{E}$) $\subseteq$mod($\mathcal{E}$) 是亏映射渗流的，而根据引理 4.5， $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ 和 $\mathcal{M}^b(\mathcal{E})$ 是 mod($\mathcal{E}$) 的亏映射封闭全正合子范畴。□

5. In the left quotient category

我们已经证明，eff($\mathcal{E}$) 在亏映射封闭的全正合子范畴中是亏映射渗流的

$$\mathcal{M}^b(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{E}) \subseteq \mathrm{mod}(\mathcal{E})\,.$$

根据引理4.8，我们得到一串子范畴

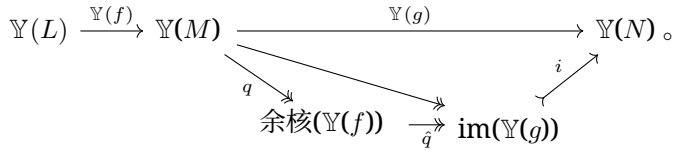
$$\mathcal{M}^b(\mathcal{E})/\,\mathrm{eff}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{E})/\,\mathrm{eff}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})\,.$$

我们希望为这条链中的每个局部化赋予一个正合结构。

首先，我们证明米田嵌入将左 Ext$_\mathcal{E}$-无环序列映为阿贝尔范畴 Mod($\mathcal{E}$)/ eff($\mathcal{E}$) 中的无环序列。特别地，Ext$_\mathcal{E}$-分解会变成分解。

引理 5.1。 设 $\mathcal{E}$ 是一个小正合范畴， $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ 是 $\mathcal{E}$ 中的一个序列，且满足$gf = 0$。该序列是左 *Ext*$_\mathcal{E}$-无环的，当且仅当 $\mathbb{Y}(L) \to \mathbb{Y}(M) \to \mathbb{Y}(N)$ 在$\mathrm{Mod}(\mathcal{E})/\mathrm{Eff}(\mathcal{E})$中是无环的，或者等价地，是 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$-无环的。

证明。 我们考虑如下交换图



设 j: K $\to$coker($\mathbb{Y}(f)$) 是 $\hat{}q$ 的核。那么，当且仅当 K 是局部可消去的时， $\mathbb{Y}(L)$ $\to \mathbb{Y}(M)$ $\to \mathbb{Y}(N)$ 是无环的。

我们假设 $L \to M \to N$ 是左 Ext$_\mathcal{E}$-无环的。令 $A \in \mathcal{E}$ 和 $x \in$ K(A)。由于 q 是满态射，存在元素 $a \in \mathbb{Y}(M)(A)$ $=$Hom$_\mathcal{E}(A, M)$，使得$j(A)(x) = p(A)(a)$。于是

$$ga = \mathbb{Y}(g)(A)(a) = (i\hat{q}q)(A)(a) = (i\hat{q}j)(A)(x) = 0\,.$$

由于该序列在 M 中是左 Ext$_\mathcal{E}$-无环的，因此存在一个 $\mathcal{E}$-收缩 $p\colon B \to A$以及一个态射 $h\colon B \to L$，使得 $ap = fh$。由自然性可得如下交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathsf{K}(A) & \xrightarrow{j(A)} & \mathrm{coker}(\mathbb{Y}(g))(A) & \xleftarrow{q(A)} & \mathbb{Y}(M)(A) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathsf{K}(p)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{coker}(\mathbb{Y}(g)(p)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{Y}(M)(p)} \\ \mathsf{K}(B) & \xrightarrow[j(B)]{} & \mathrm{coker}(\mathbb{Y}(g))(B) & \xleftarrow[q(B)]{} & \mathbb{Y}(M)(B) \xleftarrow[\mathbb{Y}(g)(B)]{} \mathbb{Y}(L)(B)\,. \end{array} \tag{5.1.1}$$

图追逐得出 ($j(B)$K(p))(x) $= 0$。因此 K(p)(x) $= 0$ ，且 K 是局部可消去的。

反过来，假设 K 是局部可消去的。设 $a\colon A\to M$ 是一个满足 $ga=0$ 的态射。这意味着 $\mathbb{Y}(g)(A)(a)=0$。因此 $\mathbb{Y}(qq)(A)(a)=0$，并且存在$x\in \mathsf{K}(A)$，使得 $j(A)(x)=q(A)(a)$。由于 K 是局部可消去的，存在一个$\mathcal{E}$-满射 $p\colon B\to A$，使得 $\mathsf{K}(p)(x)=0$。沿着 (5.1.1) 进行图追逐可得

$$q(B)(ap)=(q(B)\mathbb{Y}(M)(p))(a)=0\,.$$

因此存在 $h\in\mathbb{Y}(L)(B)$，使得 $gh=\mathbb{Y}(g)(B)(h)=ap$。 □

引理 5.2。设 $\mathcal{E}$ 是一个小正合范畴。

(1) 对于每个 $F\in\mathcal{M}(\mathcal{E})$，存在一个 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$-合冲 $E\to\mathbb{Y}(M)\to F$，其中 $E\in\mathcal{M}(\mathcal{E})$。*(2)* 对于每个 $F\in\mathcal{M}^b(\mathcal{E})$，存在一个 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$-合冲 $E\to\mathbb{Y}(M)\to F$，其中 $E\in\mathcal{M}^b(\mathcal{E})$。

证明。 假设 $\mathsf{F}\in\mathcal{M}(\mathcal{E})$，并令 X 为 F 的一个 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}$-分解。根据引理 5.1

$$\cdots\to\mathbb{Y}(X^{-2})\xrightarrow{\mathbb{Y}(d_X^{-2})}\mathbb{Y}(X^{-1})\xrightarrow{\mathbb{Y}(d_X^{-1})}\mathbb{Y}(X^0)\to\mathsf{F}\to 0$$

在 $\mathsf{Mod}(\mathcal{E})/\mathsf{Eff}(\mathcal{E})$ 中是无环的。特别地，

$$\mathrm{coker}(\mathbb{Y}(d_X^{-2}))\to\mathbb{Y}(X^0)\to\mathsf{F}$$

是一个 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$-合冲。显然，$\mathrm{coker}(\mathbb{Y}(d_X^{-2}))$ 落在所需的范畴中。 □

命题 5.3. 设 $\mathcal{E}$ 是一个小正合范畴。范畴 $\mathcal{M}(\mathcal{E})/\mathrm{eff}(\mathcal{E})$与 $\mathcal{M}^b(\mathcal{E})/\mathrm{eff}(\mathcal{E})$ 在 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$ 中是扩张封闭的。

证明。 我们令 $*\in\{\emptyset,b\}$。设 $\mathsf{E}\to\mathsf{F}\to\mathsf{G}$ 是一个 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$-合冲，其中 $\mathsf{E},\mathsf{G}\in\mathcal{M}^*(\mathcal{E})$。我们要证明 $\mathsf{F}\in\mathcal{M}^*(\mathcal{E})$。

步骤 1. 若 $\mathsf{E}\cong\mathbb{Y}(M)$ 且 $\mathsf{G}\in\mathcal{M}^*(\mathcal{E})$，则 $\mathsf{F}\in\mathcal{M}^*(\mathcal{E})$。

设 Z 是 G 的一个（有界）$\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}$-分解。我们考虑交换图

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathrm{coker}(\mathbb{Y}(d_Z^{-2})) & \xrightarrow{=} & \mathrm{coker}(\mathbb{Y}(d_Z^{-2})) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})} \\
\mathbb{Y}(M) & \xrightarrow{\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})} & \mathsf{P} & \xrightarrow{\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})} & \mathbb{Y}(Z^0) \\
\downarrow{\scriptstyle =} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})} \\
\mathbb{Y}(M) & \xrightarrow{\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})} & \mathsf{F} & \xrightarrow{\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})} & \mathsf{G}
\end{array}$$

其中右下方块是一个拉回方块，且每个三项行或列都是 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$-合冲。根据 [Rum20, 命题 5], ，Yoneda 函子诱导出一个全正合嵌入 $\mathcal{E}\to\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$。因此 $\mathsf{P}\cong\mathbb{Y}(Y^0)$，并通过对 $n<0$ 设定$Y^n:=Z^n$，我们得到 F 的一个 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}$-分解。我们已经证明 $\mathsf{F}\in\mathcal{M}^*(\mathcal{E})$。

第 2 步。 对于任意 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$-收缩 $\mathbb{Y}(L)\to\mathsf{E}$，都存在一个 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$-收缩 $\mathbb{Y}(N)\to\mathsf{G}$，其核属于 $\mathcal{M}^*(\mathcal{E})/\mathsf{eff}(\mathcal{E})$，并且有一个交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Y}(L) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Y}(L\oplus N) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Y}(N) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})} \\
\mathsf{E} & \xrightarrow{\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})} & \mathsf{F} & \xrightarrow{\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})} & \mathsf{G}
\end{array}$$

其中每一行都是一个 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$-合冲，每个垂直态射都是一个 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$-收缩。

˜由引理 5.2，存在一个 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$-收缩 $\tilde{p}\colon \mathbb{Y}(N) \to \mathsf{G}$，其核属于$\mathcal{M}^*(\mathcal{E})/\mathsf{eff}(\mathcal{E})$。我们沿着 $\mathsf{F} \to \mathsf{G}$ 对 $\tilde{p}$ 作拉回，得到交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\mathsf{E} & \overset{\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})}{\rightarrowtail} & \mathsf{P} & \overset{\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})}{\twoheadrightarrow} & \mathbb{Y}(\tilde{N}) \\
\downarrow{\scriptstyle =} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})} \\
\mathsf{E} & \overset{\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})}{\rightarrowtail} & \mathsf{F} & \overset{\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})}{\twoheadrightarrow} & \mathsf{G}\,.
\end{array}$$

由于 $\mathsf{P} \in \mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$，存在一个 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$-收缩 $\mathbb{Y}(N) \to \mathsf{P}$。根据 [Rum20，命题 5], , Yoneda 函子诱导出一个全正合嵌入 $\mathcal{E} \to \mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$，因此 ˜ ˜$\mathbb{Y}(N) \to \mathbb{Y}(N)$ 是某个 $\mathcal{E}$-收缩 $N \to N$ 的像。由步骤 1 和蛇引理，复合 $\mathbb{Y}(N) \to \mathsf{G}$ 的核属于 $\mathcal{M}^*(\mathcal{E})/\mathsf{eff}(\mathcal{E})$。现在得到交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Y}(L) & \overset{\varepsilon}{\longrightarrowtail} & \mathbb{Y}(L\oplus N) & \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} & \mathbb{Y}(N) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})} & & \downarrow{\scriptstyle =} \\
\mathsf{E} & \overset{\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})}{\rightarrowtail} & \mathsf{E}\oplus\mathbb{Y}(N) & \overset{\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})}{\twoheadrightarrow} & \mathbb{Y}(N) \\
\downarrow{\scriptstyle =} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})} \\
\mathsf{E} & \overset{\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})}{\rightarrowtail} & \mathsf{F} & \overset{\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})}{\twoheadrightarrow} & \mathsf{G}
\end{array}$$

其中每一行都是一个 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$-合冲，且每个竖直态射都是一个 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$-收缩。

步骤 3。 若 $\mathsf{E}, \mathsf{G} \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$，则 $\mathsf{F} \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$。

设 X 是 E 的 $\mathsf{Ext}_{\mathcal{E}}$-分解。记 $\mathsf{E}^n := \mathsf{coker}(\mathbb{Y}(d_X^{n-1}))$，其中 $n \le 0$；并记 $\mathsf{F}^0 := \mathsf{F}$，$\mathsf{G}^0 := \mathsf{G}$。对于 $n \le 0$，我们依次将步骤 2 应用于 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$-收缩 $p^n\colon \mathbb{Y}(X^n) \to \mathsf{E}^n$ 以及 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$-合冲 $\mathsf{E}^n \to \mathsf{F}^n \to \mathsf{G}^n$。这些 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$-收缩的核给出一个 a $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$-合冲 $\mathsf{E}^{n-1} \to \mathsf{F}^{n-1} \to \mathsf{G}^{n-1}$，其中 $\mathsf{G}^{n-1} \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$；这是因为根据引理 5.1，$p^n$ 的核是 $\mathsf{E}^{n-1} \to \mathbb{Y}(X^n)$。因此，我们得到一个 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$-无环序列

$$\cdots \to \mathbb{Y}(Y^{-1}) \to \mathbb{Y}(Y^0) \to \mathsf{F}\,.$$

根据引理 5.1，复形 Y 是 F 的 $\mathsf{Ext}_{\mathcal{E}}$-分解，因此 $\mathsf{F} \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$。

步骤 4。 若 $\mathsf{E}, \mathsf{G} \in \mathcal{M}^b(\mathcal{E})$，则 $\mathsf{F} \in \mathcal{M}^b(\mathcal{E})$。

若 $\mathsf{E} \in \mathcal{M}^b(\mathcal{E})$，则我们可以假设上一步中的 $\mathsf{Ext}_{\mathcal{E}}$-分解 X 是有界的。这意味着存在一个 $n \le 0$，使得 $\mathsf{E}^n = 0$，因此 $\mathsf{F}^n \cong \mathsf{G}^n$。所以，$\mathsf{G}^n$ 的任意 $\mathsf{Ext}_{\mathcal{E}}$-分解也是 F^n的一个 $\mathsf{Ext}_{\mathcal{E}}$-分解。由于 $\mathsf{G}^n \in \mathcal{M}^b(\mathcal{E})$，存在一个有界的 $\mathsf{Ext}_{\mathcal{E}}$-分解。特别地，这给出了 F 的一个有界 $\mathsf{Ext}_{\mathcal{E}}$-分解，且 $\mathsf{F} \in \mathcal{M}^b(\mathcal{E})$。□

定义 5.4. 设 $\mathcal{E}$ 是一个小正合范畴。我们记

(1) $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ 配备了 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$ 中完全正合结构的范畴 $\mathcal{M}(\mathcal{E})/\mathsf{eff}(\mathcal{E})$；以及

(2) $\mathcal{R}^b(\mathcal{E})$ 配备了 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$ 中完全正合结构的范畴 $\mathcal{M}^b(\mathcal{E})/\mathrm{eff}(\mathcal{E})$。

引理 5.5. 设 $\mathcal{E}$ 是一个小正合范畴。则

(1) $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{E})$ 是解消子范畴；*(2)* $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{R}^b(\mathcal{E})$ 是有限解消子范畴。

证明。由于 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$ 依 [Rum20 的定理 4] 是半解消的，且 $\mathcal{R}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$ 是全正合子范畴，故 $\mathcal{E}$ 在 $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ 与 $\mathcal{R}^b(\mathcal{E})$ 中是解消的。由引理 5.1，$\mathcal{E}$在 $\mathcal{R}^b(\mathcal{E})$ 中是有限凝聚的。□

5.6. **关于消解子范畴**。设 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ 是一个全正合子范畴。限制给出一个函子

$$r\colon \mathrm{Mod}(\mathcal{F}) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{E})\,.$$

由于 Mod($\mathcal{E}$) 与 Mod($\mathcal{F}$) 中的拉回和推出分别是逐点拉回和逐点推出，函子 r 保持拉回和推出。

引理 5.7. 设 $\mathcal{F}$ 为一个小正合范畴，$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ 为一个解消子范畴。对 $\mathsf{F} \in \mathrm{Mod}(\mathcal{F})$，有 $\mathsf{F} \in \mathrm{Eff}(\mathcal{F})$ 当且仅当 $r(\mathsf{F}) \in \mathrm{Eff}(\mathcal{E})$。

证明。对于正向，假设 $\mathsf{F} \in$ Eff($\mathcal{F}$)。设 $N \in \mathcal{E}$ 与 $x \in r(\mathsf{F})(N)$。由于 $x \in r(\mathsf{F})(N) = \mathsf{F}(N)$，由假设存在一个 $\mathcal{F}$-收缩 $p\colon M \to N$，满足 $M \in \mathcal{F}$ 且 $\mathsf{F}(p)(x) = 0$。由于 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ 是解消的，存在一个 $\mathcal{F}$-收缩$q\colon L \to M$，满足 $L \in \mathcal{E}$。于是复合 pq 是一个 $\mathcal{E}$-收缩，且 $r(\mathsf{F})(pq)(x) = \mathsf{F}(pq)(x) = 0$。因此 $r(\mathsf{F}) \in$ Eff($\mathcal{E}$)。

对于反向，假设 $r(\mathsf{F}) \in$ Eff($\mathcal{E}$)。令 $N \in \mathcal{F}$ and $x \in \mathsf{F}(N)$。由于 $\mathcal{E}$ 是一个解消子范畴，存在一个 $\mathcal{F}$-收缩 $p\colon M \to N$ with$M \in \mathcal{E}$。我们考察 $\mathsf{F}(p)(x) \in \mathsf{F}(M) = r(\mathsf{F})(M)$。根据假设，存在一个$\mathcal{E}$-收缩 $q\colon L \to M$ 使得 $0 = r(\mathsf{F})(q)(\mathsf{F}(p)(x)) = \mathsf{F}(pq)(x)$。□

作为这个引理的推论，存在一个诱导函子

$$\bar{r}\colon \mathrm{Mod}(\mathcal{F})/\mathrm{Eff}(\mathcal{F}) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{E})/\mathrm{Eff}(\mathcal{E})\,,$$

它保持拉回和推出。

命题 5.8。设 $\mathcal{F}$ 是一个小正合范畴，$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ 是一个解消子范畴。则 $\bar{r}$ 限制为一个等价 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{F}) \to \mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$。

证明。为避免混淆，我们记

$$\mathbb{Y}_{\mathcal{E}}(-)\colon \mathcal{E} \to \mathrm{Mod}(\mathcal{E}) \quad \text{and} \quad \mathbb{Y}_{\mathcal{F}}(-)\colon \mathcal{F} \to \mathrm{Mod}(\mathcal{F})$$

分别表示 $\mathcal{E}$和 $\mathcal{F}$上的 Yoneda 函子。我们注意到，当 $M \in \mathcal{E}$时，$r(\mathbb{Y}_{\mathcal{F}}(M)) = \mathbb{Y}_{\mathcal{E}}(M)$。

步骤1. 设 $\alpha\colon \mathsf{F} \to \mathsf{G}$ 是 mod($\mathcal{E}$) 中的一个态射。那么存在一个态射$\widehat{\alpha}\colon \mathsf{F} \to \mathsf{G}$，属于 mod($\mathcal{F}$)，使得 $r(\widehat{\alpha}) = \alpha$。此外，从 mod($\mathcal{E}$) 到 mod($\mathcal{F}$) 的提升保留复合。

令 $\mathsf{F} =$余核($\mathbb{Y}_{\mathcal{E}}(f)$)，$\mathsf{G} =$余核($\mathbb{Y}_{\mathcal{E}}(g)$)。我们得到如下交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Y}_{\mathcal{E}}(L) & \xrightarrow{\mathbb{Y}_{\mathcal{E}}(f)} & \mathbb{Y}_{\mathcal{E}}(L') & \xrightarrow{c} & \mathrm{coker}(\mathbb{Y}_{\mathcal{E}}(f)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\
\mathbb{Y}_{\mathcal{E}}(M) & \xrightarrow{\mathbb{Y}_{\mathcal{E}}(g)} & \mathbb{Y}_{\mathcal{E}}(M') & \longrightarrow & \mathrm{coker}(\mathbb{Y}_{\mathcal{E}}(g))
\end{array}$$

在 $\mathsf{mod}(\mathcal{E})$ 中。利用 Yoneda 引理，我们可以将左侧方块提升为 $\mathcal{E}$ 中的一个方块。然后通过包含函子将其嵌入 $\mathcal{F}$，并应用 $\mathbb{Y}_{\mathcal{F}}(-)$。复合得以保持，因此我们得到一个诱导映射 $\widehat{\alpha}\colon \text{余核}(\mathbb{Y}_{\mathcal{F}}(f)) \to \text{余核}(\mathbb{Y}_{\mathcal{F}}(g))$，它满足所述结论。

步骤 2. 对于任意态射 f in $\mathcal{F}$，存在一个态射 g in $\mathcal{E}$，使得 $\mathsf{coker}(\mathbb{Y}_{\mathcal{F}}(f)) \cong \mathsf{coker}(\mathbb{Y}_{\mathcal{F}}(g))$ in $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{F})$。

设 $f\colon L \to M$ 是 $\mathcal{F}$中的一个态射。由于 $\mathcal{E}$ 在 $\mathcal{F}$中是解消的，我们可以找到一个 $\mathcal{F}$-收缩 $p\colon M \to M$，满足 $M \in \mathcal{E}$。沿着 p 对 f 作拉回，得到一个态射 $f\colon P \to M$ 以及一个 $\mathcal{F}$-收缩 $P \to L$。再取另一个 $\mathcal{F}$-收缩 $q\colon L \to P$，满足 $L \in \mathcal{E}$。我们有一个态射 $g := fq\colon L \to M$ in $\mathcal{E}$。由于 Yoneda 函子保持拉回，我们注意到 $\mathsf{coker}(\mathbb{Y}_{\mathcal{F}}(f)) = \mathsf{coker}(\mathbb{Y}_{\mathcal{F}}(f))$。由于 $\mathbb{Y}_{\mathcal{F}}(q)$ 是一个 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$-收缩，因此 $\mathsf{coker}(\mathbb{Y}_{\mathcal{F}}(f)) \cong \mathsf{coker}(\mathbb{Y}_{\mathcal{F}}(g))$。

步骤 3. 设 f 和 g 是 $\mathcal{E}$中的态射。若在 $\mathsf{mod}(\mathcal{E})$ 中，$\mathsf{coker}(\mathbb{Y}_{\mathcal{E}}(f)) = \mathsf{coker}(\mathbb{Y}_{\mathcal{E}}(g))$，则在 $\mathsf{mod}(\mathcal{F})$ 中，$\mathsf{coker}(\mathbb{Y}_{\mathcal{F}}(f)) = \mathsf{coker}(\mathbb{Y}_{\mathcal{F}}(g))$。

由步骤 1 可知，我们可以将任意态射 $\mathsf{coker}(\mathbb{Y}_{\mathcal{E}}(f)) \to \mathsf{coker}(\mathbb{Y}_{\mathcal{E}}(g))$ 提升为它们的表示之间的态射。表示上的态射在同伦意义下唯一。由于可以利用 Yoneda 引理将同伦提升到 $\mathcal{E}$，故结论成立。

步骤 4. 函子 $\bar{r}$ 限制为函子 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{F}) \to \mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$；也就是说，若 $\mathrm{F} \in \mathcal{Q}_\ell(\mathcal{F})$，则 $\bar{r}(\mathrm{F}) \in \mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$。

首先利用步骤 2，设 $\mathrm{F} = \mathsf{coker}(\mathbb{Y}_{\mathcal{F}}(g))$，其中 g 是 $\mathcal{E}$中的一个态射。由于 $r(\mathbb{Y}_{\mathcal{F}}(g)) = \mathbb{Y}_{\mathcal{E}}(g)$，且 $\bar{r}$ 保余核，因此我们有

$$\bar{r}(\mathrm{coker}(\mathbb{Y}_{\mathcal{F}}(g))) = \mathrm{coker}(\bar{r}(\mathbb{Y}_{\mathcal{F}}(g))) = \mathrm{coker}(\mathbb{Y}_{\mathcal{E}}(g)) \in \mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E}). \tag{5.8.1}$$

步骤 5. 从 $\bar{r}$ 到 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{F}) \to \mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$ 的限制是本质满的；也就是说，若 $\mathrm{E} \in \mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$，则存在 $\mathrm{F} \in \mathcal{Q}_\ell(\mathcal{F})$，使得 $\mathrm{E} \cong \bar{r}(\mathrm{F})$。

设 $\mathrm{E} \in \mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$ 的形式为某个态射 $g \in \mathcal{E}$ 的余核 $\mathsf{coker}(\mathbb{Y}_{\mathcal{E}}(g))$。于是由 (5.8.1)，$\mathrm{F} = \mathsf{coker}(\mathbb{Y}_{\mathcal{F}}(g))$ 满足该断言。

步骤 6. 从 $\bar{r}$ 到 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{F}) \to \mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$ 的限制是满的。

由步骤 1，$\mathsf{mod}(\mathcal{E})$ 中的任意态射都可提升为 $\mathsf{mod}(\mathcal{F})$ 中的态射 α，我们有以下等价关系

$$\begin{aligned} & \alpha \in S_{\mathrm{eff}(\mathcal{F})} \text{ (that is invertible in } \mathcal{Q}_\ell(\mathcal{F})) \\ \iff & \ker(\alpha), \mathrm{coker}(\alpha) \in \mathrm{Eff}(\mathcal{F}) \\ \iff & \ker(r(\alpha)), \mathrm{coker}(r(\alpha)) \in \mathrm{Eff}(\mathcal{E}) \\ \iff & r(\alpha) \in S_{\mathrm{eff}(\mathcal{E})} \text{ (that is invertible in } \mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})) . \end{aligned}$$

对于第一个和第三个等价关系，我们使用环境阿贝尔范畴的局部化；第二个等价关系由引理 5.7 得出。

步骤 7. 从 $\bar{r}$ 到 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{F}) \to \mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$ 的限制是忠实的。

要证明 $\bar{r}$ 是忠实的，设 $\eta\colon \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ 是 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{F})$ 中的一个态射，且 $\bar{r}(\eta) = 0$ 属于 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$。假设 η 由锯齿链 $\mathrm{E} \xleftarrow{\alpha} \mathrm{G} \xrightarrow{\beta} \mathrm{F}$ 表示，其中 $\alpha \in S_{\mathrm{eff}(\mathcal{E})}$。存在一个 $S_{\mathrm{eff}(\mathcal{E})}$ 中的态射 $\mathrm{H} \xrightarrow{\gamma} \mathrm{G}$，并且存在一个同伦见证 $\beta\gamma = 0$

在 mod($\mathcal{E}$) 中。按照步骤 1 中的类似论证，该同伦可提升到 mod($\mathcal{F}$)。根据引理 5.7 和 (4.9.1)，γ 到 mod($\mathcal{F}$) 的提升属于 $S_{\mathrm{eff}(\mathcal{F})}$。□

引理 5.9. 设 $\mathcal{F}$ 是一个小正合范畴，$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ 是一个解消子范畴。对于一个 $Ext_{\mathcal{F}}$-分解 X，存在一个 $Ext_{\mathcal{E}}$-分解 W和一个 $\mathcal{F}$-拟同构 $f\colon W \to X$。

证明。通过对上同调次数使用归纳法，我们构造出一个 Ext$_{\mathcal{E}}$-分解 W 和一个 $\mathcal{F}$-拟同构 $f\colon W \to X$。

令 $W^n = 0$和 $f^n = 0$表示 $n > 0$。我们断言，对于任意 n，都存在一个交换图表

$$\begin{array}{ccccc} & & P^n & \xrightarrow{q^n}{}_{\mathcal{F}} \twoheadrightarrow & X^n \\ & \swarrow^{b^n} & & \swarrow^{a^n} & \downarrow{\scriptstyle d_X^n} \\ W^{n+1} & \xrightarrow{p^{n+1}}{}_{\mathcal{F}} \twoheadrightarrow & P^{n+1} & \xrightarrow{q^{n+1}}{}_{\mathcal{F}} \twoheadrightarrow & X^{n+1} \end{array}$$

其中 P^n是跨度 $W^{n+1} \to P^{n+1} \leftarrow X^n$与 $d_X^{n-1}a^n = 0$和$W^{n+1} \in \mathcal{E}$的拉回。

对于 $n \geq 0$，我们设 $P^n := X^n$, $a^n = b^n = d_X^n$ 和 $q^n = \mathrm{id}_{X^n}$ 和 $p^{n+1} = \mathrm{id}_{X^{n+1}}$。显然，断言成立。

我们假设对于某个 $n \leq 0$，所需的态射和对象均存在。由于 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$是解消的，根据 (R1)，存在一个 $\mathcal{F}$-收缩 $p^n\colon W^n \to P^n$，满足 $W^n \in \mathcal{E}$。由于P^n 是一个拉回且 $a^n d_X^{n-1}$，因此存在一个态射 a^{n-1}，使得

$$q^n a^{n-1} = d_X^{n-1} \quad \text{and} \quad b^n a^{n-1} = 0\,.$$

此外，由于

$$q^n a^{n-1} d_X^{n-2} = d_X^{n-1} d_X^{n-2} = 0 \quad \text{and} \quad b^n a^{n-1} d_X^{n-2} = 0$$

我们得到 $a^{n-1}d_X^{n-2} = 0$。令 P^{n-1} 为 a^{n-1} 和 p^n 的拉回，其典范态射为 b^{n-1} 和 q^{n-1}。

由上述构造，我们得到一个复形 W，满足 $d_W^n := p^n b^n$，以及一个态射 $f\colon W \to X$，由 $f^n = q^n p^n$给出。由于拉回方块导出 $\mathcal{F}$-正合对，它是一个 $\mathcal{F}$-拟同构。根据推论 2.5，复形 X 是左 Ext$_{\mathcal{F}}$-无环的；根据引理 1.9，它是左 Ext$_{\mathcal{E}}$-无环的。□

推论 5.10. 设 $\mathcal{F}$ 是一个小正合范畴，$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ 是一个有限凝聚的子范畴。对于一个有界 $Ext_{\mathcal{F}}$-分解 X，存在一个有界 $Ext_{\mathcal{E}}$-分解W 以及一个 $\mathcal{F}$-拟同构 $f\colon W \to X$。

证明. 设 $n \leq 0$ 满足 $X^{<n} = 0$。我们按照引理 5.9 的证明构造 $W^{>n}$ 和 $P^{\geqslant n}$。设 Y 是一个有界 Ext$_{\mathcal{E}}$-分解，它解消 P^n。令 $W^{n+i} = Y^i$ 和 $d_W^{n+i} = Y^i$，其中 $i \leq 0$。于是 W 是一个有界 Ext$_{\mathcal{E}}$-分解，且$W \to X$ 是一个 $\mathcal{F}$-拟同构。□

命题 5.11. 设 $\mathcal{F}$ 是一个小正合范畴。

(1) 若 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ 是解消的，则 $\bar{r}$ 限制为一个等价 $\mathcal{R}(\mathcal{F}) \to \mathcal{R}(\mathcal{E})$。*(2)* 若 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ 是有限凝聚的，则 $\bar{r}$ 限制为一个等价 $\mathcal{R}^b(\mathcal{F}) \to \mathcal{R}^b(\mathcal{E})$。

证明。设 F $\in \mathcal{Q}_\ell(\mathcal{F})$。根据命题 5.8，只需证明 F $\in \mathcal{R}^*(\mathcal{F})$ 当且仅当 $\bar{r}$(F) $\in \mathcal{R}^*(\mathcal{E})$，其中 $* \in \{\emptyset, b\}$。

假设 F $\in \mathcal{R}(\mathcal{F})$。那么存在一个 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}$-分解 X，使得 F $=$余核($\mathbb{Y}(d_X^{-1})$)。根据引理 5.9，存在一个 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}$-分解 W 以及一个 $\mathcal{F}$-拟同构 $f\colon W \to X$。因此

$$\bar{r}(\mathsf{F}) = \bar{r}(\mathrm{coker}(\mathbb{Y}_{\mathcal{F}}(d_W^{-1}))) = \mathrm{coker}(\mathbb{Y}_{\mathcal{E}}(d_W^{-1}))) \in \mathcal{R}(\mathcal{E})\,.$$

当 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ 是有限凝聚的且 F $\in \mathcal{R}^b(\mathcal{F})$ 时，存在一个有界的 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}$-分解 X，并且根据推论 5.10，$\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}$-分解 W 也是有界的。

反过来，我们假设 $\bar{r}$(F) $\in \mathcal{R}^*(\mathcal{E})$。令 X 为 $\bar{r}$(F) 的一个（有界）$\mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}$-分解。根据引理 1.9，$X$ 是一个 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}$-分解；根据命题 5.8 的步骤 4，F $\cong$coker($\mathbb{Y}_{\mathcal{F}}(d_X^{-1})$)。因此，$X$ 是 F 的一个（有界）$\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}$-分解，且 F $\in \mathcal{R}^*(\mathcal{F})$。□

结合引理 5.5，我们立即得到以下推论。

推论 5.12. 设 $\mathcal{E}$ 是一个小正合范畴。那么存在等价

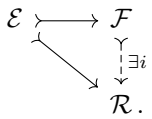
$$\mathcal{R}(\mathcal{R}(\mathcal{E})) \to \mathcal{R}(\mathcal{E}) \quad and \quad \mathcal{R}^b(\mathcal{R}^b(\mathcal{E})) \to \mathcal{R}^b(\mathcal{E})$$

正合范畴的。 □

6. The resolving completion

设 $\mathcal{E}$ 是一个（小）正合范畴。在第 3 节和第 5 节中，我们构造了环境范畴 $\mathcal{LH}^*(\mathcal{E})$ 和 $\mathcal{R}^*(\mathcal{E})$，其中 $\mathcal{E}$ 是（有限）解消的。它们都表现得像一种完备化操作；参见推论 3.10 和 5.12。我们利用它们得到一个泛性质。

定义 6.1。设 $\mathcal{E} \to \mathcal{R}$ 是一个全正合嵌入，且 $\mathcal{E}$ 在 $\mathcal{R}$中是（有限）解消的。若对任意全正合嵌入 $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$，使得 $\mathcal{E}$ 在 $\mathcal{F}$中是（有限）解消的，都存在一个全正合嵌入 $\mathcal{F} \to \mathcal{R}$，它以自然同构为准唯一，并扩张 $\mathcal{E} \to \mathcal{R}$，则称 $\mathcal{R}$ 为 $\mathcal{E}$的（有限）解消完备化。特别地，存在一个交换图



容易验证，此时全正合嵌入 $\mathcal{F} \to \mathcal{R}$ 是（有限）解消的。

命题 6.2。设 $\mathcal{E}$ 是一个正合范畴。那么 $\mathcal{LH}$（$\mathcal{E}$）是 $\mathcal{E}$ 的解消完备化，而 $\mathcal{LH}^b$（$\mathcal{E}$）是 $\mathcal{E}$的有限可解完备化。

证明。根据引理 3.8，$\mathcal{E}$ 在 $\mathcal{LH}(\mathcal{E})$ 中是解消的，并且在 $\mathcal{LH}^b(\mathcal{E})$ 中是有限凝聚的。令 $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ 为一个全正合嵌入，使得 $\mathcal{E}$ 在 $\mathcal{F}$ 中是（有限）解消的。根据命题 3.9，分别存在正合范畴之间的等价

$$\mathcal{LH}(\mathcal{E}) \to \mathcal{LH}(\mathcal{F}) \quad \text{and} \quad \mathcal{LH}^b(\mathcal{E}) \to \mathcal{LH}^b(\mathcal{F})$$

。因此，所需的函子由 $\mathcal{F} \to \mathcal{LH}^*(\mathcal{F})$ 后接上述等价的拟逆给出。

该函子的唯一性再次由命题 3.9 得出。 □

将引理 3.8 和命题 3.9 替换为引理 5.5 和命题 5.11，同样的证明可得：

命题 6.3. 设 $\mathcal{E}$ 是一个小正合范畴。那么 $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ 是 $\mathcal{E}$ 的分解完备化，而 $\mathcal{R}^b(\mathcal{E})$ 是 $\mathcal{E}$的有限分解完备化。□

定理 6.4. 设 $\mathcal{E}$ 是一个小正合范畴。那么存在正合范畴之间的等价 $\mathcal{LH}(\mathcal{E}) \to \mathcal{R}(\mathcal{E})$，它将等价 $\mathcal{LH}^b(\mathcal{E}) \to \mathcal{R}^b(\mathcal{E})$ 限制到 $\mathcal{E}$上为恒等映射。该等价由 $X \mapsto$余核$(\mathbb{Y}(d_X^{-1}))$给出。

证明。 由于 $\mathcal{R}(\mathcal{E})$和 $\mathcal{LH}(\mathcal{E})$都是 $\mathcal{E}$的解消完备化，因此存在如下由全正合嵌入组成的交换图表

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{E} & & \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ \mathcal{LH}(\mathcal{E}) & \rightarrowtail & \mathcal{R}(\mathcal{E}) & \rightarrowtail & \mathcal{LH}(\mathcal{E}) \end{array}$$

其中，底行中的复合是一个等价。交换 $\mathcal{LH}(\mathcal{E})$和 $\mathcal{R}(\mathcal{E})$时也同样成立。□

我们已经在第 3 节见过一些有限可解完备化的例子。在某些情形下，函子范畴的视角更为方便。

例 6.5. 设 $\mathcal{A}$ 是一个加性范畴，配备分裂正合结构。则可消去函子范畴为零，而米田嵌入

$$\mathbb{Y}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

是分解完备化。米田嵌入

$$\mathbb{Y}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{M}^b(\mathcal{A})$$

是有限可解完备化。

例 6.6. 设 $\mathcal{E}$ 是一个具有足够多投射对象的正合范畴， $\mathcal{P}$ 是其投射对象子范畴。则 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{E}$ 配备分裂正合结构时是一个解消子范畴。于是限制米田函子

$$\bar{\mathbb{Y}}\colon \mathcal{E} \to \mathcal{M}(\mathcal{P}), \quad M \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{E}}(-, M)|_{\mathcal{P}}$$

定义了 $\mathcal{E}$的分解完备化。类似地，如果 $\mathcal{E}$ 具有足够多投射对象，且每个对象都有有限投射分解，那么

$$\bar{\mathbb{Y}}\colon \mathcal{E} \to \mathcal{M}^b(\mathcal{P}), \quad M \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{E}}(-, M)|_{\mathcal{P}}$$

定义了有限可解完备化。这由前一个例子和命题 5.11 得出。

例 6.7。 设 $\mathcal{E} \to \mathcal{E}^{ic}$ 是一个正合范畴的幂等完备化；参见 [B¨uh10，第 6] 节。这是一个解消子范畴的全正合嵌入，因此根据推论 5.12， $\mathcal{E}$ 的分解完备化与 $\mathcal{E}^{ic}$ 可以视为相同，并且其自身是幂等完备的。

设 $\mathcal{E} \to \mathcal{E}^{wic}$ 是一个正合范畴的弱幂等完备化；参见 [B¨uh10，注 7.8]。这是一个有限凝聚子范畴的全正合嵌入。因此， $\mathcal{E}$ 的有限可解完备化与 $\mathcal{E}^{wic}$ 可以视为相同，并且其自身是弱幂等完备的。

例 6.8。 $\mathcal{LH}^b(\mathcal{E}) \neq \mathcal{RH}^b(\mathcal{LH}^b(\mathcal{E}))$ 的一个例子：令 Λ 为箭图的路径代数

$$1 \longrightarrow 2 \begin{array}{c} \Longrightarrow \\ \vdots \end{array} 3$$

该箭图有从 2 到 3 的可数无穷多条箭，并且域上的所有长度为 2 的路径均为零。令 $P(1)$ $P(2)$ 和 $P(3)$ 分别为单顶为 $S(1)$、$S(2)$ 和 $S(3)$ 的不可分解射影箭图表示。我们考虑$\mathcal{P} = \mathsf{add}(P(1) \oplus P(2) \oplus P(3))$，它是 $\mathsf{mod}(\Lambda)$ 中有限生成射影箭图表示构成的子范畴。

对于 $\mathcal{LH}^b(\mathcal{P}) \neq \mathcal{RH}^b(\mathcal{LH}^b(\mathcal{P}))$，根据引理 3.16 的对偶，只需在 $\mathcal{LH}^b(\mathcal{P})$ 中找到一个不是 $\mathcal{LH}^b(\mathcal{P})$-收缩的满态射。我们使用如下同一识别：$\mathcal{LH}^b(\mathcal{P}) = \mathcal{M}^b(\mathcal{P})$。令 $a\colon P(2) \to P(1)$ 为典范态射 $P(2) \to S(2) \to P(1)$ 的复合。我们证明 a 满足所需条件。在范畴 $\mathsf{mod}(\Lambda)$ 中，我们有 $\mathsf{coker}(a) = S(1)$，且 $\mathsf{ker}(a) \cong S(3)^{\oplus\mathbb{N}}$。这意味着 $S(1)$ 不属于 $\mathcal{M}^b(\mathcal{P})$。接下来注意到，$S(1)$ 是一个内射对象，因此每个具有非零态射 $S(1) \to M$ 的对象 M 都必须以 $S(1)$ 为直和项。但 $\mathcal{M}^b(\mathcal{P})$ 中的对象都没有直和项 $S(1)$，因此 a 是 $\mathcal{M}^b(\mathcal{P})$ 中的一个满态射。它不是一个 $\mathcal{M}^b(\mathcal{P})$-收缩，因为它在 $\mathcal{M}^b(\mathcal{P})$ 中没有核。

6.9. **n-解消完备化**。有限分解完备化 $\mathcal{LH}^b(\mathcal{E})$ 和 $\mathcal{R}^b(\mathcal{E})$ 的构造还可以进一步限制为具有统一上界的那些分解。

我们定义

$$\mathcal{V}_\ell^n(\mathcal{E}) \coloneqq \mathcal{V}_\ell(\mathcal{E}) \cap \Sigma^n \mathcal{V}(\mathcal{E}) \quad \text{and} \quad \mathcal{U}_r^n(\mathcal{E}) \coloneqq \mathcal{U}_r(\mathcal{E}) \cap \Sigma^{-n} \mathcal{U}(\mathcal{E})\,.$$

我们将配备容许正合结构的范畴 $\mathcal{U}(\mathcal{E}) \cap \mathcal{V}_\ell^n(\mathcal{E})$ 记为 $\mathcal{LH}^n(\mathcal{E})$；并将配备容许正合结构的范畴 $\mathcal{U}_r^n(\mathcal{E}) \cap \mathcal{V}(\mathcal{E})$ 记为 $\mathcal{RH}^n(\mathcal{E})$。

对于任意 $n \geq 0$，范畴 $\mathcal{LH}^n(\mathcal{E})$ 都包含作为有限凝聚子范畴的 $\mathcal{E}$。此外，$\mathcal{E}$ 是一个 n-解消 子范畴：正合范畴 $\mathcal{F}$ 的全正合子范畴 $\mathcal{E}$ 若在 $\mathcal{F}$ 中满足 $\mathcal{E}$ 在 $\mathcal{F}$ 中是解消的，且对于 $\mathcal{F}$ 中任意的 M，由此导出的式（1.8.1）中的 $\mathcal{F}$-无环序列长度为 n；也就是说，对 $i < n$ 有 $X^i = 0$，则称其在 $\mathcal{F}$ 中是 n-解消的。根据 [HvR20b，定理 4.1]，，存在一个导出等价

$$\mathrm{D}(\mathcal{E}) \cong \mathrm{D}(\mathcal{LH}^n(\mathcal{E}))$$

对所有 $n \geq 1$。

同样，我们也可以具体化 $\mathcal{R}^b(\mathcal{E})$的构造：我们将 $\mathcal{M}^n(\mathcal{E})$定义为 $\mathcal{M}(\mathcal{E})$的子范畴，其中由具有 $\mathsf{Ext}_{\mathcal{E}}$-分解 X 且满足$X^i = 0$ （对 $i < -n$）的函子组成。与推论4.13和命题 5.3类似，对于 $n \geq 2$，$\mathsf{eff}(\mathcal{E})$是 $\mathcal{M}^n(\mathcal{E})$的亏格满射渗透子范畴，而局部化$\mathcal{M}^n(\mathcal{E})/\mathsf{eff}(\mathcal{E})$在 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$中是扩张封闭的。因此，对于所有 $n \geq 2$，我们将范畴 $\mathcal{R}^n(\mathcal{E})$定义为范畴 $\mathcal{M}^n(\mathcal{E})/\mathsf{eff}(E)$，并赋予其在 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$中的完全正合结构。

对于 $n = 1$，我们无法将 $\mathcal{M}^1(\mathcal{E})$ 在 $\mathcal{E}$-可消函子处局部化，因为 $\mathcal{E}$-可消函子并不包含在 $\mathcal{M}^1(\mathcal{E})$ 中。为解决这一问题，我们将 $\mathcal{M}^1(\mathcal{E})$ 替换为 $\mathsf{mod}(\mathcal{E})$ 的全子范畴 $\hat{}\mathcal{M}^1(\mathcal{E})$，它由形如 $\mathsf{F} = \mathsf{coker}\ \mathbb{Y}(f)$ 的函子组成，其中 f 是左 $\mathcal{E}$-容许的；也就是说，f 可分解为一个 $\mathcal{E}$-收缩，后接一个单态射。可以证明，$\mathsf{eff}(E)$ 在这个更大的范畴中是亏映射渗流的，且该局部化在 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$ 中扩张封闭。我们将配备 $\mathcal{Q}_\ell(\mathcal{E})$ 中完全正合结构的范畴 $\hat{}\mathcal{M}^1(\mathcal{E})/\mathsf{eff}(\mathcal{E})$ 记为 $\mathcal{R}^1(\mathcal{E})$。

对于所有 $n \geq 1$， $\mathcal{E}$ 都是 $\mathcal{R}^n(\mathcal{E})$ 的一个 n-解消子范畴。此外，若我们仿照定义 6.1 定义 n-解消完备化，则可调整命题 6.2 和 6.3 以及定理 6.4 的证明，从而得到：

定理 6.10. 设 $\mathcal{E}$ 是一个（小）正合范畴。那么，对所有 $n \geq 1$， $\mathcal{LH}^n(\mathcal{E})$和 $\mathcal{R}^n(\mathcal{E})$ 都是n-解消完备化。

此外，对所有$n \geq 1$，存在正合范畴的等价 $\mathcal{LH}^n(\mathcal{E}) \cong \mathcal{R}^n(\mathcal{E})$。

此前，在能够给出 t-结构的特殊情形下，1-解消完备化和 2-解消完备化已有描述；参见命题 3.5。

例 6.11. 设 $\mathcal{E}$ 是一个赋有极大正合结构的拟阿贝尔范畴。那么 $\mathsf{mod}(\mathcal{E}) = \hat{}\mathcal{M}^1(\mathcal{E})$。特别地，这给出

$$\mathcal{LH}(\mathcal{E}) \cong \mathcal{R}(\mathcal{E}) = \mathcal{R}^1(\mathcal{E}) \cong \mathcal{LH}^1(\mathcal{E})\,;$$

后者是 $\mathsf{D}(\mathcal{E})$ 的全子范畴，由集中在次数 $0, -1$ 且由单态射给出的两项复形组成。这就是 [Sch99 第 1.2 节2]. 中描述的左心。

例 6.12. 设 $\mathcal{E}$ 是一个具有核的正合范畴。那么 $\mathsf{mod}(\mathcal{E}) = \mathcal{M}^2(\mathcal{E})$。特别地，这给出

$$\mathcal{LH}(\mathcal{E}) \cong \mathcal{R}(\mathcal{E}) = \mathcal{R}^2(\mathcal{E}) \cong \mathcal{LH}^2(\mathcal{E})\,;$$

后者是 [HKvRW23 推论 310]. 中描述的左心。它是 $\mathsf{D}(\mathcal{E})$ 的全子范畴，由形如 $\ker f \to L \xrightarrow{f} M$、集中在次数 $0, -1, -2$ 的三项复形组成。

有许多不具有核的正合范畴。例如，环上有限表示模构成的范畴，其中该环不是左相干的。对于其他范畴，例如完备 LB-空间的范畴，是否存在核尚不清楚；参见 [Weg25，第 5] 节。

注记 6.13。 我们预计，我们的大多数结果都可以推广到 Rum11 [中引入的单侧正合范畴，这与 [HKvRW23] 中的做法类似。第一作者将在其博士论文中完成这项工作。

References

[AB69] Maurice Auslander 与 Mark Bridger， *Stable module theory*，《美国数学会纪要》，第 94 号，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1969年。MR 0269685[AHC01] Lidia Angeleri H

Infinitely generated tilting modules ugel 与 Flavio Ulhoa Coelho，，数学论坛（），*of finite projective dimension* **13** 2001 2, 239 250 1813669 第 – 号。MR[07] AHHK Lidia

Angeleri Hugel、Dieter Happel 与 Henning Krause（编），*Handbook of tilting theory* 332，，伦敦数学学会讲义系列，卷，剑桥大学出版社，剑桥，2007年。MR 2385175[AR74] Maurice Auslander 与 Idun Reiten， *Stable equivalence of dualizing R-varieties*，数学进展 **12**（1974年），306–366。MR 342505[Bae88] Dagmar Baer， *Tilting sheaves in representation theory of algebras*，数学手稿 **60** 1988 3, 323 347 928291 （），第 – 号。MR BC Silvana Bazzoni 与 Septimiu Crivei，[13] *One-sided exact categories*，《纯粹与应用代数杂志》 **217** 2013 2, 377 391 2969259 （），第 – 号。[78] *Coherent sheaves on* MR Beı Aleksandr A. Beılinson， $\mathbf{P}^n$ *and problems in linear algebra*，《泛函分析及其应用》 **12** 1978 3, 68 69 509388 （），第 – 号。MR Buh Theo Buhler，，数学博[10] *Exact categories* **28** 2010 1, 1 69 览（），第 – 号。MR 2606234

[Dye05] Matthew J. Dyer, *Exact subcategories of triangulated categories*, https://academicweb.nd.edu/ dyer/papers/extri.pdf, 2005, 6, 2026 1 6（访问于3月），第 – 页。[Eno17] Haruhisa Enomoto, *Classifying exact categories via Wakamatsu tilting*, 《代数杂志》485（2017），1–44。MR 3659323[Eno21], *Classifying substructures of extriangulated categories via Serre subcategories* **29** 2021 6, 1005 1018 ，应用范畴结构（），4324372 第 – 号。MR [03] *Abelian categories* 2003 Fre

Peter J. Freyd, ，表示论与应用范畴（），第 3 号，1–190。MR 2050440[Gro57] Alexander Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, 《东北数学杂志》（2）9（1957），119–221。MR 102537[Hap 88] Dieter Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras* 119, ，伦敦数学学会讲义系列，卷，剑桥大学出版社，剑桥，1988年。MR 0935124[HKvR22] Ruben Henrard、Sondre Kvamme 与 Adam-Christiaan van Roosmalen, *Auslander's formula and correspondence for exact categories* **401** 2022 ，数学进展（），论文

编号 108296，65。MR 4392222[HKvRW23] Ruben Henrard、Sondre Kvamme、Adam-Christiaan van Roosmalen 与 Sven-Ake Wegner, *The left heart and exact hull of an additive regular category*, 《伊比利亚美洲数学评论》39（2023），第 2 号，439–494。MR 4575371[Hub95] Annette Huber, *Mixed motives and their realization in derived categories*, 数学讲义，第 1604 卷，施普林格出版社，柏林，1995。MR 1439046[HvR20a] Ruben Henrard 与 Adam-Christiaan van Roosmalen, *Localizations of (one sided) exact categories* 2020, 1903 10861 3, 1 43 ，arXiv 电子预印本，

arXiv: 。v 第 – 页。[HvR20b] , *Preresolving categories and derived equivalences*, arXiv 电子预印本，2020，arXiv:2010.13208v1，第 1–14 页。[Jas16] Gustavo Jasso, *n-abelian and n-exact categories*, 《数学杂志》283（2016），第 3-4 号，703–759。MR 3519980[Jor21] Peter Jørgensen, *Proper abelian subcategories of triangulated categories and their tilting theory* 2021, 2109 01395 1, 1 8 ，arXiv 电子预印本，

arXiv: 。v 第 – 页。[Kel90] Bernhard Keller, *Chain complexes and stable categories*, 数学手稿 67（1990 4, 379 417 1052551 ），第 – 号。MR Kra Henning Krause, [22] *Homological theory of representations*, 剑桥高等数学研究，卷 195, 2022 4327095 剑桥大学出版社，[86] *Tilting modules of finite projective dimension* 剑桥，。MR Miy Yoichi Miyashita, ，数学杂志 193（1986 1, 113 146 852914 ），[90] 第 – 号。MR Nee Amnon Neeman, *The derived category of an exact category*, 《代数杂志》135（1990），第 2 号，388–394。MR 1080854[Nee24] , *Obstructions to the existence of bounded t-structures*, 表示论及其他中的三角化范畴——2022 年 Abel 研讨会（Petter Andreas Bergh、Steffen Oppermann 与 Øyvind Solberg 编），Abel 研讨会，第 17 卷，施普林格，沙姆，2024，第 195–215 页。MR 4786507[Nor24] Anya Nordskova, *A note on abelian envelopes*, arXiv 电子预印本，2024，arXiv:2410.02019v2，第 1–11 页。[Qui73] Daniel Quillen, *Higher algebraic K-theory. I*, 代数 K理论，I：高阶 K理论，会议论文集（西雅图，1972）（Hyman Bass 编），数学讲义，卷 341, 1973, 85 147 0338129 施普林格，柏林，第 – 页。[89] *Morita theory for derived categories* MR Ric Jeremy Rickard, ，《伦敦数学会杂志》（2）39（1989 3, 436 456 1002456 ），[11] 第 – 号。MR Rum Wolfgang Rump, *On the maximal exact structure on an additive category*, 数学基础 **214** 2011 1, 77 87 2845634 （），第 – 号。MR Rum , ，《纯粹与应用代数[20] *The abelian closure of an exact category* 杂志》224（2020），第 10 号，106395，29。MR 4093080[Rum21] , *Exact categories and infinite tilting*, 《代数通讯》49（2021），第 7 号，3034–3065。MR 4274868[Sch99] Jean-Pierre Schneiders, *Quasi-abelian categories and sheaves*, M´ém. 法国数学会（新辑）（1999），第 76 号，vi+134。MR 1779315

[ˇSt’14] Jan ˇSt’ovíˇcek, *Derived equivalences induced by big cotilting modules*, 《数学进展》**263**（2014），45–87。MR 3239134[Weg25] Sven-Ake Wegner, *A homological approach to (Grothendieck) completeness problem for regular LB-spaces* 2025 2512 13161 1 ，，arXiv：。

v。[Wei94] Charles A. Weibel, *An introduction to homological algebra*《剑桥高级数学研究》，第38卷，剑桥大学出版社，剑桥，1994年。MR 1269324

Marianne Lawson, Department of Mathematics, University of Hamburg, Bundesstr.55, 20146 Hamburg, Germany*Email address*: marianne.lawson@uni-hamburg.de Janina C. Letz, Institute of Mathematics, Paderborn University, Warburger Str. 100, 33098 Paderborn, Germany*Email address*: jletz@math.upb.deJulia Sauter, Faculty of Mathematics, Bielefeld University, PO Box 100 131, 33501Bielefeld, Germany*Email address*: jsauter@math.uni-bielefeld.de