用于第三介质接触的变形梯度平均正则化

Ondřej Faltus[a,*]、Marco Amato[a]、Martin Horák[a,b]

[a]力学系，土木工程学院，捷克技术大学，布拉格*Thákurova 7*号，邮编*166 29*，捷克共和国布拉格*6*区[b]信息理论与自动化研究所，捷克科学院，捷克共和国布拉格*8*区*Pod Vodárenskou věží 4*号，邮编*182 00*

arXiv:2603.13063v1 [cs.CE] 13 Mar 2026

摘要

近年来，在搜索接触边界存在困难的场景（即拓扑优化）中，第三介质接触法作为传统接触方法的替代方案逐渐受到关注。为施加接触约束，该方法依靠占据空隙空间的虚拟柔性材料。在有限应变条件下，这要求采用正则化技术来改善第三介质材料的表现。现有的一些模型通过惩罚局部计算的位移二阶梯度来实现这一目的，具体方法包括直接使用二阶单元计算，或引入额外的自由度。本文提出了一种替代方法，即采用逐单元变形梯度平均，有效惩罚变形梯度的空间变化，并结合用于保持第三介质刚度恒定的线弹性项。我们的方法无需任何额外自由度即可采用一阶有限元公式，因此易于实现。我们在多个广泛认可的基准算例上验证了所提方法的稳健性。

关键词：接触力学、第三介质法、变形梯度平均、正则化

*通讯作者电子邮箱：ondrej.faltus@cvut.cz (Ondřej Faltus)

1. 引言

先进材料与结构设计，以及为可靠模拟其行为所必需的改进计算方法，在现代材料科学中日益普遍 [1, 2, 3, 4, 5]。在此背景下，计算接触力学方法对于捕捉此类问题中出现的高度非线性行为，正变得越来越重要。

有限元模拟中可采用多种公式来施加接触约束。经典方法包括罚函数法、拉格朗日乘子法和增广拉格朗日法 [6, 7, 8, 9]。这些公式通常与不同的接触离散策略结合使用，接触搜索算法则用于检测可能发生相互作用的表面并评估接触间隙。常见的离散方法包括节点-节点、节点-线段、线段-线段以及 Mortar法 [7, 8, 10, 11, 12]。

第三介质接触法不同于这些传统方法。它通过在接触体之间的空隙空间中引入一种虚拟材料来施加接触约束。这种材料的参数经过选择，使其在接触前阶段极其柔顺，以免显著影响求解结果；而在受压至体积接近于零时，材料则会变硬，从而实现接触，同时允许保留一个微小的正间隙。这个正间隙与基于罚函数的接触公式中存在的负间隙类似。第三介质接触法的主要优点在于无需使用接触搜索算法。这在无法轻易执行接触搜索的场景中尤为方便，例如拓扑优化 [13]。

第三介质法最初由Wriggers等人提出 [14]。在早期版本中，第三介质采用各向异性材料模型建模，其各向异性方向由接触法线确定，而接触法线则根据主伸长的方向识别。Bog等人 [15] 随后引入障碍法来控制第三介质仿真，Kruse等人 [16] 则将该方法扩展至等几何分析。

Bluhm等人 [13],将第三介质法应用于拓扑优化仿真，使其人气大幅提升。在此情境下，他们有效利用了已离散化的空隙空间来施加接触约束。然而，由于第三介质的柔顺性较高，该介质在接触前阶段容易发生过度变形。为了解决这一问题，他们通过引入一个额外的正则化项来增强第三介质的应变能，该项涉及在局部计算的位移场二阶梯度。这一改进稳定了第三介质的行为，并实现了稳健的有限应变模拟。Frederiksen等人 [17], 在后续工作中进一步改进了该方法，之后又将其扩展至热接触 [18]和库仑摩擦 [19]。

这种除此之外颇为简洁的正则化方法的一个缺点是，它对第三介质单元的变形模式施加了超出严格必要范围的惩罚。在后续研究中，有人提出了一种简化正则化形式，避免对弯曲模式和二次压缩模式施加惩罚 [20]。

该方法后来被调整并扩展，用于气动驱动结构 [21]。在该研究中，正则化项被一种限制更宽松的

公式所取代，该公式惩罚旋转对数的梯度，并通过自旋张量的增量累积来近似计算。Wriggers等人后来改进了这一正则化 [22], ，他们根据旋转角直接计算旋转张量，该方法适用于二维公式。本研究还提出了一种基于带附加自由度的一阶有限元的方法。此前，第三介质的正则化项需要采用二阶单元。后来，Wriggers等人 [23] 通过引入一种通用正则化项扩展了这项工作，该项在三维情况下同样适用，并惩罚变形梯度的反对称部分。再次通过引入附加自由度，使一阶单元公式成为可能。von Zabiensky等人最近改进了这些自由度的离散化 [24]。对于二维问题，Xu和Wriggers最近还将第三介质接触方法扩展至虚拟单元法（VEM） [25]。

本文提出了一种全新的正则化方法，完全避免使用位移的二阶梯度。该方法改为通过正则化项惩罚变形梯度偏离其单元质心值的程度。由此得到的公式非常简单且稳健，并且无需引入任何额外自由度即可使用一阶单元。第2节将介绍所提出正则化项的公式，第3 节将通过若干数值算例展示其适用性。最后，第4节总结主要发现并给出结论。

2. 第三介质模型

2.1. 超弹性项与线弹性项的组合

传统上，第三介质模型 [13, 21, 22, 23]以适用于可压缩材料的neo-Hookean材料定律 [26]为基础。其应变能密度定义为

$$W_{\mathrm{NH}} = \frac{1}{2}\kappa_{\mathrm{vol}} \ln^2 J + \frac{1}{2}\kappa_{\mathrm{iso}}(J^{-2/3} I_1 - 3)^2 \tag{1}$$

其中， $J = \det \boldsymbol{F}$是变形梯度 $\boldsymbol{F}$的雅可比， $I_1 = \mathrm{tr}(\boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F})$是右Cauchy-Green变形张量的第一不变量。体积部分 κ_{vol} 和等容部分 κ_{iso} 的材料参数通常选择为使第三介质的刚度可忽略，因此除非第三介质受到极度压缩（$J \to 0$），否则它对解的影响也可忽略。典型的选择是将这些参数与主体材料的参数关联起来，例如设定

$$\kappa_{\mathrm{vol}} = \kappa_{\mathrm{iso}} = \gamma_{\mathrm{c}} \kappa_{\mathrm{char}} \tag{2}$$

其中， γ_{c} 为相对第三介质刚度参数，通常取值范围为$\langle 10^{-10},\ 10^{-6} \rangle$； κ_{char} 为主体材料的特征体积模量。

该材料模型能够在拓扑优化应用中实现超弹性主体材料与第三介质之间的平滑过渡 [13, 17, 18, 20]，同时满足第三介质期望行为的要求。在极端压缩（$J \to 0$）下，应变能中的对数体积项

密度（1）趋于无穷并防止穿透。Faltus 等人 [21] 表明，在平面应变假设下，该性质同样由等容项满足，因此甚至可以省略体积项。

这里，我们在接触前阶段对第三介质采用线弹性行为，以改善其接触前的响应，这遵循了 Wang 等人 [27], 的思路：他们使用线弹性表述对空隙区域建模，以防止低刚度单元发生过度畸变，从而提高拓扑优化中几何非线性模拟的稳健性。与我们当前的表述不同，该研究没有引入显式接触项。此外，当前方法可以理解为引入了恒定的第三介质刚度（在 $\boldsymbol{P}$–$\boldsymbol{F}$ 表述中），即除极端压缩下接触项所描述的渐近递增响应外，刚度不会随变形而增加。

小应变线弹性材料定律由以下应变能密度函数定义

$$W_{\mathrm{ss}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{D}^{\mathrm{e}} : \boldsymbol{\varepsilon} \tag{3}$$

其中，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 是定义为位移场对称梯度的工程应变，$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_{\mathrm{s}}\boldsymbol{u}$，而$\mathbf{D}^{\mathrm{e}}$ 是小应变弹性张量。

于是，小应变应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 可表示为

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W_{\mathrm{ss}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}^{\mathrm{e}} : \boldsymbol{\varepsilon} \tag{4}$$

在大应变情形下，应变能密度（3）可用变形梯度 $\boldsymbol{F}$表示：

$$W_{\mathrm{ss}} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}\right) : \mathbf{D}^{\mathrm{e}} : \left(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}\right) \tag{5}$$

其中，$\boldsymbol{I}$ 是二阶单位张量。该公式利用 $\mathbf{D}^{\mathrm{e}}$ 的小对称性，将对称位移场梯度 $\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_{\mathrm{s}}\boldsymbol{u}$替换为一般梯度 $\left(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}\right) = \nabla\boldsymbol{u}$，而不影响最终的能量密度。详细讨论及实现细节见附录 A。

该材料定律对物理材料的有效性依赖于标准的小应变假设；在大应变情形下，它会导致一种非客观的公式，在纯旋转下产生非零能量。尽管如此，第三介质是虚构的，因此尽管存在这一局限，我们仍采用该公式。由于第三介质的刚度通常至少比主体材料的刚度小六个数量级，除非第三介质发生极大的旋转，否则产生的任何虚假能量都可以忽略不计。值得指出的是，由于存在能量势，这种方法保留了全局刚度切线的对称性。

各向同性小应变刚度张量由两个参数E（杨氏模量）和 ν（泊松比）完全确定。对于第三介质材料刚度张量$\mathbf{D}^{\mathrm{3M}}$，我们选取泊松比 $\nu = 0$，并将杨氏模量按主体材料进行缩放：

$$E_{3\mathrm{M}} = \gamma_{\mathrm{e}} E_{\mathrm{char}} \tag{6}$$

其中，γ_{e} 是第三介质的相对刚度参数，不一定与其对应项 γ_{c}（方程（2）中的 E_{char} 相同，后者是主体材料的特征杨氏模量。对于超弹性块体材料，该量可取为在参考构型附近线性化得到的杨氏模量。

2.2. 应变平均正则化项

自 Bluhm等人 [13] 的研究以来，大多数第三介质列式都采用某种形式的二阶梯度正则化，以改善第三介质的接触前行为。最简单的方法是为第三介质的应变能密度添加一个涉及二阶位移梯度的正则化项，通常写作

$$W_{\nabla F} = \frac{1}{2}\gamma\kappa_{\nabla \boldsymbol{F}} \left(\nabla \boldsymbol{F} \vdots \nabla \boldsymbol{F} \right) \tag{7}$$

其中，$\kappa_{\nabla \boldsymbol{F}}$ 是一个材料参数，$\nabla \boldsymbol{A}$ 表示作用于二阶张量 $\boldsymbol{A}$ 的物质梯度算子，即 $(\nabla \boldsymbol{A})_{ijm} = \partial A_{ij}/\partial X_m$，其中 $\boldsymbol{X}$ 是材料坐标向量。

其他研究通过对其他限制性较弱的度量或其组合进行惩罚，拓展了这一思路。文献中报道的正则化项包括

- $\nabla \boldsymbol{Q}$，由物质自旋 [21], 增量计算得到的旋转张量的梯度
- $\nabla \boldsymbol{R}$，二维情况下真实旋转张量的梯度 [22],
- $\nabla \varphi$，二维转角 [22],的梯度
- $\mathrm{Div}\boldsymbol{F}$，变形梯度张量 [20],的散度
- $\nabla \boldsymbol{F}_{\text{反对称部分}}$，变形梯度张量 [23], 的反对称部分的梯度，以及
- ∇J，变形梯度雅可比 [21, 22]的梯度。

所有这些项都包含位移的二阶梯度，因此对于物理材料，需要采用二阶梯度连续介质列式。然而，第三介质具有虚拟性质，因此可以放宽这一要求，转而仅在单元层面施加惩罚。此时，必须使用二次列式的有限元 [13, 21, 22, 20], ，或者为一阶单元增添额外的自由度 [22, 23, 24]。本文旨在通过引入一种更简单的列式，克服这两种方法的局限性；该列式无需额外自由度即可直接使用一阶有限元，从而免去计算二阶梯度的需求。

仅在单元层面计算变形梯度张量（或其他变形度量）的梯度并施加惩罚，实际上可以控制该张量在单元内的均匀程度；更准确地说，在有限元框架下，是控制该张量在单元的高斯积分点之间的均匀程度。然而，要达到这一效果，并不需要显式计算梯度。通过惩罚高斯积分点处计算的变形梯度与其单元平均值之间的偏差，也可以获得类似效果；此处将单元平均值取为单元质心处的变形梯度。换言之，我们惩罚积分点处的变形梯度与单元代表性变形梯度之间的差异。为此，我们引入如下形式的附加应变能密度：

$$W_{\bar{F}} = \frac{1}{2}\gamma\kappa_{\bar{F}}\|\boldsymbol{F} - \bar{\boldsymbol{F}}\|^2 \tag{8}$$

其中 $\kappa_{\bar{F}}$ 是一个罚参数，$\boldsymbol{F}$ 表示在单元质心处计算的变形梯度，而 $|\boldsymbol{a}|$ 表示张量 $\boldsymbol{a}$ 的弗罗贝尼乌斯范数。采用这种形式，可以通过选择参数 $\kappa_{\bar{F}}$来控制有限元内部变形梯度的均匀程度。 $\kappa_{\bar{F}}$ 较大的值会增强单元内变形梯度的均匀性，而较小的值则允许更大的变化。为计算 $\boldsymbol{F}$ 所需的有限元过程只需进行简单修改，具体说明见 附录B。

为简化起见，本文仅讨论根据方程（ $\boldsymbol{F}$8）对 进行平均。不过，同样的方法也可用于对上述其他指标进行惩罚。

这里需要指出两点。首先，由于这种惩罚方式是逐单元进行平均，因此要求单元包含多个变形梯度值不同的积分点。因此，具有四个积分点和双线性形函数的一阶四边形单元尤其适用。其次，这种正则化的强度取决于积分点的间距，因而也取决于网格尺寸。我们将在第3.1节的数值算例中探讨这种关系。

2.3. 模型总结

所提出的第三介质完整材料模型由三部分组成，即

1. 基于neo-Hookean材料定律体积部分的接触项（1）。去掉等容部分，以确保该部分仅对第三介质的体积压缩作出响应，且不干扰2. 基于线弹性定律的常刚度项（4）的行为，从而确保尤其在接触前阶段行为恒定，以及3. 基于变形平均的附加正则化项。

这些项可以汇总到完整的应变能密度泛函中

$$W_{\mathrm{3M}} = \frac{1}{2}\kappa_{\mathrm{vol}}\ln^2 J + \frac{1}{2}(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}) : \mathbf{D}^{\mathrm{3M}} : (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}) + \frac{1}{2}\kappa_{\bar{F}}\|\boldsymbol{F} - \bar{\boldsymbol{F}}\|^2 \tag{9}$$

3. 数值算例

为计算以下数值算例，所提出的第三介质模型已在开源有限元软件OOFEM 中实现 [28, 29,30]。除非另有说明，仿真均在平面应变假设下进行，采用基于 Lobatto积分法则的双线性四节点四边形有限元。为提高积分精度，表示主体材料的单元使用 9 个而非 4 个积分点。Newton-Raphson求解器配备了线搜索 [31] 和自适应时间步长算法。在涉及稳定性的仿真中（第 3.3 节），引入了修正Cholesky分解算法，以引导求解器趋向稳定的解分支 [32, 33]。除非另有说明，主体材料采用可压缩neo-Hookean模型描述，见公式（1），其参数为$\kappa_{\mathrm{vol}} = 10^6$ 帕 和 $\kappa_{\mathrm{iso}} = 0.214 \cdot 10^6$ 帕，在小应变极限下分别对应于 $E = 3 \cdot 10^5$ 帕 和 $\nu = 0.4$。

此处所示数值仿真的数据可在关联的数据仓库中获取 [34]。

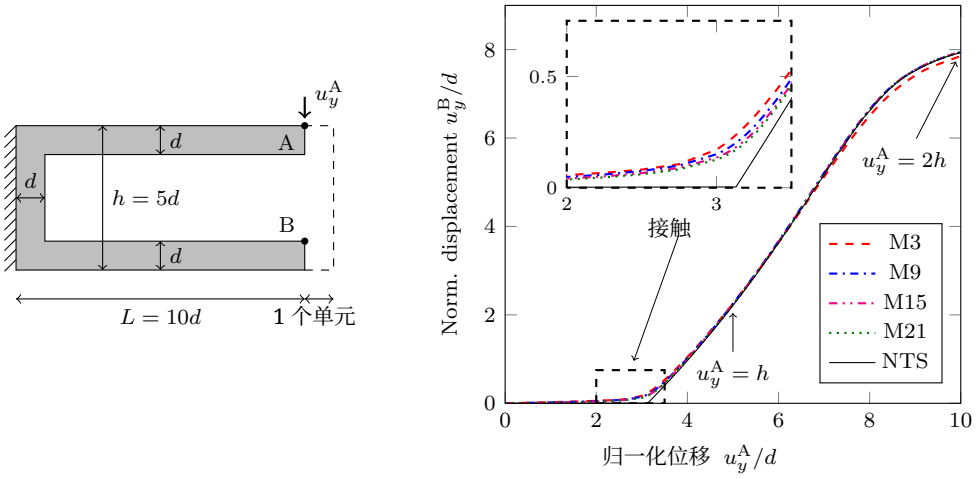
*3.1. C*形基准算例

Bluhm等人首次提出的经典第三介质接触C形基准算例 [13], 在此与网格尺寸研究一并呈现。任务几何由上下放置的两个悬臂梁以及位于二者之间的第三介质网格组成，见图1a。第三介质具有自由表面，并沿其增设了一列单元。关于此举必要性的说明，请见 [21] 。通过对顶部悬臂梁上表面的最右侧节点（节点 A）施加竖向位移来实现加载。图1b展示了底部悬臂梁上节点 B 的位移随节点 A的规定位移变化的关系，说明当顶部悬臂梁闭合间隙时接触开始发生。

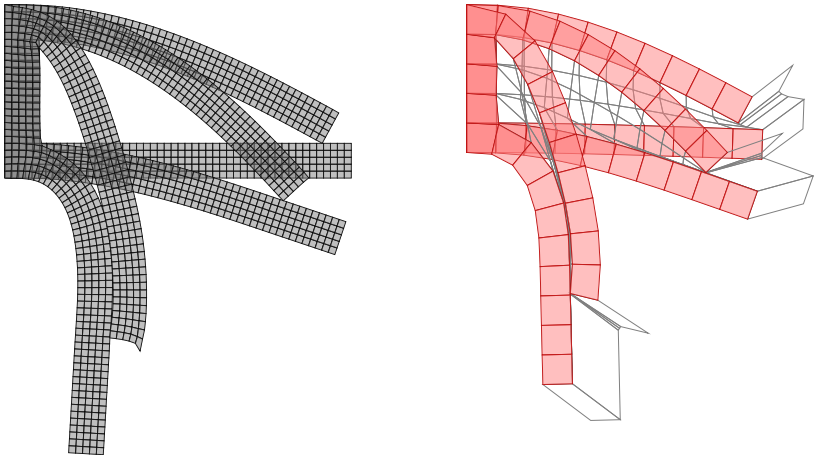
仿真采用四种包含不同数量单元的第三介质网格进行。其详细信息汇总于表 1。这些网格根据悬臂梁之间空间（即接触间隙）内竖直排列的单元数量命名。由于变形平均的效果取决于单元积分点之间的间距，罚参数 $\kappa_{\bar{F}}$ 的取值需随网格尺寸进行调整（单元尺寸越小，罚参数越大）。所有网格的第三介质参数均相同，即 $\gamma_{\mathrm{c}} = \gamma_{\mathrm{e}} = 10^{-6}$。

此外，为了进行比较，还进行了标准接触仿真。采用双向节点-段接触策略，并通过罚函数法施加接触约束。主体材料的网格对应于 M15 第三介质网格，每个梁截面高度包含 5 个单元。

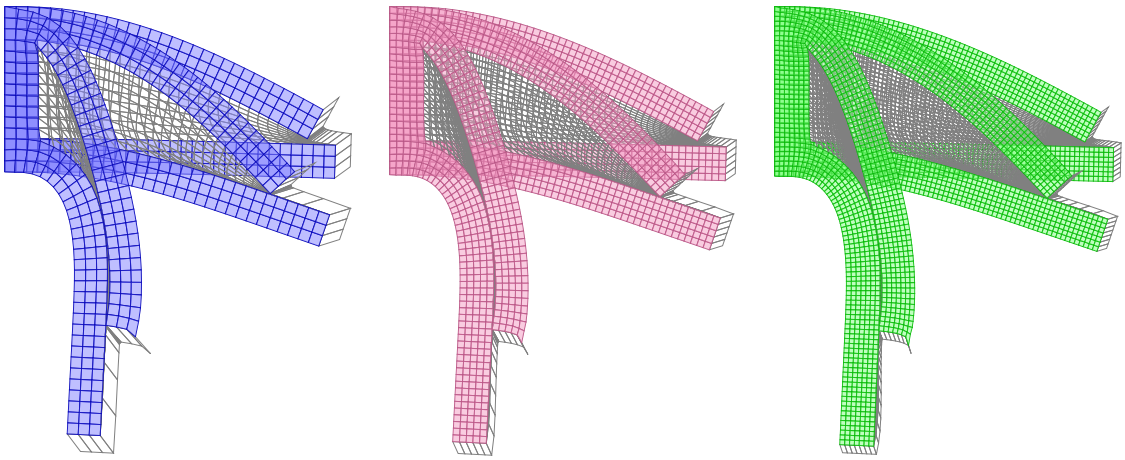
对 $\kappa_{\bar{F}}$ 参数进行线性缩放后，不同网格尺寸下的结果具有可比性。接触约束的锐利程度误差见表 1，而两根悬臂梁的节点位移变化见图 1b。在图 1b 的放大插图中，可以看到曲线在接触点处呈现圆滑轮廓，这是第三介质法的典型特征。



(a) 任务几何　　(b) 位移-位移图



(c) NTS 的变形状态　　(d) M3 的变形状态



(e) M9 的变形状态　　(f) M15 的变形状态　　(g) M21 的变形状态

图 1：不同网格细化程度下的 C形基准算例。(a) 任务几何。(b) 底部悬臂梁节点 B 的竖向节点位移与顶部悬臂梁节点 A 的规定竖向位移之间的关系，插图中展示了接触点的细节。结果展示了表 1 中的四种不同网格，以及传统的节点到线段双遍接触解。(c-g) 图中标注点处各网格的变形状态；体单元以彩色显示，第三介质单元以灰色轮廓显示。

网格梁		接触间隙	$\kappa_{\bar{F}}$ 参数	间隙误差
M3	1 单元/高度	3M，3 个单元	200 帕	6.8%
M9	每个高度 3 个单元	3M，9个单元	600 帕	5.9%
M15	每个高度 5 个单元	3M，15个元素	1000帕	5.3%
M21	每高7个单元	3M，21个元素	1400帕	5.0%
NTS	每高5个单元	罚项，10^6帕	-	-

表1：C形基准算例中不同网格的参数。请注意，随着接触间隙处网格细化，$\kappa_{\bar{F}}$ 罚参数也随之增大。最后一种网格是传统的带罚参数的节点到线段接触网格。最后一列显示了接触约束误差，其衡量方式为接触点处残留间隙相对于初始间隙的大小。

传统的节点-线段法能够更清晰地捕捉接触点，另请参阅 Wriggers等人对此问题的讨论。 [22]不同网格在加载水平达到 $u_y^A = 2h$ 时的部分变形状态如图 1c-g 所示。M3网格是唯一一个结果与其他网格显著不同的网格。不过，这是网格过于粗糙所致：弯曲悬臂梁的截面高度上只有一个线性单元，因此其响应不切实际地刚硬。

3.2. 闭合方盒基准算例

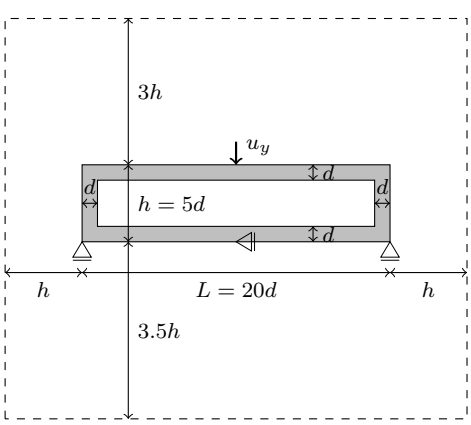
第三介质接触的另一个成熟基准案例，涉及在气动或机械加载下闭合箱体的自接触。这里，我们通过仿真位移加载，将该基准案例进一步扩展至箱体发生弯曲、其外侧之间也建立自接触的状态。该任务的几何形状见图 2a。箱体受到对称支撑，以防止刚体运动；加载则以规定位移的形式施加 u_y 于顶面的中心。为仿真外部接触，必须用尺寸足够大的第三介质网格包围整个箱体。其侧面的位移均固定。本次仿真所用第三介质的参数为 $\gamma_{\mathrm{c}} = 10^{-7}$，$\gamma_{\mathrm{e}} = 10^{-6}$和 $\kappa_{\bar{F}} = 500$ 帕。

该任务的力-位移图见图 2b。位移以梁截面高度为单位进行归一化，而力ˆ则以无量纲形式表示 f 计算如下：

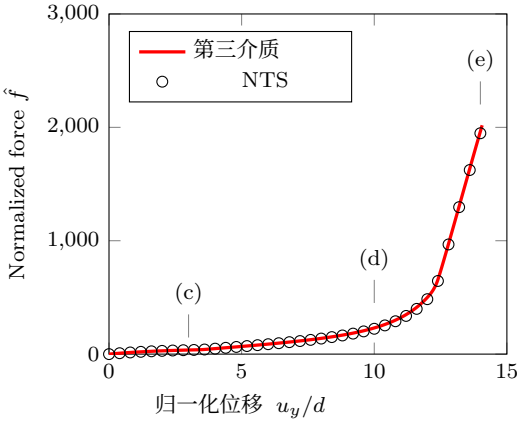
$$\hat{f} = \frac{fL^3}{Etd^4} \tag{10}$$

其中 f 为原始反力， E 为主体材料的杨氏模量，t为面外厚度， L和 d为几何形状的参数，见ˆ图2a。此归一化使 f 不受任务几何和块体材料参数的影响。

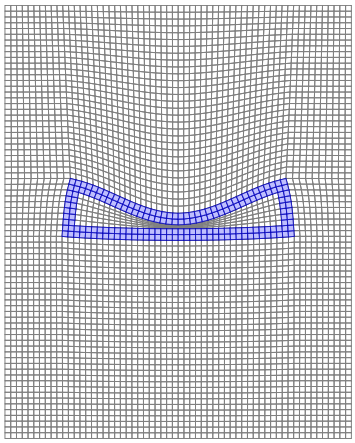
在此，我们再次将其与传统的节点-线段法进行比较。节点-线段法仿真的设置与第 3.1 节 C形基准算例中的设置相同。在封闭箱算例中，结果与第三介质



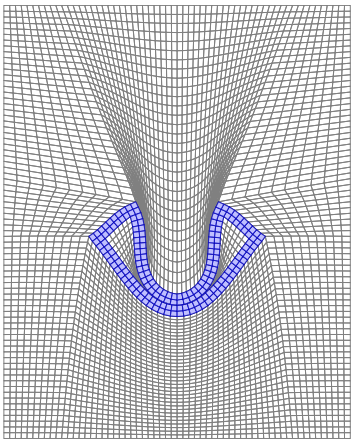
(a) 几何形状



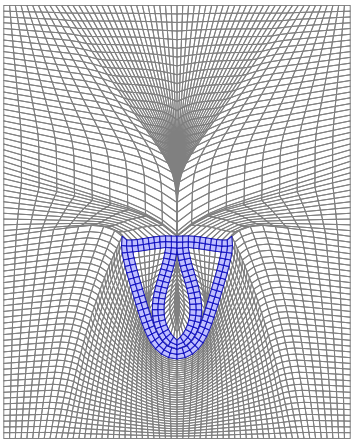
(b) 力-位移图



(c) $u_y/d = 3$



(d) $u_y/d = 10$



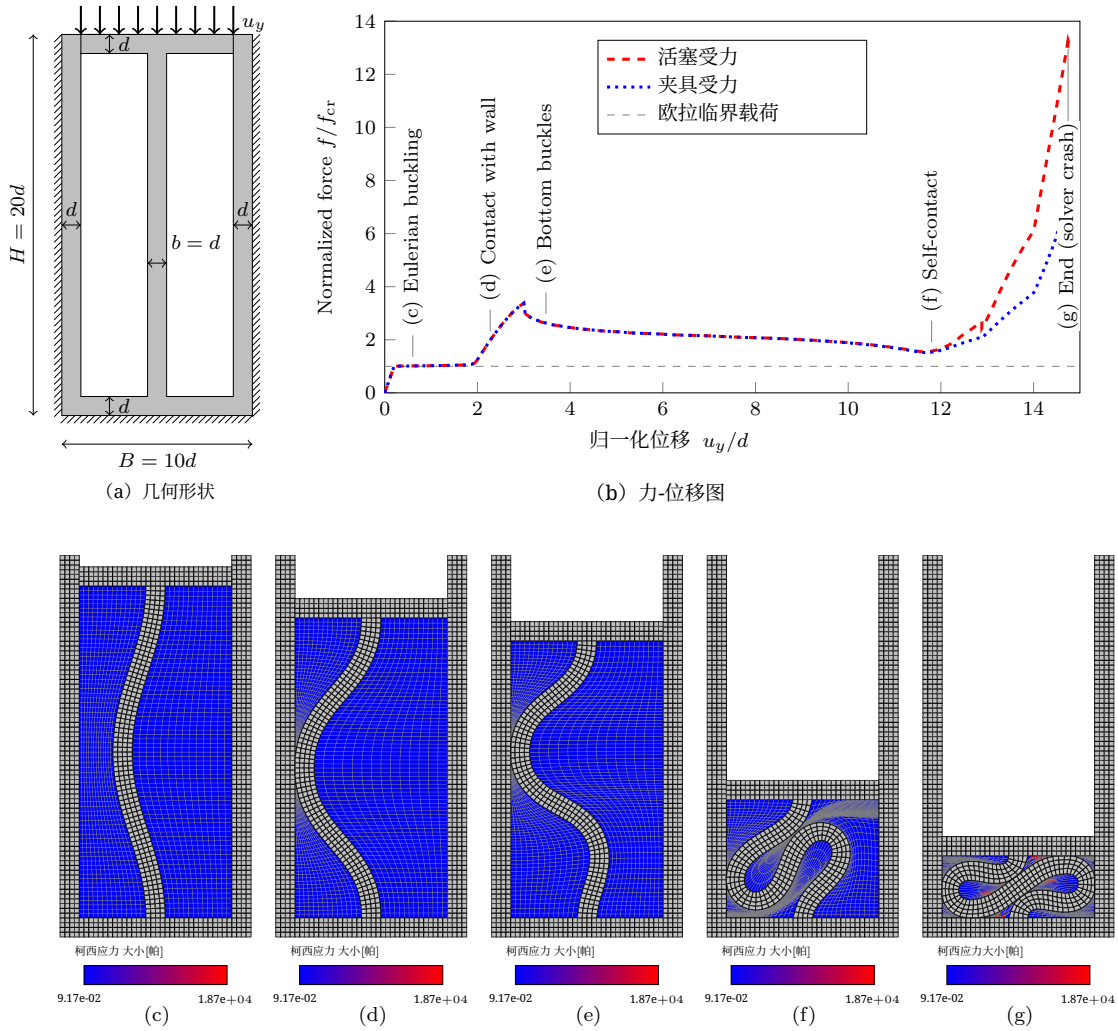
(e) $u_y/d = 14$

图2：存在双重自接触的闭合方盒基准算例。(a) 任务几何（第三介质包络在竖直方向上未按比例绘制）。(b) 力-位移图。标注显示了位移 u_y 在不同载荷级别下对应的位置，(c-e) 展示了这些位置处的变形网格构型。体单元以蓝色表示，第三介质以灰色表示。

方法达到了非常好的一致性，如图 2b 中叠加的曲线和标记所示。图 d 中展示了以箱体厚度倍数表示的各载荷级别下的变形状态，图 2c-e。图中给出了第三介质方法的结果，但传统接触的变形网格与第三介质网格的体单元几乎完全重合。

3.3. 约束屈曲与自接触

本例旨在展示第三介质法在失稳问题中的应用，其灵感大致来源于 Puso 和 Solberg 的研究 [35]。不过，为了将该例改用于第三介质情形，必须进行大量调整。图3a 展示了本例的几何形状：一个刚性活塞向下穿过刚性封闭箱，压缩一根竖直放置的梁。梁的一端夹紧在活塞上，另一端夹紧在箱体底部。为适应活塞的滑动，活塞的边界节点和第三介质



（a）几何形状　　（b）力-位移图

图3：具有失稳现象的双端固支梁受约束压缩。（a）任务几何。（b）力-位移图。标注显示了位移 u_y 的不同载荷级别所对应的位置，其变形网格构型如（c-g）所示。变形状态图中的颜色对应于第三介质内柯西应力的大小。

单元未固定在刚性箱体上，而仅受到水平方向的约束（即它们可以沿接触面自由上下移动）。仿真一直进行到求解器无法继续收敛为止。图3b 显示了力-位移图，图3c-g 显示了该例连续的变形状态。在力-位移图中，位移以活塞和壁厚的倍数 d 表示，力 f 则以双端夹紧情形下的欧拉临界载荷 f_{cr} 的倍数表示：

$$f_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{(0.5L)^2} \tag{11}$$

其中， L 是夹持端之间的梁长， EI 是其弯曲刚度 y.

力—位移图中的拐点对应于加载过程中构型的各种变化。首先，双端固支梁在受到轴向载荷时发生屈曲，

（见图3c中的变形构型）。屈曲力与欧拉临界载荷相符，误差为0.6%。随后，随着梁在屈曲状态下进一步受压，力值几乎保持平台状，直至梁与腔体侧壁发生接触，此时响应再次变硬（图3d）。梁的轴向受压下部发生屈曲，使这一刚化过程受到中断（图3e）。这使力值下降，直到仿真后期发生自接触（图3f）。最后，在梁进一步与箱体底部接触后，仿真结束（图3g，即最终收敛的求解步）。

此处选择的第三介质参数稍硬一些，分别为 $\gamma_c = 10^{-6}$、$\gamma_e = 10^{-5}$ 和 $\kappa_{\bar{F}} = 4000$ 帕。我们发现，这一选择不会干扰结果，因为观察到的接触间隙极小，模拟接近结束时的状态或许是个例外。此外，力在第三介质中的传递情况也通过力-位移图进行了评估：图中展示了沿活塞全长（即也包括与第三介质的界面）测得的反作用力，以及梁底部夹具处测得的反作用力。在梁与刚性箱体底部接触后，两条曲线才开始分离；此时刚性箱体底部会分担部分竖直方向的力。变形状态图展示了第三介质中的柯西应力大小，说明接触力如何通过受压的第三介质单元传递。为使图像更加清晰，色彩图的上限截取在第 92 百分位处。

3.4. 构形力

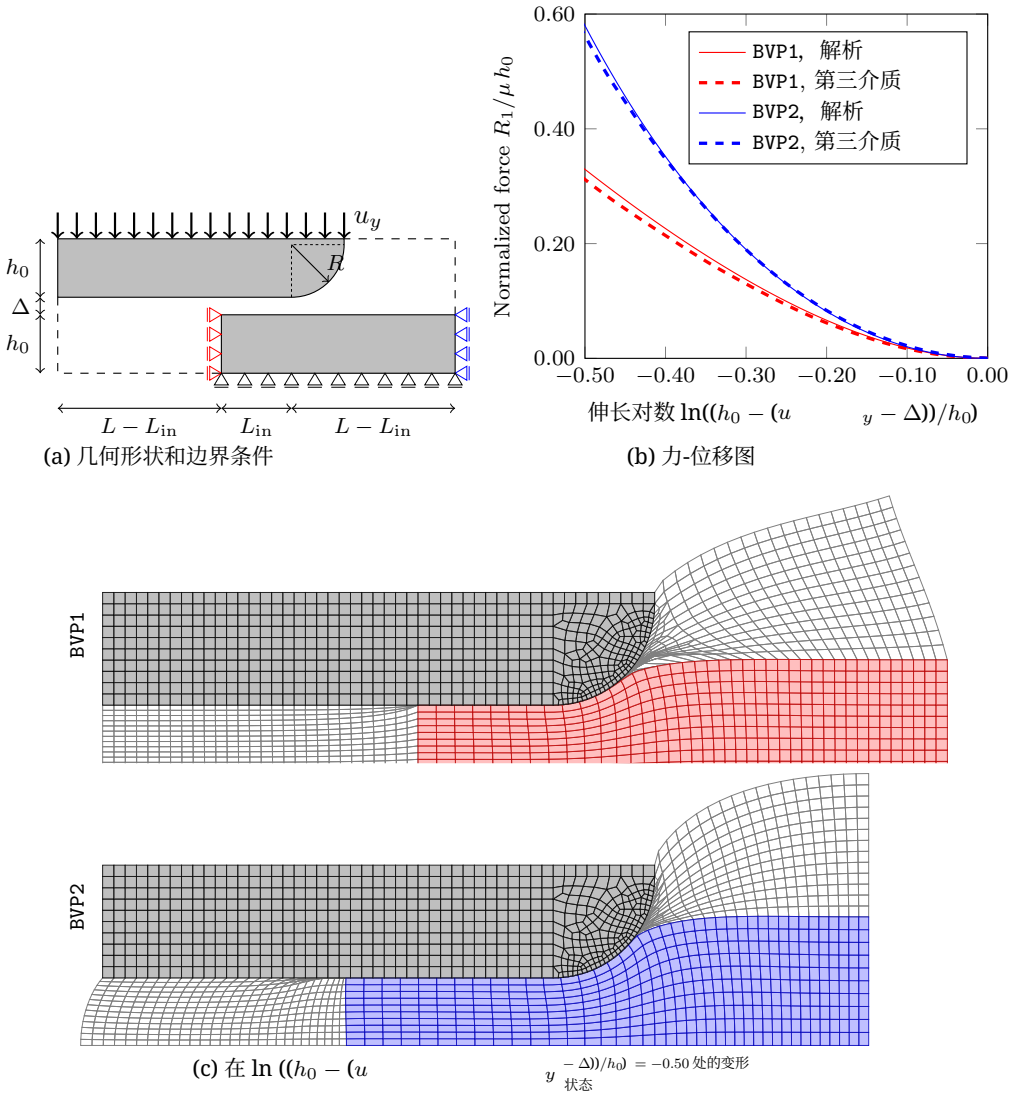
本例的灵感来自 Dal Corso 等人 [36], 的研究。他们考察了一个在与刚性压头无摩擦接触时发生大变形的弹性固体。他们证明，与冲头的无穷小水平增长相关的能量释放率、沿其角点周围计算的 J-积分，以及接触反作用力的水平分量三者相等。此外，他们推导出了所得构形力的闭式解析表达式，并通过基于标准节点到表面接触算法的有限元模拟对其进行了数值验证。

本例旨在评估能否利用第三介质方法正确求得上述构形力。此基准算例的一项关键优势是，Dal Corso 等人 [36]提供了闭式解析解，可作为明确的验证参照。水平反作用力 R_1 的解析表达式为

$$R_1 = \frac{W^r - W^l}{\lambda_1^r} h_0, \tag{12}$$

其中，W^l和 W^r分别为在固体左边界和右边界处计算的应变能密度函数，h_0 为固体的未变形高度，λ_1^r 为在右边界测得的水平伸长。

图4a 描述了所研究的两个边值问题的几何形状，它们的区别仅在于施加于弹性体的约束位置不同。



(a) 几何形状和边界条件

(b) 力-位移图

(c) 在 $\ln((h_0 - (u_y - \Delta))/h_0) = -0.50$ 处的变形状态

图 4：构形力问题。(a) 任务几何。(b) 两种情况 BVP1 和 BVP2 的力-位移图；这两种情况对弹性块施加了不同的边界条件，分别在 (a) 中以红色和蓝色表示。(c) 两种情况在加载结束时的变形状态。

红色所示的边界条件对应于边值问题 BVP1，而蓝色所示的边界条件对应于 BVP2。Dal Corso 等人 [36] 进一步证明，压头的曲率半径（R 图4a 中）不会影响所得构形力；该力仅取决于弹性块最左侧和最右侧材料纤维的变形状态。这一特性使这些问题特别适用于本研究，因为它让我们能够引入一个不可忽略的 R 值，并展示第三介质法如何处理接触体的弯曲几何，同时仍可将构形力的解析解用作基准。我们选择了 $R = 0.9h_0$。尺寸 L、L_{in}和 Δ （初始接触间隙）也不会影响该问题的归一化解析解（见公式（12））。在所示仿真中，它们分别取为 $L = 4h_0$、$L_{\text{in}} = 0.3L$ 和 $\Delta = 0.3h_0$。

图4b 展示了无量纲水平反力 R_1随固体右边界的对数垂直伸长而变化的情况。结果分别显示了 `BVP1` （红色）和 `BVP2` （蓝色）的结果，其中解析解（实线）与第三介质结果（虚线）进行了比较。在整个加载范围内，对于这两个边值问题，解析预测与第三介质公式均表现出极佳的一致性。

两个边值问题最终的变形构型见图4c。结果展示了第三介质如何适应变形，并在接触建立后沿接触界面有效压缩至接近零体积。由于涉及较大变形，进一步加载会导致弹性固体沿压头滑动，使第三介质不仅受到垂直压缩，还承受显著的剪切变形。在此状态下准确再现构形力的能力，证明了所提出的第三介质公式在法向与切向相互作用共同作用下的稳健性。

本节所示结果采用参数 γ_{a} =10^{-6}、 $\gamma_{\mathrm{b}} = 10^{-3}$ 和 $\kappa_{\bar{F}} = 2 \cdot 10^5$ 帕计算得出。弹性固体采用不可压缩 neo-Hookean 模型描述，与 Dal Corso 等人 [36], 给出的示例一致，其中 $E = 3 \cdot 10^6$ 帕，且 $\nu = 0.49$。与前述示例不同，这里的网格由具有二次形函数的 8 节点四边形和 6 节点三角形有限元组成。采用标准高斯积分规则，每个单元设有 16 个积分点。这样做是为了让位于间隙中的第三介质单元拥有更多运动学自由度，因为它们需要沿曲面接触面滑动并弯曲。

4. 结论

本文提出了一种第三介质接触模型。与所有现有模型不同，该模型仅需采用一阶有限元公式，无需额外的自由度。该模型包含两个关键组成部分：受小应变理论启发的第三介质常刚度定律，以及基于变形平均的正则化方法。

此外，在接触前阶段，我们对第三介质采用了类似小应变的恒定刚度定律，使第三介质的刚度在整个仿真过程中保持基本恒定，但接触约束除外。引入该定律使我们能够将通常构成第三介质模型基础的 neo-Hookean 贡献限制为仅包含其体积项；该体积项通过对极端压缩作渐近响应来实现接触约束。我们省略了 neo-Hookean 弹性中的等容项，从而提高了高度柔顺的第三介质单元的稳定性。

变形平均项用于惩罚单元积分点之间变形梯度张量的不均匀性，其提出动机在于：这种方法与第三介质接触模型中常见的二阶位移梯度单元级惩罚具有相似性。然而，这种通常的惩罚至少需要二阶单元公式，或采用基于额外自由度的替代处理。在我们的方法中，标准一阶单元公式即已足够，尽管该正则化仅在单元内部存在多个理论上具有不同变形梯度张量值的积分点时才有意义

因此，它形成了一种非常简单的公式。

我们希望这一新方法能够用于二维和三维场景下的第三介质接触模拟。正如本文通过多个示例所展示的，该方法易于实现、适用范围广且稳健。第三介质模型的所有组成部分均具有能量势，这一特性对于高级有限元求解器（包括用于处理稳定性问题的求解器）十分有用。与以往的第三介质模型一样，我们希望本模型能为拓扑优化领域所用。同样，本文提出的正则化技术可应用于多种需要对类空气空间进行网格划分的多物理场有限元模拟。

致谢。 本研究得到捷克共和国教育、青年和体育部的支持（ERC CZ 项目编号 LL2310）。

附录 A. 常刚度项的实现

在第 2.1 节中，我们提出对第三介质采用常刚度线弹性材料定律。其应变能密度用变形梯度 $\boldsymbol{F}$表示，如下所示

$$W_{\mathrm{ss}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{D}^{\mathrm{3M}} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}) : \mathbf{D}^{\mathrm{3M}} : (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}) \tag{A.1}$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_{\mathrm{s}}\boldsymbol{u}$ 为工程应变，即位移场的对称梯度，$\mathbf{D}^{\mathrm{3M}}$ 为第三介质的小应变材料刚度张量，$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} + \nabla\boldsymbol{u}$ 为变形梯度。

式（A.1）中的第二个等式利用了材料刚度张量的小对称性，其以指标记法定义为

$$D^{\mathrm{3M}}_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{A.2}$$

其中 λ 与 μ 为拉梅系数。在项$\mathbf{D}^{\mathrm{3M}} : (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{I})$中，可将位移场梯度分解为其对称部分与反对称部分，即

$$D^{\mathrm{3M}}_{ijkl}(F_{kl} - \delta_{kl}) = \frac{1}{2}D^{\mathrm{3M}}_{ijkl}(u_{k,l} + u_{l,k}) + \frac{1}{2}D^{\mathrm{3M}}_{ijkl}(u_{k,l} - u_{l,k}) \tag{A.3}$$

其中记号$u_{a,\ b}$ 表示梯度运算 $\partial u_a/\partial X_b$。于是，由$\mathbf{D}^{\mathrm{3M}}$ 的右小对称性可得

$$D^{\mathrm{3M}}_{ijkl}u_{l,k} = D^{\mathrm{3M}}_{ijlk}u_{l,k} = D^{\mathrm{3M}}_{ijkl}u_{k,l} \tag{A.4}$$

因此，式（A.3）中的最后一项消失，从而得到

$$D^{\mathrm{3M}}_{ijkl}(F_{kl} - \delta_{kl}) = \frac{1}{2}D^{\mathrm{3M}}_{ijkl}(u_{k,l} + u_{l,k}) = D^{\mathrm{3M}}_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{A.5}$$

对于项 $(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}) : \mathbf{D}^{\mathrm{3M}}$，也可以利用$\mathbf{D}^{\mathrm{3M}}$ 的左小对称性作出类似论证。

我们可以将应变能密度的第一变分和二阶变分（A.1）构造为

$$\delta W_{\mathrm{ss}} = \delta\boldsymbol{F} : \mathbf{D}^{\mathrm{3M}} : (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}) \tag{A.6}$$

$$\delta^2 W_{\mathrm{ss}} = \delta\boldsymbol{F} : \mathbf{D}^{\mathrm{3M}} : \delta\boldsymbol{F} \tag{A.7}$$

第一类皮奥拉–基尔霍夫应力 $\boldsymbol{P}$ 的定义如下：

$$\boldsymbol{P} = \mathbf{D}^{\mathrm{3M}} : (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}) \tag{A.8}$$

而材料刚度张量实际上只是常张量$\mathbf{D}^{\mathrm{3M}}$。基于与上文类似的论证，此处的第一类皮奥拉–基尔霍夫应力始终是对称的。

附录B. 变形平均正则化的实现

对于变形平均正则化，第三介质的应变能密度由该项增强

$$W_{\bar{F}} = \frac{1}{2}\kappa_{\bar{F}}\|\boldsymbol{F} - \bar{\boldsymbol{F}}\|^2 \tag{B.1}$$

其中 $\kappa_{\bar{F}}$ 为罚参数， $\boldsymbol{F}$ 为变形梯度， $\boldsymbol{F}$ 为有限元形心处的变形梯度， $\|\boldsymbol{a}\|$ 表示张量 $\boldsymbol{a}$ 的弗罗贝尼乌斯范数。

因此，应变能密度函数的一阶变分为

$$\delta W_{\bar{F}} = \underbrace{\kappa_{\bar{F}}\left(\boldsymbol{F} - \bar{\boldsymbol{F}}\right)}_{\boldsymbol{P}_{\bar{F}}} : \delta\boldsymbol{F} + \underbrace{\kappa_{\bar{F}}\left(-\boldsymbol{F} + \bar{\boldsymbol{F}}\right)}_{\bar{\boldsymbol{P}}_{\bar{F}}} : \delta\bar{\boldsymbol{F}} \tag{B.2}$$

由此定义第一皮奥拉-基尔霍夫应力张量 $\boldsymbol{P}_{\bar{F}} = \partial W_{\bar{F}}/\partial\boldsymbol{F}$ 及其单元中心对应量 $\boldsymbol{P}_{\bar{F}} = \partial W_{\bar{F}}/\partial\boldsymbol{F}$。类似地，应变能密度的二阶变分为

$$\begin{aligned}
\delta^2 W_{\bar{F}} \;=\;& \delta\boldsymbol{F} : \underbrace{\left(\kappa_{\bar{F}}\mathbf{I}\right)}_{\mathbf{D}^1_{\bar{F}}} : \delta\boldsymbol{F} + \delta\boldsymbol{F} : \underbrace{\left(-\kappa_{\bar{F}}\mathbf{I}\right)}_{\mathbf{D}^2_{\bar{F}}} : \delta\bar{\boldsymbol{F}} \\
+\;& \delta\bar{\boldsymbol{F}} : \underbrace{\left(-\kappa_{\bar{F}}\mathbf{I}\right)}_{\mathbf{D}^3_{\bar{F}}} : \delta\boldsymbol{F} + \delta\bar{\boldsymbol{F}} : \underbrace{\left(\kappa_{\bar{F}}\mathbf{I}\right)}_{\mathbf{D}^4_{\bar{F}}} : \delta\bar{\boldsymbol{F}}
\end{aligned} \tag{B.3}$$

其中 $\mathbf{I}$ 为四阶单位张量，四个刚度项 $\mathbf{D}^1_{\bar{F}}$ 至 $\mathbf{D}^4_{\bar{F}}$ 定义为 $\boldsymbol{P}_{\bar{F}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{P}}_{\bar{F}}$ 对 $\boldsymbol{F}$ 或 $\bar{\boldsymbol{F}}$ 的偏导数。

转换为指标记法后，方程（B.1）为

$$W_{\bar{F}} = \frac{1}{2}\kappa_{\bar{F}}\left(F_{ij} - \bar{F}_{ij}\right)\left(F_{ij} - \bar{F}_{ij}\right) \tag{B.4}$$

应力定义如下：

$$P_{ij} = \frac{\partial W}{\partial F_{ij}} = \kappa_{\bar{F}}\left(F_{ij} - \bar{F}_{ij}\right) \tag{B.5}$$

$$\bar{P}_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \bar{F}_{ij}} = -\kappa_{\bar{F}}\left(F_{ij} - \bar{F}_{ij}\right) \tag{B.6}$$

由于本节仅考虑 $\boldsymbol{P}_{\bar{F}}$ 和 $\boldsymbol{P}_{\bar{F}}$ 的贡献，为简洁起见，指标记法中省略下标 $_F$。刚度张量定义为

$$D^1_{ijkl} = \frac{\partial P_{ij}}{\partial F_{kl}} = \kappa_{\bar{F}}\,\delta_{ik}\,\delta_{jl} \tag{B.7}$$

$$D^2_{ijkl} = \frac{\partial P_{ij}}{\partial \bar{F}_{kl}} = -\kappa_{\bar{F}}\,\delta_{ik}\,\delta_{jl} \tag{B.8}$$

$$D^3_{ijkl} = \frac{\partial \bar{P}_{ij}}{\partial F_{kl}} = -\kappa_{\bar{F}}\,\delta_{ik}\,\delta_{jl} \tag{B.9}$$

$$D^4_{ijkl} = \frac{\partial \bar{P}_{ij}}{\partial \bar{F}_{kl}} = \kappa_{\bar{F}}\,\delta_{ik}\,\delta_{jl} \tag{B.10}$$

进行有限元离散后，$\boldsymbol{u}$ 有限元单元内的位移场可近似表示为单元形函数矩阵 N 与节点位移向量 d 的乘积，即 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}) \approx \mathrm{N}\big|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_X}\mathrm{d}$，其中 $\boldsymbol{X}$ 为材料坐标向量，$\boldsymbol{\xi}$ 为单元自然坐标向量，$\boldsymbol{\xi}_X$ 为其在对应于 $\boldsymbol{X}$的点处的值。同样，位移场的变分 $\delta\boldsymbol{u}$ 可近似表示为 $\delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}) \approx \mathrm{N}\big|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_X}\delta\mathrm{d}$。

方程（B.2）和（B.3用 Voigt记号表示后也可转换为

$$\delta W_{\bar{F}} = \mathrm{P}^T\delta\mathrm{F} + \bar{\mathrm{P}}^T\delta\bar{\mathrm{F}} \tag{B.11}$$

$$\delta^2 W_{\bar{F}} = \delta\mathrm{F}^T\mathrm{D}^1\delta\mathrm{F} + \delta\mathrm{F}^T\mathrm{D}^2\delta\bar{\mathrm{F}} + \delta\bar{\mathrm{F}}^T\mathrm{D}^3\delta\mathrm{F} + \delta\bar{\mathrm{F}}^T\mathrm{D}^4\delta\bar{\mathrm{F}} \tag{B.12}$$

其中，P、 $\bar{\mathrm{P}}$、F、 $\bar{\mathrm{F}}$、D^1, D^2, D^3, 和 D^4 分别作为张量 $\boldsymbol{P}$、 $\bar{\boldsymbol{P}}$、 $\boldsymbol{F}$、 $\bar{\boldsymbol{F}}$、$\mathbf{D}^1$, $\mathbf{D}^2$, $\mathbf{D}^3$, 和 $\mathbf{D}^4$, 的 Voigt表示引入。

方程（B.2）和（B.3的域积分随后由对（B.11）和（B.12）进行单元积分之和取代。这些单元积分本身又通过对各积分点求和来完成：

$$\int_{\Omega_\mathrm{e}} \delta W_{\bar{F}}\,\mathrm{d}\Omega \approx \sum_{i_\mathrm{g}=1}^{n_\mathrm{g}} \alpha_i \left(\mathrm{P}^T\delta\mathrm{F} + \bar{\mathrm{P}}^T\delta\bar{\mathrm{F}}\right) \tag{B.13}$$

$$\int_{\Omega_\mathrm{e}} \delta^2 W_{\bar{F}}\,\mathrm{d}\Omega \approx \sum_{i_\mathrm{g}=1}^{n_\mathrm{g}} \alpha_i \left(\delta\mathrm{F}^T\mathrm{D}^1\delta\mathrm{F} + \delta\mathrm{F}^T\mathrm{D}^2\delta\bar{\mathrm{F}} + \delta\bar{\mathrm{F}}^T\mathrm{D}^3\delta\mathrm{F} + \delta\bar{\mathrm{F}}^T\mathrm{D}^4\delta\bar{\mathrm{F}}\right) \tag{B.14}$$

其中，Ω_e 表示一个有限元的面积，n_g 是其高斯积分点的数量，α_i 是第 i 个积分点的积分权重。在此情境下，在给定高斯点处，变形梯度 F 及其变分 δF 使用在该高斯点自然坐标 ξ_g 处计算的形函数梯度矩阵 B 近似表示为

$$\mathrm{F} \approx \mathrm{I} + \mathrm{B}\big|_{\xi=\xi_\mathrm{g}}\mathrm{d} \qquad \delta\mathrm{F} \approx \mathrm{B}\big|_{\xi=\xi_\mathrm{g}}\delta\mathrm{d} \tag{B.15}$$

其中 I 为单位矩阵。另一方面，F 的有限元近似只需始终在单元质心处计算形函数梯度即可得到，例如在 $\xi_0 = (0,0)$ 处，该点对应于标准二维等参单元自然坐标系中的质心：

$$\bar{\mathrm{F}} \approx \mathrm{I} + \mathrm{B}\big|_{\xi=\xi_0}\mathrm{d} \qquad \delta\bar{\mathrm{F}} \approx \mathrm{B}\big|_{\xi=\xi_0}\delta\mathrm{d} \tag{B.16}$$

此外，通过消去变分节点位移$_\mathrm{e}$ 向量，得到单元力向量 $_\mathrm{e}$ 和 δ单元刚度矩阵，其形式为（

方程（B.12），分别留下

$$\mathsf{f}_{\mathrm{e}} = \sum_{i_{\mathrm{g}}=1}^{n_{\mathrm{g}}} \alpha_i \left(\mathsf{B}^T\mathsf{P} + \bar{\mathsf{B}}^T\bar{\mathsf{P}}\right) \tag{B.17}$$

$$\mathsf{K}_{\mathrm{e}} = \sum_{i_{\mathrm{g}}=1}^{n_{\mathrm{g}}} \alpha_i \left(\mathsf{B}^T\mathsf{D}^1\mathsf{B} + \mathsf{B}^T\mathsf{D}^2\bar{\mathsf{B}} + \bar{\mathsf{B}}^T\mathsf{D}^3\mathsf{B} + \bar{\mathsf{B}}^T\mathsf{D}^4\bar{\mathsf{B}}\right) \tag{B.18}$$

¯其中，为简洁起见，引入符号 B 表示在 ξ_0 处求值的 B矩阵。

参考文献

[1] X. Ren, R. Das, P. Tran, T. D. Ngo, Y. M. Xie, 负泊松比超材料与结构：综述, 《智能材料与结构》 27 (2) (2018) 023001.doi:10.1088/1361-665X/aaa61c.[2] X. Yu, J. Zhou, H. Liang, Z. Jiang, L. Wu, 与刚度、刚性和可压缩性相关的力学超材料：简要综述, 《材料科学进展》94 (2018) 114–173. doi:10.1016/j.pmatsci.2017.12.003.[3] X. Liu, J. Li, Y. Xing, Z. Zhang, Y. Cao, Y. Cao, B. Li, 软体仿生水下航行器：驱动机制、结构设计与水下应用综述, 《微型机械》17 (2) (2026) 258. doi:10.3390/mi17020258.[4] I. Elishakoff, M. Amato, A. Marzani, Jaworski 和 Dowell 问题中伽辽金法的重新审视与修正, Mechanical Systems and Signal Pro- cessing 155 (2021) 107604. doi:10.1016/j.ymssp.2020.107604.[5] I. Elishakoff, M. Amato, 超声速流中梁的颤振：铁木辛柯–埃伦费斯特方程的截断形式已足够, 《国际力学与材料设计杂志》17 (4) (2021) 783–799. doi:10.1007/s10999-021-09537-x.[6] T. A. Laursen, 计算接触与冲击力学, 施普林格, 柏林, 海德堡, 2003. doi:10.1007/978-3-662-04864-1.[7] P. Wriggers, 计算接触力学, 施普林格 柏林 海德堡, 2006. doi:10.1007/978-3-540-32609-0.[8] A. Konyukhov, R. Izi, 计算接触力学导论, 威利, 奇切斯特, 西萨塞克斯, 2015.[9]J. C. Simo, P. Wriggers, R. L. Taylor, 用于接触问题有限元解的扰动拉格朗日公式, Computer Meth- ods in Applied Mechanics and Engineering 50 (2) (1985) 163–180. doi:10.1016/0045-7825(85)90088-X.

[10] G. Zavarise, L. de Lorenzis, 一种通过接触斑块测试的改进型节点到线段算法, 《国际数值方法工程杂志》79 (2009) 379–416。doi:10.1002/nme.2559。

[11] G. Zavarise, P. Wriggers, 一种线段对线段接触策略, 《数学与计算机建模》28 (1998) 497–515。doi:10.1016/S0895-7177(98)00138-1。

[12] K. A. Fischer, P. Wriggers, 基于Mortar法的有限变形无摩擦二维接触公式, 《计算力学》36 (3) (2005) 226–244。 doi:10.1007/s00466-005-0660-y。

[13] G. L. Bluhm, O. Sigmund, K. Poulios，有限应变拓扑优化中的内部接触建模，《计算力学》67 (4) (2021) 1099–1114。doi:10.1007/s00466-021-01974-x。[14] P. Wriggers, J. Schröder, A. Schwarz，采用第三介质的接触有限元法，《计算力学》52 (2013) 837–847。doi:10.1007/s00466-013-0848-5。[15] T. Bog, N. Zander, S. Kollmannsberger, E. Rank，采用高阶有限元和虚拟接触材料的法向接触，《计算机与数学及其应用》70 (7) (2015) 1370–1390。doi:10.1016/j.camwa.2015.04.020。[16] R. Kruse, N. Nguyen-Thanh, P. Wriggers, L. D. Lorenzis，采用第三介质法的等几何无摩擦接触分析，《计算力学》62 (2018) 1009–1021。doi:10.1007/s00466-018-1547-z。[17]A. H. Frederiksen, O. Sigmund, K. Poulios，自接触结构的拓扑优化，《计算力学》73 (4) (2024) 967–981。doi:10.1007/s00466-023-02396-7。[18]A. Dalklint, J. Alexandersen, A. H. Frederiksen, K. Poulios, O. Sigmund，接触辅助热力调节器的拓扑优化，《国际工程数值方法杂志》126 (2) (2025) e7661。doi:10.1002/nme.7661。[19] A. H. Frederiksen, O. Rokoš, K. Poulios, O. Sigmund, M. G. Geers，为第三介质接触加入摩擦：一种受晶体塑性启发的方法，《计算力学与工程应用方法》432 (2024) 117412。doi:10.1016/j.cma.2024.117412。[20] A. H. Frederiksen, A. Dalklint, O. Sigmund, K. Poulios，用于含接触三维拓扑优化的改进第三介质公式，《计算力学与工程应用方法》436 (2025)。doi:10.1016/j.cma.2024.117595。[21] O. Faltus, M. Horák, M. Doškář, O. Rokoš，气动驱动系统的第三介质有限元接触列式，《计算力学与工程应用方法》431 (2024) 117262。doi:10.1016/j.cma.2024.117262。[22] P. Wriggers, J. Korelc, P. Junker，采用一阶与二阶有限元的第三介质接触方法，《计算力学与工程应用方法》436 (2025)。doi:10.1016/j.cma.2025.117740。[23] P. Wriggers, J. Korelc, Ph. Junker，第三介质接触的一阶有限元列式，《计算力学》76 (3) (2025) 829–845。doi:10.1007/s00466-025-02628-y。

[24] M. von Zabiensky, D. R. Jantos, P. Junker，采用邻接单元法的快速稳健第三介质接触方法，《有限元分析与设计》255 (2026) 104489. doi:10.1016/j.finel.2025.104489.[25] B.-B. Xu, P. Wriggers，适用于二维第三介质接触的无稳定化虚拟单元法，《计算力学与工程应用方法》450 (2026) 118611. doi:10.1016/j.cma.2025.118611.[26] R. S. Rivlin，各向同性材料的大弹性变形。I. 基本概念，《伦敦皇家学会哲学汇刊 A 辑：数学与物理科学》240 (822) (1948) 459–490. doi:10.1098/ rsta.1948.0002.[27] F. Wang, B. S. Lazarov, O. Sigmund, J. S. Jensen，虚拟域技术与有限应变弹性问题拓扑优化的插值方案，《计算力学与工程应用方法》276 (2014) 453–472. doi:10.1016/j.cma.2014.03.021.[28] B. Patzák, Z. Bittnar，面向对象有限元代码的设计，《工程软件进展》32 (10) (2001) 759–767. doi:10.1016/S0965-9978(01) 00027-8.[29] B. Patzák, D. Rypl，具有动态负载均衡的面向对象并行有限元框架，《工程软件进展》47 (1) (2012) 35– 50. doi:10.1016/j.advengsoft.2011.12.008.[30] B. Patzák，OOFEM——用于材料与结构高级建模的面向对象仿真工具，《理工学报》52 (6) (2012). doi: 10.14311/1678.[31] J. Bonet, A. J. Gil, R. D. Wood，《有限元分析中的非线性固体力学：静力学》，剑桥大学出版社，2016. doi:10.1017/ CBO9781316336144.[32] S. H. Cheng, N. J. Higham，基于对称不定分解的修正乔列斯基算法，《SIAM矩阵分析与应用杂志》19 (1998) 1097–1110. doi:10.1137/S0895479896302898.[33] J. Nocedal, S. J. Wright，《数值优化》，施普林格纽约，2006. doi:10.1007/978-0-387-40065-5.[34] O. Faltus, M. Amato, M. Horák，《“变形梯度平均正则化用于第三介质接触”的补充数据》，Zenodo (2026). doi:10. 5281/zenodo.18887493.[35] M. A. Puso, J. M. Solberg，一种用于无偏约束和自接触的双遍砂浆法，《计算力学与工程应用方法》367 (2020) 113092. doi:10.1016/j.cma.2020.113092.

[36] F. Dal Corso、M. Amato、D. Bigoni, 《无摩擦刚性接触与构形力作用下的弹性固体》, 固体力学与物理学杂志 188(2024)105673。doi:10.1016/j.jmps.2024.105673。