平衡群与多曲面群的虚循环维数

JESUS HERNANDEZ HERNANDEZ 和
PORFIRIO L. LEON ALVAREZ

Abstract. 本文为正规多曲面群和正规多自由群的虚循环维数给出了显式线性上界。我们的方法基于对平衡性质（L¨ück 条件 C）的结构性研究，该性质为虚循环子群的可公度化子提供了结构性控制。

我们证明了一般性的稳定性结果，表明在适当的短正合列、直极限以及双曲图群分解下，平衡性质得以保留。作为应用，我们证明正规多双曲群、正规多自由群和正规多曲面群都是平衡的。这些类尤其包括具有非空边界的曲面的纯辫群、FC 型 Artin 群、右规 Artin 群，以及曲面同胚的映射环面的基本群。

arXiv:2603.13096v1 [math.GR] 13 Mar 2026

Contents

1. 引言 12. 预备知识 43. 平衡性质的保持 54. 前述结果的一些应用 105. 多曲面群的虚循环维数 14参考文献 19

1. Introduction

设 G 是一个离散群，并设 $\mathcal{F}$ 是 G的一个子群集合。我们称 $\mathcal{F}$ 是一个子群族，如果它非空，且对取子群以及在 G中的共轭运算封闭。分类空间 $E_{\mathcal{F}}G$ 的 G-CW 复形 X 称为一个模型，若其所有各向同性群都属于 $\mathcal{F}$，并且满足以下泛性质：对于任意一个 G-CW 复形 Y，若其各向同性群属于 $\mathcal{F}$，则存在一个 G-映射 $Y \to X$，且该映射在 G-同伦意义下唯一。这样的模型总是存在，这是一个标准结果。关于子群族的分类空间的更多细节，请参阅 [L¨uc05]。

离散群 G 的虚循环维数记为 gd(G)，其定义为满足以下条件的最小整数 n：存在一个 n 维的分类空间 $E_{VCYC}G$ 模型，其中 $V\mathcal{CYC}$ 表示 G 的虚循环子群族。这些空间具有特别重要的意义，因为它们出现在 Farrell–Jones 猜想的表述中（见 [LR05]）。该猜想在几何群论中引起了广泛关注，并促使人们对若干重要群类的虚循环维数进行明确计算，例如映射类群（见 [NP18] [JPTN16]）、3-流形群（见 [JLSSn21]）、虚 poly-$\mathbb{Z}$ 群（见 [LW12，定理 5.13]）以及经典 Artin 辫群（见 [FGM20]）。本文给出了正规 poly-曲面群和正规多自由群的虚循环维数的线性上界。

日期：2026年3月16日。2020 数学主题分类。主要分类：20F65、55R35、57M07。关键词和短语。平衡群、多曲面群、多自由群、虚循环维数、Bass–Serre理论、3-流形群。

现在，设 $\mathcal{P}$ 是一个群类。如果存在一个滤过，我们称 G 是 $poly\text{-}\mathcal{P}$

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_{n-1} \lhd G_n = G,$$

使得每个商群 G_{i+1}/G_i 都属于 $\mathcal{P}$。如果进一步地，每个 G_i 在 G中也正规，我们就称 G 为正规 *poly-*$\mathcal{P}$。存在这种滤过的最小 n称为 G的长度 。

特别地，如果 $\mathcal{P}$ 是自由群类，或是具有非正欧拉示性数且边界（若非空）为紧的连通曲面（可以是不可定向曲面，也可以是无限型曲面）的基本群类，那么我们分别称 G 为正规多自由群或正规 poly-曲面群。正规多自由群的典型例子包括具有非空边界曲面的纯辫群（参见 [AFR00] [LM25，定理 1。5]）、FC 型偶 Artin 群（参见 [BGMPP19，定理 3。18]）、（参见 [Wu22，定理 A]）以及右规 Artin 群。值得注意的是，已有证明表明正规多自由群满足 Farrell–Jones 猜想（参见 [BKW21，定理 A]），另见 [AFR00], [BFW23，定理 1。1], [JPSSn16，定理 2.3。7]

在本文中，我们为这些类型的群的虚循环维数给出了明确的上界。

定理 1.1. 设 G 是长度为 n的正规多曲面群，则 G 是平衡的，且其虚循环维数满足 $\mathrm{gd}(G) \leq 2n$.

定理 1.2. 设 G是长度为 n的正规多自由群，则 G是平衡的，且其虚循环维数满足 $\mathrm{gd}(G) \leq n + 1$.

注 1.3.

- 定理 *1.2* 改进了 [JRLA25，定理 1。1], 其中也建立了一个线性上界。还要注意，定理 *1.2* 中的上界是精确的： $\mathbb{Z}^n$ 对所有 $n \geq 2$，等号均可取到。
- 一些多-$\mathbb{Z}$ 群、经典纯 *Artin* 辫群和右规 *Artin* 群（*RAAGs*）都是正规多自由群的例子。它们的虚循环维数分别已在 [LW12，定理 5。13], [FGM20], 和 [LA24，定理 1。4], 中计算。

为证明定理1.1和定理1.2，我们先证明正规多曲面群是平衡群（见定理5.3和定理5.4）。完成这一步后，我们应用定理5.12，将问题归结为计算无限循环子群的 Weyl 群的适当几何维数。

设 G 是一个群。若对于每个无限阶元素 $h \in G$ 以及所有非零整数 m， n，只要其幂h^m 和 h^n 在 G 中共轭，就必有 $|m| = |n|$，则称 G 是平衡的，或称其满足$L\ddot{u}ck$ 的条件C。

平衡群的例子包括双曲群（见 [BH99]）、映射类群（见 [JPTN16，命题 4.1]）、有限生成自由群的外自同构群[GHS23，命题 3.1], CAT(0) 群（见 [L¨uc09，定理 0 的证明。1]）。

平衡性在几何群论和代数拓扑中有多种应用。例如，若群 G 是平衡的，则无限循环子群的交换化子群可以实现为正规化子。更准确地说，设 H 是 G 的一个无限循环子群。我们如下定义 G 中 H 的交换化子群 和 正规化子：

$$N_G[H] := \{g \in G \mid gHg^{-1} \text{ is commensurable with } H\}, \qquad N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}.$$

如果 G 是平衡的，并且 $N_G[H]$ 是有限生成的，或者 G 满足唯一根性质，那么存在一个子群 $H' \leq G$ 与 H 可交换，使得 $N_G[H] = N_G(H')$（参见定理2.4 以及 [AJPTN18，命题 3。4]）。此外，平衡性质使我们能够研究该群的上同调性质，参见第5节。

请注意，平衡性质在短正合序列和群图下均不保持。事实上，对于 $n \geq 2$，Baumslag–Solitar 群

$$BS(1,n) = \langle a, t \mid tat^{-1} = a^n \rangle$$

不是平衡的。尽管如此， $BS(1, n)$可分解为一个半直积

$$BS(1,n) \cong \mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{n}\right] \rtimes \mathbb{Z},$$

其中两个因子 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$ 和 $\mathbb{Z}$都是平衡的。此外， $BS(1, n)$也可以实现为一个只有一个顶点和一条边的群图的基本群。

鉴于平衡性质的重要性，我们研究平衡性质在短正合列、群图和直极限下何时得以保持。例如，我们证明，若群图的基本群的分裂在 Sela 的意义下是无圆柱的，且所有顶点群都是平衡的，则该基本群本身也是平衡的。作为应用，我们重新证明了（可能不可定向的）3-流形的基本群是平衡的这一事实。接下来，我们将详细介绍这些结果。

定理 1.4。设 $\mathcal{G} = (\Gamma, (G_v)_{v\in V}, (G_a)_{a\in A}, (\varphi_a)_{a\in A})$ 是一个基本群为 G 、*Bass–Serre* 树为 T的群图。假设：

a) 对于每个 $v \in V$，顶点群 G_v 都是平衡的；并且
b) 对于每个无限阶椭圆元素 $h \in G$，其不动点集 $T^{\langle h \rangle}$ 不包含任何双曲元素的轴。

那么 G是平衡的。

定理 1.4 的若干特殊情形此前已在文献中得到研究。例如， [但是15] 讨论了边群为循环群的群图情形。

定理1.4 所施加的假设相当宽松。事实上，我们将在第4节看到，许多自然且常见的群图类别都满足这一条件。

推论 1.5。 设 $\mathcal{G} = (\Gamma, (G_v)_{v\in V}, (G_a)_{a\in A}, (\varphi_a)_{a\in A})$ 是一个群图，其基本群为 G，*Bass–Serre* 树为 T。假设：
a) 对每个 $v \in V$，顶点群 G_v 都是平衡的；且 *b)* G 在 T 上的作用是 *Sela*-强小的。
那么 G 是平衡的。

为证明定理1.4，我们首先证明，在适当的假设下，平衡性质在短正合列下得以保持。然而，一般而言，平衡性质并不会在短正合列下保持；见第3节。

作为定理1.4的一个应用，我们重新得到这一结果：3-流形的基本群是平衡的。

定理 1.6。 紧、连通（可能不可定向）的3-流形的基本群是平衡的。

定理 1.6 由 Jaco 和 Shalen 针对 Haken 3-流形 [JS79中的定理 VI.2 证明，1],一般情形随后在 [Sha01]中得到确立。我们将针对闭 3-流形证明定理 1.6 。对于具有非空边界的情形，结论由 [AFW15中的引理 16]以及平衡性质可传递到子群这一事实推出。

文章概述。 在第 2 节中，我们汇集了若干关于平衡群的预备事实，这些事实将在全文中使用。

在第 3 节中，我们研究平衡性质在短正合列、直极限和群图下的稳定性。特别地，我们证明了定理 1.4。

在第 4 节中，我们应用上一节得出的结果，证明图流形和三维流形的基本群是平衡的。

最后，在第 5 节中，我们为多曲面群和多自由群的某些几何维数建立上界。特别地，我们证明了定理 1.1 和定理 1.2。

致谢。 第一作者部分经费由 DGAPA-UNAM 研究资助项目 IN114323 和 IN106925 提供。第二作者获得了 UNAM博士后项目 (POSDOC) 的支持，并通过资助项目 PAPIIT IN102426 获得 DGAPA-UNAM 的支持。我们感谢 Rita Jim´enez Rolland 对本文草稿提出的宝贵意见。

2. Preliminaries

本节汇集了若干关于平衡群的基本结果，这些结果将在后续各节中使用。

定义 2.1。 [L¨uc09，条件 4。1]我们称一个群 G 是平衡的，或称其满足条件C，如果对每个 g，$h \in G$满足 $|h| = \infty$且 k，$l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$，方程 $gh^k g^{-1} = h^l$蕴含 $|k| = |l|$。

例 2.2. (1) 双曲群是众所周知的平衡群示例，参见[BH99]。

(2) 更一般地，由于半双曲群满足代数平坦环面定理（参见 [BH99]），因此半双曲群是平衡的。特别地，CAT(0) 群是平衡的。(3) 使用与前一个例子相同的论证，如果 G 是一个群，且其任意无限循环子群都是非扭曲的（参见 [DK18]），那么 G 是平衡的。(4) 如果一个群相对于若干平衡子群是双曲的，那么它本身也是平衡的（参见 [Osi06]中的推论 4.26，或下文的命题4.1 ）。

众所周知，平衡性在有限扩张下保持，并且对其子群也成立。我们将此表述为一个引理，以供后文引用。

引理 2.3. [Wis00，引理 4。14] 如果一个群包含一个平衡的有限指数子群，那么整个群也是平衡的。此外，平衡群的每个子群也都是平衡的。

研究平衡群的一个主要动机是，它使我们能够通过有限指数子群的正规化子来控制虚循环子群的交换化子群结构。特别是，在附加有限性假设或满足根的唯一性性质时，交换化子群恰好可以表示为一个正规化子。具体陈述见下列命题。

命题2.4. 设 G 是一个平衡群。设 H 是 G的一个无限循环子群，并假设 $N_G[H]$ 是有限生成的。那么存在一个有限指数子群 $H' \leq H$，使得 $N_G[H] = N_G[H'] = N_G(H')$。

证明。 设 $H = \langle h \rangle$ 是 G 的一个无限循环子群，使得 $N_G[H]$ 由$g_1, \cdots, g_n$有限生成。由于 $g_i \in N_G[H]$，我们有 $g_i h^{k_i} g_i^{-1} = h^{l_i}$，其中 k_i, l_i是一些整数。根据假设，G 是一个平衡群，因此可得 $l_i = \pm k_i$。令 $k = k_1 k_2 \cdots k_n$。注意，对所有 $i = 1, \cdots, n$，都有 $g_i h^k g_i^{-1} = h^{\pm k}$。于是 $N_G[H] \subseteq N_G(\langle h^k \rangle) \subseteq N_G[\langle h^k \rangle] = N_G[H]$，最后一个等式成立是因为 $\langle h^k \rangle$与 H可交换。□

命题 2.5. [L¨uc09，引理 4。2] 设 G 是一个平衡群。那么，对于 C 的任意无限循环子群 G，有如下正规化子的嵌套序列：

$$N_G(C) \subseteq N_G(2!C) \subseteq N_G(3!C) \subseteq \cdots$$

其中

$$k!C = \{h^{k!} \mid h \in C\}.$$

此外

$$N_G[C] = \bigcup_{k \geq 1} N_G(k!C).$$

AJPTN18 中曾指出 [AJPTN18，命题 34] ：若一个群是平衡的且满足根的唯一性，则任意无限循环子群的交换化子群都可以实现为其正规化子。

定义 2.6（根的唯一性）。若群 G具有根的唯一性，则f， $g \in G$ 满足：若对于某个 n有 $f^n = g^n$，则 $f = g$。

定理 2.7。 [AJPTN18，命题 3。4] 设 G 是一个平衡群，且有一个满足根的唯一性性质的有限指数正规子群。那么， G 中几乎循环子群的交换化子群都是正规化子。

3. Preservation of the balanced property

本节研究平衡性质在短正合序列、直极限和群图下的稳定性。特别地，本节证明定理 1.4。

平衡群与短正合序列。 一般而言，平衡性质在短正合序列下并不保持。事实上，对于 $n \geq 2$ ，Baumslag–Solitar群

$$BS(1,n) = \langle a, t \mid tat^{-1} = a^n \rangle$$

并非平衡群。另一方面， BS(1， n)可以分解为一个半直积

$$BS(1,n) \cong \mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{n}\right] \rtimes \mathbb{Z},$$

其中两个因子 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$ 和 $\mathbb{Z}$ 都是平衡群。

尽管如此，我们证明，在对核施加适当的额外假设时，平衡性质在短正合序列下得以保持。为此，我们引入两个更强的条件，以确保平衡性质在短正合序列下得以保持。

定义 3.1. 设 G 为一个群。若对于每个自同构 $\varphi \in$Aut(G) 以及每个无限阶元素 $g \in G$ ，关系满足 条件 A ，则称 G 满足该条件。

$$\varphi(g^k) = g^\ell$$

对于某些 $k, \ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 蕴含 $|k| = |\ell|$。

在 [LW12，引理 5.14(v)], 中证明了多循环群满足条件 A。Th
e follo翼由 L¨uck-Weirmann 在 [LW12中证明，见引理 5.14 的证明，第（v）项]

引理 3.2。 考虑群的一个短正合列

$$1 \to N \to G \xrightarrow{\varphi} Q \to 1.$$

如果 Q 满足条件 A，且 N 是 G 中的特征子群并满足条件 A，那么 G 也满足条件 A。

推论 3.3。 设 G 是一个有限生成的虚拟曲面群。那么

a) G满足条件 A;

b) 虚循环子群的 交换子群在 G 中都可实现为正规化子 .

证明。 我们先证明条目 (a)。设 $H \leq G$ 是一个有限指数的曲面子群，并考虑

$$N = \bigcap_{\varphi \in \mathrm{Aut}(G)} \varphi(H).$$

由于 G是有限生成的，因此它只有有限多个给定有限指数的子群。因此，上述交集涉及有限多个子群，故 N 在 G 和 H中都具有有限指数。特别地， N 本身是一个曲面群。此外，根据构造， N是 G的特征子群，因为它在 G的所有自同构作用下均保持不变。现在将引理 3.2应用于特征有限指数子群 N，即可得出结论。

对于条目 (b)，注意，可以选择一个正规于 G 的有限指标曲面子群。于是，结合条目 (a) 和定理 2.7，即可得到结论。 □

备注 3.4。 同样的论证也适用于闭双曲3流形的基本群。

我们的下一个结果可以视为定理 3.2 在平衡群中的类比。与条件 A 的情形不同，我们证明，只要核满足更强的条件 A，就可以去掉关于核具有特征性的假设。

定理 3.5. 考虑群的一个短正合列

$$1 \to N \to G \xrightarrow{p} Q \to 1.$$

若 Q 是平衡的，且 N 满足条件 *A*，则 G 是平衡的。

证明。 设 $g, h \in G$ 满足 $|h| = \infty$，且 $k, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 满足 $gh^k g^{-1} = h^l$。分两种情况讨论： $p(h)$是否具有无限阶。在第一种情况下，我们有 $p(g)p(h)^k p(g)^{-1} = p(h)^l$ ，结论由 Q 是平衡群这一事实得出。

在第二种情况下，对于某个整数 n，有 $p(h)^n = 1$ 。由于 N 是 G的正规群，通过 g 进行共轭会保持 N 不变。这意味着通过 g 进行共轭会诱导一个自同构$\psi : N \to N$。于是 $\psi(h^n)^k = (h^n)^l$；由于 N 满足条件 A，因此可得 $|k| = |l|$。 □

定义 3.6 （MAX 条件）。我们称群 G 满足*MAX* 条件，如果对每个无限循环子群 $C \leq G$ ，都存在唯一的极大几乎循环子群 $M \leq G$，使得 $C \leq M$。

注 3.7. *(1)* 注意，任意双曲群都具有性质（*MAX*）（参见 [GdlH90，第 8 章，定理´` 30]）。*(2)* 任意秩的自由群。*(3)* 任意秩的自由阿贝尔群。

引理 3.8. 设 G是一个虚循环群。那么 G 满足 *MAX* 条件 A.

证明。若 G 是有限群，则结论显然成立。因此，假设 G 是无限虚循环群。于是 G 含有一个有限指数无限循环子群。由于 G 是有限生成的，因此 G 含有一个有限指数特征子群 $H \cong \mathbb{Z}$ 。

由此得到一个短正合列

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow G/H \longrightarrow 1,$$

其中 $H \cong \mathbb{Z}$ 且 G/H 是有限群。结论由定理3.2得出。 □

定理 3.9. 设 G 是一个满足 *MAX* 条件的群。那么 G 满足条件 *A*。

证明. 设 $h \in G$ 是一个无限阶元素，并设 $\varphi \in$Aut(G)，使得

$$\varphi(h^m) = h^n$$

对某个 $m, n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$成立。根据假设，无限循环子群 $\langle h\rangle$包含于唯一的极大几乎循环子群 $M \leq G$中。

由于 φ 是一个自同构，像 $\varphi(M)$ 仍是 G的极大几乎循环子群。此外，

$$\langle h^n\rangle = \varphi(\langle h^m\rangle) \leq \varphi(M).$$

鉴于 $\langle h^n\rangle \leq \langle h\rangle \leq M$，由包含$\langle h^n\rangle$的极大几乎循环子群的唯一性可知，

$$\varphi(M) = M.$$

特别地， φ限制为一个自同构

$$\varphi|_M \in \mathrm{Aut}(M).$$

由于 M 是几乎循环的，根据定理3.8 可知， M 满足条件 A。将此条件应用于等式 $\varphi(h^m) = h^n$ 中的 M，我们得到

$$|m| = |n|.$$

□

推论 3.10。 考虑群的一个短正合列

$$1 \to N \to G \xrightarrow{\varphi} Q \to 1.$$

若 Q 是平衡的，且 N 具有性质（*MAX*），那么 G 是平衡的。

在接下来的几节中，我们将介绍定理3.5 和定理 3.10的一些应用。例如，由定理 3.5 我们可以推得，塞弗特三维流形的基本群是平衡的（见定理 4.11）。类似地，利用定理 3.10 我们证明，正规多重双曲群是平衡的（见定理 5.3）。

平衡群与直极限。 在本小节中，我们研究群的直极限下平衡性质的表现。我们考虑由有向集指标化的直极限，具体定义如下。

定义 3.11。 偏序集 $(I, \leq)$ 称为有向的，如果对任意 $\alpha, \beta \in I$，都存在 $\gamma \in I$ 使得

$$\alpha \leq \gamma \quad \text{and} \quad \beta \leq \gamma.$$

命题 3.12。 设$(I, \leq)$ 是一个有向集（即，对任意 α、$\beta \in I$，都存在 $\gamma \in I$ 使得 $\gamma \geq \alpha$、β），并设

$$G = \varinjlim_{i \in I} G_i$$

是由一组平衡的群构成的有向系统的直极限。那么 G 是平衡的。

证明。 设 $h \in G$ 是无限阶元素，并假设存在 $g \in G$ 和整数 $k, \ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$，使得

$$gh^k g^{-1} = h^\ell \quad \text{in } G.$$

我们必须证明 $|k| = |\ell|$。选取指标 $\alpha, \beta \in I$，以及映射到 h, g 中的代表元 $h_\alpha \in G_\alpha$, $g_\beta \in G_\beta$。由 $(I, \leq)$ 的有向性，存在 $\gamma \geq \alpha, \beta$，使得等式

$$g_\gamma h_\gamma^k g_\gamma^{-1} = h_\gamma^\ell$$

已在 G_γ 中成立，其中 h_γ, g_γ 表示 h_α, g_β 在 G_γ 中的像。注意， h_γ 是无限阶元素，否则 h 在 G 中将是有限阶元素，矛盾。由于 G_γ 是平衡的，因此可得 $|k| = |\ell|$。这证明了 G 是平衡的。□

注 3.13。 每个群都是其有限生成子群的直极限。因此，如果群 G 是局部平衡的，也就是说， G 的每个有限生成子群都是平衡的，那么 G 本身也是平衡的。特别地，这适用于由已知为平衡的群局部构成的类，例如自由群、局部双曲群和局部有限群（后者显然成立，因为它们不含无限阶元素）。

命题 3.14。 每个虚幂零群都是平衡的。

证明。 根据定理 2.3，只需对幂零群证明该断言即可。由于每个群都是其有限生成子群的直极限，由定理 3.12 可知，只需证明每个有限生成幂零群都是平衡的。

众所周知，每个有限生成幂零群都是多循环群（例如参见[Pen25，定理 1。8]），而多循环群都是平衡的。结论得证。□

平衡群与群图。 平衡性在群图下不一定保持。更确切地说，即使所有顶点群和边群都是平衡的，该群图的基本群也未必是平衡的。一个具体例子由 Baumslag–Solitar群给出

$$BS(1, n) = \langle a, t \mid tat^{-1} = a^n \rangle,$$

它可以看作一个群的环的基本群，其中所有顶点群和边群都是 $\mathbb{Z}$。

因此，我们需要更多假设，才能通过群图构造平衡群。为使论述完整，我们回顾一些关于树的等距变换的基本概念，这些概念是表述该命题所必需的。

Bass-Serre理论。我们回顾 Bass-Serre 理论中的一些基本概念；更多详情请参见 [Ser03]。一般而言，Bass-Serre 理论通过群在树上的作用来研究群，其最具代表性的工具之一称为群图。为此，我们先将图定义为一个元组 $\Gamma = (V, E, \partial_0, \cdot)$，其中 V和 E是集合（其元素分别称为顶点和边），$\partial_0 : E \to V$ 是初始顶点映射，而 $\cdot : E \to E$ 是一个没有不动点的对合，称为逆边映射。由此还可以定义 $\partial_1 := \partial_0(\cdot)$ 作为终止顶点映射。

给定一个图 Γ，路径是一个有限（可以为空）序列（$e_1, \ldots\ldots, e_n$），其中对于所有 i，都有 e_i 是一条边，且 $\partial_1(e_i) = \partial_0(e_{i+1})$。那么，如果对于任意顶点 u，$v \in V$，都存在一条路径 $c = (e_1, \ldots\ldots, e_n)$，使得 $u = \partial_0(e_1)$ 且 $v = \partial_1(e_n)$，则称 Γ 连通。

路径 $c = (e_1, \ldots, e_n)$ 若 $\partial_1(e_n) = \partial_0(e_1)$，则称为闭路径。此外，若存在 i 使得 $e_i = e_{i+1}$，则 c 具有回溯。

现在，若对于所有 $u, v \in V$，集合 $\{e \in E : \partial_0(e) = u, \partial_1(e) = v\}$ 的基数至多为一，则称图 Γ 为单纯图。

那么，在此语境下，树是一个非空、连通且单纯的图 T，满足任意闭路径要么是常值路径，要么具有回溯。

给定群 G 和树 T，若存在 G 对 V 的作用以及 G 对 E 的作用，使得对于所有 $g \in G$ 和所有 $e \in E$，均有：则称 G 作用（无反演地）于 T。

(1) $\partial_0(g \cdot e) = g \cdot \partial_0(e)$,

(2) $\overline{g \cdot e} = g \cdot e$, 以及 (3)

$g \cdot e \neq e$。

给定 G 在 T上的这样一个作用，我们可以将其概括如下：群图 图$\mathcal{G}$是一个元组 $(\Gamma, (G_v)_{v \in V}, (G_e)_{e \in E}, (\varphi_e)_{e \in E})$，满足：

- Γ是一个图，
- 对于所有 $v \in V$，G_v 都是一个群，
- 对于所有 $e \in E$，G_e 都是一个群，且有 $G_e = G_{\bar{e}}$ 并且
- 对于所有 $e \in E$，$\varphi_e : G_e \to G_v$ 都是一个单态射。

若 G 是一个作用于树 T上的群，则存在一个自然的群图，其底层图为商图 $G\backslash\Gamma$：先选取顶点稳定子群的共轭类代表元，再以同样方式处理边稳定子群，并令态射为自然包含映射（可能与特设的共轭映射复合）。

此外，可以从群图中恢复树、群及其作用。给定一个群图 $\mathcal{G}$，有两个与 $\mathcal{G}$ 相关联的对象：其基本群 $\pi_1(\mathcal{G})$ 和 Bass-Serre 树 $T_{\mathcal{G}}$。由此，我们得到以下结构定理。

定理 3.15 ([Ser03] 中的定理 13)。设 G 是一个群，且 T 是一棵树，使得 G 在 T上的作用无反演。则存在同构 $\psi : \pi_1(\mathcal{G}) \to G$，并且 $T_{\mathcal{G}}$ 与 ψ-等变同构于 T，其中 $\mathcal{G}$ 是与 G 在 T上的作用相关联的群图。

关于这一主题的更多内容，读者可参阅 [Ser03，第 5] 节；或者参阅 [SW79，定理 4，3]以了解更多拓扑学视角的讨论。

本节证明中最后尚缺的要点，是理解 G 中各元素的行为。

固定一个群 G、一棵树 T，以及 G 在 T 上的一个作用（无反演）。若存在一个 $v \in V$ 使得 $g \cdot v = v$，则称元素 $g \in G$ 为椭圆型。等价地，若 g 是某个 $v \in V$ 的共轭 G_v 中的元素，也可如此定义。在这种情况下，g 的不动点集构成一个子树，记作 $T^{\langle g \rangle}$。

另一方面，如果存在唯一的测地线 ℓ（它是嵌入在 T 上的双向无限路径的同构像），我们称 $g \in G$ 为双曲的（有时也称为双曲型）

称为 g 的轴，该轴保持不变，且 g 通过平移作用于 ℓ。等价地， g 不是椭圆型。

定理 3.16. 设 $\mathcal{G} = (\Gamma, (G_v)_{v\in V}, (G_a)_{a\in A}, (\varphi_a)_{a\in A})$ 是一个群图，其基本群为 G，*Bass–Serre* 树为 T。假设：
a) 对每个 $v \in V$，顶点群 G_v 都是平衡的；并且
b) 对每个无限阶椭圆元素 $h \in G$，其不动点集 $T^{\langle h\rangle}$ 不包含任何双曲元素的轴。

那么 G 是平衡的。

证明. 给定 $g, h \in G$，其中 h 为无限阶，且存在满足 $gh^k g^{-1} = h^l$ 的 $k, l \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$，我们需要证明 $|k| = |l|$。
现在我们将证明分为两种情况。
情形 *1.* h 是 T的椭圆型自同构：由于 $gh^k g^{-1} = h^l$，可知 g 保持 $T^{\langle h\rangle}$ 不变。此外，根据假设， $T^{\langle h\rangle}$ 不包含任何双曲元素的轴。因此， g 是椭圆型的，故它固定某个顶点 $v \in T^{\langle h\rangle}$。由于根据假设， G_v 是平衡的，且 g， $h \in G_v$，可知 $|k| = |l|$。

情形 *2.* h 是 T的双曲型自同构：在此情形下，存在唯一一条由 h 保持不变的双无限测地线 $\ell \subset T$， h 在其上作平移。因此， $gh^k g^{-1}$ 保持 $g\cdot\ell$ 不变，并再次作平移。由于 $gh^k g^{-1} = h^l$ 和 h^l 作用于唯一的不变测地线 ℓ 上，我们可推得 $g\cdot\ell = \ell$。于是 g， $h \in \mathrm{Stab}_{set}(\ell)$。

由于 ℓ 是一条双无限测地线，因此 $Aut(\ell) \cong D_\infty$，进而得到一个表示 ρ: $stab_{set}(\ell) \to D_\infty$。根据假设，每个无限阶椭圆元素 $h \in G$ 的不动点集都不包含任何双曲元素的轴，因此核是一个挠群。由于平衡性可由子群继承，且挠群显然满足性质 (MAX)，因此我们有短正合列

$$1 \to ker(\rho) \to stab_{set}(\ell) \to \rho(stab_{set}(\ell)) \to 1$$

满足推论 3.10的条件。因此， $stab_{set}(\ell)$ 是平衡的，所以 $|k| = |l|$。□

注 3.17。尽管条目 (b) 看起来限制颇多，但值得注意的是，有许多情形都满足这一条件：

(1) 所有边群都是有限群。*(2)* 如果 G 对 T 的作用具有弱适当不连续性，那么这一条件就得到满足（有关弱适当不连续性的定义，见 [BF02] ）。*(3)* 特别地，如果该作用是 *Sela*-强小的（即存在一个 $k \geq 0$，使得对于每个椭圆元素 $h \in G$，都有 $T^{\langle h\rangle}$ 的直径至多为 k）。

由注释 3.17 (3) 可立即得到以下结果。

推论 3.18。 设 $\mathcal{G} = (\Gamma, (G_v)_{v\in V}, (G_a)_{a\in A}, (\varphi_a)_{a\in A})$ 是一个群图，其基本群为 G，*Bass–Serre* 树为 T。假设：
a) 对每个 $v \in V$，顶点群 G_v 都是平衡的；且 *b)* G 在 T 上的作用是 *Sela*-强小的。
则 G是平衡的。

上述推论提供了一种机制，可用于构造范围广泛的平衡群的具体实例。特别是，它适用于由树上的强小作用产生的群。作为一项应用，我们将在下一节证明，不可约扩展图流形和三维流形的基本群都是平衡的。

此外，利用注释 3.17 (1)，可得到以下推论。

推论 3.19。 设 G 为几乎自由群，则：*a)* G 是平衡的。

b) G 的虚循环子群的可公度化子可表示为正规化子。

证明。 由 [SW79], 群 G可实现为一个群图的基本群，其中顶点群和边群均为有限群。由定理 3.16可知，G 是平衡的。

另一方面， G包含一个有限指数的自由子群。由于每个自由群都具有根的唯一性，结论由定理 2.7得出。 □

4. Some applications of the previous results

本节将介绍前述结果的若干应用。特别地，我们证明 3-流形和图流形的基本群是平衡的。

4.1. **黎曼流形与图流形**。 如例 2.2所述，众所周知，双曲群是平衡的；在满足适当条件时，相对双曲群也具有平衡性。

命题 4.1 （相对双曲群中的平衡性质）。 设 G 是一个相对于有限个子群 $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_n\}$ 双曲的群。假设每个外围子群 H_i 都是平衡的。那么 G 是平衡的。

证明。 设 $h \in G$ 是一个无限阶元素，并设 $g \in G$ 使得

$$gh^m g^{-1} = h^n$$

对于某个 m， $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$。我们必须证明 $|m| = |n|$。

首先假设存在 $x \in G$ 和 $i \in \{1, \dots, n\}$ 使得

$$h \in xH_i x^{-1}.$$

等式 $gh^m g^{-1} = h^n$ 蕴含

$$\langle h^n \rangle \subseteq xH_i x^{-1} \cap gxH_i x^{-1} g^{-1}.$$

由于 h 具有无限阶，该交集是无限的。此外，

$$x^{-1}(xH_i x^{-1} \cap gxH_i x^{-1} g^{-1})x = H_i \cap x^{-1} gxH_i x^{-1} g^{-1} x,$$

这意味着 $H_i \cap x^{-1} gxH_i x^{-1} g^{-1} x$ 也是无限的。

由于外围子群在相对双曲群中几乎是自共轭分离的，因此可得 $x^{-1} gx \in H_i$。于是，

$$g \in xH_i x^{-1}.$$

因此 g， $h \in xH_i x^{-1}$ ，且等式 $gh^m g^{-1} = h^n$ 在子群 $xH_i x^{-1}$中成立。由于平衡性在共轭下保持不变，且 H_i 是平衡的，我们得出 $|m| = |n|$。

最后，在 h 不属于任何外围子群的共轭子群的情形下，该结论已在 [Osi06，推论 4 中得到证明。26] （回想一下，在 [Osi06] 中，双曲元素是指不能共轭到某个 H_i中的元素）。为完整起见，我们简要概述 [Osi06]中的证明：引入了相对平移长度（τ^{rel}） ，它满足与 [BH99] 中的代数平移长度相同的性质（在共轭下不变，并将幂映射为和的绝对值）。此外，在[Osi06] 中，他们证明了任何不能共轭到某个 H_i 中的元素的相对平移长度均为正（定理 4.23）。因此我们有

$$\begin{aligned} |n|\tau^{rel}(h) &= \tau^{rel}(h^n) \\ &= \tau^{rel}(gh^m g{-}1) \\ &= \tau^{rel}(h^m) \\ &= |m|\tau^{rel}(h) \end{aligned}$$

从而得到 $|m| = |n|$ ，如所需。

□

由此结果可知，任何具有夹挤负曲率的完备有限体积黎曼流形的基本群都是平衡的。

推论 4.2。 设 M 是具有夹挤负曲率的完备有限体积黎曼流形。则， $\pi_1(M)$ 是平衡的。

证明。 根据 [Far98]，中的 $\pi_1(M)$，我们知道其相对于尖点子群是双曲的。此外，我们知道这些尖点子群是有限生成的几乎幂零群。因此，由命题 3.14 和 4.1，即可得出结论。 □

在更一般的情形下，我们可以利用前面的结果看出，不可约（扩展）图流形（见 [FLS15]）也具有平衡的基本群。为求完整起见，我们列出相关定义。

定义 4.3 （参见 [FLS15]）。 设 M 是一个紧光滑 n-流形，满足 $n \geq 3$。

(1) 若 M 可按以下方式构造，则称其为图流形 。(a) 对每个 $i = 1, \ldots\ldots, r$，令 N_i 为一个完备、有限体积、非紧的双曲 n_i-流形，满足 $3 \leq n_i \leq n$ 且具有环面尖点，并将截断其尖点后得到的 n_i-流形记为 N_i 。(b) 对每个 $i = 1, \ldots\ldots, r$，定义 V_i: $= N_i \times T^{n-n_i}$，其中 T^k 是 k 维环面。(c) 固定对若干个 V_i 的边界分支进行配对，并利用边界环面的仿射微分同胚粘合配对的边界分支，从而得到一个维数为 n 的连通流形。

注意， ∂M 要么为空，要么由环面组成。子流形 V_i 称为块；在显然的平凡丛结构下，N_i 称为 V_i 的底空间，而形如 $\{*\} \times T^{n-n_i}$ 的集合称为纤维。此外， V_i'中彼此粘合的边界环面称为 M 的内部壁。若 V^+ 和 V^- 是通过一面内部壁粘合的两个块，则称它们相邻。

(2) 扩展图流形是按上述方式构造的 n-流形，但允许其中的块以完备非紧双曲曲面为底空间（因此，相应的纤维维数为（$n-2$））， 这类块称为曲面块；并且不允许曲面块彼此相邻。

(3) 设 V^+ 和 V^- 是相邻的块，其对应的配对边界环面为 T^+ 和T^-，对应的内部壁为 T。再设 ψ: $T^+ \to T^-$ 为粘合微分同胚， ψ_* 为对应的 π_1-自同构， G_+ 和 G_- 分别为 π_1 (T^+) 和 $\pi_1(T^-)$ 中对应纤维子群的子群。若 $\psi_*(G_+) \cap G_-$ 是平凡的，则称这两个块具有横截纤维。

（4）如果每一对相邻的块沿每一面内部墙都有横截纤维，则扩展图流形是不可约的 。

注意，所有扩展图流形都有一个自然的空间图分解，因此其基本群就是所诱导群图的基本群。对本工作最相关的结果之一来自 [FLS15] ，如下所述。

命题 4.4 （ [FLS15]中的 6.4）。 设 M 是一个至少含有一面内部墙的扩展图流形。那么，M 是不可约的，当且仅当 π_1（M）在其所诱导的 *Bass-Serre* 树上的作用是 *Sela*-强小的。

由此结果以及推论3.10、3.18 和 4.2 可得以下结论 g.

定理 4.5。 设 M 是一个不可约扩展图流形。那么 π_1（M）是平衡的。

证明。 利用命题 4.4 和推论 3.18，我们只需证明 π_1（V_i）对所有 $1 \leq i \leq r$都是平衡的。

对于每个 i，我们有 N_i 是一个完备紧双曲流形。因此，根据推论4.2， π_1（N_i）是平衡的。于是，由于 π_1（T^{n-n_i}） $\cong \mathbb{Z}^{n-n_i}$ ，我们有 π_1（T^{n-n_i}）具有性质（MAX）。

因此，根据推论 3.10，我们得到 $\pi_1(V_i) \cong \pi_1(N_i) \oplus \pi_1(T^{n-n_i})$ 是平衡的，从而完成了证明。 □

4.2. **三维流形与平衡群**。 在本小节中，我们证明定理1.6。首先回顾本节将用到的几个关于三维流形的基本结果。若一个三维流形 M 素 在存在连通和分解$M = M_1\#M_2$时，其中一个因子是 3维球面，则称其为素 S^3。

3-流形拓扑的基石之一是：每个闭可定向3维流形都可分解为若干素3维流形的连通和。这种分解的存在性归功于 Kneser [Kne29], 而其唯一性则由 Milnor 证明 [Mil62]。

定理 4.6 (素分解定理)。 设 M 是一个闭、连通、可定向3–流形。那么 M 可分解为

$$M \cong P_1\# \cdots \#P_n,$$

其中每个 P_i 都是素的。此外，这种分解在同胚和因子置换意义下是唯一的。

上述定理将闭3维流形的研究归结为素情形。另一项著名的结构定理是 Jaco–Shalen–Johannson分解（JSJ分解），它断言，任意素三维流形都可以沿一族典范的不可压缩环面切开，得到的各部分要么是双曲的，要么是 Seifert纤维化的。***Seifert*纤维化 3–流形** 是一个可定向的紧3维流形 M，并带有一族由互不相交的简单闭曲线构成的分解 M；这些曲线称为纤维，且每条纤维都有一个同胚于纤维化实心环面的邻域。

在 Jaco–Shalen [JS79] 和 Johannson [Joh79], 的工作基础上，并鉴于 Perelman 证明的几何化定理 [Per02，Per03] 以及 Thurston 的研究纲领 [Thu82]，JSJ分解可表述如下。

定理 4.7 （JSJ分解定理）。设 M 是一个闭、可定向的素3维流形。那么，存在一个典范的（在同痕意义下唯一的）不可压缩环面族 $\mathcal{T} \subset M$，其中每个环面都恰当地嵌入、 π_1-单射且法丛平凡，使得$M \setminus \mathcal{T}$的每个分支不是双曲的，就是 ***Seifert*纤维化的**。

对于曲面，一致化定理保证每个闭曲面都具有某种常曲率几何 $\mathbb{S}^2$， $\mathbb{E}^2$，或 $\mathbb{H}^2$ （例如参见 [Sti92、Mor05]）。相比之下，Thurston几何化猜想现已由 Perelman 证明为定理，它指出3维流形恰有八种模型几何：双曲 $\mathbb{H}^3$、欧几里得 $\mathbb{E}^3$、球面 $\mathbb{S}^3$、Sol、Nil、$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}$、 $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}$，以及普适覆盖 SL_2（$\mathbb{R}$）（例如参见 [Sco83，定理 5。1]）

定理 4.8. 紧3-流形的基本群是平衡的。

证明。 由于每个不可定向三维流形都存在一个可定向双重覆盖，由定理 2.3 可知，只需证明该命题对可定向三维流形成立。令 M 为一个可定向三维流形。根据素分解定理（定理 4.6），我们可以写成

$$M = P_1\#P_2\# \cdots \#P_n,$$

因此

$$\pi_1(M) \cong \pi_1(P_1) * \pi_1(P_2) * \cdots * \pi_1(P_n).$$

由定理 3.16，只需证明每个 $\pi_1(P_i)$ 都是平衡的。现在设 P 是一个可定向的素 3-流形。那么要么 $P \cong S^1 \times S^2$，要么 P是不可约 3-流形（例如参见[Hat00，命题 1.4]）。在前一种情况下，我们有 $\pi_1(P) \cong \mathbb{Z}$，它是平衡的。在后一种情况下，根据 JSJ分解定理（定理 4.7），存在一族嵌入环面，位于 P 中，使得分解的每个分支要么是双曲流形，要么是塞弗特纤维化流形。特别地，这诱导出 $\pi_1(P)$的一个群图分裂，其中顶点群同构于 JSJ 块 $\pi_1(L_i)$的基本群，边群同构于 $\mathbb{Z}^2$，对应于 JSJ 环面的基本群。根据 [WZ10，引理 2.4], ，此分裂是无圆柱的。因此，由定理 3.16，只需证明每个 $\pi_1(L_j)$都是平衡的。这将在定理 4.11 和定理 4.10 中证明。□

为证明推论 4.10和命题 4.11，我们使用以下定理。

定理 4.9. 固定 $n \geq 2$，令 G 为 $Isom(\mathbb{H}^n)$ 的离散子群。则 G 是平衡的。

证明. 由引理 2.3可知，我们只需考虑 $G \leq Isom^+(\mathbb{H}^n)$ 的情形。设 g， $h \in G$ 使得对某个 k， $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 有 $h^k = gh^lg^{-1}$。同样，由引理 2.3可知，只需证明 g 和 h 包含在 G 的某个几乎阿贝尔子群中。

令 $P \subset \partial\mathbb{H}^n$ 为 h的不动点集合。则 P 是一个非空且至多含有两个点的集合，同时也是 h 的任意非平凡幂的不动点集合。特别地， P 是 $h^k = gh^lg^{-1}$ 和 h^l的不动点集合。但是， gh^lg^{-1} 的不动点集合是$g \cdot P$。这意味着，若 H是 G中 P的集合稳定子，则 $g, h \in H$。由于 P是有限的，因此 H 是 G 的离散初等子群（ [Kap01]中的定义 3.22）。根据[Kap01],中的第 4.6 节，这意味着 H 是几乎阿贝尔的。□

C推论 4.10。 双曲 *3*-流形的基本群是平衡的 .

设 M 是一个 Seifert纤维化3维流形。给定 M 由圆组成的分解，可以将每个纤维压缩为一个点。所得空间是一个 2-轨形 B，称为底轨形 的M；参见 [Sco83，第 3]节。轨形 B 具有一个轨形基本群 π_1^{orb}（B），它通常不同于其底层拓扑空间的基本群。2-轨形 B 根据其万有轨形覆盖的几何性质，恰好属于以下类别之一：坏的、球面的、双曲的或欧几里得的。

命题 4.11。 设 G 是一个 *Seifert*3-流形的基本群。那么
a) G是平衡的；***b)*** G 的虚循环子群的可公度化子由正规化子实现。

证明。 首先证明第 a 项。令 M 为一个塞弗特三维流形。根据 [Sco83，引理 3，2] 其基本群满足如下短正合列

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1^{\text{orb}}(B) \longrightarrow 1, \tag{1}$$

其中， $K \cong \mathbb{Z}$ 是由正则纤维生成的无限循环子群；但若 M 被 S^3有限覆盖，则 π_1（M）是有限群，因此显然是平衡的。

我们根据底轨形 B的几何性质进行分析：

情形 *1*： B 是坏二维轨形或球面二维轨形（即以 S^2为模型）。在这种情形下， π_1^{orb}（B）是有限群，因此 π_1（M）是虚拟循环的。特别地，它是平衡的。

情形 *2*： B 以双曲平面为模型 $\mathbb{H}^2$。于是， $\pi_1^{\text{orb}}(B)$ 是福克斯群，由定理 4.9 可知它是平衡的。将定理 3.5 应用于扩张（1），可得 $\pi_1(M)$ 是平衡的。

情形 *3*： B 由欧几里得平面建模。因此， $\pi_1^{\text{orb}}(B)$ 几乎多项式循环，因而是平衡的。再次将定理 3.5 应用于 (1)，可得 $\pi_1(M)$ 是平衡的。

现在证明条目 b)。根据定理 2.7 和条目 (a)，只需证明 $\pi_1(M)$ 存在一个满足根的唯一性的正规有限指数子群。根据 [BRW05，推论 1.6]，，群 $\pi_1(M)$ 几乎双可序。因此，存在一个有限指数子群 $H < \pi_1(M)$，它是双可序的，因而满足根的唯一性 [Rol14]。考虑 $\pi_1(M)$ 对左陪集集合 $\pi_1(M)/H$ 的作用；其核是一个有限指数正规子群 $K \trianglelefteq \pi_1(M)$，且包含于 H。特别地， K 也满足根的唯一性。□

4.3. **平衡群与映射类群**。

定义 4.12。 设 M 是一个连通紧致可定向拓扑流形（维数任意）。 M 的映射类群 定义为

$$\text{Mod}(M) := \pi_0(\text{Homeo}^+(M)),$$

其中，$\text{Homeo}^+(M)$ 表示 M 的保向同胚所构成的拓扑群。

在 [JPTN16，命题 41], 中证明了曲面的映射类群是平衡的。接下来，我们将证明这一结果对于某些三维流形的映射类群也成立。

命题 4.13。 设 S_g 是亏格为 $g \geq 1$的闭可定向曲面，且 X_g^k 是一个具有定向圆丛结构的 3-流形

$$S^1 \hookrightarrow X_g^k \xrightarrow{p} S_g,$$

其欧拉数为 $k \in \mathbb{Z}$。那么，映射类群 $\mathrm{Mod}(X_g^k)$ 是平衡的。

证明。 根据 [CT24], 当 $(g,\ k) \neq (1,\ 0)$ 时，映射类群 $\mathbf{Mod}(X_g^k)$ 属于如下短正合列:

$$1 \to H^1(S_g; \mathbb{Z}) \to G \to \mathrm{Mod}(S_g) \to 1,$$

其中核是秩为 $2g$ 的自由阿贝尔群，而 G 是 $\mathbf{Mod}(X_g^k)$ 的有限指数子群。根据 [JPTN16, 命题 4.1] $\mathrm{Mod}(S_g)$ 是平衡的；又因为 $H^1(S_g;\ \mathbb{Z})$ 满足性质（MAX），由定理 3.10 可知 G 是平衡的。于是引理 2.3 蕴含 $\mathbf{Mod}(X_g^k)$ 是平衡的。 □

5. Virtually cyclic dimension of poly-surface groups

本节将给出正规多曲面群和正规多自由群的虚循环维数的一个上界。我们的第一步是证明这些群是平衡的。事实上，我们证明每个正规多双曲群都是平衡的。证明这一点后，我们应用定理 5.12 ，将问题归结为计算无限循环子群的 Weyl 群的适当几何维数。

设 $\mathcal{P}$ 是一个群类（例如，双曲群、可容群、自由群等）。我们称群 G 是多$\mathcal{P}$，如果存在一个滤过

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_{n-1} \lhd G_n = G,$$

使得每个商群 G_{i+1}/G_i（对于 $0 \leq i \leq n-1$）都属于群类 $\mathcal{P}$。此外，我们称 G 是正规多$\mathcal{P}$，如果还满足每个子群 G_i 都是 G的正规子群。使得这样的滤过存在的最小整数 n称为 G的长度。

正规多-$\mathcal{P}$ 群在商群运算下封闭。

引理 5.1. 设 G是长度为 n 的正规多-$\mathcal{P}$ 群，其滤过为

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd G_2 \lhd \cdots \lhd G_n = G.$$

那么，对任意 $1 \leq i \leq n$，商群 G/G_i 是长度至多为$n-i$的正规多-$\mathcal{P}$ 群。

证明。 考虑典范投影 $\pi\colon G \to G/G_i$。由于 $G_i \lhd G$。对每个 $j \geq i$，子群 G_j 是 G的正规子群，因此根据对应定理，其像

$$\pi(G_j) = G_j/G_i$$

是一个正规 G/G_i的子群。因此，我们得到一个长度为 $n-$ 的正规滤过 i

$$1 = G_i/G_i \lhd G_{i+1}/G_i \lhd \cdots \lhd G_n/G_i = G/G_i.$$

此外，对于每个 $j \geq 2$，连续商群满足

$$\frac{G_j/G_i}{G_{j-1}/G_i} \cong \frac{G_j}{G_{j-1}},$$

其中，该同构由投影 π 诱导，并由第三同构定理得出。根据假设，每个群 G_j/G_{j-1} 都属于 $\mathcal{P}$。因此，每个商群也同样如此

$$(G_j/G_i)/(G_{j-1}/G_i).$$

因此， G/G_i 是一个长度至多为 $n-i$ 的正规多曲面群。 □

引理 5.2。 设 G 是一个长度为 n 的正规多曲面群，其滤过为

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G$$

使得 $G_i \lhd G$ 对于每个 i 均成立，并且

$$G_i/G_{i-1} \cong \pi_1(S_i)$$

对于某个连通曲面 S_i。则每个子群 $H \leq G$ 都是长度至多为 n的正规 *poly*-曲面。

证明。 令 $H \leq G$并设 $H_i := G_i \cap H$，其中 $i = 0, \ldots\ldots, n$。则

$$1 = H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_n = H.$$

我们首先证明，对于每个 i， $H_i \lhd H$ 均成立。令 $h \in H$ 且 $x \in H_i$。由于 $x \in G_i$ 且 $G_i \lhd G$，我们有 $hxh^{-1} \in G_i$。此外，由于 H 是一个子群， $hxh^{-1} \in H$。因此 $hxh^{-1} \in G_i \cap H = H_i$，从而证明了 $H_i \lhd H$。

对于每个 $i \geq 1$，由于 $G_{i-1} \lhd G_i$，由第二同构定理可得

$$\frac{H_i}{H_{i-1}} = \frac{G_i \cap H}{G_{i-1} \cap H} \cong \frac{(G_i \cap H)G_{i-1}}{G_{i-1}}.$$

由于 $(G_i \cap H)G_{i-1} \leq G_i$，我们得到一个嵌入

$$\frac{H_i}{H_{i-1}} \hookrightarrow \frac{G_i}{G_{i-1}} \cong \pi_1(S_i).$$

因此， H_i/H_{i-1} 同构于 $\pi_1(S_i)$的一个子群。由于曲面群对子群封闭，我们可知 H_i/H_{i-1} 是一个曲面群。

我们得出， H 存在一个滤过

$$1 = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_n = H$$

其中每一项都是 H 的正规子群，且每个相继商群都是曲面群。因此， H 是正规 poly-曲面。□

命题 5.3. 若 G 是长度为 n的虚拟正规多双曲群，则 G是平衡的。

证明。 根据引理 2.3，我们不妨设 G是一个长度为n的正规多双曲群。证明采用关于 n的归纳法。

若 $n = 1$，则 G 是一个双曲群；由例 2.2 (1)可知 G 是平衡的。假设结论对长度为 $n \leq k-1$的正规多双曲群成立。

设 G 是长度为 k 的正规多双曲群。那么，存在一个由子群 $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_{k-1} \lhd G_k = G$ 构成的 G 的滤过，使得对于每个 i $G_i \lhd G$，商群 G_{i+1}/G_i 是双曲群。我们考虑如下短正合列

$$1 \to G_1 \to G \xrightarrow{p} G/G_1 \to 1.$$

根据定理 5.1， G/G_1 是长度至多为 $k-1$ 的正规多双曲群，并且 G_1 是双曲群。这意味着 G_1 根据备注 3.7（1）具有性质（MAX），并且 G/G_1 根据归纳假设是平衡的。因此，由定理 3.10 可得该断言。□

注记 5.4. 正规多双曲群这一类特别包含所有正规多重有限生成自由群（多重有限生成自由群）。此外，上述证明中所用的论证完全相同，也可直接应用于所有正规多自由群（不要求有限生成条件），以及所有正规多曲面群。

多曲面群的虚循环维数。 本小节中，我们计算多曲面群和多自由群的若干几何维数的上界。具体而言，我们证明定理 1.1 和 1.2 （分别对应下文的定理 5.14 和 5.13 ）。

设 G 为一个离散群， $\mathcal{F}$ 为 G的子群族。我们将几何维数 $\mathrm{gd}_{\mathcal{F}}(G)$ 定义为满足以下条件的最小整数 n ： 存在一个维数为 n的分类空间 $E_{\mathcal{F}}G$ 模型 X 。在文献中，当族 $\mathcal{F}$ 分别为平凡族、有限子群和循环子群时，几何维数分别记为 gd、$\mathrm{gd}(G)$ 和 $\underline{\mathrm{gd}}(G)$。

注 5.5。 注意，如果 $\mathcal{TF}$ 是无挠群的集合，那么任意 *poly-*$\mathcal{TF}$ 群也是无挠的。事实上，设 G 为一个带有滤过 $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_{n-1} \lhd G_n = G$ 的 *poly-*$\mathcal{TF}$ 群；如果存在一个有限阶元素 $g \in G = G_n$，由于 G_n/G_{n-1} 是无挠的，因此 g必须是 G_{n-1}中的一个元素。重复这一论证 $n-1$ 次，我们得到 $g \in G_0$ ，这意味着它是平凡的。

以下是对 [JRLA25定理 11]的一个温和推广。

引理 5.6。 设 $\mathcal{TF}$ 为无挠群的集合，且设 G 为长度为 n的多-$\mathcal{TF}$ 群，其具有一个滤过

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_{n-1} \lhd G_n = G.$$

Then

$$\mathrm{gd}(G) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{gd}(G_i/G_{i-1}).$$

本节中我们广泛使用的一个关于多-$\mathcal{TF}$ 群的简单事实（因为多自由群和多曲面群都是多-$\mathcal{TF}$群）是，多-$\mathcal{TF}$ 群是无挠的。事实上，若 G 具有滤过 $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_{n-1} \lhd G_n = G$，且 $g \in G$ 具有有限阶，那么$g \in G_{n-1}$ ，因为 G/G_{n-1} 是无挠的。重复这一论证 n 次后，我们得到$g \in G_0 = \{e\}$。

证明。 我们对滤过的长度 n 进行归纳。

若 $n = 1$，则 $G = G_1$ ，结论显然成立。

假设对于所有长度小于 n 的多曲面群，其命题均成立。设 G 是一个长度为 n 的多曲面群，并具有一个滤过

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_{n-1} \lhd G_n = G.$$

考虑短正合列

$$1 \to G_{n-1} \to G \to G_n/G_{n-1} \to 1.$$

由于 G 和 G_n/G_{n-1} 均为无挠群，因此 $\underline{\mathrm{gd}}(G) = \mathrm{gd}(G)$ 且 $\underline{\mathrm{gd}}(G_n/G_{n-1}) = \mathrm{gd}(G_n/G_{n-1})$，由 [L¨uc05，定理 5。15] 可得

$$\mathrm{gd}(G) \leq \mathrm{gd}(G_{n-1}) + \mathrm{gd}(G_n/G_{n-1}).$$

根据归纳假设，

$$\mathrm{gd}(G_{n-1}) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{gd}(G_i/G_{i-1}).$$

因此，

$$\mathrm{gd}(G) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{gd}(G_i/G_{i-1}),$$

如所声称。 □

利用任意多自由群和任意多曲面群尤其都是 poly-$\mathcal{TF}$ 这一事实，我们得到以下推论。

推论 5.7. 设 G 是长度为 n 的多自由群，带有一个滤过

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_{n-1} \lhd G_n = G.$$

Then

$$\mathrm{gd}(G) \leq n.$$

推论 5.8。 设 G是一个长度为 n、带有滤过的多曲面群

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_{n-1} \lhd G_n = G.$$

Then

$$\mathrm{gd}(G) \leq 2n.$$

现在，由于多曲面群$\mathcal{TF}$无挠，我们有 $\underline{\mathrm{gd}} = \mathrm{gd}$。因此，以下我们只关注如何为这些群的 $\underline{\mathrm{gd}}$ 找到一个上界。

引理 5.9。 [L¨uc05，定理 5。16] 设

$$1 \to K \to G \to H \to 1$$

是群的一个短正合列。假设对于任意包含一个与 K 同构的有限指数子群的群 M，都有 $\mathrm{gd}(M) = \mathrm{gd}(K)$。那么有以下不等式成立

$$\underline{\mathrm{gd}}(G) \leq \underline{\mathrm{gd}}(K) + \underline{\mathrm{gd}}(H).$$

受引理 5.9的启发，我们引入以下概念。

定义 5.10。 若一个群 G 对每个有限扩张 K of$G$ 都满足以下条件，则称其为几何刚性

$$\underline{\mathrm{gd}}(G) = \underline{\mathrm{gd}}(K).$$

例 5.11。 若干自然的群类具有几何刚性。

(1) 自由群（有限生成情形可追溯至 Dunwoody 的工作；一般情形见[JRLA25，推论 2。1] ）。(2) 多循环群（见 [LW12]）。(3) 闭曲面的基本群（见 [Mis10，引理 4。4]

引理 5.12。 [L¨uc09，引理 4。4] 设 n 为一个整数。假设 G 是一个平衡群。假设 $\mathrm{gd}(G) \leq n$，并且对于 H 的每个无限循环子群 G，都有 $\mathrm{gd}(W_G(H)) \leq n$。那么 $\underline{\mathrm{gd}}(G) \leq n + 1$。

定理 5.13。 设 G 是长度为 n 的正规 *poly*-自由群，则 $\mathrm{gd}(G) \leq n + 1$

证明。由定理 5.3 和定理 5.4 G 是平衡的，且由定理 5.7，$\mathrm{gd}(G) \leq n$，因此根据定理 5.12，只需证明对于 G 的每个无限循环子群 H，都有 $\mathrm{gd}(W_G(H)) \leq n - 1$。我们对此按 n 归纳。如果 $n = 1$，那么 G 是自由群；众所周知，每个无限虚循环子群的正规化子 $N_G(H)$ 都是几乎循环群，因此 $W_G(H)$ 是有限群，特别地 $\mathrm{gd}(W_G(H)) = 0$。

现在我们假设该命题对每个 $k < n$ 都成立，也就是说，假设对于每个长度为 $k < n$ 的正规 poly- 自由群 G，以及每个无限虚循环子群 $H < G$，都有 $\mathrm{gd}(W_G(H)) \leq k - 1$。我们证明该命题对 ~~$n$~~ $= k$ 成立。设 G 是一个长度为 k 的正规 poly-自由群。那么，G 有一个由子群 $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_{k-1} \lhd G_k = G$ 构成的滤过，使得 $G_i \lhd G$，且商群 G_{i+1}/G_i 是一个自由群。我们考虑以下短正合列

$$1 \to G_1 \to G \xrightarrow{p} G/G_1 \to 1.$$

并且设 H 是 G的一个无限循环子群，我们可以将短正合列限制为

$$1 \to G_1 \cap N_G(H) \to N_G(H) \xrightarrow{p} Q \to 1.$$

我们分两种情况讨论： $p(H) = 1$ 或 $p(H) \neq 1$。

在第一种情况下，我们有如下短正合列

$$1 \to N_{G_1}(H)/H \to W_G(H) \xrightarrow{p} Q \to 1.$$

注意到 $N_{G_1}(H)/H$ 是一个有限子群，因此由定理 5.9可得

$$\underline{\mathrm{gd}}(W_G(H)) \leq 0 + \underline{\mathrm{gd}}(Q) \leq n - 1$$

最后一个不等式成立，是因为 Q 是一个长度至多为 $\leq n-1$的正规 poly-自由群（定理 5.1）。

现在假 设 $p(H) \neq 1$。在这种情况下，我们有如下短正合列

$$1 \to G_1 \cap N_G(H) \to W_G(H) \xrightarrow{p} Q/p(H) \to 1.$$

注意到 $G_1 \cap N_G(H)$ 是一个自由群，根据定理 5.11(1)，任何非平凡的几乎自由群都满足 $\mathrm{gd} = 1$, 因此由定理 5.9 可得

$$\underline{\mathrm{gd}}(W_G(H)) \leq 1 + \underline{\mathrm{gd}}(Q/p(H)) \leq 1 + \underline{\mathrm{gd}}(N_{G/G_1}(p(H))/p(H)) \leq n - 1.$$

□

定理 5.14. 设 G 是一个长度为 n的正规多曲面群，则 $\mathrm{gd}(G) \leq 2n$

证明。 由定理 5.3 和定理 5.4 G 是一个平衡群，且由定理 5.8 $\mathrm{gd}(G) \leq 2n$。因此，利用定理 5.12，只需证明对每个无限循环子群 H，属于 G，都有 $\mathrm{gd}(W_G(H)) \leq 2n-1$。我们对 n进行归纳证明。

若 $\overline{n} = 1$，则 G 是一个曲面群，因为 G 是一个无挠双曲群、自由群、$\mathbb{Z}^2$ 或 $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$, 所以每个无限虚循环子群的正规化子 $N_G(H)$ 都是无限循环的， $\mathbb{Z}^2$ 或 $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$。于是 $W_G(H)$ 是有限的或 $\mathbb{Z}$，特别地，$\mathrm{gd}(W_G(H))$ 为 0 或 1，并且无论哪种情况, $\mathrm{gd}(W_G(H)) \leq 1$。

现在，我们假设该结论对每个 $k < n$都成立，也就是说，对于每个长度为 $k < n$ 的正规 poly-曲面群 G，以及每个无限循环子群 $H < G$，都有 $\mathrm{gd}(W_G(H)) \leq 2k-1$。我们来证明该结论对 $n = k$成立。设 G是一个长度为 k的正规 poly-曲面群。那么， G 存在一个由子群 $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_{k-1} \lhd G_k = G$ 构成的滤过，使得对所有 i， $G_i \lhd G$，且商群 G_{i+1}/G_i 是一个曲面群。我们考虑以下短正合列

$$1 \to G_1 \to G \xrightarrow{p} G/G_1 \to 1,$$

并设 G 的一个无限循环子群 H 由 h 生成。我们可以将该短正合列限制为

$$1 \to G_1 \cap N_G(H) \to N_G(H) \xrightarrow{p} Q \to 1.$$

我们将证明分为两种情况： $p(H) = 1$，或 $p(H) \neq 1$。此外，由于 G/G_1 是正规 poly-曲面群，因此它是无挠的，这意味着 Q 是无挠的。因此，$p(H) = 1$ 当且仅当存在 $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 使得 $p(h^n) = 1$。

情形 *1*， $p(H) = 1$: 在这种情形下， H 是 $G_1 \cap N_G(H)$的一个子群，我们可以得到如下短正合列

$$1 \to N_{G_1}(H)/H \to W_G(H) \xrightarrow{p} Q \to 1.$$

注意， G_1 是一个曲面群，这意味着 $N_{G_1}(H)/H$ 是有限或无限循环子群；无论哪种情况，它们都是几何刚性的，且 gd 至多为 1。然后，根据定理5.9 我们有

$$\underline{\mathrm{gd}}(W_G(H)) \leq \underline{\mathrm{gd}}(N_{G_1}(H)/H) + \underline{\mathrm{gd}}(Q) \leq 1 + 2(k-1) = 2k - 1$$

最后一个不等式成立是因为 Q 是长度至多为 $k-1$ 的正规多曲面群（根据定理 5.1 ，我们有 G/G_1 是长度至多为 $k-1$ 的多曲面群，并且 Q 是 G/G_1的子群；现在由定理 5.2即可得出）。

情形 2， $p(H) \neq 1$：如前所述，该情形等价于对所有 $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 都有 $p(h^n) \neq 1$。于是，$H \cap (G_1 \cap N_G(H)) = 1$，并且我们有如下短正合列

$$1 \to G_1 \cap N_G(H) \to W_G(H) \xrightarrow{p} Q/p(H) \to 1.$$

注意， $G_1 \cap N_G(H)$ 在所有情况下都是自由群、Hirsch 长度至多为 2 的 poly-$\mathbb{Z}$ 群，或曲面群。因此， $G_1 \cap N_G(H)$ 是几何刚性的，且 gd 至多为 2。由定理 5.11 结合引理 5.9 可得

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{gd}}(W_G(H)) &\leq \underline{\mathrm{gd}}(G_1 \cap N_G(H)) + \underline{\mathrm{gd}}(Q/p(H)) \\ &\leq 2 + \underline{\mathrm{gd}}(Q/p(H)) \\ &\leq 2 + \underline{\mathrm{gd}}(N_{G/G_1}(p(H))/p(H)) \\ &\leq 2 + 2(k-1) - 1 \\ &= 2k - 1 \end{aligned}$$

□

References

[AFR00] C. S. Aravinda、F. T. Farrell 和 S. K. Roushon。纯辫群的代数 K理论。《亚洲数学杂志》4(2):337–343，2000年。[AFW15] M. Aschenbrenner、S. Friedl 和 H. Wilton。《3-流形群》。《欧洲数学会数学讲座系列》。欧洲数学会（EMS），苏黎世，2015年。[AJPTN18] J. Aramayona、D. Juan-Pineda 和 A. Trujillo-Negrete。关于带孔球面映射类群的虚循环维数。《代数、几何与拓扑》18(4):2471–2495，2018年。[BF02] M. Bestvina 和 K. Fujiwara。映射类群子群的有界上同调。《几何与拓扑》6:69–89，2002年。[BFW23] M. Bestvina、K. Fujiwara 和 D. Wigglesworth。双曲-by-循环群的 Farrell–Jones 猜想。《国际数学研究通知》IMRN，（7）：5887–5904，2023年。[BGMPP19] R. Blasco-Garc´ıa、C. Mart´ınez-P´erez 和 L. Paris。FC 型偶 Artin 群的多自由性。《群、几何与动力学》13(1):309–325，2019年。[BH99] M. R. Bridson 和 A. Haefliger。《非正曲率度量空间》，《数学科学基础丛书》第319卷，《数学科学基本原理》。施普林格出版社，柏林，1999年。[BKW21] B. Br¨uck、D. Kielak 和 X. Wu。正规多自由群的 Farrell–Jones 猜想。《美国数学会会刊》149(6):2349–2356，2021年。[BRW05] S. Boyer、D. Rolfsen 和 B. Wiest。可排序的 3-流形群。《傅里叶研究所年刊》55(1):243–288，2005年。[But15] J. O. Button。具有无限循环边群的平衡群与群图。arXiv 电子预印本，页码 arXiv:1509.05688，2015 年 9 月。[CT24] L. Chen 和 B. Tshishiku。《曲面上圆丛的映射类群》。《密歇根数学杂志》，页码 1–14，2024 年。[DK18] C. Drut¸u 和 M. Kapovich。《几何群论》，《美国数学会讨论班出版物》第63卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2018年。附录由 Bogdan Nica 撰写。[Far98] B. Farb。相对双曲群。《几何与泛函分析》8(5):810–840，1998年。[FGM20] R. Flores 和 J. Gonz´alez-Meneses。辫群中虚循环子群族的分类空间。《国际数学研究通知》（5）：1575–1600，2020年。[FLS15] R. Frigerio、J.-F. Lafont 和 A. Sisto。高维图流形的刚性。《阿斯泰里斯克》（372）：xxi+177，2015年。[GdlH90] ´E. Ghys 和 P. de la Harpe（编）。《关于 Mikhael Gromov 的双曲群》，《数学进展》第83卷。Birkh¨auser Boston, Inc.，马萨诸塞州波士顿，1990年。收录了1988年在伯尔尼举行的瑞士双曲群研讨班论文。[GHS23] Y. Guerch、S. Hughes 和 L. J. S´anchez Salda˜na。Out(F_N)的中心化子与虚循环维数。arXiv 电子预印本，页码 arXiv:2308.01590，2023 年 8 月。[Hat00] A. Hatcher。《三维流形拓扑基础札记》。https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/3M/3Mfds.pdf，2000年。可访问：https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/3M/。[JLSSn21] K. Joecken、J.-F. Lafont 和 L. J. S´anchez Salda˜na。3-流形群的虚循环维数。《群、几何与动力学》15(2):577–606，2021年。

[Joh79] K. Johannson。《带边界三维流形的同伦等价》，《数学讲义》第761卷。施普林格，柏林，1979年。[JPSSn16] D. Juan-Pineda 和 L. J. S´anchez Salda˜na。辫群的 K 理论 Farrell–Jones 同构猜想。载于《拓扑学与几何群论》，Springer 数学与统计学论文集第184卷，第33–43页。施普林格，[Cham], 2016。[JPTN16] D. Juan-Pineda 和 A. Trujillo-Negrete。关于映射类群中虚循环子群族的分类空间。《纯粹与应用数学季刊》12(2):261–292，2016年。[JRLA25] R. Jim´enez Rolland 和 P. L. Le´ón´Alvarez。正规多自由群的虚循环维数。《墨西哥数学会通报》（3）31(1)：论文第5号，12页，2025年。[JS79] W. H. Jaco 和 P. B. Shalen。三维流形中的塞弗特纤维空间。《美国数学会回忆录》21(220):viii+192，1979年。[Kap01] M. Kapovich。《双曲流形与离散群》，《数学进展》第183卷。Birkh¨auser Boston, Inc.，马萨诸塞州波士顿，2001年。[Kne29] H. Kneser。三维流形中的闭曲面。《德国数学家联合会年报》38:248–259，1929年。[LA24] P. L. Le´ón´Alvarez。辫群、右规 Artin 群和阿贝尔群图的阿贝尔子群族分类空间。《格拉斯哥数学杂志》66(2):290–307，2024 年。[LM25] P. L. Le´ón´Alvarez 和 I. Morales。曲面辫群与多曲面群的渐近维数和上同调维数。arXiv 电子预印本，页码 arXiv:2506.10706，2025年6月。[LR05] W. L¨uck 和 H. Reich。K理论与 L理论中的 Baum–Connes 猜想和 Farrell–Jones 猜想。载于《 K理论手册》第1、2卷，第703–842页。施普林格，柏林，2005年。[L¨uc05] W. L¨uck。子群族分类空间综述。载于《无限群：几何、组合与动力学方面》，《数学进展》第248卷，第269–322页。Birkh¨auser，巴塞尔，2005年。[L¨uc09] W. L¨uck。关于 CAT(0) 群的虚循环子群族分类空间。《明斯特数学杂志》2:201–214，2009年。[LW12] W. L¨uck 和 M. Weiermann。关于虚循环子群族的分类空间。《纯粹与应用数学季刊》8(2):497–555，2012年。[Mil62] J. Milnor。三维流形的唯一分解定理。《美国数学杂志》84:1–7，1962年。[Mis10] Guido Mislin。映射类群真作用的分类空间。《明斯特数学杂志》3:263–272，2010年。[Mor05] J. W. Morgan。庞加莱猜想与三维流形分类的最新进展。《美国数学会通报》（新辑）42(1):57–78，2005年。[NP18] B. Nucinkis 和 N. Petrosyan。曲面映射类群的层级余紧分类空间。《伦敦数学会通报》50(4):569–582，2018年。[Osi06] D. V. Osin。《相对双曲群：内在几何、代数性质与算法问题》。《美国数学会回忆录》179(843):vi+100，2006年。[Pen25] Mark Pengitore。Philip Hall 所著《埃德蒙顿幂零群札记》，2025年。[Per02] G. Perelman。里奇流的熵公式及其几何应用。arXiv 数学电子预印本，页码 math/0211159，2002年11月。[Per03] G. Perelman。三维流形上的带手术里奇流。arXiv 数学电子预印本，页码 math/0303109，2003年3月。[Rol14] D. Rolfsen。有序群的拓扑学视角。《巴拿赫中心出版物》103(1):357–369，2014年。[Sco83] P. Scott。三维流形的几何。《伦敦数学会通报》15(5):401–487，1983年。[Ser03] J.-P. Serre。《树》。《施普林格数学专著》。施普林格出版社，柏林，2003年。由 John Stillwell 从法文原版翻译；1980年英文译本的校正版第二次印刷。[Sha01] P. B. Shalen。三维流形与 Baumslag–Solitar 群。《拓扑学及其应用》110(1):113–118，2001年。[Sti92] J. Stillwell。《曲面几何》。《大学数学教材》。施普林格出版社，纽约，1992年。1992年原版的校正版重印本。[SW79] P. Scott 和 T. Wall。群论中的拓扑方法。载于《同调群论》（1977年达勒姆研讨会论文集），伦敦数学会讲义丛书第36卷，第137–203页。剑桥大学出版社，剑桥—纽约，1979年。[Thu82] W. P. Thurston。三维流形、克莱因群与双曲几何。《美国数学会通报》（新辑）6(3):357–381，1982年。[Wis00] D. T. Wise。具有循环边群的自由群图的子群可分性。《季刊数学杂志》51(1):107–129，2000年。[Wu22] X. Wu。Artin群的多自由性与 Farrell–Jones 猜想。《群论杂志》25(1):11–24，2022年。

[WZ10] H. Wilton 和 P. Zalesskii。图流形的拟有限性质。《几何学专论》，147：29–45，2010年。

Centro de Ciencias Matemáticas,
Universidad Nacional Autónoma de México. Morelia,Michoacán, México 58089电子邮箱: jhdez@matmor.unam.mxInstituto de Matemáticas,
Universidad Nacional Autónoma de México. Oaxaca de Juárez,Oaxaca, México 68000电子邮箱: porfirio.leon@im.unam.mx