离散莫尔斯同调的一个有效 Mayer–Vietoris 定理

Sajal Mukherjee*[a]、Pritam Chandra Pramanik †[b] 与 Arundhati Rakshit ‡[c]

[a,b,c]Institute for Advancing Intelligence (IAI)，TCG CREST，加尔各答–700091，西孟加拉邦，印度[a,c]数学与信息科学，科学与创新研究学院 (AcSIR)，加济阿巴德–201002，北方邦，印度

arXiv:2603.13143v1 [math.CO] 13 Mar 2026

摘要

Mayer–Vietoris 定理以其广泛应用而著称，尤其是在确定同调方面。事实上，该定理为我们提供了一条长正合序列，相关同调群嵌入其中。然而，该定理并未给出计算同调的显式方法。本文利用离散 Morse 理论证明了 Mayer–Vietoris 定理的一个“有效”版本。假设我们有一个 Mayer–Vietoris 型的设定，即令 X 为一个单纯复形，且 A 与 B为 X的两个子复形，使得 $A \cup B = X$。此外，令 $\mathcal{W}_A$、$\mathcal{W}_B$ 与 $\mathcal{W}_{A\cap B}$ 分别为 A、B 与 $A \cap B$ 上的梯度向量场（它们不必“相容”，即不必在其交集上重合）。于是，本文的主定理利用上述梯度向量场之轨迹的组合信息，给出了计算 X 的同调群的显式方法，我们甚至无需知道各个同调群 $H_*(A)$、$H_*(B)$ 与 $H_*(A \cap B)$。原则上，无论梯度向量场如何选取，都可以利用我们的定理显式地计算 X 的同调。进一步，若我们明智地选取子复形 A 与 B，使得 A、B 与 $A\cap B$ 各自都容许一个高效的梯度向量场，则同调群的计算量将大为减少。

关键词：单纯复形，离散 Morse 理论，链复形，有效同调计算，Mayer-Vietoris 序列。

MSC 2020：57Q70（主要），05E45，55U15。

1 引言

Mayer-Vietoris 定理 [7] 是代数拓扑中的一种强大工具，主要用于确定单纯复形（一般而言，也适用于拓扑空间）的同调。不过，本文始终在单纯复形的框架下开展研究，因为本文的重点是显式计算，而单纯复形更便于编码。尤其是，它的用途在于通过将一个庞大而复杂的单纯复形“拆分”为较小且易于处理的子复形，来计算其同调。更准确地说，若 X 是一个单纯复形，且 A 和 B 是 X 的两个子复形，使得$A \cup B = X$成立，那么 Mayer-Vietoris 定理（在单纯复形框架下）指出，同调群$H_*(X)$、$H_*(A)$、$H_*(B)$可组成如下长正合序列（关于某些适当的映射 f_*、g_*和 h_*）。

$$\cdots \to H_n(A\cap B) \xrightarrow{f_n} H_n(A)\oplus H_n(B) \xrightarrow{g_n} H_n(X) \xrightarrow{h_n} H_{n-1}(A\cap B) \to \ldots H_0(X) \to 0.$$

*sajal.mukherjee@tcgcrest.org
†pritam.pramanik.80@tcgcrest.org
‡arundhati.rakshit.124@tcgcrest.org

然而，尽管 Mayer-Vietoris 定理在代数拓扑中用途广泛，它在计算方面仍有一个显著的局限。Mayer-Vietoris 定理仅给出上述长正合序列，其中包含同调群 $H_*(X)$、 $H_*(A)$、 $H_*(B)$，据此我们只能在有限的几种情况下计算 X 的同调。一般而言，该定理并未提供显式计算 X的同调群的方法。本文借助离散 Morse 理论，给出 Mayer-Vietoris 定理的一个“有效”版本。为陈述我们的结果，我们需要引入离散 Morse 理论中的以下概念。

L令 X 为一个单纯复形。我们将维数为 q 的单形 σ 记作 $\sigma^{(q)}$.

单纯复形 X 上的离散向量场 $\mathcal{V}$定义为由单形对组成的集合 $\{(\sigma^{(q-1)}, \tau^{(q)}) \mid \sigma, \tau \in X, \sigma \subseteq \tau\}$，使得 X 中的每个单形至多出现在一对中。

定义 1.0.1。（Forman 轨迹）一个$Forman$ $\mathcal{V}$-轨迹（或简称 $\mathcal{V}$-轨迹）定义为如下形式的单形序列。

$$\tau_0^{(q)}, \sigma_1^{(q-1)}, \tau_1^{(q)}, \ldots \sigma_k^{(q-1)}, \tau_k^{(q)},$$

其中，对于所有 $i \in [k]$，$(\sigma_i^{(q-1)}, \tau_i^{(q)}) \in \mathcal{V}$, $\sigma_i^{(q-1)} \subseteq \tau_{(q)\,i-1}$，$(\sigma_i^{(q-1)}, \tau_{(q)\,i-1}) \notin \mathcal{V}$。

只要上下文中能明确梯度向量场，我们就将 $\mathcal{V}$-轨迹简称为轨迹。若对于 $k > 1$， $\tau_0 = \tau_k$，则称轨迹为闭合的。

现在我们将扩展的 ***Forman*** $\mathcal{V}$-轨迹 （或扩展的 $\mathcal{V}$-轨迹 ）定义为具有以下形式的单形序列。

$$\tau_0^{(q)}, \sigma_1^{(q-1)}, \tau_1^{(q)}, \ldots \sigma_k^{(q-1)}, \tau_k^{(q)}, \sigma_{k+1}^{(q-1)},$$

其中，对于所有 $i \in [k]$， $\sigma_i^{(q-1)} \subseteq \tau_{(q)\,i-1}$，$(\sigma_i^{(q-1)}, \tau_{(q)\,i})$；并且对于所有 $i \in [k+1]$，$(\sigma_i^{(q-1)}, \tau_{i-1}^{(q)}) \notin \mathcal{V}$。

这里， τ_0 称为扩展轨迹的初始单形， σ_{k+1} 称为扩展轨迹的终止单形。如果 $k > 0$，则称（扩展）轨迹为非平凡的。

从现在起，为简便起见，我们将扩展轨迹简称为轨迹，并指出这不会造成术语上的歧义。

如果不存在非平凡的闭合 $\mathcal{V}$-轨迹，则称离散向量场 $\mathcal{V}$ 为无环的。如果 $\mathcal{V}$ 无环，则称离散向量场 $\mathcal{V}$ 为梯度向量场。

给定单纯复形上的梯度向量场 $\mathcal{V}$，如果一个单形不出现在 $\mathcal{V}$中，就称它为 $\mathcal{V}$-临界 。当上下文已明确梯度向量场时，我们将其简称为临界单形。我们用 $\mathrm{Crit}_q^{\mathcal{V}}(X)$ 表示 X 中所有 q维 $\mathcal{V}$-临界单形的集合。

设 X 为一个带有梯度向量场 $\mathcal{V}$的单纯复形。

定义 1.0.2. 设 γ: $\tau_{(q)\,0}, \sigma_1^{(q-1)}, \tau_1^{(q)}, \ldots, \sigma_k^{(q-1)}, \tau_k^{(q)}, \sigma_{k+1}^{(q-1)}$为 X 中的一条 $\mathcal{V}$-轨迹。那么 γ的权重记作 $w(\gamma)$，定义为:

$$w(\gamma) := \left(\prod_{i=0}^{k-1} -\langle \tau_i, \sigma_{i+1}, \rangle \langle \tau_{i+1}, \sigma_{i+1} \rangle \right) \langle \tau_k, \sigma_{k+1} \rangle.$$

以 $\tau^{(q)}$ 为初始单形、以 $\sigma^{(q-1)}$ 为终止单形的所有 $\mathcal{V}$-轨迹组成的集合记作 $\Gamma(\tau, \sigma)$。

对于单纯复形 X 及其上的梯度向量场 $\mathcal{V}$，我们将 Thom-Smale 链群 $C_q^{\mathcal{V}}(X,\mathrm{Z})$ 定义为由 $\mathrm{Crit}_q^{\mathcal{V}}(X)$ 在 Z 上生成的阿贝尔群，其中每个 $q \geq 0$ 对应一个生成元，即

$$C_q^{\mathcal{V}}(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\langle \mathrm{Crit}_q^{V}(X) \rangle, \text{ for each } q \geq 0.$$

从这里开始，我们均使用系数环 Z。因此，当我们提到链群和同调群 K时，不再写作 $K_{\#}(X,\mathbb{Z})$，而简写为 $K_{\#}(X)$。

N现在，我们定义 Thom-Smale 边界算子 $\partial^{\mathcal{V}}_{q+1}: C^{\mathcal{V}}_{q+1}(X) \to C^{\mathcal{V}}_{q}(X)$ a s,

$$\partial^{\mathcal{V}}_{q+1}(\tau) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Crit}^{\mathcal{V}}_{q}(X)} \left(\sum_{P \in \Gamma(\tau,\sigma)} w(P) \right) \sigma, \text{ for each } \tau \in \mathrm{Crit}^{\mathcal{V}}_{q+1}(X),\ q \geq 0.$$

并将其线性扩张到整个 $C^{\mathcal{V}}_{q}(X)$。因此，Thom-Smale 链复形 $(C^{\mathcal{V}}_{\#}(X)\ \partial^{\mathcal{V}}_{\#})$ 表示为:

$$\cdots \to C^{\mathcal{V}}_{q+1}(X) \xrightarrow{\partial^{\mathcal{V}}_{q+1}} C^{\mathcal{V}}_{q}(X) \xrightarrow{\partial^{\mathcal{V}}_{q}} C^{\mathcal{V}}_{q-1}(X) \to \cdots \to C^{\mathcal{V}}_{0}(X) \to 0.$$

对每个 $q \geq 0$，Thom-Smale 同调群 $H^{\mathcal{V}}_{q}(X) :=\underline{= \mathrm{Ker}(\partial^{\mathcal{V}}_{q})\ Im(\partial^{\mathcal{V}}_{q+1})}$。

Forman 的以下定理 [2, 3]至关重要。

定理 1.1 ([2, 3])**.** X 的 ***Thom-Smale*** 链复形（关于 X 上的梯度向量场 $\mathcal{V}$），$(C^{\mathcal{V}}_{\#}(X)\ \partial^{\mathcal{V}}_{\#})$ 与 X 的单纯链复形同伦等价，$(C_{\#}(X)\ \partial_{\#})$。因此$H^{\mathcal{V}}_{\#}(X) \cong H_{\#}(X)$。

这里我们指出，离散 Morse 理论的优势在于，它能够通过减少链群的生成元数量，简化单纯同调的计算（见 [6]）。现在的计算仅依赖临界单形的信息，而非所有单形的信息。然而，Morse 同调计算是否可行，关键取决于能否在底层单纯复形 X 上找到高效的梯度向量场（即临界单形数量较少的向量场）；这通常是一项颇具挑战的任务（见 [6]）。事实上，在单纯复形上确定最优梯度向量场是一个 NP-难问题（见 [1, 4, 5]）。

本文在 Mayer-Vietoris 的框架下，表述一个 Forman 型定理（类似于定理 1.1），如下所示。

设 X 是一个单纯复形，具有两个子复形 A 和 B，满足 $A \cup B = X$。假设，$\mathcal{W}_A$、$\mathcal{W}_B$、$\mathcal{W}_{A\cap B}$ 分别是定义在 A、B 和 $A\cap B$ 上的梯度向量场。这些子复形上的梯度向量场不必"相容"，也就是说，它们在交集上不必一致，而且在整个单纯复形 X上也不必整体无环。于是，利用梯度向量场 $\mathcal{W}_A$、$\mathcal{W}_B$ 和 $\mathcal{W}_{A\cap B}$，我们可以确定 X 的同调群。放宽梯度向量场 $\mathcal{W}_A$、$\mathcal{W}_B$ 和 $\mathcal{W}_{A\cap B}$ 必须相容这一要求，使我们的定理更具灵活性。

¯设 X 是一个单纯复形，且 Y 是 X的一个子复形。我们将单纯复形 Y定义如下:

$$V(\bar{Y}) := \{\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n\},\ \text{where } V(Y) = \{y_1, \ldots, y_n\},$$
$$\text{and } \mathcal{F}(\bar{Y}) := \{\{\bar{y}_{i_1}, \ldots, \bar{y}_{i_k}\} \mid \{y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}\} \in \mathcal{F}(Y)\}.$$

¯我们称 $\bar{Y}$ 为 Y 的副本。

¯对于每个 $\sigma = \{y_{i_0}, \ldots, y_{i_k}\} \in Y$，我们将 $\{\bar{y}_{i_0}, \ldots, \bar{y}_{i_k}\} \in \mathcal{F}(\bar{Y})$ 记为 $\sigma_{\bar{Y}}$。¯ ¯现在，我们考虑一个单纯复形 X，其子复形为 A和 B，满足 $A\cup B = X$。令 $\underline{A,\ B}$¯ ¯和 $A\cap B$分别为 $\bar{A}$，$\bar{B}$和 $A\cap B$ ¯ ¯的不相交副本（即，$V(\bar{A})$、$V(\bar{B})$ 和 $V(\overline{A\cap B})$ 两两不相交）。令 $\mathcal{W}_{\bar{A}}$、$\mathcal{W}_{\bar{B}}$和 $\mathcal{W}_{A\cap B}$ 分别为 $\bar{A}$、$\bar{B}$、$A\cap B$ 上的梯度向量场。令，

$$D_0(X) := \mathrm{Crit}_0^{\mathcal{W}_{\bar{A}}}(\bar{A}) \cup \mathrm{Crit}_0^{\mathcal{W}_{\bar{B}}}(\bar{B}),\ \text{and}$$
$$D_q(X) := \mathrm{Crit}_q^{\mathcal{W}_{\bar{A}}}(\bar{A}) \cup \mathrm{Crit}_q^{\mathcal{W}_{\bar{B}}}(\bar{B}) \cup \mathrm{Crit}_{q-1}^{\mathcal{W}_{\overline{A\cap B}}}(\overline{A\cap B}), q \geq 1.$$

接下来，我们定义所关注的主要对象，即从单形 $\beta \in D_q(X)$ 到单形 $\alpha \in D_{q-1}(X)$ 的一条迈耶-维托里斯轨迹。

定义 1.1.1. （Mayer-Vietoris 轨迹）设 $\beta \in D_q(X)$， $\alpha \in D_{q-1}(X)$。则以下五种情形分别定义了一个 *Mayer-Vietoris* 轨迹（简称 MV 轨迹） P 从 β 到 α 。

1. 设 $\beta \in$ 临界点$_q^{\mathcal{W}_{\bar{A}}}(\bar{A})$，且 $\alpha \in$ 临界点$_{q-1}^{\mathcal{W}_{\bar{A}}}(\bar{A})$。一个*MV* 轨迹 P从 β到 α 定义为一个单形序列。

$$(\beta =)\ (\tau_0)_{\bar{A}}^{(q)}, (\sigma_1)_{\bar{A}}^{(q-1)}, (\tau_1)_{\bar{A}}^{(q)}, \ldots, (\sigma_k)_{\bar{A}}^{(q-1)}, (\tau_k)_{\bar{A}}^{(q)}, (\sigma_{k+1})_{\bar{A}}^{(q-1)}\ (= \alpha),$$

其中，$((\sigma_i)_{\bar{A}}, (\tau_i)_{\bar{A}}) \in \mathcal{W}_{\bar{A}}$，对每个 $i \in [k]$，$(\sigma_i)_{\bar{A}} \subseteq (\tau_{i-1})_{\bar{A}}$，并且 $((\sigma_i)_{\bar{A}}, (\tau_{i-1})_{\bar{A}}) \notin \mathcal{W}_{\bar{A}}$，对每个$i \in [k+1]$。
此类轨迹的权重定义为，

$$w_M(P) := \left(\prod_{i=0}^{k-1} -\langle \tau_i, \sigma_{i+1}\rangle\langle \tau_{i+1}, \sigma_{i+1}\rangle\right)\langle \tau_k, \sigma_{k+1}\rangle.$$

2. 令 $\beta \in$临界点$_q^{\mathcal{W}_{\bar{B}}}(\bar{B})$，且 $\alpha \in$临界点$_{q-1}^{\mathcal{W}_{\bar{B}}}(\bar{B})$。从 β到 α的*MV* 轨迹 P定义为一个单形序列。

$$(\beta =)\ (\tau_0)_{\bar{B}}^{(q)}, (\sigma_1)_{\bar{B}}^{(q-1)}, (\tau_1)_{\bar{B}}^{(q)}, \ldots, (\sigma_k)_{\bar{B}}^{(q-1)}, (\tau_k)_{\bar{B}}^{(q)}, (\sigma_{k+1})_{\bar{B}}^{(q-1)}\ (= \alpha),$$

其中，对于每个 $i \in [k]$，$((\sigma_i)_{\bar{B}}, (\tau_i)_{\bar{B}}) \in \mathcal{W}_{\bar{B}}$，$(\sigma_i)_{\bar{B}} \subseteq (\tau_{i-1})_{\bar{B}}$，且对于每个$i \in [k+1]$，$((\sigma_i)_{\bar{B}}, (\tau_{i-1})_{\bar{B}}) \notin \mathcal{W}_{\bar{B}}$。

此类轨迹的权重定义为，

$$w_M(P) := \left(\prod_{i=0}^{k-1} -\langle \tau_i, \sigma_{i+1}\rangle\langle \tau_{i+1}, \sigma_{i+1}\rangle\right)\langle \tau_k, \sigma_{k+1}\rangle.$$

3. 令 $\beta \in$临界点$_{q-1}^{\mathcal{W}_{A\cap B}}(\overline{A\cap B})$，且 $\alpha \in$临界点$_{q-2}^{\mathcal{W}_{A\cap B}}(\overline{A\cap B})$。从 β到 α的*MV* 轨迹 P定义为一个单形序列，

$$(\beta =)\ (\tau_0)_{\overline{A\cap B}}^{(q-1)}, (\sigma_1)_{\overline{A\cap B}}^{(q-2)}, (\tau_1)_{\overline{A\cap B}}^{(q-1)}, \ldots, (\sigma_k)_{\overline{A\cap B}}^{(q-2)}, (\tau_k)_{\overline{A\cap B}}^{(q-1)}, (\sigma_{k+1})_{\overline{A\cap B}}^{(q-2)}\ (= \alpha),$$

其中，对于~~每个~~ $i \in ~~[k]~~$，$((\sigma_i)^{A\cap B}, (\tau_i)^{A\cap B}) \in \mathcal{W}_{A\cap B}$，$(\sigma_i)_{\overline{A\cap B}} \subseteq (\tau_{i-1})^{A\cap B}$ 且 $((\sigma_i)^{A\cap B}, (\tau_{i-1})^{A\cap B}) \notin \mathcal{W}_{\overline{A\cap B}}$对于每个 $i \in [k+1]$。
这类轨迹的权重定义为：

$$w_M(P) := -\left(\prod_{i=0}^{k-1} -\langle \tau_i, \sigma_{i+1}\rangle\langle \tau_{i+1}, \sigma_{i+1}\rangle\right)\langle \tau_k, \sigma_{k+1}\rangle.$$

4. 设 $\beta \in$临界点$_{q-1}^{\mathcal{W}_{A\cap B}}(\overline{A\cap B})$，且 $\alpha \in$临界点$_{q-1}^{\mathcal{W}_{\bar{A}}}(\bar{A})$。从 β到 α的 *MV* 轨迹 P定义为一个单形序列，

$$(\beta =)\ (\tau_0)_{\overline{A\cap B}}^{(q-1)}, (\sigma_1)_{\overline{A\cap B}}^{(q-2)}, (\tau_1)_{\overline{A\cap B}}^{(q-1)}, \ldots, (\sigma_p)_{\overline{A\cap B}}^{(q-2)}, (\tau_p)_{\overline{A\cap B}}^{(q-1)}, (\tau_p)_{\bar{A}}^{(q-1)}, (\alpha_p)_{\bar{A}}^{(q)}, \ldots, (\tau_{p+l-1})_{\bar{A}}^{(q-1)},$$
$$(\alpha_{p+l-1})_{\bar{A}}^{(q)}, (\tau_{p+l})_{\bar{A}}^{(q-1)}\ (= \alpha),$$

其中，对于每个 $\mathcal{W}_{A\cap B}$ $\sigma_i \in \mathcal{W}_{A\cap B}$ $i \in [p]$ $\tau_i \in \mathcal{W}_{\bar{A}}$ $i \in \{p, \ldots, p+l-1\}$ $\sigma_{i\,A\cap B} \subseteq \tau_{i-1\,A\cap B}$ $\tau_{i\,\bar{A}} \subseteq \alpha_{i-1\,\bar{A}}$ $\sigma_{i\,A\cap B}$ $\tau_{i-1\,A\cap B} \notin$ ( ) ( )，( ) ( ) 且对于每个 ，(( ))，( ) ( )，(( ) ，( ))，对于 ( ) ，( ) ( ) 且对于每个 $i \in \{p+1, \ldots, p+l\}$，$p$，$l \geq 0$，$((\tau_i)_{\bar{A}}$，$(\alpha_{i-1})_{\bar{A}}) \notin \mathcal{W}_{\bar{A}}$。

此类轨迹的权重定义为：

$$w_M(P) := -\left(\prod_{i=0}^{p-1} -\langle \tau_i, \sigma_{i+1}\rangle\langle \tau_{i+1}, \sigma_{i+1}\rangle\right)\left(\prod_{i=p}^{p+l-1} -\langle \alpha_i, \tau_i\rangle\langle \alpha_i, \tau_{i+1}\rangle\right).$$

5. 设 $\beta \in$ 临界点$^{\mathcal{W}_{A\cap B}}_{q-1}(A\cap B)$ 和 $\alpha \in$ 临界点$^{\mathcal{W}_{\bar{B}}}_{q-1}(\bar{B})$。从 β 到 α 的*MV* 轨迹 P定义为一个单形序列，

$$(\beta =)\ (\tau_0)^{(q-1)}_{A\cap B}, (\sigma_1)^{(q-2)}_{A\cap B}, (\tau_1)^{(q-1)}_{A\cap B}, \ldots, (\sigma_p)^{(q-2)}_{A\cap B}, (\tau_p)^{(q-1)}_{A\cap B}, (\tau_p)^{(q-1)}_{\bar{B}}, (\alpha_p)^{(q)}_{\bar{B}}, \ldots, (\tau_{p+l-1})^{(q-1)}_{\bar{B}},$$
$$(\alpha_{p+l-1})^{(q)}_{\bar{B}}, (\tau_{p+l})^{(q-1)}_{\bar{B}}\ (= \alpha),$$

其中，对于每个 $\mathcal{W}_{A\cap B}$ $\sigma_i \in \mathcal{W}_{A\cap B}$ $i \in [p]$ $\tau_i \in \mathcal{W}_{\bar{B}}$ $i \in \{p, \ldots, p+l-1\}$ $\sigma_{i\,A\cap B} \subseteq \tau_{i-1\,A\cap B}$ $\tau_{i\,\bar{B}} \subseteq \alpha_{i-1\,\bar{B}}$ $\sigma_{i\,A\cap B}$ $\tau_{i-1\,A\cap B} \notin$)<style id="2">, ( ) ( ), ( ) ( )，并且对于每个 ，(( )<style id="4">，( ))；对于 ( )，( ) ( )，以及对于每个 $i \in \{p+1, \ldots, p+l\}$，(( ) <style id="6">，( ))，$((\tau_i)_{\bar{B}}$ <style id="10">，$(\alpha_{i-1})_{\bar{B}}) \notin \mathcal{W}_{\bar{B}}$，$p$<style id="17">，$l \geq 0$。

这类轨迹的权重定义为：

$$w_M(P) := \left(\prod_{i=0}^{p-1} -\langle \tau_i, \sigma_{i+1}\rangle\langle \tau_{i+1}, \sigma_{i+1}\rangle\right)\left(\prod_{i=p}^{p+l-1} -\langle \alpha_i, \tau_i\rangle\langle \alpha_i, \tau_{i+1}\rangle\right).$$

对于任意 $\beta \in D_q(X)$ 和 $\alpha \in D_{q-1}(X)$，我们将从 β 到 α 的所有 MV轨迹的集合记为 $\mathrm{MV}(\beta, \alpha)$。

对于非负整数 q，我们定义 $\mathcal{D}_q(X)$ 如下：

$$\mathcal{D}_q(X) := \mathbb{Z}\langle D_q(X)\rangle.$$

对于非负整数 q，我们在生成元集合上定义映射 $\partial^{\mathcal{D}}_{q+1} : \mathcal{D}_{q+1}(X) \longrightarrow \mathcal{D}_q(X)$ 如下。对于每个 $\beta \in D_{q+1}(X)$，我们定义：

$$\partial^{\mathcal{D}}_{q+1}(\beta) = \sum_{\alpha\in D_q(X)} \left(\sum_{P\in \mathrm{MV}(\beta,\alpha)} w_M(P)\right)\alpha,$$

并将其线性延拓至 $\mathcal{D}_{q+1}(X)$。

现在我们可以陈述主要结果了。

定理 *1.2.* 设 X 是一个 d维单纯复形，其子复形为 A 和 B，且满足 $A \cup B = X$。若 $\mathcal{W}_{\bar{A}}$、$\mathcal{W}_{\bar{B}}$ 和 $\mathcal{W}_{A\cap B}$ 分别是定义在 A、B 和 $A\cap B$ 上的梯度向量场，其中 $\bar{A}$、$\bar{B}$ 和 $A\cap B$ 分别是 A、B和 $A\cap B$ 的不相交副本（如前所定义），则 $(\mathcal{D}_q(X)\ \partial^{\mathcal{D}}_q)_{q\geq 0}$ 是一个链复形，并且对每个 $q = 0, \ldots\ldots, d$，都有 $H^{\mathcal{D}}_q(X) \cong H_q(X)$，其中 $H_q(X)$表示 X 的第 q个单纯同调群，而 $H^{\mathcal{D}}_q(X)$表示 $\mathcal{D}_q(X)$的第 q个同调群。

我们定理的一个新颖之处在于，与通常的 Mayer-Vietoris 定理不同，我们不需要知道各自的同调群 $H_*(A)$ $H_*(B)$ 和 $H_*(A\cap B)$（这需要额外进行大量计算）。我们只需要了解相应梯度向量场的轨迹。值得一提的是，原则上，我们总能利用定理（定理 1.2）显式计算 X 的同调。此外，如果我们选择

恰当的子复形 A 和 B，使得每个子复形 A、B 和 $A \cap B$ 都存在高效的梯度向量场（即临界单形数量较少），那么同调群的计算就会容易得多。

作为一个例子，我们使用定理 1.2 计算 $S_0 * S_0 * S_0$ 的同调 .

设 $X = S_0 * S_0 * S_0$。因此，我们也可以将 X 写作 $\{v_0, v_2\} * \{v_1, v_3\} * \{v_4, v_5\}$。设 A 和 B 是 X 的两个子复形，其中 $A = \{v_0, v_2\} * \{v_1, v_3\} * \{v_5\}$、$B = \{v_0, v_2\} * \{v_1, v_3\} * \{v_4\}$。因此，$A \cap B = \{v_0, v_2\} * \{v_1, v_3\}$。我们将 A 的顶点重新标记为 a_i，将 B 的顶点重新标记为 b_i，并将 $A \cap B$ 的顶点重新标记为 c_i，对应于每个 i 的 v_i。因此，$A = \overline{\{\bar{a}_0, \bar{a}_2\}} * \{\bar{a}_1, \bar{a}_3\} * \{\bar{a}_5\}$、$B = \{b_0, b_2\} * \{b_1, b_3\} * \{b_4\}$，以及 $A \cap B = \{\bar{c}_0, \bar{c}_2\} * \{\bar{c}_1, \bar{c}_3\}$（如图 1 所示）。

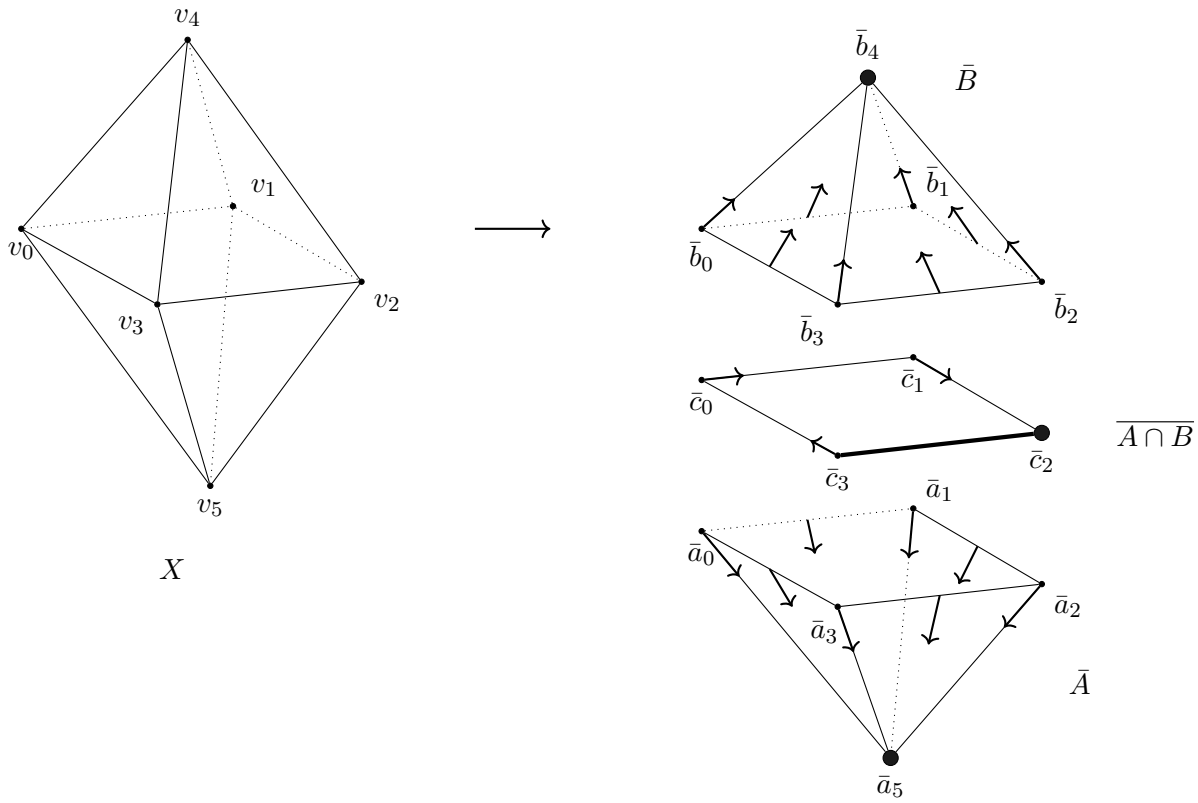


图 1：$S_0 * S_0 * S_0$，以及其子复形 A、B 和 $A \cap B$ 的不相交副本。箭头表示相应的梯度向量场，而临界单形已用粗体标出。

接下来，我们在 A 上定义梯度向量场 $\mathcal{W}_{\bar{A}}$，在 B 上定义 $\mathcal{W}_{\bar{B}}$，并在 $A \cap B$ 上定义 ~~$\mathcal{W}_{\overline{A \cap B}}$~~。设

$$\mathcal{W}_{\bar{A}} = \{(\alpha \setminus \{\bar{b}_4\}, \alpha) \mid \alpha \in \bar{A}, \bar{b}_4 \in \alpha\},$$

$$\mathcal{W}_{\bar{B}} = \{(\alpha \setminus \{\bar{a}_5\}, \alpha) \mid \alpha \in \bar{B}, \bar{a}_5 \in \alpha\},$$

$$\mathcal{W}_{\overline{A \cap B}} = \{([\bar{c}_3], [\bar{c}_0, \bar{c}_3]), ([\bar{c}_0], [\bar{c}_0, \bar{c}_1]), ([\bar{c}_1], [\bar{c}_1, \bar{c}_2])\}$$

.

因此，$D_{\#}(X)$ 由下式给出，

$$D_0(X) = \mathrm{Crit}_0^{\mathcal{W}_{\bar{A}}}(\bar{A}) \cup \mathrm{Crit}_0^{\mathcal{W}_{\bar{B}}}(\bar{B}) = \{[\bar{a}_5], [\bar{b}_4]\},$$

$$D_1(X) = \mathrm{Crit}_1^{\mathcal{W}_{\bar{A}}}(\bar{A}) \cup \mathrm{Crit}_1^{\mathcal{W}_{\bar{B}}}(\bar{B}) \cup \mathrm{Crit}_0^{\mathcal{W}_{\overline{A\cap B}}}(\overline{A \cap B}) = \{[\bar{c}_2]\},$$

$$D_2(X) = \mathrm{Crit}_2^{\mathcal{W}_{\bar{A}}}(\bar{A}) \cup \mathrm{Crit}_2^{\mathcal{W}_{\bar{B}}}(\bar{B}) \cup \mathrm{Crit}_1^{\mathcal{W}_{\overline{A\cap B}}}(\overline{A \cap B}) = \{[\bar{c}_2, \bar{c}_3]\}.$$

链复形如下。

$$0 \to \mathcal{D}_2(X) \xrightarrow{\partial_2^{\mathcal{D}}} \mathcal{D}_1(X) \xrightarrow{\partial_1^{\mathcal{D}}} \mathcal{D}_0(X) \xrightarrow{\partial_0^{\mathcal{D}}} 0.$$

从 $D_1(X)$到 $D_0(X)$的MV轨迹为:

$$P_1 : [\bar{c}_2], [\bar{a}_2, \bar{a}_5], [\bar{a}_5].$$
$$P_2 : [\bar{c}_2], [\bar{b}_2, \bar{b}_4], [\bar{b}_4].$$

这些MV轨迹的权重为:

$$w_M(P_1) = -(-\langle [v_2, v_5], [v_2]\rangle\langle [v_2, v_5], [v_5]\rangle) = -1.$$
$$w_M(P_2) = (-\langle [v_2, v_4], [v_2]\rangle\langle [v_2, v_4], [v_4]\rangle) = 1.$$

因此,

$$\begin{aligned}\partial_1^{\mathcal{D}}([\bar{c}_2]) &= w_M(P_1)[\bar{a}_5] + w_M(P_2)[\bar{b}_4] \\ &= [\bar{b}_4] - [\bar{a}_5].\end{aligned}$$

因此, $H_0^{\mathcal{D}}(X) = \mathrm{Ker}(\partial_0^{\mathcal{D}}) \underline{\mathrm{Im}(\partial_1^{\mathcal{D}})} \cong \frac{\langle [\bar{a}_5], [\bar{b}_4]\rangle}{\langle [\bar{b}_4] - [\bar{a}_5]\rangle} \cong \mathbf{Z}_\circ$

由此可得, $\mathbf{Ker}(\partial_1^{\mathcal{D}}) = 0_\circ$ 因此, $H_1^{\mathcal{D}}(X) = \mathrm{Ker}(\partial_1^{\mathcal{D}}) \underline{\mathrm{Im}(\partial_2^{\mathcal{D}})} \cong 0.$

接下来, 从 D_2 到 D_1 的MV轨迹为:

$$Q_1 : [\bar{c}_2, \bar{c}_3], [\bar{c}_2].$$
$$Q_2 : [\bar{c}_2, \bar{c}_3], [\bar{c}_3], [\bar{c}_0, \bar{c}_3], [\bar{c}_0], [\bar{c}_0, \bar{c}_1], [\bar{c}_1], [\bar{c}_1, \bar{c}_2], [\bar{c}_2].$$

因此, 这些 MV轨迹的权重为:

$$w_M(Q_1) = -\langle [v_2, v_3], [v_2]\rangle = 1.$$
$$\begin{aligned}w_M(Q_2) = &-(-\langle [v_2, v_3], [v_3]\rangle\langle [v_0, v_3], [v_3]\rangle)(-\langle [v_0, v_3], [v_0]\rangle\langle [v_0, v_1], [v_0]\rangle) \\ &(-\langle [v_0, v_1], [v_1]\rangle\langle [v_1, v_2], [v_1]\rangle)\langle [v_1, v_2], [v_2]\rangle \\ = &-1.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\partial_2^{\mathcal{D}}([\bar{c}_2, \bar{c}_3]) &= w_M(Q_1)[\bar{c}_2] + w_M(Q_2)[\bar{c}_2] \\ &= [\bar{c}_2] - [\bar{c}_2] = 0.\end{aligned}$$

因此, $H_2^{\mathcal{D}}(X) = \mathbf{Ker}(\partial_1^{\mathcal{D}}) \cong \langle [\bar{c}_2, \bar{c}_3]\rangle \cong \mathbf{Z}_\circ$

2 预备知识

一个单纯复形 X 定义为有序对（V， $\mathcal{F}$），其中 V是一个有限非空集合， $\mathcal{F}$表示 V的一个非空子集集合，并满足以下性质：如果 $\sigma \in \mathcal{F}$，那么 σ 的每个子集也必须属于 $\mathcal{F}$。 V 的元素称为顶点，而 $\mathcal{F}$ 的元素称为单形。

对于任意单纯复形 X，其顶点集记为 $V(X)$，单形集记为 $\mathcal{F}(X)$。滥用记号，我们将单形集简记为 X，而非 $\mathcal{F}(X)$。单形 σ 的维数由 $\dim(\sigma) = |\sigma| - 1$ 给出。单纯复形 X 的维数定义为 $\dim(X) = \max\{\dim(\sigma) \mid \sigma \in X\}$。若 $\sigma \subseteq \tau$，且 $\dim(\sigma) = \dim(\tau) - 1$，则称 σ 为 τ 的面 。若 σ 是一个不包含于任何其他单形中的单形，则称 σ 为极大 单形。

若 $A \subseteq B$，则称单纯复形 A 为单纯复形 B 的子复形。两个单纯复形 X 与 Y的并定义为 $X \cup Y$。 X 与 Y的交集定义为 $X \cap Y$。可以验证，单纯复形的并与交集本身仍是单纯复形。

定义 2.0.1。（单纯复形的棱柱）。设 X 为一个单纯复形，其 $V(X) = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$。我们将 单纯复形的棱柱 X 定义为 $\mathrm{P}(X)$，其顶点集表示为 $V(\mathrm{P}(X)) = \{a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n\}$，其中每个 a_i、 b_i 分别对应于 v_i 、 $i \in \{0, \ldots, n\}$，使得 $\{a_0, \ldots, a_n\}$ 和 $\{b_0, \ldots, b_n\}$ 不相交。$\mathrm{P}(X)$ 的一个极大单形具有如下形式：$\{a_{i_0}, \ldots, a_{i_r}, b_{i_r}, \ldots, b_{i_q}\}$、 $i_0 < i_1$， $\cdots < i_q$，其中 $\{v_{i_0}, \ldots, v_{i_q}\}$ 是 X 的一个极大单形， $0 \le r \le q$。

令 $\alpha = \{v_{i_0}, \ldots, v_{i_q}\} \in X$。

接着，我们定义 $A_\alpha := \{\{a_{i_0}, \ldots, a_{i_r}, b_{i_r}, \ldots, b_{i_q}\} \mid 0 \le r \le q\}$和 $B_\alpha := \{\{a_{i_0}, \ldots, a_{i_{r-1}}, b_{i_r}, \ldots b_{i_q}\} \mid 1 \le r \le q\} \cup \{\{\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_q}\}\} \cup \{\{b_{i_0}, \ldots, b_{i_q}\}\}$。我们定义， $S_\alpha := A_\alpha \cup B_\alpha$，并注意到 $\bigcup_{\alpha \in X} S_\alpha = \mathrm{P}(X)$，其中 S_α-彼此为不相交集。

For 任意单形 $\sigma \in S_\alpha$, α 都称为 σ 的 底单形 ， 记作 $\mathrm{GS}(\sigma)$.

下图展示了二维单纯复形 X 的棱柱，其中$X = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_1, v_2\}, \{v_0, v_1, v_2\}\}$。

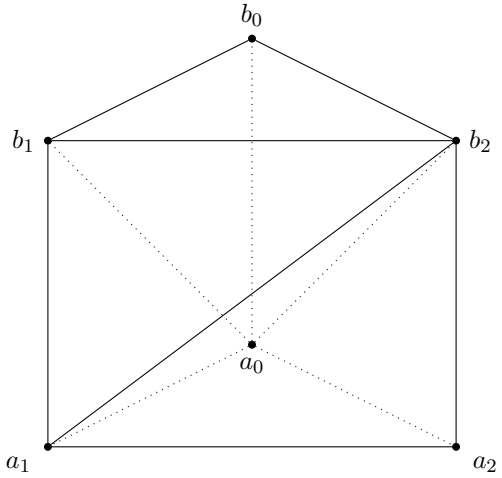


图 2：$\mathrm{P}(X)$ 的示意图。

从图中可以看出，$\mathrm{P}(X)$ 的极大单形是 $\{a_0, b_0, b_1, b_2\}$， $\{a_0, a_1, b_1, b_2\}$ 和 $\{a_0, a_1, a_2, b_2\}$。

定义 2.0.2. 单形 $\{v_0, v_1, \dots v_n\}$ 的定向 定义为该单形顶点的一种排列，其依据是对 $\{v_0, v_1, \dots v_n\}$ 的所有可能排列所定义的如下等价关系。

$\{v_{i_0}, v_{i_1}, \dots v_{i_n}\} \sim \{v_{j_0}, v_{j_1}, \dots v_{j_n}\}$ 如果 $\{i_0, i_1, \dots, i_n\}$ 和 $\{j_0, j_1, \dots, j_n\}$ 相差一个偶置换。

如果两个定向属于同一个等价类，则称它们相同；否则称它们不同。因此，对于一个满足 $\dim(\sigma) \geq 1$ 的单形 σ，恰好有两个定向，分别对应两个等价类。具有给定定向的单形称为定向单形。具有定向 $\{v_0, \dots, v_n\}$（由排序 $v_0, \dots, v_n$ 给出）的定向单形记作 $[v_0, \dots, v_n]$。这表示与 $\{v_0, v_1, \dots v_n\}$ 属于同一个等价类的所有单形的定向。

设 $[v_0, \dots, v_n]$ 是一个定向单形。那么 $[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n]$ 是顶点集为 $\{v_0, \dots, v_n\} \setminus \{v_i\}$、定向由排序 $v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ 给出的定向单形。

定义 2.0.3. （关联数）。设 X 是一个单纯复形，且 $\sigma, \tau \in X$ 满足 $\dim(\tau) = q$，$\dim(\sigma) = q - 1$。设 $\tau = [v_0, \dots, v_q]$。则 σ 关于 τ 的关联数 定义为，

$$\langle \tau, \sigma \rangle := \begin{cases} 0 & \text{if } \sigma \not\subset \tau, \\ (-1)^i & \text{if } \sigma = [v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_q]. \end{cases}$$

单纯链复形： 设 $S_q(X)$ 表示 X 的所有 q 维单形构成的集合，并设 $C_q(X)$ 为由 $S_q(X)$ 在 $\mathbb{Z}$ 上生成的自由阿贝尔群。我们定义 $(q+1)^{th}$ 边界算子 $\partial_{q+1} : C_{q+1}(X) \to C_q(X)$ 如下，

$$\partial_{q+1}(\tau) = \sum_{\sigma \in S_q(X)} \langle \tau, \sigma \rangle \sigma, \text{ for each } \tau \in S_{q+1}(X),$$

并将其线性扩张到 $C_{q+1}(X)$ 的所有元素上。因此，单纯链复形如下，

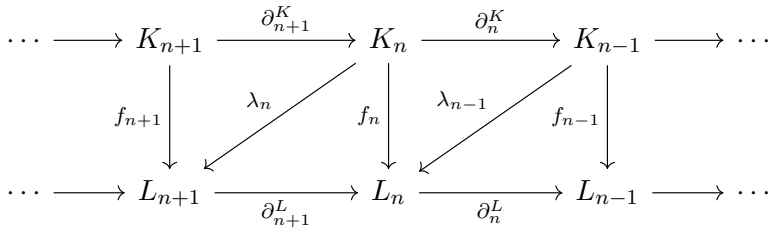
$$\cdots \to C_{q+1}(X) \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q(X) \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}(X) \xrightarrow{\partial_q} \cdots \to C_0(X) \to 0.$$

q^{th} 同调群定义为 $H_q(X) := \operatorname{Ker}(\partial_q)\ \operatorname{Im}(\partial_{q+1})$。 ———

现在我们介绍链复形之间同伦等价和同构的一些基本概念。

两个链复形（$K_\# = \{k_n\}_{n \geq 0}, \partial_n^C$）和（$L_\# = \{L_n\}_{n \geq 0}, \partial_n^L$）之间的链映射 定义为一列 $f_\# = \{f_n\}_{n \geq 0}$ 从 $K_\#$ 到 $L_\#$ 的模同态，使得，

$$f_{n-1} \circ \partial_n = \partial_n \circ f_n \text{ for each } i \geq 0.$$



给定链复形 $K_\#$ 和 $L_\#$之间的两个链映射 $f_\#$ 和$g_\#$ ， $f_\#$ 和$g_\#$ 之间的链同伦 定义为一列模同态， λ_n : $K_n \longrightarrow L_{n+1}, n \geq 0$ ， 使得，

$$\lambda_{n-1} \circ \partial_n^K + \partial_{n+1}^L \circ \lambda_n = f_n - g_n, \text{ for all } n \geq 0.$$

在这种情况下， f_n 和 g_n 被称为链同伦，并记作 $f_n \simeq g_n$。

如果对于链映射 $f_\#$： $K_\# \longrightarrow L_\#$，存在另一个链映射 $g_\#$： $L_\# \longrightarrow K_\#$ ，使得 $f_\# \circ g_\# \simeq id_{L_\#}$ 和 $g_\# \circ f_\# \simeq id_{K_\#}$，则称两个链复形 $K_\#$ 和 $L_\#$ 是同伦等价的。链映射 $f_\#$ 称为同伦等价。如果两个链复形同伦等价，则它们各自的同调群同构。如果存在链映射 $f_\#$ ： $K_\# \longrightarrow L_\#$ 且该映射是一个同构，则称两个链复形 $K_\#$ 和 $L_\#$ 是同构的。如果两个链复形同构，则它们同伦等价。

接下来，我们介绍一些与离散 Morse 理论相关的记号，这些记号将在本文后续章节中使用。

设 X 是一个单纯复形， $\mathcal{V}$ 是 X 上的一个梯度向量场。那么，出现在 $\mathcal{V}$ 中的单形称为正则 单形。我们还回顾一下，在 X 中未出现在 $\mathcal{V}$ 中的单形称为 $\mathcal{V}$-临界单形。 X 中所有 $\mathcal{V}$-临界单形的集合记作 $\mathrm{Crit}^{\mathcal{V}}(X)$。因此，

$$\mathrm{Crit}^{\mathcal{V}}(X) = \bigcup_{q=0}^{\dim(X)} \mathrm{Crit}_q^{\mathcal{V}}(X).$$

其中，$\mathrm{Crit}_q^{\mathcal{V}}(X)$ 表示其中所有 q 维 $\mathcal{V}$-临界单形的集合 X.

接下来，我们回顾一下，扩展 $\mathcal{V}$-轨迹 P 是如下形式的单形序列。

$$\tau_0^{(q)}, \sigma_1^{(q-1)}, \tau_1^{(q)}, \ldots \sigma_k^{(q-1)}, \tau_k^{(q)}, \sigma_{k+1}^{(q-1)},$$

其中，对于所有 $i \in [k]$， $\sigma_i^{(q-1)} \subseteq \tau_{(q)i-1}$， $(\sigma_i^{(q-1)}, \ \tau_{(q)i}) \in \mathcal{V}$；并且对于所有 $i \in [k+1]$， $(\sigma_i^{(q-1)}, \ \tau_{i-1}^{(q)}) \notin \mathcal{V}$。

我们将 P 的终止单形 σ_{k+1} 记作 $t(P)$。

现在，设 P: $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ 是一条（Forman）轨迹。设 $\{i_1, \ldots, i_r\} \subseteq \{0, \ldots, k\}$，使得对于每个 $j \in [r]$，$\{i_1, \ldots, i_r\} = \{i_1, i_1+1, i_1+2, \ldots, i_1+(r-2)\ i_1+(r-1)\}$ 且 $i_j = i_1+(j-1)$。于是我们将 P 的子序列 $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}$ 记为 $\alpha_{i_1} P \alpha_{i_r}$。例如，设 P: $\tau_0, \sigma_1, \tau_1, \ldots, \sigma_k, \tau_k, \sigma_{k+1}$ 是一条轨迹。于是我们将 P 的子序列 $\sigma_2, \tau_2, \sigma_3, \tau_3, \sigma_4$ 记为 $\sigma_1 P \sigma_4$。类似地，对于一条 MV-轨迹 P: $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$，我们将 P 的子序列 $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}$ 记为 $\alpha_{i_1} P \alpha_{i_r}$。

3 主定理的证明

设 X 是一个单纯复形，其子复形为 A 和 B，且满足 $A \cup B = X$。在本节中，我们首先从 X 构造一个新的单纯复形 $\widetilde{X}$，并证明 X 与 $\widetilde{X}$ 的单纯同调同构。接下来，我们利用梯度向量场 $\mathcal{W}_{\bar{A}}$（定义在 A 上）、 $\mathcal{W}_{\bar{B}}$（定义在 B 上）和 $\mathcal{W}_{A \cap B}$（定义在 $A \cap B$ 上）〔其中 $\bar{A}$、 $\bar{B}$ 和 $\overline{A \cap B}$ 分别是 A、 B 和 $A \cap B$ 的不相交副本〕，证明 X 的单纯同调与 $\mathcal{D}_q(X)$ 的同调群同构。由此证明了我们的主要结果。

3.1 新单纯复形的构造 $\widetilde{X}$

设 X 是一个单纯复形，其子复形为 A 和 B，且满足 $A \cup B = X$。令 $V(A) = \{a_0, \ldots, a_n\}$、 $V(B) = \{b_0, \ldots, b_p\}$ 和 $V(A \cap B) = \{c_0, \ldots, c_m\}$，其中不失一般性地，我们假设，对于每个 $i \in \{0, \ldots, m\}$，$c_i = a_i = b_i$。将 A 和 B 分别视为 A 和 B 的副本，正如我们在第 1 节中所定义的那样。令 $(A \cap B)_{\bar{A}}$ 和 $(A \cap B)_{\bar{B}}$ 分别为 $A \cap B$ 在 A 和 B 中的副本。

现在我们构造 P($A \cap B$)，其顶点集为 $V((A\cap B)_{\bar{A}}) \cup V((A\cap B)_{\bar{B}})$，单形集则如第 2 节中所定义，即 P($A \cap B$) 的一个极大单形具有如下形式：$[\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_r}, b_{i_r}, \ldots, b_{i_q}]$, $r = 0$、.....、 k,$i_0 < \cdots < i_q$，其中 $[\bar{c}_{i_0}, \ldots, \bar{c}_{i_q}]$ 是 X 的一个极大单形。

现在我们将新的单纯复形定义为 $X = A \cup$P($A \cap B$)$\cup B$。这里需要注意的是， X 作为单纯复形的并，仍然是一个单纯复形。

这里一个重要的观察是，对于任意单形 $\sigma \in$ P($A \cap B$)，如果 $a_i, b_j \in \sigma$，那么 $i \leq j$。

接下来，我们回顾第 2 节中的内容：对于每个 $\alpha = [\bar{c}_{i_0}, \ldots, \bar{c}_{i_q}] \in A \cap B$，P($A \cap B$)的单形可以分为 $A_\alpha = \{[\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_r}, b_{i_r}, \ldots, b_{i_q}] \mid 0 \leq r \leq q\}$ $B_\alpha = \{[\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_{r-1}}, b_{i_r}, \ldots b_{i_q}] \mid 1 \leq r \leq q\} \cup \{[\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_q}]\} \cup \{[b_{i_0}, \ldots, b_{i_q}]\}$。此外，我们还定义了 $S_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$。

因此，$\bigcup_{\alpha\in A\cap B} S_\alpha =$ P($A \cap B$)。

回顾一下，对于任意单形 $\sigma \in S_\alpha$， α 称为 σ的底单形，记作 GS(σ)。

3.2 在 X上构造梯度向量场

这里我们在 X 上构造一个梯度向量场，使得 X 的 Thom-Smale 链复形与 X的单纯链复形同构。

我们知道 P($A \cap B$) $= \bigcup_{\alpha\in A\cap B} S_\alpha$。对于每个 $\alpha \in A \cap B$，我们在 S_α 上定义一个成对集合。这就给出了 X上的一个离散向量场 $\mathcal{V}$。

配对方案如下。

令 $\alpha = [\bar{c}_{i_0}, \ldots, \bar{c}_{i_q}] \in \overline{A \cap B}$。

(a) 令 $\tau = [\bar{a}_{i_0}, b_{i_0}, \ldots, b_{i_q}] \in A_\alpha$。那么 $([b_{i_0}, \ldots, b_{i_q}], [\bar{a}_{i_0}, b_{i_0}, \ldots, b_{i_q}]) \in \mathcal{V}$.

(b) 令 $\tau = [\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_{r-1}}, \bar{a}_{i_r}, b_{i_r}, \ldots, b_{i_q}] \in A_\alpha$, $0 \leq r \leq q$。

那么，$([\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_{r-1}}, b_{i_r}, \ldots, b_{i_q}], [\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_{r-1}}, \bar{a}_{i_r}, b_{i_r}, \ldots, b_{i_q}]) \in \mathcal{V}$。

因此，每个 $\tau \in A_\alpha$ 都会与来自 B_α的唯一一个单形配对。注意， $|A_\alpha| = q + 1|B_\alpha| = q + 2$。因此，$S_\alpha$ 中剩下的唯一未配对单形是 $[\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_q}]$。

因此，P($A \cap B$)中剩下的唯一未配对单形为：

$$\{[\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_q}] \mid [\bar{c}_{i_0}, \ldots, \bar{c}_{i_q}] \in \overline{A \cap B}\} = (A \cap B)_{\bar{A}},$$

，因此 X 中的未配对单形由 $(X \setminus$ P($A \cap B$)$) \cup (A \cap B)_{\bar{A}}$给出。

注 3.0.1。对于每个 $(\sigma^{(q-1)}, \tau^{(q)}) \in \mathcal{V}$， $\sigma \in B_\alpha$， $\tau \in A_\alpha$。反之，对于任意 $\alpha \in A \cap \overline{B}$， A_α 中的每个元素都与一个低维单形配对，而 B_α 中已配对的每个单形，都与一个高维单形配对。

现在我们需要证明 $\mathcal{V}$ 是一个梯度向量场。

定理 3.1. 离散向量场 $\mathcal{V}$ 是一个梯度向量场。

证明。 假设（如果可能的话）， $\tau_{(q)0}, \sigma_1^{(q-1)}, \tau_{(q)1}, \ldots, \sigma_k^{(q-1)}, \tau_k^{(q)} = \tau_0$是一条闭合的 $\mathcal{V}$-轨迹。

注意到， τ_0 $(= \tau_k)$与一个低维单形配对，因此对于某个 $\alpha \in A \cap B$，它必定属于 A_α。所以，设 $\tau_0 = [\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_r}, b_{i_r}, \ldots, b_{i_q}]$。

现在， σ_1 与一个高维单纯形配对，因此对于某个 $\alpha \in A \cap B$，它属于 B_α。所以， $\overline{\sigma_1}$ 可以是 $[\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_{r-1}}, b_{i_r}, \ldots, b_{i_q}]$或 $\sigma_1 = [\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_r}, b_{i_{r+1}}, \ldots, b_{i_q}]$。注意到前一个单形与 τ_0配对，这是不可能的。

因此，根据 $\mathcal{V}$的构造$\bar{a}_{i_r}$， $\bar{b}_{i_{r+1}}, \tau_1 = [\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_r}, \bar{a}_{i_{r+1}}, b_{i_{r+1}}, \ldots, b_{i_q}]$。再者， σ_2与一个高维单纯形配对是

在 B_α 中，对某个 $\alpha \in A \cap B$。由于 $\sigma_2 \neq \sigma_1$，因此 $\sigma_2 = [\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_{r+1}}, b_{i_{r+2}}, \ldots, b_{i_q}]$，这使得 $\tau_2 = [\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_{r+1}}, \bar{a}_{i_{r+2}}, b_{i_{r+2}}, \ldots, b_{i_q}]$。于是，在每个低维单形$\sigma_j$处，当我们将其与下一个高维单纯形$\tau_j$配对时，我们从$\tau_{j-1}$ 中移除一个顶点b_i ，并添加一个新顶点 $\bar{a}_{i+1}$。我们观察到，在每个低维单形处被移除的顶点不会在轨迹随后的单形中再次出现。因此，在轨迹中出现过一次的单形不能再次出现。所以， $\tau_k \neq \tau_0$。

因此，这样的闭合 $\mathcal{V}$-轨迹是不可能的。

□

所以， $\mathcal{V}$-临界单形恰好是 $(X \setminus P(A \cap B)) \cup (A \cap B)_{\bar{A}} = A \cup (B \setminus (A \cap B)_{\bar{B}})$。

X 的单纯链复形与相对于 $\mathcal{V}$ 的 X 的 Thom-Smale 链复形同构，我们将在下一小节中证明这一点。

注 3.1.1. </style}显然， X 和 X 同伦等价，因此对于每个$q \geq 0$， $H_q(X) \cong H_q(X)$。不过，这里我们选择使用定理 1.1 给出同一结论的组合论证，以此为证明的第二步预热；第二步稍微复杂一些，但采用了有些相似的思路。

3.3 关于 X 的单纯链复形与相对于 $\mathcal{V}$ 的 X 的 Thom-Smale 复形 之间的同构

定理 3.2. 以下同构成立。

$$(C_\#(X), \partial_\#) \cong (C^{\mathcal{V}}_\#(\widetilde{X}, \mathbb{Z}), \partial^{\mathcal{V}}_\#).$$

因此， $H_\#(X) \cong H^{\mathcal{V}}_\#(\widetilde{X}, \mathbb{Z})$。

证明。 首先，我们需要找到一个链映射 $g_\#$： $C^{\mathcal{V}}_\#(\widetilde{X}, \mathbb{Z}) \to C_\#(X)$，使得 $g_\#$ 是一个同构，并且下图可交换。

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & C_{q+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & C_q(X) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \uparrow{\scriptstyle g_{q+1}} & \circlearrowleft & \uparrow{\scriptstyle g_q} & & \\
\cdots & \longrightarrow & C^{\mathcal{V}}_{q+1}(\widetilde{X}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow[\partial^{\mathcal{V}}_{q+1}]{} & C^{\mathcal{V}}_q(\widetilde{X}, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

对于 $0 \leq q \leq \dim(X)$，只需在生成元上定义 g_q。设 $\alpha \in$ 临界点$^{\mathcal{V}}_q(\widetilde{X})$。那么，对于某个 $\alpha \in A$，有 $\alpha = \sigma_{\bar{A}}$；或者，对于某个 $\sigma \in B \setminus A$，有 $\alpha = \sigma_{\bar{B}}$。在这两种情况下，我们都定义 $g_q(\alpha) = \sigma$。

对于 $0 \leq q \leq \dim(X)$，我们定义 $f_q \colon C_q(X) \to C^{\mathcal{V}}_q(\widetilde{X}, \mathbb{Z})$。只需在生成元上定义 f_q。令 $\sigma \in S_q(X)$。于是我们定义：

$$f_q(\sigma) = \begin{cases} \sigma_{\bar{A}} & \text{if } \sigma \in S_q(X) \cap A, \text{ and} \\ \sigma_{\bar{B}} & \text{if } \sigma \in S_q(X) \setminus A. \end{cases}$$

现在，我们证明这些映射是同构。只需证明 $f_q \circ g_q = \mathrm{id}$ 和 $g_q \circ f_q = \mathrm{id}$ 在生成元集合上的作用，其中 id 表示恒等映射。

现在，令 $\sigma_{\bar{A}} \in A$，其中 $\sigma \in A$。于是 $f_q \circ g_q(\sigma_{\bar{A}}) = f_q(\sigma) = \sigma_{\bar{A}}$，因为 $\sigma \in A$。令 $\sigma_{\bar{B}} \in B \setminus (A \cap B)_{\bar{B}}$，其中 $\sigma \in B \setminus A$。于是， $f_q \circ g_q(\sigma_{\bar{B}}) = f_q(\sigma) = \sigma_{\bar{B}}$，因为 $\sigma \in B \setminus A$。现在，令 $\sigma \in S_q(X) \cap A$。于是$g_q \circ f_q(\sigma) = g_q(\sigma_{\bar{A}}) = \sigma$。令 $\sigma \in S_q(X) \setminus A$。于是， $g_q \circ f_q(\sigma) = g_q(\sigma_{\bar{B}}) = \sigma$。

因此，我们得到了 $C_{\#}(X)$ 与 $C_{\#}^{\mathcal{V}}(\widetilde{X},\mathbb{Z})$ 之间的一个同构。接下来需要证明这确实是一个链映射，也就是说，$\partial_{q+1}\circ g_{q+1}=g_q\circ\partial_{q+1}^{\mathcal{V}}$。只需证明该结论对生成元集合中的元素成立。

情形 I： 令 $\tau_A\in$ 临界点$_{q+1}^{\mathcal{V}}(\widetilde{X})\cap\bar{A}$。照例，此处 $\tau_{\bar{A}}$ 表示 $\tau\in A$ 在 $\bar{A}$中的副本。于是，

$$\partial_{q+1}(g_{q+1}(\tau_{\bar{A}}))=\partial_{q+1}(\tau)=\sum_{\sigma\in S_q(X)}\langle\tau,\sigma\rangle\sigma.$$

然而，

$$\partial_{q+1}^{\mathcal{V}}(\tau_{\bar{A}})=\sum_{\sigma\in\mathrm{Crit}_q^{\mathcal{V}}(\widetilde{X})}\left(\sum_{P\in\Gamma(\tau_{\bar{A}},\sigma)}w(P)\right)\sigma.$$

显然，$\tau_{\bar{A}}$ 的任何面都属于 $\bar{A}$，因而是临界的。因此，对于每个 $\sigma\in$ 临界点$_{q-1}^{\mathcal{V}}(\widetilde{X})$，只有当 σ 是 $\tau_{\bar{A}}$的一个面时，项$\sum_{P\in\Gamma(\tau_{\bar{A}},\,\sigma)}w(P)\sigma$才不会消失。我们可以将 σ写作 $\alpha_{\bar{A}}$，其中 $\alpha\in A$。由于 $\tau_{\bar{A}}$的每个面都是临界的，因此，从 $\tau_{\bar{A}}$ 到 $\alpha_{\bar{A}}$的唯一轨迹是平凡轨迹P：$\tau_{\bar{A}},\ \alpha_{\bar{A}}$。因此，$w(P)=\langle\tau_{\bar{A}},\ \alpha_{\bar{A}}\rangle=\langle\tau,\ \alpha\rangle$。所以，

$$\begin{aligned}
\partial_{q+1}^{\mathcal{V}}(\tau_{\bar{A}})&=\sum_{\alpha_{\bar{A}}\in\mathrm{Crit}_q^{\mathcal{V}}(\widetilde{X})}\langle\tau_{\bar{A}},\alpha_{\bar{A}}\rangle\alpha_{\bar{A}}\\
\implies g_q(\partial_{q+1}^{\mathcal{V}}(\tau_{\bar{A}}))&=\sum_{\alpha_{\bar{A}}\in\mathrm{Crit}_q^{\mathcal{V}}(\widetilde{X})}\langle\tau_{\bar{A}},\alpha_{\bar{A}}\rangle g_q(\alpha_{\bar{A}})\\
&=\sum_{\alpha\in S_q(X)}\langle\tau,\alpha\rangle\alpha\qquad\text{(since, } g_q\text{ is an isomorphism.)}\\
&=\partial_{q+1}(g_{q+1}(\tau_{\bar{A}})).
\end{aligned}$$

情形 II： 设 $\tau_{\bar{B}}\in$ 临界点$_{q+1}^{\mathcal{V}}(\widetilde{X})\cap(\bar{B}\setminus(A\cap B)_{\bar{B}})$。同样，$\tau_{\bar{B}}\in\bar{B}$表示 $\bar{B}$中的 $\tau\in B$副本。现在，

$$\partial_{q+1}^{\mathcal{V}}(\tau_{\bar{B}})=\sum_{\sigma\in\mathrm{Crit}_q^{\mathcal{V}}(\widetilde{X})}\left(\sum_{P\in\Gamma(\tau_{\bar{B}},\sigma)}w(P)\right)\sigma.$$

现在我们证明，从 $\tau_{\bar{B}}$出发并终止于某个 $\sigma\in$ 临界点$_q^{\mathcal{V}}(\widetilde{X})$的轨迹，根据 $\tau_{\bar{B}}$的面，只有以下两种类型。注意，$\tau_{\bar{B}}$的任意面都必须属于 $\bar{B}$。

类型 I：P：$\tau_{\bar{B}},\sigma_{\bar{B}},\ldots,t(P)$，其中 $\sigma_{\bar{B}}\in(A\cap B)_{\bar{B}}$，且终止单形 $t(P)\in$临界点$_q^{\mathcal{V}}(\widetilde{X})$。此外，我们证明，对于$\sigma_{\bar{B}}\in(A\cap B)_{\bar{B}}$，任何上述形式的轨迹 P，即 P：$\tau_{\bar{B}},\sigma_{\bar{B}},\ldots,t(P)$，其中 $t(P)\in$临界点$_q^{\mathcal{V}}(\widetilde{X})$，都是唯一的，并且 $t(P)=\sigma_{\bar{A}}\in(A\cap B)_{\bar{A}}$。我们进一步证明，这条轨迹 P的权重为 $w(P)=\langle\tau_{\bar{B}},\sigma_{\bar{B}}\rangle=\langle\tau,\sigma\rangle$。我们先尝试找出所有此类轨迹。令$P$：$(\tau_{\bar{B}}=)\ \tau_{(q+1)}\,0\,,(\sigma_{\bar{B}}=)\ \sigma_1^{(q)},\tau_1^{(q+1)}\ldots\sigma_k^{(q)},\tau_k^{(q+1)},\sigma_{k+1}^{(q)}(=t(P))$。

令 $\sigma_{\bar{B}}=[b_{i_0},\ldots,b_{i_q}]$。根据我们对 $\mathcal{V}$ 的构造，$\tau_1=[\bar{a}_{i_0},b_{i_0},\ldots,b_{i_q}]$。我们注意到，$\tau_1$ 的所有面都不可能是临界点，因此，为了让轨迹继续，σ_2 必须与一个高维单纯形配对。因此，$\sigma_2\in B_\alpha$ 对某个$\alpha\in A\cap B$ 成立。由于 $\sigma_1\neq\sigma_2$，因此，$\sigma_2=[\bar{a}_{i_0},b_{i_1},\ldots,b_{i_q}]$，这使得 $\tau_2=[\bar{a}_{i_0},\bar{a}_{i_1},b_{i_1},\ldots,b_{i_q}]$。我们沿用相同的论证继续这条轨迹。因此，我们有 $\sigma_j=[\bar{a}_{i_0},\ldots,\bar{a}_{i_{j-2}},b_{i_{j-1}},\ldots,b_{i_q}]$，$\tau_j=[\bar{a}_{i_0},\ldots,\bar{a}_{i_{j-2}},\bar{a}_{i_{j-1}},b_{i_{j-1}},\ldots,b_{i_q}]$，$\sigma_{j+1}=$

$[\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_{j-1}}, b_{i_j}, \ldots, b_{i_q}]$。我们继续，直到到达 $\tau_{q+1} = [\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_q}, b_{i_q}]$。这里需要注意的是，$\tau_{q+1}$ 中除与高维单纯形配对的 σ_{q+1} 之外，不存在其他面。因此，轨迹必须在 $\sigma_{q+2} = [\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_q}] = \sigma_{\bar{A}}$ 处结束，而它是临界点。在继续轨迹的过程中，我们确保每一步的下一个单形都没有其他可能的选择，因此 P 是唯一的。此外，P 的权重为，

$$w(P) = \langle \tau_{\bar{B}}, \sigma_{\bar{B}} \rangle \prod_{j=1}^{q} (-\langle \tau_j, \sigma_j \rangle \langle \tau_j, \sigma_{j+1} \rangle) = \langle \tau_{\bar{B}}, \sigma_{\bar{B}} \rangle \prod_{j=1}^{q} (-(-1)^{j-1}(-1)^j) = \langle \tau_{\bar{B}}, \sigma_{\bar{B}} \rangle = \langle \tau, \sigma \rangle$$

.

类型 *II*：P：$\tau_{\bar{B}}, \sigma_{\bar{B}},$ 其中 $\sigma_{\bar{B}}$ 是 $\tau_{\bar{B}}$ 的一个面，且满足 $\sigma_{\bar{B}} \in B \setminus (A \cap B)_{\bar{B}}$，因此是临界的。

这里注意，如果 $\sigma_{\bar{B}}$ 是 $\tau_{\bar{B}}$ 的一个面，且满足 $\sigma_{\bar{B}} \in B \setminus (A \cap B)_{\bar{B}}$，那么从 $\tau_{\bar{B}}$ 到 $\sigma_{\bar{B}}$ 的唯一可能轨迹就是上述形式。这是因为，如果存在任何其他这样的轨迹P'，那么 P' 必定会经过 $\tau_{\bar{B}}$ 的一个正则面（回顾第 2 节，我们将曾出现在 $\mathcal{V}$ 中的单形称为正则单形），而该面必定属于 $(A \cap B)_{\bar{B}}$。于是，P' 必定是一个类型 I 的轨迹；因此，正如我们在类型 I 的情形中所证明的，终止单形不可能属于 B。所以，$w(P) = \langle \tau_{\bar{B}}, \sigma_{\bar{B}} \rangle = \langle \tau, \sigma \rangle$。

我们现在可以写出，

$$\begin{aligned}
\partial^{\mathcal{V}}_{q+1}(\tau_{\bar{B}}) &= \sum_{\sigma^{(q)}_{\bar{A}} \in (A \cap B)_{\bar{A}}} \langle \tau, \sigma \rangle \sigma_{\bar{A}} + \sum_{\sigma^{(q)}_{\bar{B}} \in (\overline{B} \setminus (A \cap B)_{\bar{B}})} \langle \tau, \sigma \rangle \sigma_{\bar{B}} \\
\implies g_q(\partial^{\mathcal{V}}_{q+1}(\tau_{\bar{B}})) &= \sum_{\sigma^{(q)}_{\bar{A}} \in (A \cap B)_{\bar{A}}} \langle \tau, \sigma \rangle g_q(\sigma_{\bar{A}}) + \sum_{\sigma^{(q)}_{\bar{B}} \in (\overline{B} \setminus (A \cap B)_{\bar{B}})} \langle \tau, \sigma \rangle g_q(\sigma_{\bar{B}}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_q(X) \cap (A \cap B)} \langle \tau, \sigma \rangle \sigma + \sum_{\sigma \in S_q(X) \setminus A} \langle \tau, \sigma \rangle \sigma, \ (\text{ since, } g_q \text{ is an isomorphism}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_q(B)} \langle \tau, \sigma \rangle \sigma \\
&= \partial_{q+1}(g_{q+1}(\tau_{\bar{B}})).
\end{aligned}$$

至此完成了定理 3.2 的证明。 □

因此，我们成功地得到了如下结果。

定理 3.3. *X 的单纯同调与 X的单纯同调同构，即$H_\#(X) \cong H_\#(X, \mathbb{Z})$。*

证明。 该结果由定理 3.2 和定理 1.1 得出。 □

在以下各小节中，我们使用梯度向量场 $\mathcal{W}_{\bar{A}}$ $\mathcal{W}_{\bar{B}}$ $\mathcal{W}_{A \cap B}$ A B $A \cap B$，以及分别在、和上的梯度向量场，来构造 X上的一个新的梯度向量场 $\mathcal{W}$。我们证明，X 关于 $\mathcal{W}$ 的 Thom-Smale 复形与我们在第 1 节中构造的 $\mathcal{D}_\#(X)$同构。该结果与定理 3.3 一起证明了我们的主定理。

3.4 构造 梯度向量场 $\mathcal{W}$ 在 X 上的构造，使用 $\mathcal{W}_{\bar{A}}$、 $\mathcal{W}_{\bar{B}}$ 和 $\mathcal{W}_{A \cap B}$

现在，我们使用 $\mathcal{W}_{\bar{A}}$、 $\mathcal{W}_{\bar{B}}$ 和$\mathcal{W}_{A \cap B}$在 X 上构造一个新的离散向量场 $\mathcal{W}$。

在进入构造之前，我们先简要回顾一下 S_α，这是我们在第 2 节中引入的。对于任意 $\alpha = [\bar{c}_{i_0}, \ldots, \bar{c}_{i_q}] \in A \cap B$，我们定义了 $A_\alpha = \{[\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_r}, b_{i_r}, \ldots, b_{i_q}] \mid 0 \leq r \leq q\}$,

$B_\alpha = \{[\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_{r-1}}, b_{i_r}, \ldots, b_{i_q}] \mid 1 \le r \le q\}$ 以及 $S_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$。因此我们观察到，$\overline{\mathrm{P}(A \cap B)} = \bigcup_{\alpha \in \overline{A \cap B}} S_\alpha$，其中 S_α 两两不相交。

我们将 $\mathrm{P}(A \cap B)$ 的内部单形 的集合，即 $\mathrm{P}(A \cap B) \setminus ((\overline{A \cap B})_{\bar{A}} \cup (\overline{A \cap B})_{\bar{B}})$，记为 $\mathrm{P}_{int}(A \cap B)$。

观察1. 接下来，我们列出一些直接由$_\sim X$的构造得出的简单观察。

(a) 设 $\sigma^{(q-1)} \subseteq \tau^{(q)}$ 使得 $\tau \in \mathrm{P}_{int}(A \cap B)$，$\overline{\sigma} \in \bar{A}$（或 $\sigma \in \bar{B}$），则 $\sigma \in (A \cap B)_{\bar{A}}$（或 $\sigma \in (A \cap B)_{\bar{B}}$）且基单纯形$(\sigma)$ =基单纯形(τ)。反之，若 $\sigma^{(q-1)} \subseteq \tau_{(q)}$，使得 $\sigma \in (A \cap B)_{\bar{A}}$（或 $\sigma \in (A \cap B)_{\bar{B}}$），$\tau \in \mathrm{P}(A \cap B)$ 且基单纯形(σ) =基单纯形(τ)，则 $\tau \in \mathrm{P}_{int}(A \cap B)$。(b) 设 $\sigma \in (A \cap B)_{\bar{A}}$（或 $(A \cap B)_{\bar{B}}$），使得 $\sigma = \alpha_{\bar{A}}$（或 $\alpha_{\bar{B}}$）对某个 $\alpha \in A$（或 B）。则基单纯形$(\sigma) = \alpha_{A \cap B}$。(c) 设 $\sigma^{(q-1)} \subseteq \tau_{(q)}$，其中 $\tau \in A_\beta$对某个 $\beta \in A \cap B$。则基单纯形(τ) =基单纯形(σ)，当且仅当 $\sigma \in B_\beta$。此外，基单纯形$(\sigma) \neq$ 基单纯形(τ)当且仅当 $\sigma \in A_\alpha$ 对某个 $\alpha \in A \cap B$。(d) 设 $\sigma^{(q-1)} \subseteq \tau^{(q)}$使得基单纯形$(\sigma) \neq$基单纯形$(\tau) = \beta$且 $\tau \in A_\beta$。则 (基单纯形$(\sigma))^{(q-2)} \subseteq$(基单纯形$(\tau))_{(q-1)}$。

对于每个 $\alpha \in \overline{A \cap B}$，我们将 S_α 中 $\mathrm{P}(A \cap B)$ 的内部单形集合，即 $S_\alpha \cap \mathrm{P}_{int}(A \cap B)$，记作 S'_α；将 B_α 中 $\mathrm{P}(A \cap B)$ 的内部单形集合，即 $B_\alpha \cap \mathrm{P}_{int}(A \cap B)$，记作$B'_\alpha$。

$\mathcal{W}$ 的构造如下。A 和 B 中的单形分别使用 $\mathcal{W}_{\bar{A}}$ 和 $\mathcal{W}_{\bar{B}}$ 配对。接着，对于 $\mathcal{W}_{A \cap B}$ 中的每一对，我们在 $\mathrm{P}_{int}(A \cap B)$ 上定义一个成对集合，并将其记作 $\mathcal{W}'$。X 上的离散向量场 $\mathcal{W}$ 定义为 $\mathcal{W}_{\bar{A}} \cup \mathcal{W}_{\bar{B}} \cup \mathcal{W}'$。现在我们定义 $\mathcal{W}'$。

假设 $(\alpha^{(q-1)}, \beta^{(q)}) \in \mathcal{W}_{A \cap B}$。令 $\beta = [\bar{c}_{i_0}, \ldots, \bar{c}_{i_q}]$ 和 $\alpha = [\bar{c}_{i_0}, \ldots, \widehat{\bar{c}_{i_j}}, \ldots \bar{c}_{i_q}], j \in \{0, \ldots, q\}$。

情形 I: 令 $j = 0$。

1. $([\bar{a}_{i_1}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_q}]\ [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_q}] \in \mathcal{W}'$ $[\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_q}] \in S'_\beta\ [\bar{a}_{i_1}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_q}] \in S'_\alpha$)，其中，。

2.（匹配 S'_β 中的单形）

(a) $([\bar{a}_{i_0}, \bar{b}_{i_1}, \ldots, \bar{b}_{i_q}], [\bar{a}_{i_0}, \bar{b}_{i_0}, \bar{b}_{i_1}, \ldots, \bar{b}_{i_q}]) \in \mathcal{W}'$.

(b) $([\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_r}, \bar{b}_{i_{r+1}}, \ldots \bar{b}_{i_q}], [\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_r}, \bar{a}_{i_{r+1}}, \bar{b}_{i_{r+1}}, \ldots \bar{b}_{i_q}]) \in \mathcal{W}'$ for $1 \le r \le (q-1)$.

3.（匹配 S'_α 中的单形）$([\bar{a}_{i_1}, \ldots, \bar{a}_{i_r}, b_{i_{r+1}}, \ldots, b_{i_q}]$, $[\bar{a}_{i_1}, \ldots, \bar{a}_{i_r}, \bar{a}_{i_{r+1}}, b_{i_{r+1}}, \ldots, b_{i_q}]) \in \mathcal{W}'$，对于 $1 \le r \le (q-1)$。

情形 II: 令 $j > 0$。

1. $([\bar{a}_{i_0}, b_{i_0}, \ldots b_{i_j}, \ldots b_{i_q}], [\bar{a}_{i_0}, b_{i_0}, \ldots, b_{i_q}]) \in \mathcal{W}'$，其中 $[\bar{a}_{i_0}, b_{i_0}, \ldots b_{i_j}, \ldots b_{i_q}] \in S'_\alpha$, $[\bar{a}_{i_0}, b_{i_0}, \ldots, b_{i_q}] \in S'_\beta$。

2.（匹配 S'_β中的单形）$([\bar{a}_{i_0}$,3.（匹配 S'_α中的单形）我们将 α 重新标记为 $[\bar{c}_{l_0}, \bar{c}_{l_1}, \ldots, \bar{c}_{l_{q-1}}]$，其中，$\{l_0, \ldots, l_{q-1}\} = \{i_0, \ldots, i_q\} \setminus \{i_j\}$, $l_0 < l_1 \ldots < l_{q-1}$.

$, b_{i_{r+1}}, \ldots b_{i_q}], [\bar{a}_{i_0}, \ldots \bar{a}_{i_r}, \bar{a}_{i_{r+1}}, b_{i_{r+1}}, \ldots b_{i_q}]) \in \mathcal{W}'$, for $0 \le r \le (q-1)$.（

$[\bar{a}_{l_0}, \ldots, \bar{a}_{l_r}, b_{l_{r+1}}, \ldots b_{l_{q-1}}], [\bar{a}_{l_0}, \ldots, \bar{a}_{l_r}, \bar{a}_{l_{r+1}}, b_{l_{r+1}}, \ldots b_{l_{q-1}}]) \in \mathcal{W}'$对于 $0 \le r \le (q-2)$。

因此，我们看到，如果 $(\alpha^{(q-1)}, \beta^{(q)}) \in \mathcal{W}_{A\cap B}$，那么 $S'_\alpha \cup S'_\beta$ 中的所有单形都已配对。接下来，对于每个 $\gamma \in \mathrm{Crit}^{\mathcal{W}_{A\cap B}}(A\cap B)$，我们将 S'_γ 中的单形配对。

令 $\gamma = [\bar{c}_{i_0}, \bar{c}_{i_1}, \ldots, \bar{c}_{i_q}] \in$ 临界点$_q^{\mathcal{W}_{A\cap B}}(A\cap B)$。那么，

$$([\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_{r-1}}, \bar{b}_{i_r}, \ldots \bar{b}_{i_q}], [\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_{r-1}}, \bar{a}_{i_r}, \bar{b}_{i_r}, \ldots \bar{b}_{i_q}]) \in \mathcal{W}', \text{ for } 1 \le r \le q.$$

因此，相对于

$A_\gamma \mid \gamma \in \quad \mathcal{W}_{A\cap B} \quad A\cap B \ \}$ $\mathcal{W}'$ $\mathcal{W}'$ $\{\sigma = [\bar{a}_{i_0}, b_{i_0}, \ldots b_{i_q}] \in$，唯一未配对的单形是临界点 ( )。这就完成了 的构造。 的良定义性源于 S'_α-s 两两不相交这一事实。

观察2。 现在我们列出一些后续将用到的重要观察。这些观察可直接由 $\mathcal{W}$ 的构造得出。

(a) 设 $(\sigma^{(q-1)}, \tau^{(q)}) \in \mathcal{W}'$，那么，

(i) 如果 $\mathrm{GS}(\sigma) = \mathrm{GS}(\tau) = \alpha$，那么 $\sigma \in B_\alpha$, $\tau \in A_\alpha$。反过来，如果对某个 $\alpha \in A\cap B$，有 $\sigma \in B_\alpha$，那么 $\mathrm{GS}(\sigma) = \mathrm{GS}(\tau)$，且 $\tau \in A_\alpha$。在这种情况下，(σ, τ) 要么形如 $([\bar{a}_{i_0}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_q}], [\bar{a}_{i_0}, b_{i_0}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_q}])$，要么形如 $([\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_r}, b_{i_{r+1}}, \ldots, b_{i_q}], [\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_r}, \bar{a}_{i_{r+1}}, b_{i_{r+1}}, \ldots, b_{i_q}])$，$0 \le r \le (q-1)$。

(ii) 若 $\alpha =$ 基单纯形$(\sigma) \ne$ 基单纯形$(\tau) = \beta$，则 $\sigma \in A_\alpha, \tau \in A_\beta$。此外，$\sigma$ 具有 $[\bar{a}_{i_0}, b_{i_0}, \ldots, b_{i_{q-2}}]$ 的形式。反之，若对于某个 $\alpha \in A\cap B$，$\sigma \in A_\alpha$，则基单纯形$(\sigma) \ne$ 基单纯形(τ)，且 $\tau \in A_\beta$，其中 $\beta =$ 基单纯形(τ)。在这种情况下，τ 具有 $[\bar{a}_{i_0}, b_{i_0}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$ 或 $[\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$ 的形式。

(b) 设 $(\sigma^{(q-1)}, \tau^{(q)}) \in \mathcal{W}'$，满足基单纯形$(\sigma) \ne$ 基单纯形(τ)。则 (基单纯形(σ), 基单纯形(τ)) $\in \mathcal{W}_{A\cap B}$。反之，若 $(\alpha, \beta) \in \mathcal{W}_{A\cap B}$，则存在唯一的一对 $(\sigma^{(q-1)}, \tau^{(q)}) \in \mathcal{W}'$，使得基单纯形$(\sigma) = \alpha$，基单纯形$(\tau) = \beta$。

(c) 对于每个 $\gamma \in$ 临界点$^{\mathcal{W}_{A\cap B}}(A\cap B)$，在 S'_γ 中存在唯一一个单形 σ，它相对于 $\mathcal{W}$ 是未配对的。此外，$\sigma \in A_\gamma$。反过来，如果 $\sigma \in \mathrm{P}_{int}(A\cap B)$ 且相对于 $\mathcal{W}$ 是未配对的，那么 $\mathrm{GS}(\sigma) \in$ 临界点$^{\mathcal{W}_{A\cap B}}(A\cap B)$。

命题 3.1. （$\mathcal{W}$-轨迹的类型）设 P: $\tau_{(q)0}, \sigma_1^{(q-1)}, \tau_1^{(q)}, \ldots, \sigma_k^{(q-1)}, \tau_k^{(q)}, \sigma_{k+1}^{(q-1)}$ 是一条 $\mathcal{W}$-轨迹。那么 P 必定属于以下四种形式之一。

1. $\tau_0 \in A$。在此情形下，对于每个 $i \in [k]$ 和 $\sigma_{k+1} \in A$，$(\sigma_i, \tau_i) \in \mathcal{W}_{\bar{A}}$。
2. $\tau_0 \in B$。在此情形下，对于每个 $i \in [k]$ 和 $\sigma_{k+1} \in B$，$(\sigma_i, \tau_i) \in \mathcal{W}_{\bar{B}}$。
3. $\tau_0 \in \mathbb{P}_{int}(A\cap B)$，以及 $(\sigma_i, \tau_i) \in \mathcal{W}'$ 对每个 $i \in [k]$，$\sigma_{k+1} \in \mathbb{P}_{int}(A\cap B)$。
4. $\tau_0 \in \mathbb{P}_{int}(A\cap B)$ 使得存在 $1 \le r \le (k+1)$，满足 $\sigma_i \in A$ 对所有 $r \le i \le (k+1)$ 以及 $\tau_i \in \mathbb{P}_{int}(A\cap B)$ 对所有 $0 \le i \le r-1$。
5. $\tau_0 \in \mathbb{P}_{int}(A\cap B)$ 使得存在 $1 \le r \le (k+1)$，满足 $\sigma_i \in B$ 对所有 $r \le i \le (k+1)$ 以及 $\tau_i \in \mathbb{P}_{int}(A\cap B)$ 对所有 $0 \le i \le r-1$。

证明。令 $\tau_0 \in A$。在此情形下，τ_0 的每个面都属于 A。因此，$(\sigma_1, \tau_1) \in \mathcal{W}_{\bar{A}}$。按照相同的论证，可以观察到，对于每个 $i \in [k]$，$(\sigma_i, \tau_i) \in \mathcal{W}_{\bar{A}}$，并且 $\sigma_{k+1} \in A$。若 $\tau_0 \in B$，类似的论证也成立。

设 $\tau_0 \in \mathrm{P}_{int}(A\cap B)$。若对每个 $i \in [k]$ 都有 $(\sigma_i, \tau_i) \in \mathcal{W}'$，且 $\sigma_{k+1} \in \mathrm{P}_{int}(A\cap B)$，则 P 属于第三类轨迹。否则，存在 $j_0 \in [k]$，使得 $\sigma_{j_0} \in A$ 或 B，并且对所有 $i < j_0$，$\tau_i \in \mathrm{P}_{int}(A\cap B)$。若 $j_0 = k+1$，则结论成立。若 $j_0 < k+1$ 且 $\sigma_{j_0} \in A$，那么按照第一类轨迹的相同论证，我们可以观察到，对所有 $j_0 \le j \le k$，$(\sigma_j, \tau_j) \in \mathcal{W}_{\bar{A}}$，且 $\sigma_{k+1} \in A$。类似地，若 $j_0 < k+1$ 且 $\sigma_{j_0} \in B$，那么对所有 $j_0 \le j \le k$，$(\sigma_j, \tau_j) \in \mathcal{W}_{\bar{B}}$，且 $\sigma_{k+1} \in B$。这分别正是第四类和第五类轨迹。

□

此后，我们分别将这五类轨迹称为第一、第二、第三、第四和第五类轨迹。

命题3.2. 在 X 上的离散向量场 $\mathcal{W}$ 是无环的。换言之， $\mathcal{W}$ 是一个梯度向量场。

证明. 设若可能， P: $\tau_{(q)0}, \sigma_1^{(q-1)}, \tau_1^{(q)}, \ldots, \sigma_k^{(q-1)}, \tau_k^{(q)} (= \tau_{(q)0})$是 $\widetilde{X}$中的一条闭 $\mathcal{W}$-轨迹。不失一般性，我们可以假设 $\sigma_i \neq \sigma_j$ 对每个 $i \neq j$， $i, j \in [k]$ 且 $\tau_i \neq \tau_j$，对每个$i \neq j$， $\{i, j\} \neq \{0, k\}$。

由命题 3.1 可知，对所有 $i \in [k]$， $(\sigma_i, \tau_i) \in \mathcal{W}'$。

假设 P中每个单形的底单形保持相同，即对所有$i \in [k]$，基单纯形(σ_i) = 基单纯形(τ_i) = β。

由观察 2(a)可知，对于某个 $\beta \in A \cap B$， $\tau_0 \in A_\beta$。由观察 1(c)可知， $\sigma_1 \in B_\beta$，即 σ_1 具有 $[\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_r}, b_{i_{r+1}}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$, $0 \leq r \leq (q-2)$ 这种形式。由观察 2(a)可知，若 $r > 0$，则 $\tau_1 = [\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_r}, \bar{a}_{i_{r+1}}, b_{i_{r+1}}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。若 $r = 0$，则 τ_1要么是 $[\bar{a}_{i_0}, b_{i_0}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$，要么是$[\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。在第一种情况下，我们利用观察 1(c)推得 $\sigma_2 = [\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_{r+1}}, b_{i_{r+2}}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。这里我们注意到 $(r+1) \geq 1$。因此，由观察 2(a)可得， $\tau_2 = [\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_{r+1}}, \bar{a}_{i_{r+2}}, b_{i_{r+2}}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。我们以此类推。这样，每一步中，我们都会从一个高维单纯形 τ_i 中删去一个顶点 b_{i_j}，并将一个新的顶点 $\bar{a}_{i_{j+1}}$ （此前未曾出现过）加入到低一维单纯形 σ_{i+1}中。现在，对于 $r = 0$，若 $\tau_1 = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$，则沿用前一情形中的相同论证，并证明这是不可能的。因此，设 $\tau_1 = [\bar{a}_{i_0}, b_{i_0}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。这里我们注意到，在 $\mathrm{P}_{int}(A \cap B)$ 中，不存在一个与 σ_1不同、且底单形与 τ_1相同的 τ_1 的面。因此，轨迹无法继续。由此， P中不可能有任何单形重复出现。所以， P 不可能是闭合的。

因此，存在 τ_i 或 σ_i，其底单形不同于其前面各单形的底单形，即，

$$\mathrm{GS}(\tau_0) = \mathrm{GS}(\sigma_1) = \cdots = \mathrm{GS}(\tau_{i-1}) = \mathrm{GS}(\sigma_i) \neq \mathrm{GS}(\tau_i),$$

or

$$\mathrm{GS}(\tau_0) = \mathrm{GS}(\sigma_1) = \cdots = \mathrm{GS}(\tau_{i-1}) \neq \mathrm{GS}(\sigma_i).$$

在第一种情况下，由观察 2(a)可得，对于某个 $\alpha \in A \cap B$，有 $\tau_{i_1 - 1} \in A_\alpha$；由观察 1(c)，我们知道 $\sigma_{i_1} \in B_\alpha$。我们再次运用观察 2(a)，推得 GS($\tau_{i_1}$) =GS($\sigma_{i_1}$)，这就产生了矛盾。

在第二种情况下，底单形首次在一个低维单形σ_i处发生变化。我们将其重命名为 σ_{j_1}。在此之前，底单形保持不变，直到$\tau_{j_1 - 1}$。因此，由观察 2(a)，对于某个 $\alpha \in A \cap B$，有 $\tau_{j_1 - 1} \in A_\alpha$。接着，由观察 1(c)，我们推得对于某个$\beta \in A \cap B$，有 $\sigma_{j_1} \in A_\beta$；再由观察 2(a)，可得 GS(σ_{j_1}) $\neq$ GS(τ_{j_1})。如果底单形在 P处再次发生变化，我们就沿用之前的论证，证明底单形接下来会在一个更低维的单形σ_{j_2}处发生变化，并且 GS(σ_{j_2}) $\neq$ GS(τ_{j_2})。我们以此类推。设j_m 是 $[k]$中的最大值，使得底单形在τ_{j_m}处发生变化，即 GS(σ_{j_m}) $\neq$ GS(τ_{j_m}) =GS(σ_{j_m+1}) $= \cdots =$ GS(τ_k) = GS(τ_0)。那么，对应于 P，我们得到 $A \cap B$ 中的一个单形序列，如下所示。

$$\mathrm{GS}(\tau_0), \mathrm{GS}(\sigma_{j_1}), \mathrm{GS}(\tau_{j_1}), \ldots, \mathrm{GS}(\sigma_{j_m}), \mathrm{GS}(\tau_{j_m}) \ (= \mathrm{GS}(\tau_0)).$$

我们注意到，基单纯形(τ_0) =基单纯形($\tau_{j_1 - 1}$) $\neq$基单纯形(σ_{j_1})，并且对每个 $1 \leq i \leq (m-1)$，基单纯形(τ_{j_i}) =基单纯形($\tau_{j_{i+1}-1}$) $\neq$基单纯形($\sigma_{j_{i+1}}$)。因此，由观察 1(d) 可得，基单纯形$(\sigma_{j_1})^{(q-2)} \subseteq$ 基单纯形$(\tau_0)^{(q-1)}$ 且基单纯形$(\sigma_{j_{i+1}})^{(q-2)} \subseteq$ 基单纯形$(\tau_{j_i})^{(q-1)}$ 对每个 $1 \leq i \leq (m-1)$。同样由观察 2(b) 可得，(基单纯形(σ_{j_i}),基单纯形(τ_{j_i})) $\in \mathcal{W}_{A \cap B}$。现在，若对某个 $i \in \{2, \ldots, (m-1)\}$ 有 (基单纯形(σ_{j_i}), 基单纯形($\tau_{j_i - 1}$)) $\in \mathcal{W}_{A \cap B}$，则基单纯形($\sigma_{j_i - 1}$) =基单纯形($\sigma_{j_i}$)。

然后我们再次利用观察 2(b) 推出 $\sigma_{j_i} = \sigma_{j_{i-1}}$，这与我们的假设相矛盾，即 P 中除初始单形和终止单形之外的单形互不相同。类似地，若 (基单纯形(τ_0), 基单纯形(σ_{j_1})) $\in \mathcal{W}_{A\cap B}$，则基单纯形($\tau_0$) = 基单纯形($\tau_{j_1}$)。再次由观察 2(b)，$\tau_0 = \tau_{j_1}$，这与之前一样，与我们的假设相矛盾。因此，对所有 $0 \le i \le (m-1)$ 有 (基单纯形(σ_{j_i}),基单纯形($\tau_{j_{i-1}}$)) $\notin \mathcal{W}_{A\cap B}$，并且 (基单纯形($\tau_0$), 基单纯形($\sigma_{j_1}$)) $\notin \mathcal{W}_{A\cap B}$。

因此，这是一个闭合的 $\mathcal{W}_{A\cap B}$-轨迹。这与 $\mathcal{W}_{A\cap B}$ 是梯度向量场相矛盾。因此，这样的闭合 $\mathcal{W}$-轨迹是不可能的。

□

既然 $\mathcal{W}$ 是梯度向量场，就可以将 $\mathcal{W}$ 中维数为 q 的临界单形列举如下。

1. $\mathrm{Crit}_q^{\mathcal{W}_{\bar{A}}}(\bar{A})$，2. $\mathrm{Crit}_q^{\mathcal{W}_{\bar{B}}}(\bar{B})$，3. $\{\alpha = [\bar{a}_{i_0}, \bar{b}_{i_0}, \ldots, \bar{b}_{i_{q-1}}] \in A_\gamma \mid \gamma = [\bar{c}_{i_0}, \ldots, \bar{c}_{i_{q-1}}] \in \mathrm{Crit}_{q-1}^{\mathcal{W}_{A\cap B}}(A\cap B)\}$。

Let 将这三组临界单形分别记为 $C_q^{\bar{A}}$、$C_q^{\bar{B}}$和 C_q^{int} .

命题 *3.3.* 设 $\tau_1 \in P_{int}(A\cap B)$，满足 $\tau_1 \in Crit_q^{\mathcal{W}}(\widetilde{X})$，或满足$(\sigma_1^{(q-1)}, \tau_1^{(q)}) \in \mathcal{W}$，其中 $GS(\sigma_1) \neq GS(\tau_1)$。设 $\sigma_2 \in P_{int}(A\cap B)$，满足 $\sigma_2 \neq \sigma_1$ 且 $\sigma_2 \in Crit_{q-1}^{\mathcal{W}}(\widetilde{X})$，或满足$(\sigma_2^{(q-1)}, \tau_2^{(q)}) \in \mathcal{W}$，其中 $GS(\sigma_2) \neq GS(\tau_2)$。此外，假设 $GS(\sigma_2)$ 是 $GS(\tau_1)$ 的一个面。那么存在一条从 τ_1 到 σ_2 的唯一$\mathcal{W}$-轨迹 P，使得除 σ_2外，P 中的每个单形的底单形都相同。（从 τ_1 到 σ_2 的轨迹可能不止一条，但如果存在一条从 τ_1到 σ_2的轨迹P'，使得除 σ_2外，P'中的底单形始终相同，那么 $P' = P$。）

证明。如果可能，设 P: $\tau_1^{(q)}$，$\widetilde{\sigma_1}^{(q-1)}$，$\widetilde{\tau_1}^{(q)}$，……，$\widetilde{\sigma_k}^{(q-1)}$，$\widetilde{\tau_k}^{(q)}$，$\sigma_2^{(q-1)}$ 是一条从 τ_1 到σ_2 的 $\mathcal{W}$-轨迹，使得 GS(τ_1) = GS($\widetilde{\sigma_1}$) = $\cdots$ = GS($\widetilde{\tau_k}$) ≠ GS(σ_2)。由于 $\sigma_2 \in P_{int}(A\cap B)$，因此根据命题 3.1，$P$ 是一条第三类 $\mathcal{W}$-轨迹，即对每个 $i \in [k]$，都有 $(\widetilde{\sigma_i}, \widetilde{\tau_i}) \in \mathcal{W}'$。我们将证明这样的轨迹存在且唯一。

根据观察 2(a)，并由 $\mathcal{W}$的构造可知，τ_1 是以下两种形式之一：$[\bar{a}_{i_0}, b_{i_0}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$、$[\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。设 GS($\tau_1$) = $[\bar{c}_{i_0}, \ldots, \bar{c}_{i_{q-1}}]$。则 GS($\sigma_2$) 必为 $[\bar{c}_{i_0}, \ldots, \widehat{\bar{c}_{i_m}}, \ldots, \bar{c}_{i_{q-1}}]$，$0 \le m \le (q-1)$。同样根据观察 2(a)以及$\mathcal{W}$的构造可知，若 $m = 0$，则 $\sigma_2 = [\bar{a}_{i_1}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$；若 $m > 0$，则 $\sigma_2 = [\bar{a}_{i_0}, b_{i_0}, \ldots b_{i_m}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。

情形 I: 令 $\tau_1 = [\bar{a}_{i_0}, b_{i_0}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。

子情形 *I*: *</style}*令 。那么 。显然，。因此，由观察 *1(c)*可知。根据的构造，要么是临界点，要么根据观察 *2(a)*，与配对。因此，再次根据的构造，。这里，如果，那么再次由观察 *1(c)*可得，从而。此后，在第步，，对于均成立。因此，不可能是任何的面，其中。所以，。于是，在此情形下，，$\widetilde{\sigma_1}$，$\widetilde{\tau_1}$，σ_2是从 τ_1到 σ_2的唯一轨迹，并且对于除 σ_2之外的每个单形，底单形都保持不变。

子情形 *II*: 令 $m > 0$。则 $\sigma_2 = [\bar{a}_{i_0}, b_{i_0}, \ldots, b_{i_m}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。这里，如果 $\widetilde{\sigma_1} \neq \sigma_2$，那么按照前一个子情形中的相同论证，我们可以证明，对于任意 $j \ge 1$，都有 $\widetilde{\tau_j} = [\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_j}, b_{i_j}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。因此，当 $j \ge 1$时，σ_2 不可能是 $\widetilde{\tau_j}$ 的面。因此，$\widetilde{\sigma_1} = \sigma_2$ 且 τ_1，σ_2 是从 τ_1 到 σ_2 的唯一轨迹，并且除 σ_2外，每个单形的底单形都保持不变。

情形 II: 设 $\tau_1 = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。

在此情形下，我们由观察 2(a) 推出 τ_1 必须与 $\sigma_1 = [\bar{a}_{i_1}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$ 配对。但 $\sigma_1 \neq \sigma_2$。因此 $m > 0$，从而 $\sigma_2 = [\bar{a}_{i_0}, b_{i_0}, \ldots b_{i_m}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。

在此，我们观察到 $\widetilde{\sigma_1} \neq \sigma_2$。然后，根据观察 1(c)，我们知道 $\widetilde{\sigma_1} = [\bar{a}_{i_0}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$ 或 $\widetilde{\sigma_1} = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。如果 $\widetilde{\sigma_1} = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$，那么我们按照前面的情形进行论证，并且证明，对于 $j \geq 1$，$\widetilde{\tau_j} = [\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_{j+1}}, b_{i_{j+1}}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。因此，$\sigma_2$ 不可能是 $j \geq 1$的任何 $\widetilde{\tau_j}$的面。因此，$\widetilde{\sigma_1} = [\bar{a}_{i_0}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$，从而 $\widetilde{\tau_1} = [\bar{a}_{i_0}, b_{i_0}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$（由$\mathcal{W}$的构造可知）。如果 $\widetilde{\sigma_2} \neq \sigma_2$，那么 GS($\widetilde{\tau_1}$) = GS($\widetilde{\sigma_2}$)，这是不可能的，因为在 $\mathrm{P}_{int}(A \cap B)$ 中，除了 $\widetilde{\sigma_1}$之外，$\widetilde{\tau_1}$ 没有面与 $\widetilde{\tau_1}$具有相同的底单形。因此，$\widetilde{\sigma_2} = \sigma_2$。所以，$\tau_1$，$\widetilde{\sigma_1}$，$\widetilde{\tau_1}$，$\sigma_2$是从 τ_1 到 σ_2 的唯一轨迹，并且对于除 σ_2之外的每个单形，底单形都保持不变。 □

命题 *3.4.* 设 $\tau_1 \in P_{int}(A \cap B)$ 满足 $\overline{\tau_1} \in$ 临界点$_q^{\mathcal{W}}(\widetilde{X})$，或 $(\sigma_1^{(q-1)}, \tau_1^{(q)}) \in \mathcal{W}$满足基单纯形$(\sigma_1) \neq$ 基单纯形(τ_1)。设 $\sigma_2^{(q-1)} \in (A \cap B)_{\bar{A}} \cup (A \cap B)_{\bar{B}}$，满足基单纯形$(\tau_1) =$ 基单纯形(σ_2)。则存在唯一一条 $\mathcal{W}$-轨迹 P 从 τ_1 到 σ_2，且具有如下性质：P中的每个单形的底单形都保持不变。（从 τ_1 到 σ_2 可能存在多条轨迹，但如果存在一条轨迹P'从 τ_1到 σ_2，且在整个 P'中底单形保持不变，那么 $P' = P$。）

证明。若可能，设 P: $\tau_1^{(q)}, \widetilde{\sigma_1}^{(q-1)}, \widetilde{\tau_1}^{(q)}, \ldots, \widetilde{\sigma_k}^{(q-1)}, \widetilde{\tau_k}^{(q)}, \sigma_2^{(q-1)}$ 是一条从 τ_1到 σ_2的 $\mathcal{W}$-轨迹，使得对于所有 $i \in [k]$，均有 $\overline{\widetilde{\sigma_i}, \widetilde{\tau_i}} \in \mathrm{P}(A \cap B)$，且基单纯形$(\tau_1) =$基单纯形$(\widetilde{\sigma_1}) = \cdots =$基单纯形$(\widetilde{\tau_k}) =$基单纯形$(\sigma_2)$。由于基单纯形$(\sigma_2) =$基单纯形$(\widetilde{\tau_k})$，因此根据观察 1(a)，$\overline{\widetilde{\tau_k} \in \mathrm{P}_{int}}(A \cap B)$。于是，$(\widetilde{\sigma_k}, \widetilde{\tau_k}) \in \mathcal{W}'$。因此，根据命题 3.1，我们可以推断 P 是一条第四类或第五类轨迹。我们将证明这样的轨迹确实存在且唯一。

由基单纯形$(\tau_1) =$基单纯形$(\sigma_2) = [\bar{c}_{i_0}, \ldots, \bar{c}_{i_{q-1}}]$。根据观察2(a)以及 $\mathcal{W}$的构造，可知 τ_1只能是$[\bar{a}_{i_0}, b_{i_0}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$、$[\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。

情形 I: 令 $\sigma_2 \in (A \cap B)_{\bar{A}}$，即$\sigma_2 = [\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_{q-1}}]$。

子情形 *I*: 令 $\tau_1 = [\bar{a}_{i_0}, b_{i_0}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。显然，$\widetilde{\sigma_1} \neq \sigma_2$。因此，$(\widetilde{\sigma_1}, \widetilde{\tau_1}) \in \mathcal{W}'$，于是根据观察 1(c)，$\widetilde{\sigma_1} = [\bar{a}_{i_0}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。由 $\mathcal{W}'$的构造，$\widetilde{\tau_1} = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。再次利用观察 1(c)，我们可推出$\widetilde{\sigma_2} = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。所以，$\widetilde{\tau_2} = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, \bar{a}_{i_2}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。我们以此类推，并注意到对每个 $2 \leq i < q-1$，$\widetilde{\sigma_i} \neq \sigma_2$。然而，$\widetilde{\tau_{q-1}} = [\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_{q-1}}, b_{i_{q-1}}]$。这里注意到，$\widetilde{\tau_{q-1}}$中不同于 $\widetilde{\sigma_{q-1}}$且与 $\widetilde{\tau_{q-1}}$具有相同底单形的唯一面是 σ_2。因此，$\widetilde{\sigma_q} = \sigma_2$。所以，$P$: τ_1，$\widetilde{\sigma_1}$，$\widetilde{\tau_1}$，……，$\widetilde{\sigma_{q-1}}$，$\widetilde{\tau_{q-1}}$，σ_2是从 τ_1 到 σ_2 的唯一轨迹，并且该轨迹中的每个单形的底单形都保持不变。

子情形 *II*: 设，$\tau_1 = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。

然后，根据观察 1(c)，我们注意到 $\widetilde{\sigma_1} = [\bar{a}_{i_0}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$ 或 $\widetilde{\sigma_1} = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。在第一种情形下，根据 $\mathcal{W}'$的构造，$\widetilde{\tau_1} = [\bar{a}_{i_0}, b_{i_0}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。然而，由于 $\widetilde{\sigma_2} \neq \sigma_2$，因此 $(\widetilde{\sigma_2}, \widetilde{\tau_2}) \in \mathcal{W}'$，但我们观察到，$\widetilde{\tau_1}$ 没有与 $\widetilde{\sigma_1}$不同的面，该面在 $\mathcal{W}'$ 中配对，并且与 $\widetilde{\tau_1}$具有相同的底单形。因此，轨迹无法继续。于是，$\widetilde{\sigma_1} = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。所以，$\widetilde{\tau_1} = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, \bar{a}_{i_2}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。我们以同样的方式继续，并观察到，对于$2 \leq j < (q-2)$，$\sigma_2 \neq \widetilde{\sigma_j}$。然而，$\widetilde{\tau_{q-2}} = [\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_{q-1}}, b_{i_{q-1}}]$。沿用子情形 I中的相同论证，我们观察到，$\widetilde{\sigma_{q-1}}$必须是 σ_2，因此 P: τ_1，$\widetilde{\sigma_1}$，$\widetilde{\tau_1}$，……，$\widetilde{\sigma_{q-2}}$，$\widetilde{\tau_{q-2}}$，σ_2是从τ_1 到 σ_2 的唯一轨迹，并且该轨迹中的每个单形都保持相同的底单形。

情形 II: 设 $\sigma_2 \in (A \cap B)_{\bar{B}}$，即 $\sigma_2 = [b_{i_0}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。

子情形 *I*: 设 $\tau_1 = [\bar{a}_{i_0}, b_{i_0}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。

由观察 1(c)可知，要么 $\widetilde{\sigma_1} = \sigma_2$，要么 $\widetilde{\sigma_1} = [\bar{a}_{i_0}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。在后一种情况下，$\widetilde{\tau_1} = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$（这可由 $\mathcal{W}$的构造得出）。随后，由观察 1(c)可知，$\widetilde{\sigma_2} =$

$[\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$ 因此 $\tau_2 = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, \bar{a}_{i_2}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。我们以同样的方式继续并证明，对于 $j \geq 1$， $\widetilde{\tau_j} = [\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_j}, b_{i_j}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。因此，当 $j \geq 1$时， σ_2不可能是 $\widetilde{\tau_j}$ 的一个面。由此， $\widetilde{\sigma_1} = \sigma_2$ 且 τ_1， σ_2 是从 τ_1 到 σ_2 的唯一轨迹，并且该轨迹中的每个单形的底单形都保持不变。

子情形 II: 令 $\tau_1 = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。

根据观察 1(c)， $\widetilde{\sigma_1} = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$ 或 $\widetilde{\sigma_1} = [\bar{a}_{i_0}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。在第一种情形下，根据 $\mathcal{W}$的构造，$\widetilde{\tau_1} = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, \bar{a}_{i_2}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。我们以同样的方式证明，对于 $j \geq 1$， $\widetilde{\tau_j} = [\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_{j+1}}, b_{j+1}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。因此， σ_2不可能是任何 $j \geq 1$的 $\widetilde{\tau_j}$的面。所以，根据 $\mathcal{W}$的构造，$\widetilde{\sigma_1} = [\bar{a}_{i_0}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$，从而 $\widetilde{\tau_1} = [\bar{a}_{i_0}, b_{i_0}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。与 $\widetilde{\sigma_1}$不同且具有相同底单形的 $\widetilde{\tau_1}$的唯一面是 σ_2。因此， $\widetilde{\sigma_2} = \sigma_2$和 τ_1， $\widetilde{\sigma_1}$， $\widetilde{\tau_1}$， σ_2是从 τ_1 到 σ_2 的唯一轨迹，并且该轨迹中的每个单形的底单形都保持不变。

□

令 $\tau_1^{(q)}, \sigma_2^{(q-1)} \in \widetilde{X}$ 满足命题 3.3 和命题 3.4 的条件。则从 τ_1 到 σ_2 、具有命题 3.3 和命题 3.4 中所述基单形保持性质的唯一轨迹，记作 $P_{(\tau_1,\sigma_2)}$。

现在，为了今后参考，我们作如下观察（这些观察已隐含在上述命题的证明中）。

观察 3。 令 $\tau_1 \in \mathrm{P}_{int}(A \cap B)$ 满足 $\tau_1 \in$ 临界点$_q^{\mathcal{W}}(\widetilde{X})$， 或 $(\sigma_1^{(q-1)}, \tau_1^{(q)}) \in \mathcal{W}$ 满足 $\mathrm{GS}(\sigma_1) \neq \mathrm{GS}(\tau_1)$。令 $\sigma_2 \in \mathrm{P}_{int}(A \cap B)$ 满足 $\sigma_2 \neq \sigma_1$ 且 $\sigma_2 \in$ 临界点$_{q-1}^{\mathcal{W}}(\widetilde{X})$， 或 $(\sigma_2^{(q-1)}, \tau_2^{(q)}) \in \mathcal{W}$ 满足 $\mathrm{GS}(\sigma_2) \neq \mathrm{GS}(\tau_2)$。假设 $\mathrm{GS}(\tau_1) = [\bar{c}_{i_0}, \ldots, \bar{c}_{i_{q-1}}]$， $\mathrm{GS}(\sigma_2) = [\bar{c}_{i_0}, \ldots, \widehat{\bar{c}_{i_m}}, \ldots, \bar{c}_{i_{q-1}}]$。那么，

(i) 对于 $\tau_1 = [\bar{a}_{i_0}, b_{i_0}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$,

(a) if $m = 0$, then $\sigma_2 = [\bar{a}_{i_1}, \bar{b}_{i_1}, \ldots, \bar{b}_{i_{q-1}}]$ and $P_{(\tau_1,\sigma_2)} : \tau_1, \widetilde{\sigma_1}, \widetilde{\tau_1}, \sigma_2$, where, $\widetilde{\sigma_1} = [\bar{a}_{i_0}, \bar{b}_{i_1}, \ldots, \bar{b}_{i_{q-1}}]$, $\widetilde{\tau_1} = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, \bar{b}_{i_1}, \ldots, \bar{b}_{i_{q-1}}]$.

(b) if $m > 0$, then $\sigma_2 = [\bar{a}_{i_0}, \bar{b}_{i_0}, \ldots, \widehat{\bar{b}_{i_m}}, \ldots, \bar{b}_{i_{q-1}}]$. In this case, $P_{(\tau_1,\sigma_2)} : \tau_1, \sigma_2$.

(ii) 对于 $\tau_1 = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$， $m > 0$和 $\sigma_2 = [\bar{a}_{i_0}, b_{i_0}, \ldots, b_{i_m}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。在这种情况下， $P_{(\tau_1,\sigma_2)}$: $\tau_1, \widetilde{\sigma_1}, \widetilde{\tau_1}, \sigma_2$， 其中， $\widetilde{\sigma_1} = [\bar{a}_{i_0}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$， $\widetilde{\tau_1} = [\bar{a}_{i_0}, b_{i_0}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。

（这些由命题 3.3 的证明得出）。

观察 4. 令 $\tau_1 \in \mathrm{P}_{int}(A \cap B)$ 满足 $\tau_1 \in$ 临界点$_q^{\mathcal{W}}(\widetilde{X})$， 或 $(\sigma_1^{(q-1)}, \tau_1^{(q)}) \in \mathcal{W}$满足 $\mathrm{GS}(\sigma_1) \neq \mathrm{GS}(\tau_1)$。令 $\sigma_2^{(q-1)} \in (A \cap B)_{\bar{A}} \cup (A \cap B)_{\bar{B}}$且 $\mathrm{GS}(\tau_1) = \mathrm{GS}(\sigma_2) = [\bar{c}_{i_0}, \ldots, \bar{c}_{i_{q-1}}]$。那么，

(i) 对于 $\sigma_2 = [\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_{q-1}}]$,

(a) If $\tau_1 = [\bar{a}_{i_0}, \bar{b}_{i_0}, \ldots, \bar{b}_{i_{q-1}}]$, then $P_{(\tau_1,\sigma_2)} : \tau_1, \widetilde{\sigma_1}, \widetilde{\tau_1}, \ldots, \widetilde{\sigma_{q-1}}, \widetilde{\tau_{q-1}}, \sigma_2$, where, $\widetilde{\sigma_1} = [\bar{a}_{i_0}, \bar{b}_{i_1}, \ldots, \bar{b}_{i_{q-1}}]$, $\widetilde{\tau_1} = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, \bar{b}_{i_1}, \ldots, \bar{b}_{i_{q-1}}]$, $\widetilde{\sigma_2} = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}\bar{b}_{i_2}, \ldots, \bar{b}_{i_{q-1}}]$, $\ldots, \widetilde{\sigma_j} = [\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_{j-1}}, \bar{b}_{i_j}, \ldots, \bar{b}_{i_{q-1}}]$, $\widetilde{\tau_j} = [\bar{a}_{i_0}, \ldots \bar{a}_{i_j}, \bar{b}_{i_j}, \ldots, \bar{b}_{i_{q-1}}]$, $\ldots$, $\widetilde{\sigma_{q-1}} = [\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_{q-2}}, \bar{b}_{i_{q-1}}]$, $\widetilde{\tau_{q-1}} = [\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_{q-1}}, \bar{b}_{i_{q-1}}]$.

(b) If $\tau_1 = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, \bar{b}_{i_1}, \ldots, \bar{b}_{i_{q-1}}]$, then $P_{(\tau_1,\sigma_2)} : \tau_1, \widetilde{\sigma_1}, \widetilde{\tau_1}, \ldots, \widetilde{\sigma_{q-2}}, \widetilde{\tau_{q-2}}, \sigma_2$, where, $\widetilde{\sigma_1} = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, \bar{b}_{i_2}, \ldots, \bar{b}_{i_{q-1}}]$, $\widetilde{\tau_1} = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, \bar{a}_{i_2}, \bar{b}_{i_2}, \ldots, \bar{b}_{i_{q-1}}]$, $\widetilde{\sigma_2} = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}\bar{b}_{i_2}, \ldots, \bar{b}_{i_{q-1}}]$, $\ldots, \widetilde{\sigma_j} = [\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_j}, \bar{b}_{i_{j+1}}, \ldots, \bar{b}_{i_{q-1}}]$, $\widetilde{\tau_j} = [\bar{a}_{i_0}, \ldots \bar{a}_{i_{j+1}}, \bar{b}_{i_{j+1}}, \ldots, \bar{b}_{i_{q-1}}]$, $\ldots, \widetilde{\sigma_{q-2}} = [\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_{q-2}}, \bar{b}_{i_{q-1}}]$, $\widetilde{\tau_{q-2}} = [\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_{q-2}}, \bar{a}_{i_{q-1}}, \bar{b}_{i_{q-1}}]$.

(ii) 对于 $\sigma_2 = [b_{i_0}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$,

(a) 若 $\tau_1 = [\bar{a}_{i_0}, b_{i_0}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$，则 $P_{(\tau_1,\sigma_2)}$：τ_1, σ_2.

(b) 若 $\tau_1 = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$，则 $P_{(\tau_1,\sigma_2)}$：τ_1, $\widetilde{\sigma_1}, \widetilde{\tau_1}, \sigma_2$，其中，$\widetilde{\sigma_1} = [\bar{a}_{i_0}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$，$\widetilde{\tau_1} = [\bar{a}_{i_0}, b_{i_0}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。

（这些由命题 3.4 的证明得出）。

3.5 X 的单纯同调与 $\mathcal{D}_\#$的同调群之间的同构(X)

我们从第 1 节回顾可知，$D_0(X) = \{$临界点$_0^{\mathcal{W}_A}(\bar{A}) \cup$临界点$_0^{\mathcal{W}_B}(\bar{B})\}$，$D_q(X) = \{$临界点$_q^{\mathcal{W}_A}(\bar{A}) \cup$临界点$_q^{\mathcal{W}_B}(\bar{B}) \cup$临界点$_{q-1}^{\mathcal{W}_{A\cap B}}(A \cap B)\}$，$q \geq 1$。我们还回顾到，$C_q^{\mathcal{W}}(\widetilde{X}, \mathrm{Z})$ 的生成元由临界点$_q^{\mathcal{W}}(\widetilde{X})$ = $\{C_q^{\bar{A}} \cup C_q^{\bar{B}} \cup C_q^{int}\}$ $f_\#$ $C_\#^{\mathcal{W}}\ \widetilde{X}$ $\mathcal{D}_\#\ X$ 给出。现在我们构造 (,Z) 与 ( ) 之间的同构。

按以下方式定义 f_q： $C_q^{\mathcal{W}}(\widetilde{X}, \mathrm{Z}) \to \mathcal{D}_q(X)$。只需在生成元集合上定义映射。令 $\alpha \in$ 临界点$_q^{\mathcal{W}}(\widetilde{X})$。

如果 $\alpha \in C_q^{\bar{A}}$或 $\alpha \in C_q^{\bar{B}}$，那么分别对于某个 $\sigma \in A$有 $\alpha = \sigma_{\bar{A}}$，或对于某个 $\sigma \in B$ 有 $\alpha = \sigma_{\bar{B}}$。因此，我们注意到 $\alpha \in$临界点$_q^{\mathcal{W}_{\bar{A}}}(\bar{A})$ 或 $\alpha \in$临界点$_q^{\mathcal{W}_{\bar{B}}}(\bar{B})$。因此，在这种情况下，我们定义 $f_q(\alpha) = \alpha$。

如果 $\alpha \in C_q^{int}$，那么根据观察 2(c)，我们注意到 GS$(\alpha) \in$ 临界点$_{q-1}^{\mathcal{W}_{A\cap B}}(\overline{A \cap B})$。因此我们定义 $f_q(\alpha) = \mathrm{GS}(\alpha)$。

现在，令 g_q： $\mathcal{D}_q(X) \to C_q^{\mathcal{W}}(\widetilde{X}, \mathrm{Z})$。和之前一样，只需在生成元集合上定义 g_q。令$\alpha \in D_q(X)$。于是我们定义，

$$g_q(\alpha) = \begin{cases} \sigma_{\bar{A}} & \alpha \in \mathrm{Crit}_q^{\mathcal{W}_{\bar{A}}}(\bar{A}), \text{ and } \alpha = \sigma_{\bar{A}}, \\ \sigma_{\bar{B}} & \alpha \in \mathrm{Crit}_q^{\mathcal{W}_{\bar{B}}}(\bar{B}), \text{ and } \alpha = \sigma_{\bar{B}}, \\ [\bar{a}_{i_0}, \bar{b}_{i_0}, \ldots \bar{b}_{i_{q-1}}] & \alpha \in \mathrm{Crit}_{q-1}^{\mathcal{W}_{\overline{A\cap B}}}(\overline{A \cap B}), \text{ where } \alpha = [\bar{c}_{i_0}, \ldots \bar{c}_{i_{q-1}}]. \end{cases}$$

只需证明 $f_q \circ g_q = \mathrm{id}$ 和 $g_q \circ f_q = \mathrm{id}$ 在生成元集合上的作用相同。

如果 $\sigma_{\bar{A}} \in$临界点$_q^{\mathcal{W}_{\bar{A}}}(\bar{A})$ 或 $\sigma_{\bar{B}} \in$临界点$_q^{\mathcal{W}_{\bar{B}}}(\bar{B})$，那么 f_q和 g_q只是恒等映射，而恒等映射是同构。然而，如果$\alpha = [\bar{c}_{i_0}, \ldots \bar{c}_{i_{q-1}}] \in$临界点$_{q-1}^{\mathcal{W}_{A\cap B}}(A \cap B)$，那么 $g_q(\alpha) = [\bar{a}_{i_0}, \bar{b}_{i_0}, \ldots, \bar{b}_{i_{q-1}}]$。我们将其记为 σ。因此，$f_q \circ g_q(\alpha) =$基单纯形$(\sigma) = [\bar{c}_{i_0}, \ldots, \bar{c}_{i_{q-1}}]$。

设 $\alpha \in C_q^{int}$。现在，$g_q \circ f_q(\alpha) = g_q($基单纯形$(\alpha))$。由观察 2(c) 可知，基单纯形$(\alpha) \in$临界点$_{q-1}^{\mathcal{W}_{A\cap B}}(A \cap B)$。因此，若基单纯形$(\alpha) = [\bar{c}_{i_0}, \ldots, \bar{c}_{i_{q-1}}]$，则 $g_q($基单纯形$(\alpha)) = [\bar{a}_{i_0}, \bar{b}_{i_0}, \ldots, \bar{b}_{i_{q-1}}] \in C_q^{int}$。由于 α 与 $[\bar{a}_{i_0}, b_{i_0} \ldots, b_{i_{q-1}}]$ 均属于 $S'_{\mathrm{GS}(\alpha)}$，故由观察 2(c) 可得 $\alpha = [\bar{a}_{i_0}, b_{i_0} \ldots, b_{i_{q-1}}]$。从而，$g_q($基单纯形$(\alpha)) = \alpha$。

因此，我们已经建立了 $C_q(X, \mathrm{Z})$ 与 $\mathcal{D}_q(X)$ 之间的同构。

引理 3.3.1. 设 $\tau \in$临界点$_q^{\mathcal{W}}(\widetilde{X})$ 和 $\sigma \in$临界点$_{q-1}^{\mathcal{W}}(\widetilde{X})$。那么，$\Gamma(\tau, \sigma)$与 $\mathrm{MV}(f_q(\tau)\ f_{q-1}(\sigma))$之间存在双射。

证明。首先，我们构造一个映射 μ：$\Gamma(\tau,\ \sigma) \to \mathrm{MV}(f_q(\tau)\ f_{q-1}(\sigma))$.

设 $P \in \Gamma(\tau,\ \sigma)$。

情形 I: P是第一类或第二类的 $\mathcal{W}$-轨迹，即 $\tau \in C_q^{\bar{A}}$(或 $\tau \in C_q^{\bar{B}}$)。

因此，根据命题 3.1，P必定是 $\mathcal{W}_{\bar{A}}$-轨迹（或 $\mathcal{W}_{\bar{B}}$-轨迹）。因此，$\sigma \in C_q^{\bar{A}}$（或 $\sigma \in C_q^{\bar{B}}$）。所以，我们将 $\mu(P)$ 定义为 P；我们注意到，它也是一条 MV-轨迹，从 $f_q(\tau) = \tau$ 到 $f_{q-1}(\sigma) = \sigma$。

情形 II: P 是一条第三类 $\mathcal{W}$-轨迹。

因此， $\tau \in C_q^{int}$和 P 具有如下形式，

$$(\tau =)\ \tau_0^{(q)}, \sigma_1^{(q-1)}, \tau_1^{(q)} \ldots, \sigma_k^{(q-1)}, \tau_k^{(q)}, \sigma_{k+1}^{(q-1)}\ (=\sigma),$$

其中 $\sigma \in C_{q-1}^{int}$。

如果 P 中的每个单形的底单形都相同，那么对于某个 $\gamma \in$，有 τ， $\sigma \in S'_\gamma$ $\mathrm{Crit}^{\mathcal{W}_{A\cap B}}(A \cap B)$。根据观察 2(c)，我们注意到这是不可能的。因此， P 中存在一个单形，其底单形不同于它前面的单形，即对于某个 i，以下情况之一会发生。

$$\mathrm{GS}(\tau) = \mathrm{GS}(\sigma_1) = \cdots = \mathrm{GS}(\sigma_i) \neq \mathrm{GS}(\tau_i),$$

or

$$\mathrm{GS}(\tau) = \mathrm{GS}(\sigma_1) = \cdots = \mathrm{GS}(\tau_{i-1}) \neq \mathrm{GS}(\sigma_i).$$

在第一种情况下，根据观察 2(a)，可得对于某个 $\alpha \in A \cap B$， $\tau_{i-1} \in A_\alpha$，因此根据观察 1(c)，我们注意到 $\sigma_i \in B_\alpha$。我们再次使用观察 2(a)，推得 $\mathrm{GS}(\sigma_i) = \mathrm{GS}(\tau_i)$，从而得出矛盾。在第二种情况下，底单形首次在低维单形 σ_i 处发生变化。将其重新记为 σ_{r_1}。

如果 $\sigma_{r_1} = \sigma$，那么我们得到单形序列 P'：$\mathrm{GS}(\tau), \mathrm{GS}(\sigma)$。否则，根据观察 1(c)，我们注意到对于某个 $\alpha \in A \cap B$， $\sigma_{r_1} \in A_\alpha$；根据观察 2(a)，我们注意到 $\mathrm{GS}(\sigma_{r_1}) \neq \mathrm{GS}(\tau_{r_1})$。现在，$\mathrm{GS}(\tau_{r_1}) = \mathrm{GS}(\sigma_{r_1+1}) = \mathrm{GS}(\tau_{r_1+1}) = \cdots = \mathrm{GS}(\sigma)$ 是不可能的。这是因为，根据观察 2(b)，$(\mathrm{GS}(\sigma_{r_1}), \mathrm{GS}(\tau_{r_1})) \in \mathcal{W}_{A\cap B}$，但根据观察 2(c)，$\mathrm{GS}(\sigma) \in \mathrm{Crit}^{\mathcal{W}_{A\cap B}}(A \cap B)$。因此，我们再次采用之前相同的论证，并注意到底单形接下来在低维单形 σ_{r_2} 处发生变化，即 $\mathrm{GS}(\tau_i) = \mathrm{GS}(\sigma_{r_1+1}) = \mathrm{GS}(\tau_{r_1+1}) = \cdots = \mathrm{GS}(\tau_{r_2-1}) \neq \mathrm{GS}(\sigma_{r_2})$。我们注意到，如果 $\sigma_{r_2} = \sigma$，便相应地继续相同的过程，直到对于某个 m，$\sigma_{r_m} = \sigma$，从而得到 $A \cap B$ 中的以下单形序列。

$$P' : f_q(\tau_0) = \mathrm{GS}(\tau_0), \mathrm{GS}(\sigma_{r_1}), \mathrm{GS}(\tau_{r_1}), \ldots, \mathrm{GS}(\sigma_{r_{m-1}}), \mathrm{GS}(\tau_{r_{m-1}}), \mathrm{GS}(\sigma) = f_{q-1}(\sigma).$$

我们观察到 $\mathrm{GS}(\tau_0) = \mathrm{GS}(\tau_{r_1-1}) \neq \mathrm{GS}(\sigma_{r_1})$。此外，对于每个 $0 \leq i \leq (m-2)$，$\mathrm{GS}(\tau_{r_i}) = \mathrm{GS}(\tau_{r_{i+1}-1}) \neq \mathrm{GS}(\sigma_{r_{i+1}})$。因此，根据观察 1(d)，我们注意到 $\mathrm{GS}(\sigma_{r_1})^{(q-2)} \subseteq \mathrm{GS}(\tau_0)^{(q-1)}$以及 $\mathrm{GS}(\sigma_{r_{i+1}})^{(q-2)} \subseteq \mathrm{GS}(\tau_{r_i})^{(q-1)}$, $1 \leq i \leq (m-2)$。现在我们使用观察 2(b) 推导出，$(\mathrm{GS}(\sigma_{r_i}), \mathrm{GS}(\tau_{r_i})) \in \mathcal{W}_{A\cap B}$对于 $i \in [m-1]$。由于 $\mathrm{GS}(\tau_0), \mathrm{GS}(\sigma)$ 是 $\mathcal{W}_{A\cap B}$-临界的，因此可得 $(\mathrm{GS}(\tau_0, \sigma_{r_1}) \notin \mathcal{W}_{A\cap B}$ $\sigma, \tau_{r_{m-1}} \notin \mathcal{W}_{A\cap B}$ $\sigma_{r_i}, \tau_{r_{i-1}} \notin \mathcal{W}_{A\cap B}$ $2 \leq i \leq m-1$ $2)$ $\mathrm{GS}()), (\mathrm{GS}() \mathrm{GS}()) 。对于每个 ()，(\mathrm{GS}() \mathrm{GS}()) 这一事实可由观察 (b) 和 的无环性推出。因此 P' \in \mathrm{MV}(f_q(\tau) f_{q-1}(\sigma))。$

我们将 $\mu(P)$ 定义为 P'。由 P' 的构造可知，对于每个 $P \in \Gamma(\tau, \sigma)$， P' 是唯一的。

情形 III： P 是一条第四类或第五类的 $\mathcal{W}$-轨迹。

因此， $\tau \in C_q^{int}$ 和 P 是以下形式之一。

$$(\tau =)\ \tau_0^{(q)}, \sigma_1^{(q-1)}, \tau_1^{(q)}, \ldots, \sigma_p^{(q-1)}, \tau_p^{(q)}, (\sigma_{p+1})_{\bar{A}}^{(q-1)}, (\tau_{p+1})_{\bar{A}}^{(q)}, \ldots, (\sigma_{p+l-1})_{\bar{A}}^{(q-1)}, (\tau_{p+l-1})_{\bar{A}}^{(q)}, (\sigma_{p+l})_{\bar{A}}^{(q-1)}\ (=\sigma).$$

or

$$(\tau =)\ \tau_0^{(q)}, \sigma_1^{(q-1)}, \tau_1^{(q)} \ldots, \sigma_p^{(q-1)}, \tau_p^{(q)}, (\sigma_{p+1})_{\bar{B}}^{(q-1)}, (\tau_{p+1})_{\bar{B}}^{(q)}, \ldots, (\sigma_{p+l-1})_{\bar{B}}^{(q-1)}, (\tau_{p+l-1})_{\bar{B}}^{(q)}, (\sigma_{p+l})_{\bar{B}}^{(q-1)}\ (=\sigma).$$

不失一般性，假设 P 是第一种形式。

回顾第 2 节末尾的说明，对于一条轨迹 P，我们将 P 中由连续单形 α_{i_1}、.....、α_{i_r} 组成的子序列记为 $\alpha_{i_1} P \alpha_{i_r}$。

令 $Q = \tau P(\sigma_{p+1})_{\bar{A}}$和 $R = (\sigma_{p+1})_{\bar{A}} P \sigma$。现在我们构造一个依赖于 Q 的序列 Q'，如下所示。

如果 Q 中每个单形的底单形都相同，那么 Q' : GS(τ)。否则，我们按照情形 II 中相同的论证，证明底单形首次在一个维数更低的单形 σ_{r_1} 处发生变化，即 GS(τ) $=$GS(σ_1) $=\cdots=$GS(τ_{r_1-1}) $\neq$ GS(σ_{r_1})。由于 $(\sigma_{p\pm1})_{\bar{A}} \in A$ 且$\tau_{r_1-1} \in \mathrm{P}_{int}(A\cap B)$，因此由观察 1(a)可知 $(\sigma_{p+1})_{\bar{A}} \neq \sigma_{r_1}$。所以，我们按照情形 II 中相同的论证，推得 GS(τ_{r_1}) $\neq$GS(σ_{r_1})。

如果底单形再次发生变化，那么我们继续执行相同的过程，直到达到 τ_{r_m} ，其中 m满足：对于 Q 中继 τ_{r_m}之后的所有单形，底单形均保持不变，即 GS(τ_{r_m}) $=$GS(σ_{r_m+1}) $=$GS(τ_{r_m+1}) $=\cdots=$GS($(\sigma_{p+1})_{\bar{A}}$)。这是必然的，因为根据观察 2(a)，我们知道 GS(τ_p) $=$ GS($(\sigma_{p+1})_{\bar{A}}$)。因此我们得到一个单形序列，

$$Q' : f_q(\tau) = \mathrm{GS}(\tau), \mathrm{GS}(\sigma_{r_1}), \mathrm{GS}(\tau_{r_1}), \ldots, \mathrm{GS}(\sigma_{r_m}), \mathrm{GS}(\tau_{r_m}).$$

其中 GS(τ_{r_m}) $=$ GS($(\sigma_{p+1})_{\bar{A}}$) $=$ $(\sigma_{p+1})^{A\cap B}$（由观察 2(a) 和观察 2(b) 可知）。我们将 $\mu(P)$ 定义为单形序列 Q', R。遵循情形 II 中的类似论证，并由 R本身是一个$\mathcal{W}_{\bar{A}}$-轨迹这一事实可知，$\mu(P) \in$MV($f_q(\tau)$ $f_{q-1}(\sigma)$)。在此情形下，同样可以由我们的构造推出，对于每个 $P \in \Gamma(\tau,\sigma)$，$\mu(P)$ 是唯一的。

接下来，令 $\beta \in D_q(X)$，$\alpha \in D_{q-1}(X)$。我们定义一个映射 η: MV(β, α) $\to \Gamma(g_q(\beta)$ $g_{q-1}(\alpha))$。
令 $P \in$MV(β, α)。
情形 I： 令 $\beta \in$Crit$_q^{\mathcal{W}_{\bar{A}}}$($\bar{A}$) 和 $\alpha \in$Crit$_{q-1}^{\mathcal{W}_{\bar{A}}}$($\bar{A}$)，或者 $\beta \in$Crit$_q^{\mathcal{W}_{\bar{B}}}$($\bar{B}$) 和 $\alpha \in$Crit$_{q-1}^{\mathcal{W}_{\bar{B}}}$($\bar{B}$)。
那么 P 是以下两者之一。

$$(\beta =)\ (\beta_0)^{(q)}_{\bar{A}}, (\alpha_1)^{(q-1)}_{\bar{A}}, (\beta_1)^{(q)}_{\bar{A}} \ldots, (\alpha_k)^{(q-1)}_{\bar{A}}, (\beta_k)^{(q)}_{\bar{A}}, (\alpha_{k+1})^{(q-1)}_{\bar{A}}\ (=\alpha),$$

or

$$(\beta =)(\beta_0)^{(q)}_{\bar{B}}, (\alpha_1)^{(q-1)}_{\bar{B}}, (\beta_1)^{(q)}_{\bar{B}} \ldots, (\alpha_k)^{(q-1)}_{\bar{B}}, (\beta_k)^{(q)}_{\bar{B}}, (\alpha_{k+1})^{(q-1)}_{\bar{B}} (=\alpha).$$

在这种情况下，我们注意到 P 本身就是一条第一类或第二类的 $\mathcal{W}$-轨迹。因此，我们将$\eta(P)$定义为 P。

情形 II： 令 $\beta \in$Crit$_{q-1}^{\mathcal{W}_{A\cap B}}(\overline{A\cap B})$ 和 $\alpha \in$Crit$_{q-2}^{\mathcal{W}_{A\cap B}}(\overline{A\cap B})$。
那么令 P 为如下单形序列。

$$(\beta =)\ (\beta_0)^{(q-1)}_{\overline{A\cap B}}, (\alpha_1)^{(q-2)}_{\overline{A\cap B}}, (\beta_1)^{(q-1)}_{\overline{A\cap B}}, \ldots, (\alpha_k)^{(q-2)}_{\overline{A\cap B}}, (\beta_k)^{(q-1)}_{\overline{A\cap B}}, (\alpha_{k+1})^{(q-2)}_{\overline{A\cap B}}\ (=\alpha).$$

由观察 2(c)可知，存在唯一的单形 $\tau_0 \in S'_\beta$ ，使得 τ_0 是 $\mathcal{W}$-临界的；并且存在唯一的单形 $\sigma_{k+1} \in S'_\alpha$ ，使得 σ_{k+1} 是 $\mathcal{W}$-临界的。因此，$g_q(\beta) = \tau_0$，$g_q(\alpha) = \sigma_{k+1}$。由观察 2(b)可知，对于每个 $((\alpha_i)^{A\cap B}$，$(\beta_i)^{A\cap B})$，存在唯一的对 $(\sigma_i,\ \tau_i) \in \mathcal{W}'$，使得 GS($\overline{\sigma_i}$) $=(\alpha_i)^{\overline{A\cap B}}$，GS($\tau_i$) $=(\beta_i)^{A\cap B}$。现在，我们利用命题 3.3 推出，存在从 τ_i 到 $\overline{\sigma_{i+1}}$ 的唯一 $\mathcal{W}$-轨迹，并且该轨迹具有如下性质：对于每个 $0 \le i \le k$，除 σ_{i+1} 外，轨迹中的每个单形的底单形都保持不变。我们回顾一下，这样的轨迹记作$P_{(\tau_i,\sigma_{i+1})}$。
我们将 $\eta(P)$ 定义为 $P_{(\tau_0,\sigma_1)}$ $P_{(\tau_1,\sigma_2)}$ $\cdots$， $P_{(\tau_k,\sigma_{k+1})}$。
由于 τ_0，$\sigma_{k+1} \in \mathrm{P}_{int}(\overline{A\cap B})$，因此 $\eta(P) \in \Gamma(\tau,\ \sigma)$。我们还注意到，对于每个 $P \in$MV(β, α)，这样的轨迹都是唯一的。

情形 III： 设 $\beta \in$临界点$_{q-1}^{\mathcal{W}_{A\cap B}}(\overline{A\cap B})$ 和 $\alpha \in$临界点$_{q-1}^{\mathcal{W}_{\bar{A}}}$($\bar{A}$)，或 $\beta \in$临界点$_{q-1}^{\mathcal{W}_{\overline{A\cap B}}}(A\cap B)$ 和 $\alpha \in$临界点$_{q-1}^{\mathcal{W}_{\bar{B}}}$($\bar{B}$)。
那么 P 可以是以下任一种。

$$(\beta =)\ (\beta_0)^{(q-1)}_{\overline{A\cap B}}, (\alpha_1)^{(q-2)}_{\overline{A\cap B}}, (\beta_1)^{(q-1)}_{\overline{A\cap B}} \ldots (\alpha_p)^{(q-2)}_{\overline{A\cap B}}, (\beta_p)^{(q-1)}_{\overline{A\cap B}}, (\beta_p)^{(q-1)}_{\bar{A}}, (\gamma_p)^{(q)}_{\bar{A}}, \ldots (\beta_{p+l-1})^{(q-1)}_{\bar{A}},$$
$$(\gamma_{p+l-1})^{(q)}_{\bar{A}}, (\beta_{p+l})^{(q-1)}_{\bar{A}}\ (=\alpha)$$

or

$$(\beta =)\ (\beta_0)^{(q-1)}_{A\cap B}, (\alpha_1)^{(q-2)}_{A\cap B}, (\beta_1)^{(q-1)}_{A\cap B} \dots (\alpha_p)^{(q-2)}_{A\cap B}, (\beta_p)^{(q-1)}_{A\cap B}, (\beta_p)^{(q-1)}_{\bar{B}}, (\gamma_p)^{(q)}_{\bar{B}}, \dots (\beta_{p+l-1})^{(q-1)}_{\bar{B}},$$
$$(\gamma_{p+l-1})^{(q)}_{\bar{B}}, (\beta_{p+l})^{(q-1)}_{\bar{B}}\ (=\alpha)$$

不妨假设， P 是第一个单形序列。

我们回顾第 2 节末尾的内容：对于一条 MV-轨迹 P，我们将 P 中由连续单形 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ 构成的子序列记为 $\alpha_{i_1} P \alpha_{i_r}$。

令 $Q = \beta P(\beta_p)^{A\cap B}$ 和 $R = (\gamma_p)_{\bar{A}} P \alpha$。与之前一样，令 τ_0 为满足 $\tau_0 \in S'_\beta$ 的唯一 $\mathcal{W}$-临界单形。因此， $g_q(\beta) = \tau_0$。与情形 II 中一样，对于每个 $(\alpha_i, \beta_i) \in \mathcal{W}_{A\cap B}$，令 $(\sigma_i, \tau_i) \in \mathcal{W}$ 为满足以下条件的唯一一对：对每个 $i \in [p]$， $\mathrm{GS}(\sigma_i) = (\alpha_i)^{A\cap B}$， $\mathrm{GS}(\tau_i) = (\beta_i)^{A\cap B}$。因此，我们使用命题 3.3 得到轨迹 $P_{(\tau,\sigma_1)}\ P_{(\tau_1,\sigma_2)}\ \dots P_{(\tau_{p-1},\sigma_p)}$。

现在，设 $\sigma_{p+1} = (\beta_p)_{\bar{A}}$。我们注意到 $\sigma_{p+1} \in (A\cap B)_{\bar{A}}$ 且 $(\sigma_p, \tau_p) \in \mathcal{W}'$。此外，由观察 1(b)，基单纯形$(\tau_p) = (\beta_p)^{A\cap B} =$基单纯形$(\sigma_{p+1})$。因此我们使用命题 3.4 得到轨迹 $P_{(\tau_p,\sigma_{p+1})}$。现在，我们将 $\eta(P)$ 定义为 $P_{(\tau,\sigma_1)}\ P_{(\tau_1,\sigma_2)}\ \cdots,$ $P_{(\tau_p,\sigma_{p+1})} R$。

在每种情形中，我们观察到 $\eta(P)$ 是一条第四类的 $\mathcal{W}$-轨迹，并且对每个$P \in \mathrm{MV}(\beta, \alpha)$ 是唯一的。

接下来我们证明这些映射确实是双射，即对每个 $P \in \Gamma(\tau, \sigma)$， $\eta \circ \mu(P) = P$，其中 $\tau \in$临界点$^{\mathcal{W}}_q(\widetilde{X})$ $\sigma \in$临界点$^{\mathcal{W}}_{q-1}(\widetilde{X})$，并且对每个 $P \in \mathrm{MV}(\beta, \alpha)$， $\mu \circ \eta(P)$，其中 $\beta \in D_q(X)$， $\alpha \in D_{q-1}(\widetilde{X})$。

设 $P \in \Gamma(\tau, \sigma)$，其中 $\tau \in$临界点$^{\mathcal{W}}_q(\widetilde{X})$ $\sigma \in$临界点$^{\mathcal{W}}_{q-1}(\widetilde{X})$。根据我们对映射的构造，只需证明当 P是第三、第四或第五类的 W-轨迹时， $\eta \circ \mu(P) = P$。

情形 I： P 是第三类的 $\mathcal{W}$-轨迹。于是令，

$$P : (\tau =)\ \tau_0^{(q)}, \sigma_1^{(q-1)}, \tau_1^{(q)} \dots, \sigma_k^{(q-1)}, \tau_k^{(q)}, \sigma_{k+1}^{(q-1)}\ (=\sigma).$$

其中 $\tau \in C^{int}_q$, $\sigma \in C^{int}_{q-1}$。

假设底单形在 σ_{r_i}， τ_{r_i}, $i \in [m]$ 处以及在 $\sigma_{r_m} = \sigma$ 处发生变化，即

$$\mathrm{GS}(\tau_0) = \mathrm{GS}(\sigma_1) = \mathrm{GS}(\tau_1) = \dots \mathrm{GS}(\tau_{r_1-1}) \neq \mathrm{GS}(\sigma_{r_1}) \neq \mathrm{GS}(\tau_{r_1}) = \dots = \mathrm{GS}(\tau_{r_2-1})$$
$$\neq \mathrm{GS}(\sigma_{r_2}) \neq \mathrm{GS}(\tau_{r_2}) = \dots = \mathrm{GS}(\tau_{r_{m-1}-1}) \neq \mathrm{GS}(\sigma_{r_{m-1}}) \neq \mathrm{GS}(\tau_{r_{m-1}}) = \dots = \mathrm{GS}(\tau_{r_m-1}) \neq \mathrm{GS}(\sigma_{r_m}).$$

因此，根据我们的构造， $\mu(P)$：基单形(τ_0)，基单形(σ_{r_1})，基单形(τ_{r_1}).....，基单形$(\sigma_{r_{m-1}})$，基单形$(\tau_{r_{m-1}})$，基单形(σ_{r_m})，其中（基单形(σ_{r_i})，基单形(τ_{r_i})） $\in \mathcal{W}_{A\cap B}$。现在，根据观察 2(c)， τ_0, σ_{r_m} 分别是 $S'_{\mathrm{GS}(\tau_0)}$ 和 $S'_{\mathrm{GS}(\sigma)}$ 中唯一的临界单形，且对每个 $i \in [m]$ 都成立。根据观察 2(b)， $(\sigma_{r_i}, \tau_{r_i}) \in \mathcal{W}'$ 是唯一满足对每个 $i \in [m]$ 均有基单形$(\sigma_{r_i}$, 基单形$(\tau_{r_i})) \in \overline{\mathcal{W}_{A\cap B}}$ 的一对。因此，我们利用命题 3.3 推得，对于 $1 \leq i \leq (m-1)$， $\tau_0 P \sigma_{r_1} = P_{(\tau_0,\sigma_{r_1})}$ 和 $\tau_{r_i} P \sigma_{r_{i+1}} = P_{(\tau_{r_i},\sigma_{r_{i+1}})}$。因此，根据 η 的构造可知， $\eta(P) = P$。

情形 II： P 是第四类或第五类轨迹。

不失一般性，令

$$P : (\tau =)\ \tau_0^{(q)}, \sigma_1^{(q-1)}, \tau_1^{(q)} \dots, \sigma_p^{(q-1)}, \tau_p^{(q)}, (\sigma_{p+1})^{(q-1)}_{\bar{A}}, (\tau_{p+1})^{(q)}_{\bar{A}}, \dots, (\sigma_{p+l-1})^{(q-1)}_{\bar{A}},$$
$$(\tau_{p+l-1})^{(q)}_{\bar{A}}, (\sigma_{p+l})^{(q-1)}_{\bar{A}}\ (=\sigma),$$

其中 $\tau \in C^{int}_q$、 $\sigma \in C^{\bar{A}}_{q-1}$。

设 $Q = \tau P(\sigma_{p+1})_{\bar{A}}$, $R = (\sigma_{p+1})_{\bar{A}} P \sigma$。假设底单形在 Q 于 σ_{r_i}, τ_{r_i}, $i \in [m]$ 处发生变化，即

$$\mathrm{GS}(\tau_0) = \mathrm{GS}(\sigma_1) = \mathrm{GS}(\tau_1) = \dots \mathrm{GS}(\tau_{r_1-1}) \neq \mathrm{GS}(\sigma_{r_1}) \neq \mathrm{GS}(\tau_{r_1}) = \dots = \mathrm{GS}(\tau_{r_2-1})$$
$$\neq \mathrm{GS}(\sigma_{r_2}) \neq \mathrm{GS}(\tau_{r_2}) = \dots = \mathrm{GS}(\tau_{r_m-1}) \neq \mathrm{GS}(\sigma_{r_m}) \neq \mathrm{GS}(\tau_{r_m}) = \dots = \mathrm{GS}((\sigma_{p+1})_{\bar{A}}).$$

因此， $\mu(P)$: 基单纯形(τ_0), 基单纯形(σ_{r_1}), 基单纯形(τ_{r_1}) . . . , 基单纯形(σ_{r_m}), 基单纯形(τ_{r_m}) $R_\circ$

根据观察 2(b)和命题 3.3，我们推得 $\tau_{r_i} P \sigma_{r_{i+1}} = P_{(\tau_{r_i}, \sigma_{r_{i+1}})}$ 对于 $0 \leq i \leq (m-1)_\circ$ 由命题 3.4，我们推得 $\tau_{r_m} P(\sigma_{p+1})_{\bar{A}} = P_{(\tau_{r_m}, (\sigma_{p+1})_{\bar{A}})_\circ}$ 设 $R' = (\tau_{p+1})_{\bar{A}} P \sigma_\circ$ 那么$\eta(\mu(P)) : P_{(\tau_0, \sigma_{r_1})}\ P_{(\tau_{r_1}, \sigma_{r_2})}$ $\ldots P_{(\tau_{r_{m-1}}, \sigma_{r_m})} R'$，我们注意到这与 P 相同。

现在，设 $P \in \mathrm{MV}(\beta, \alpha)$，其中 $\beta \in D_q(X)$、 $\alpha \in D_{q-1}(X)_\circ$ 根据这些映射的构造，我们注意到，只需证明以下两种情形下 $\mu \circ \eta(P) = P_\circ$

情形 I: 令 $\beta \in \mathrm{Crit}_{q-1}^{\mathcal{W}_{A\cap B}}(\overline{A \cap B})$ 和 $\alpha \in \mathrm{Crit}_{q-2}^{\mathcal{W}_{A\cap B}}(\overline{A \cap B})_\circ$

Let,

$$P : (\beta =)\ (\beta_0)^{(q-1)}_{A\cap B}, (\alpha_1)^{(q-2)}_{A\cap B}, (\beta_1)^{(q-1)}_{A\cap B}, \ldots, (\alpha_k)^{(q-2)}_{A\cap B}, (\beta_k)^{(q-1)}_{A\cap B}, (\alpha_{k+1})^{(q-2)}_{A\cap B}\ (= \alpha).$$

根据 η 的构造， $\eta(P) = P_{(\tau_0, \sigma_1)}\ P_{(\tau_1, \sigma_2)}\ \cdots, P_{(\tau_k, \sigma_{k+1})_\circ}$ 这里， τ_0, σ_{k+1} 分别是 S'_β 和 S'_α 中唯一的 $\mathcal{W}$-临界单形；$(\sigma_i, \tau_i) \in \mathcal{W}$ 是唯一的一对，使得对于所有 $i \in [k]$，都有 $\mathrm{GS}(\sigma_i) = (\alpha_i)^{A\cap B}$、$\mathrm{GS}(\tau_i) = (\beta_i)^{\overline{A\cap B}}$，并且 $P_{(\tau_i, \sigma_{i+1})}$, $\overline{0 \leq i \leq k}$ 是由命题 3.3 得到的轨迹。因此，根据 $P_{(\tau_i, \sigma_{i+1})}$ 对每个 $i \in \{0, \ldots, k\}$ 的底单形保持性质，我们注意到底单形在 $\eta(P)$ 中恰好于 $\tau_0, \sigma_1, \tau_1, \ldots, \sigma_k, \tau_k, \sigma_{k+1}$ 处发生变化。因此 $\mu(\eta(P)) : \mathrm{GS}(\tau_0), \mathrm{GS}(\sigma_1), \mathrm{GS}(\tau_1) \ldots, \mathrm{GS}(\sigma_k), \mathrm{GS}(\tau_k), \mathrm{GS}(\sigma_{k+1})$，这恰好就是 $P_\circ$ 由此可得， $\mu(\eta(P))$ 是 $P_\circ$

情形 II: 令 $\beta \in$临界点$_{q-1}^{\mathcal{W}_{A\cap B}}(\overline{A \cap B})$ 和 $\alpha \in$临界点$_{q-1}^{\mathcal{W}_{\bar{A}}}(\bar{A})$，或 $\beta \in$临界点$_{q-1}^{\mathcal{W}_{A\cap B}}(\overline{A \cap B})$ 和 $\alpha \in$临界点$_{q-1}^{\mathcal{W}_{\bar{B}}}(\bar{B})_\circ$

不失一般性，令，

$P : (\beta =)\ (\beta_0)^{(q-1)}_{A\cap B}, (\alpha_1)^{(q-2)}_{A\cap B}, (\beta_1)^{(q-1)}_{A\cap B} \ldots (\alpha_p)^{(q-2)}_{A\cap B}, (\beta_p)^{(q-1)}_{A\cap B}, (\beta_p)^{(q-1)}_{\bar{A}}, (\gamma_p)^{(q)}_{\bar{A}}, \ldots (\beta_{p+l-1})^{(q-1)}_{\bar{A}},$
$(\gamma_{p+l-1})^{(q)}_{\bar{A}}, (\beta_{p+l})^{(q-1)}_{\bar{A}}\ (= \alpha).$

设 $Q = \beta P(\beta_p)^{A\cap B}$, $R = (\gamma_p)_{\bar{A}} P \alpha_\circ$ 因此 $\eta(P) = P_{(\tau_0, \sigma_1)}\ P_{(\tau_1, \sigma_2)}\ \cdots, P_{(\tau_p, \sigma_{p+1})} R$，其中 τ是 S'_β 中唯一的 $\mathcal{W}$-临界单形，而 $(\sigma_i, \tau_i) \in \mathcal{W}$是唯一的一对，使得对于 $i \in [p]$，$\mathrm{GS}(\sigma_i) = (\alpha_i)^{A\cap B}$，$\mathrm{GS}(\overline{\tau_i}) = (\beta_i)^{A\cap B}$，且 $\overline{\sigma_{p+1}} = (\beta_p)_{\bar{A}_\circ}$ 我们回顾一下，对于 $P_{(\tau_p, \sigma_{p+1})}$，底单形保持不变。因此，再次根据 $P_{(\tau_i, \sigma_{i+1})}$ 的底单形保持性质，对每个 $i \in \{0, \ldots, p\}$，我们注意到底单形恰好在 $\tau_0, \sigma_1, \tau_1, \ldots, \sigma_p, \tau_p$ 处发生变化。令 $R' : (\beta_p)_{\bar{A}}, R_\circ$ 因此$\mu(\eta(P)) : \mathrm{GS}(\tau_0), \mathrm{GS}(\sigma_1), \mathrm{GS}(\tau_1) \ldots, \mathrm{GS}(\sigma_p), \mathrm{GS}(\tau_p)\ R'$，我们注意到这恰好就是 $P_\circ$ 这证明了引理 3.3.1。

□

引理 3.3.2. 设 $P \in \mathrm{MV}(\beta, \alpha)$，其中 $\beta \in D_q(X)\ \alpha \in D_{q-1}(X)$， $q \geq 1_\circ$ 那么， P的权重与 $\eta(P)$的权重相同。换言之，对每个 $P \in \mathrm{MV}(\beta, \alpha)$，都有 $w_M(P) = w(\eta(P))_\circ$

证明。 设 $P \in \mathrm{MV}(\beta, \alpha)$，其中 $\beta \in D_q(X)$， $\alpha \in D_{q-1}(X)_\circ$ 根据 η 的构造，显然，如果 $\beta \in$临界点$_q^{\mathcal{W}_{\bar{A}}}(\bar{A})$、 $\alpha \in$临界点$_{q-1}^{\mathcal{W}_{\bar{A}}}(\bar{A})$ 或 $\beta \in$临界点$_q^{\mathcal{W}_{\bar{B}}}(\bar{B})$， $\alpha \in$临界点$_{q-1}^{\mathcal{W}_{\bar{B}}}(\bar{B})$，那么结论显然成立。因此，只需证明以下三种情况。

情形 I: 设 $\beta \in (A \cap B)$ 的临界点和 $\alpha \in (A \cap B)$ 的临界点。设 $P: (\beta =)\ (\beta_0)^{(q-1)}_{A\cap B}, (\alpha_1)^{(q-2)}_{A\cap B}, (\beta_1)^{(q-1)}_{A\cap B}, \ldots, (\alpha_k)^{(q-2)}_{A\cap B}, (\beta_k)^{(q-1)}_{A\cap B}, (\alpha_{k+1})^{(q-2)}_{A\cap B}\ (= \alpha)_\circ$ 回顾第 1 节可知，这条轨迹的权重为，

$$w_M(P) = -\left(\prod_{i=0}^{k-1} -\langle \beta_i, \alpha_{i+1}\rangle \langle \beta_{i+1}, \alpha_{i+1}\rangle\right) \langle \beta_k, \alpha_{k+1}\rangle$$

$$= -\langle\beta_0,\alpha_1\rangle \prod_{i=1}^{k}(-\langle\beta_i,\alpha_i\rangle\langle\beta_i,\alpha_{i+1}\rangle).$$

w_0 w_i w_M = 我们将 $\langle\beta_0,\alpha_1\rangle$ 记作 $-\prod_{i=0}^{k} w_i$ ，对于每个 $i\in[k]$，将 $-\langle\beta_i,\alpha_i\rangle\langle\beta_i,\alpha_{i+1}\rangle$ 记作 。因此 (P) 。

设 $g_q(\beta) = \tau_0$ 且 $g_{q-1}(\alpha) = \sigma_{k+1}$。设 $(\sigma_i,\ \tau_i) \in \mathcal{W}'$ 为满足以下条件的唯一一对：对每个 $i\in[k]$，$\mathrm{GS}(\sigma_i) = (\alpha_i)^{A\cap B}$，且 $\mathrm{GS}(\tau_i) = (\beta_i)^{A\cap B}$。于是，$\eta(P)$ 定义为

$$P' : P_{(\tau_0,\sigma_1)}, P_{(\tau_1,\sigma_2)}, \ldots, P_{(\tau_k,\sigma_{k+1})}.$$

其中 $P_{(\tau_{i-1},\sigma_i)}$ ，$i\in[k+1]$ 的含义与命题 3.4 后所述的通常含义相同。这里注意，对于每个 $i\in[k]$，P' 的子序列 $\tau_0 P'\sigma_1$ 和 $\sigma_i P'\sigma_{i+1}$ 本身都是 $\mathcal{W}$-轨迹。

因此，设 $w(\tau_0 P'\sigma_1) = w'_0$，并且对每个 $i\in[k]$，设 $w(\sigma_i P'\sigma_{i+1}) = w'_i$。那么 $w(P') = \prod_{i=0}^{k} w'_i$。

令 $(\beta_0)_{\overline{A\cap B}} = [\bar{c}_{i_0},\ldots,\bar{c}_{i_{q-1}}]$、$(\alpha_1)_{\overline{A\cap B}} = [\bar{c}_{i_0},\ldots,$ $\bar{c}_{i_m}\ \cdots\ \bar{c}_{i_{q-1}}]$ $w_0 = \langle\ \beta_0\ _{A\cap B}\ \ \alpha_1\ _{A\cap B}\rangle = ,,$。因此 $(\ ),(\ ),(\ )$ 。这里我们注意到 ,,,,,,, $\langle\beta_0\ \alpha_1\rangle = \ -1\ ^m$ $\langle\tau_{A\cap B}\ \sigma_{A\cap B}\rangle = \overline{\langle\tau\ \sigma\rangle}\ \ \overline{\langle\tau_{\bar{A}}\ \sigma_{\bar{A}}\rangle} = \langle\tau\ \sigma\rangle\ \ \langle\tau_{\bar{B}}\ \sigma_{\bar{B}}\rangle = \langle\tau\ \sigma\rangle$ 对于 $\tau,\sigma\in X$。此后，我们将在整个证明过程中使用这一观察，而不再赘述。

现在我们确定用于计算 w'_0 的 $P_{(\tau_0,\sigma_1)}$。现在，$\tau_0 = g_q(\beta) = [\bar{a}_{i_0}, b_{i_0},\ldots,b_{i_{q-1}}]$。因此，我们参考观察 3(i) 来确定 $P_{(\tau_0,\sigma_1)}$ 。

如果 $m>0$，那么 $P_{(\tau_0,\sigma_1)}$： τ_0，σ_1，其中 $\sigma_1 = [\bar{a}_{i_0}, b_{i_0},\ldots,b_{i_m},\ldots,b_{i_{q-1}}]$。那么 $w'_0 = \langle\tau_0,\ \sigma_1\rangle = (-1)^{m+1} = -w_0$。

如果 $m=0$，那么 $P_{(\tau_0,\sigma_1)}$：

τ_0 σ_1 $\sigma =$ ， $\widetilde{\sigma_1}$， $\widetilde{\tau_1}$， ，其中 $[\bar{a}_{i_1},\bar{b}_{i_1},\ldots,\ldots\bar{b}_{i_{q-1}}]$ $w'_0 = \langle\tau_0\ \widetilde{\sigma_1}\rangle\ -\langle\widetilde{\tau_1}\ \widetilde{\sigma_1}\rangle\langle\widetilde{\tau_1}\ \sigma_1\rangle = \ -1\ \ -1\ \ -1\ ^0 = -1 = -\ -1\ ^m =$ $\widetilde{\sigma_1} = [\bar{a}_{i_0}, b_{i_1},\ldots,b_{i_{q-1}}]$、$\widetilde{\tau_1} = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, b_{i_1},\ldots,b_{i_{q-1}}]$。然后，，(，，) ( ) (( ) ( )) ( ) $-w_0$。

现在，令 $(\beta_i)_{\overline{A\cap B}} = [\bar{c}_{j_0},\ldots,\bar{c}_{i_{q-1}}]$、$(\alpha_i)_{\overline{A\cap B}} = [\bar{c}_{j_0},\ldots\widehat{\bar{c}_{j_p}},\ldots,\bar{c}_{i_{q-1}}]$、$(\alpha_{i+1})_{\overline{A\cap B}} = [\bar{c}_{j_0},\ldots\widehat{\bar{c}_{j_m}},\ldots,\bar{c}_{i_{q-1}}]$，对每个 $i\in[k]$ 均成立。因此 $w_i = -\langle\beta_i,\alpha_i\rangle\langle\beta_i,\alpha_{i+1}\rangle = -(-1)^p(-1)^m$。

现在我们对每个 $i\in[k]$ 计算 w'_i。我们利用观察 3(i) 和观察 3(ii) 来确定 $P_{(\tau_i,\sigma_{i+1})}$ ，其中 $i\in[k]$。

这里，如果 $p>0$，那么根据观察 2(a)，$\sigma_i = [\bar{a}_{j_0}, b_{j_0},\ldots,b_{j_p},\ldots,b_{j_{q-1}}]$，$\tau_i = [\bar{a}_{j_0}, b_{j_0},\ldots,b_{j_{q-1}}]$。

现在，如果 $m=0$，那么根据观察 3(i) $P_{(\tau_i,\sigma_{i+1})}$： τ_i，$\widetilde{\sigma_i}$，$\widetilde{\tau_i}$，σ_{i+1}，其中 $\widetilde{\sigma_i} = [\bar{a}_{j_0},\ \bar{b}_{j_1},\ldots,\bar{b}_{j_{q-1}}]$，$\widetilde{\tau_i} = [\bar{a}_{j_0}, \bar{a}_{j_1}, b_{j_1},\ldots,b_{j_{q-1}}]$，$\sigma_{i+1} = [\bar{a}_{j_1}, b_{j_1},\ldots,b_{j_{q-1}}]$。因此 $w'_i = w(\sigma_i P'\sigma_{i+1}) = (-\langle\tau_i,\ \sigma_i\rangle\langle\tau_i,\ \widetilde{\sigma_i}\rangle)\ (-\langle\widetilde{\tau_i},\ \widetilde{\sigma_i}\rangle\langle\widetilde{\tau_i},\ \sigma_{i+1}\rangle) = (-(-1)^{p+1}(-1))(-(-1)(-1)^0) = -(-1)^p(-1)^0 = w_i$。

若 $m>0$，则同样由观察 3(i) 可得，$P_{(\tau_i,\sigma_{i+1})}$：$\tau_i,\sigma_{i+1}$，其中 $\sigma_{i+1} = [\bar{a}_{j_0}, b_{j_0},\ldots,$ $b_{j_m},\ldots,b_{j_{q-1}}]$。因此 $w'_i = w(\sigma_i P'\sigma_{i+1}) = -\langle\tau_i,\sigma_i\rangle\langle\tau_i,\sigma_{i+1}\rangle = -(-1)^{p+1}(-1)^{m+1} = w_i$。

接下来，若 $p=0$，则由观察 2(a) 可得，$\sigma_i = [\bar{a}_{j_1}, b_{j_1},\ldots,b_{j_{q-1}}]$，$\tau_i = [\bar{a}_{j_0}, \bar{a}_{j_1}, b_{j_1},\ldots,b_{j_{q-1}}]$。因此，由观察 3(ii) 可得，$m>0$，且 $P_{(\tau_i,\sigma_{i+1})}$：$\tau_i,\widetilde{\sigma_i},\widetilde{\tau_i},\sigma_{i+1}$，其中，$\widetilde{\sigma_i} = [\bar{a}_{j_0}, b_{j_1},\ldots,b_{j_{q-1}}]$，$\widetilde{\tau_i} = [\bar{a}_{j_0}, b_{j_0}, b_{j_1},\ldots,b_{j_{q-1}}]$，$\sigma_{i+1} = [\bar{a}_{j_0}, b_{j_0},\ldots,b_{j_m},\ldots,b_{j_{q-1}}]$。所以，$w'_i = (-\langle\tau_i,\sigma_i\rangle\langle\tau_i,\widetilde{\sigma_i}\rangle)\ (-\langle\widetilde{\tau_i},\widetilde{\sigma_i}\rangle\langle\widetilde{\tau_i},\sigma_{i+1}\rangle) = (-(-1)^0(-1))(-(-1)(-1)^{m+1}) = -(-1)^0(-1)^m = w'_i$。

因此，$w_M(P) = -\prod_{i=0}^{k} w_i = \prod_{i=0}^{k} w'_i = w(\eta(P))$.

情形 II： 设，$\beta\in$ 临界点 $\mathcal{W}_{q-1}^{A\cap B}(\overline{A\cap B})$ 和 $\alpha\in$ 临界点 $\mathcal{W}_{q-1}^{\bar{A}}(\bar{A})$。

定义如下的 $P\in\mathrm{MV}(\beta,\ \alpha)$。

$$(\beta =)\ (\beta_0)_{A\cap B}^{(q-1)}, (\alpha_1)_{A\cap B}^{(q-2)}, (\beta_1)_{A\cap B}^{(q-1)} \ldots (\alpha_p)_{A\cap B}^{(q-2)}, (\beta_p)_{A\cap B}^{(q-1)}, (\beta_p)_{\bar{A}}^{(q)}, (\gamma_p)_{\bar{A}}^{(q)}, \ldots (\beta_{p+l-1})_{\bar{A}}^{(q-1)},$$
$$(\gamma_{p+l-1})_{\bar{A}}^{(q)}, (\beta_{p+l})_{\bar{A}}^{(q-1)}\ (=\alpha).$$

我们回顾一下第 1 节， P 的权重由下式给出：

$$
\begin{aligned}
w_M(P) &= -\left(\prod_{i=0}^{p-1} -\langle \beta_i, \alpha_{i+1}, \rangle \langle \beta_{i+1}, \alpha_{i+1}\rangle\right)\left(\prod_{i=p}^{p+l-1} -\langle \gamma_i, \beta_i\rangle\langle \gamma_i, \beta_{i+1}\rangle\right) \\
&= -\langle \beta_0, \alpha_1\rangle\left(\prod_{i=1}^{p-1} -\langle \beta_i, \alpha_i, \rangle \langle \beta_i, \alpha_{i+1}\rangle\right)\langle \beta_p, \alpha_p\rangle\langle \gamma_p, \beta_p\rangle\left(\langle \gamma_p, \beta_{p+1}\rangle \prod_{i=p+1}^{p+l-1} -\langle \gamma_i, \beta_i\rangle\langle \gamma_i, \beta_{i+1}\rangle\right) \\
&= \left(-\prod_{i=0}^{p-1} w_i\right)\langle \beta_p, \alpha_p\rangle\langle \gamma_p, \beta_p\rangle w(R),
\end{aligned}
$$

其中 $w_0 = \langle \beta_0, \ \alpha_1\rangle$ 和 $w_i = -\langle \beta_i, \ \alpha_i, \ \rangle\langle \beta_i, \ \alpha_{i+1}\rangle$，如情形 I 中所引入的，并且 $R = (\gamma_p)_{\bar{A}} P \alpha$ 是一条 $\mathcal{W}_{\bar{A}}$-轨迹。

设 $g_q(\beta) = \tau$，并令 $(\sigma_i, \ \tau_i) \in \mathcal{W}'$ 为唯一一对，使得 $\mathrm{GS}(\sigma_i) = (\alpha_i)_{A\cap B}$，$\mathrm{GS}(\tau_i) = (\beta_i)_{A\cap B}$。令 $\sigma_{p+1} = (\beta_p)_{\bar{A}}$，对每个 $i \in [p]$。则 $\eta(P)$ 由下式给出，

$$
P' : P_{(\tau_0,\sigma_1)}, P_{(\tau_1,\sigma_2)}, \ldots, P_{(\tau_{p-1},\sigma_p)}, P_{(\tau_p,\sigma_{p+1})}, R,
$$

其中，对每个 $i \in [p]$，$P_{(\tau_i,\sigma_{i+1})}$ 具有命题 3.4 之后讨论的通常含义。这里注意到，$\tau_0 P' \sigma_p$ 和 $\tau_p P'(\gamma_p)_{\bar{A}} = P_{(\tau_p,\sigma_{p+1})}$ 是 $\mathcal{W}$- 轨迹。因此，$w(P') = w(\tau_0 P' \sigma_p)(-\langle \tau_p, \ \sigma_p\rangle) w(\tau_p P'(\gamma_p)_{\bar{A}}) w(R)$。

现在，我们采用与情形 I 类似的论证和计算，证明 $w(\tau_0 P' \sigma_p) = -\prod_{i=0}^{p-1} w_i$。由于 R 的权重保持不变，只需证明 $-\langle \tau_p, \sigma_p\rangle w(\tau_p P'(\gamma_p)_{\bar{A}}) = \langle \beta_p, \alpha_p\rangle\langle \gamma_p, \beta_p\rangle$, .

设 $(\beta_p)_{A\cap B} = [\bar{c}_{i_0}, \ldots, \bar{c}_{i_{q-1}}]$、$(\alpha_p)_{A\cap B} = [\bar{c}_{i_0}, \ldots, \widehat{\bar{c}_{i_r}}, \ldots, \bar{c}_{i_{q-1}}]$，以及 $(\gamma_p)_{\bar{A}} = (\beta_p)_{\bar{A}} \cup \{\bar{a}_{i_m}\} = [\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_m}, \ldots, \bar{a}_{i_{q-1}}]$，$i_0 < i_1 < \cdots < i_m < \cdots < i_{q-1}$。因此，$\langle \beta_p, \alpha_p\rangle\langle \gamma_p, \beta_p\rangle = (-1)^r(-1)^m$。我们利用观察4(i)和4(ii)来确定 $P_{(\tau_p,\sigma_{p+1})}$。

$\bar{b}_{i_r}$，……，$b_{i_{q-1}}]$。因此，由观察2(a)可知，$P_{(\tau_p,\sigma_{p+1})}$：$\tau_p, \widetilde{\sigma_p}, \widetilde{\tau_p}, \ldots\ldots, \widetilde{\sigma_{p+q-2}}, \widetilde{\tau_{p+q-2}}, \sigma_{p+1}$，其中，$\widetilde{\sigma_p} = [\bar{a}_{i_0}, \bar{b}_{i_1}, \ldots, \bar{b}_{i_{q-1}}]$，$\widetilde{\tau_p} = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, \bar{b}_{i_1}, \ldots, \bar{b}_{i_{q-1}}]$，……，$\widetilde{\sigma_{p+q-2}} = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, \ldots, \bar{a}_{i_{q-2}}, \bar{b}_{i_{q-1}}]$，$\widetilde{\tau_{p+q-2}} = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, \ldots, \bar{a}_{i_{q-2}}, \bar{a}_{i_{q-1}}, \bar{b}_{i_{q-1}}]$，$\sigma_{p+1} = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, \ldots, \bar{a}_{i_{q-2}}, \bar{a}_{i_{q-1}}]$。因此，$\tau_p P'(\gamma_p)_{\bar{A}} = P_{(\tau_p,\sigma_{p+1})}, (\gamma_p)_{\bar{A}}$。于是，

$$
\begin{aligned}
-\langle \tau_p, \sigma_p\rangle w(\tau_p P'(\gamma_p)_{\bar{A}}) &= -(-1)^{r+1}\left(\prod_{i=1}^{q-1} -(-1)^i(-1^i)\right)(-1)^q(-(-1)^m) \\
&= -(-1)^{r+1}(-1)(-(-1)^m) \\
&= \langle \beta_p, \alpha_p\rangle\langle \gamma_p, \beta_p\rangle.
\end{aligned}
$$

如果 $r = 0$，那么同样根据观察 2(a)，$\sigma_p = [\bar{a}_{i_1}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_r}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$，$\tau_p = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_{q-1}}]$。因此，根据观察4(i)，$P_{(\tau_p,\sigma_{p+1})}$：$\tau_p, \widetilde{\sigma_p}\widetilde{\tau_p}, \ldots, \widetilde{\sigma_{p+q-3}}, \widetilde{\tau_{p+q-3}}, \sigma_{p+1}$，其中，$\widetilde{\sigma_p} = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, \bar{b}_{i_2} \ldots, \bar{b}_{i_{q-1}}]$，$\widetilde{\tau_p} = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, \bar{a}_{i_2}, \bar{b}_{i_2}, \ldots, \bar{b}_{i_{q-1}}]$，$\ldots$，$\widetilde{\sigma_{p+q-3}} = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, \ldots, \bar{a}_{i_{q-2}}, \bar{b}_{i_{q-1}}]$，$\widetilde{\tau_{p+q-3}} = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, \ldots, \bar{a}_{i_{q-2}}, \bar{a}_{i_{q-1}}\bar{b}_{i_{q-1}}]$，$\sigma_{p+1} = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, \ldots, \bar{a}_{i_{q-2}}, \bar{a}_{i_{q-1}}]$。现在，$\tau_p P'(\gamma_p)_{\bar{A}} = P_{(\tau_p,\sigma_{p+1})}, (\gamma_p)_{\bar{A}}$。因此，

$$
\begin{aligned}
-\langle \tau_p, \sigma_p\rangle w(\tau_p P'(\gamma_p)_{\bar{A}}) &= -(-1)^0\left(\prod_{i=2}^{q-1}(-1)^i(-1^i)\right)(-1)^q(-(-1)^m) \\
&= -(-1)^0(1)(-(-1)^m) \\
&= \langle \beta_p, \alpha_p\rangle\langle \gamma_p, \beta_p\rangle.
\end{aligned}
$$

因此，在这种情况下，我们也证明了 $w_M(P) = w(\eta(P))$。

情形 III： 设 $\beta \in \mathrm{Crit}_{q-1}^{\mathcal{W}_{A\cap B}}(A\cap B)$ 和 $\alpha \in \mathrm{Crit}_{q-1}^{\mathcal{W}_{\bar{B}}}(\bar{B})$。令 $P \in \mathrm{MV}(\beta,\ \alpha)$，其中，

$$(\beta =)\ (\beta_0)^{(q-1)}_{A\cap B}, (\alpha_1)^{(q-2)}_{A\cap B}, (\beta_1)^{(q-1)}_{A\cap B} \dots (\alpha_p)^{(q-2)}_{A\cap B}, (\beta_p)^{(q-1)}_{A\cap B}, (\beta_p)^{(q-1)}_{\bar{B}}, (\gamma_p)^{(q)}_{\bar{B}}, \dots (\beta_{p+l-1})^{(q-1)}_{\bar{B}},$$
$$(\gamma_{p+l-1})^{(q)}_{\bar{B}}, (\beta_{p+l})^{(q-1)}_{\bar{B}}\ (=\alpha).$$

现在，我们回顾第 1 节中的内容:

$$\begin{aligned} w_M(P) &= \left(\prod_{i=0}^{p-1} -\langle\beta_i, \alpha_{i+1},\rangle\langle\beta_{i+1}, \alpha_{i+1}\rangle\right)\left(\prod_{i=p}^{p+l-1} -\langle\gamma_i, \beta_i\rangle\langle\gamma_i, \beta_{i+1}\rangle\right) \\ &= \left(\prod_{i=0}^{p-1} w_i\right)\langle\beta_p, \alpha_p\rangle\langle\gamma_p, \beta_p\rangle w(R),\ \text{(by similar computations as in Case I)} \end{aligned}$$

其中 w_i 携带 与前述情形中的通常含义相同，且 $R = (\gamma_p)_{\bar{B}} P\alpha$ 是一条 $\mathcal{W}_{\bar{B}}$-轨迹。

如前所述，设 $g_q(\beta) = \tau_0$，并设 $(\sigma_i,\ \tau_i) \in \mathcal{W}'$ 是满足以下条件的唯一一对：$\mathrm{GS}(\sigma_i) = (\alpha_i)^{A\cap B}$，$\mathrm{GS}(\tau_i) = (\beta_i)^{A\cap B}$。令 $\sigma_{p+1} = (\beta_p)_{\bar{B}}$，对每个 $i \in [p]$ 均如此。则 $\eta(P)$ 由下式给出:

$$P' : P_{(\tau_0,\sigma_1)}, P_{(\tau_1,\sigma_2)}, \dots, P_{(\tau_{p-1},\sigma_p)}, P_{(\tau_p,\sigma_{p+1})}, R,$$

其中 $R = (\gamma_p)_{\bar{B}} P\alpha$，并且对每个 $i \in [p]$，$P_{(\tau_i,\sigma_{i+1})}$ 均具有在 η 的构造中所述的通常含义。这里注意到，$\tau_0 P'\sigma_p$ 和 $\tau_p P'(\gamma_p)_{\bar{B}}$ 是 $\mathcal{W}$-轨迹。因此 $w(P') = w(\tau_0 P'\sigma_p)(-\langle\tau_p,\ \sigma_p\rangle)w(\tau_p P'(\gamma_p)_{\bar{B}})w(R)$。

利用与情形 I 中类似的论证和计算，我们可以证明 $w(\tau_0 P'\sigma_p) = -\prod_{i=0}^{p-1} w_i$。因此，只需证明 $-\langle\tau_p, \sigma_p\rangle w(\tau_p P'(\gamma_p)_{\bar{B}}) = -\langle\beta_p,\ \alpha_p\rangle\langle\gamma_p,\ \beta_p\rangle$。

令 $\tau_p = (\beta_p)_{A\cap B} = [\bar{c}_{i_0}, \dots, \bar{c}_{i_{q-1}}]$，$(\gamma_p)_{\bar{B}} = [\beta_p, \alpha_p]_{A\cap B} = [\bar{c}_{i_0}, \dots, \widehat{\ \ }, \dots, b_{i_{q-1}}] = [b_{i_0}, \dots, b_{i_m}, \dots, b_{i_{q-1}}]$，$i_0 < i_1 < \dots < i_m < \dots < i_{q-1}$。因此，$\langle\beta_p,\ \alpha_p\rangle\langle\gamma_p,\ \beta_p\rangle = (-1)^r(-1)^m$。

现在，我们利用观察 4(ii)来确定 $P_{(\tau_p,\sigma_{p+1})}$。

如果 $r > 0$，那么由观察 2(a)可得 $\tau_p = [\bar{a}_{i_0}, b_{i_0}, \dots, b_{i_{q-1}}]$，$\sigma_p = [\bar{a}_{i_0}, b_{i_0}, \dots, b_{i_r}, \dots, b_{i_{q-1}}]$。因此，由观察 4(ii)可得 $P_{(\tau_p,\sigma_{p+1})}$：$\tau_p, \sigma_{p+1}$。因此，

$$\begin{aligned} -\langle\tau_p, \sigma_p\rangle w(\tau_p P'(\gamma_p)_{\bar{B}}) &= -\langle\tau_p, \sigma_p\rangle(-\langle\tau_p, \sigma_{p+1}\rangle\langle(\gamma_p)_{\bar{B}}, \sigma_{p+1}\rangle) \\ &= -(-1)^{r+1}(-(-1)^0(-1)^m) \\ &= -\langle\beta_p, \alpha_p\rangle\langle\gamma_p, \beta_p\rangle. \end{aligned}$$

如果 $r = 0$，那么由观察 2(a)可得 $\tau_p = [\bar{a}_{i_0}, \bar{a}_{i_1}, b_{i_1}, \dots, b_{i_{q-1}}]$，$\sigma_p = [\bar{a}_{i_1}, b_{i_1}, \dots, b_{i_r}, \dots, b_{i_{q-1}}]$。由观察 4(ii)可得 $P_{(\tau_p,\sigma_{p+1})}$：$\tau_p, \widetilde{\sigma_p}, \widetilde{\tau_p}, \sigma_{p+1}$，其中 $\widetilde{\sigma_p} = [\bar{a}_{i_0}, b_{i_1}, \dots, b_{i_{q-1}}]$，$\widetilde{\tau_p} = [\bar{a}_{i_0}, b_{i_0}, b_{i_1}, \dots, b_{i_{q-1}}]$，$\sigma_{p+1} = [b_{i_0}, \dots, b_{i_{q-1}}]$。因此，

$$\begin{aligned} -\langle\tau_p, \sigma_p\rangle w(\tau_p P'(\gamma_p)_{\bar{B}}) &= -\langle\tau_p, \sigma_p\rangle(-\langle\tau_p, \widetilde{\sigma_p}\rangle\langle\widetilde{\tau_p}, \widetilde{\sigma_p}\rangle)(-\langle\widetilde{\tau_p}, \sigma_{p+1}\rangle\langle(\gamma_p)_{\bar{B}}, \sigma_{p+1}\rangle) \\ &= -(-1)^0(-(-1)^1(-1)^1)(-(-1)^0(-1)^m) \\ &= -\langle\beta_p, \alpha_p\rangle\langle\gamma_p, \beta_p\rangle. \end{aligned}$$

因此，我们证明了对于每个 $P \in \mathrm{MV}(\beta, \alpha)$，都有 $w_M(P) = w(\eta(P))$。

□

现在我们准备证明下一个结果。

定理 3.4. 链复形 $\mathcal{D}_{\#}(X)$ 同构于 $\widetilde{X}$, $C_{\#}^{\mathcal{W}}(\widetilde{X},\mathbb{Z})$ 的 *Thom-Smale* 复形，即，

$$\mathcal{D}_{\#}(X) \cong C_{\#}^{\mathcal{W}}(\widetilde{X},\mathbb{Z}).$$

因此，$H_{\#}^{\mathcal{W}}(\widetilde{X},\mathbb{Z}) \cong H_{\#}^{\mathcal{D}}(X)$。

证明。我们此前已经证明，$C_{\#}^{\mathcal{W}}(\widetilde{X},\mathbf{Z})$ 与 $\mathcal{D}_{\#}(X)$ 之间存在同构 $f_{\#}$。现在只需证明 $f_{\#}$ 是一个链映射，也就是说，以下图表可交换。

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & C_q^{\mathcal{W}}(\widetilde{X},\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\partial_q^{\mathcal{W}}} & C_{q-1}^{\mathcal{W}}(\widetilde{X},\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_q} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle f_{q-1}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & \mathcal{D}_q(X) & \xrightarrow[\partial_{q-1}^{\mathcal{D}}]{} & \mathcal{D}_{q-1}(X) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

我们将证明，对每个 $q \geq 0$，$\partial_{q-1}^{\mathcal{D}} \circ f_q = f_{q-1} \circ \partial_q^{\mathcal{W}}$ 成立。只需证明这对生成元成立。

令 $\tau \in$临界点$_q^{\mathcal{W}}(\widetilde{X})$，并令 $f_q(\tau) = \beta$。现在，

$$\begin{aligned}
\partial_q^{\mathcal{D}}(f_q(\tau)) &= \partial_q^{\mathcal{D}}(\beta) \\
&= \sum_{\alpha \in D_{q-1}(X)} \left(\sum_{P \in \mathrm{MV}(\beta,\alpha)} w_M(P) \right) \alpha \\
&= \sum_{\alpha \in D_{q-1}(X)} \left(\sum_{P \in \mathrm{MV}(\beta,\alpha)} w_M(P) \right) f_{q-1}(g_{q-1}(\alpha)) \\
&= f_{q-1} \left(\sum_{\alpha \in D_{q-1}(X)} \left(\sum_{P \in \mathrm{MV}(\beta,\alpha)} w_M(P) \right) g_{q-1}(\alpha) \right).
\end{aligned}$$

令 $g_{q-1}(\alpha) = \sigma$，并令 $\eta(P) = P'$，其中每个 $P \in \mathrm{MV}(\beta,\alpha)$。现在，由引理 3.3.1 可知，$\eta$ 是 $\mathrm{MV}(\beta,\alpha)$ 与 $\Gamma(\tau,\sigma)$ 之间的双射。此外，由引理 3.3.2，$w_M(P) = w(\eta(P))$。因此，我们可以写成：

$$\begin{aligned}
\partial_q^{\mathcal{D}}(f_q(\beta)) &= f_{q-1} \left(\sum_{\sigma \in \mathrm{Crit}_{q-1}^{\mathcal{W}}(\widetilde{X})} \left(\sum_{\eta(P) \in \Gamma(\tau,\sigma)} w(\eta(P)) \right) \sigma \right), \text{ since } g_{q-1} \text{ is an isomorphism.} \\
&= f_{q-1} \left(\sum_{\sigma \in \mathrm{Crit}_{q-1}^{\mathcal{W}}(\widetilde{X})} \left(\sum_{P' \in \Gamma(\tau,\sigma)} w(P') \right) \sigma \right), \text{ where } \eta(P) = P'. \\
&= f_{q-1}(\partial_q^{\mathcal{W}}(\tau)).
\end{aligned}$$

因此，结论得证。

□

~定理 *1.2* 的证明。由定理 3.3 可知，$H_{\#}(X) \cong H_{\#}(X,\mathbf{Z})$。因此，根据定理 1.1 和定理 3.4，可得 $H_{\#}(\widetilde{X},\mathbf{Z}) \cong H_{\#}^{\mathcal{W}}(\widetilde{X},\mathbf{Z}) \cong H_{\#}^{\mathcal{D}}(X)$。于是 $H_{\#}(X) \cong H_{\#}^{\mathcal{D}}(X)$。

□

参考文献

.[1] Omer E˘gecio˘glu 和 Teofilo F. Gonzalez。单纯复形上的一个计算上难以处理的问题。计算几何，6(2):85–98，1996 年 5 月。[2] Robin Forman。胞腔复形的莫尔斯理论。数学进展，134(1):90–145，1998 年 3 月。[3] Robin Forman。离散 Morse 理论使用指南。$S\acute{}$洛林组合学研讨会，48，2002 年 10 月。35 页。[4] Michael Joswig 和 Marc E. Pfetsch。计算最优离散莫尔斯函数。离散数学电子札记，17:191–195，2004 年 10 月。[5] Thomas Lewiner、H´elio Lopes 和 Geovan Tavares。离散 Morse 理论的最优化探索。实验数学，12(3):271–285，2003 年 1 月。[6] Anupam Mondal、Sajal Mukherjee 和 Kuldeep Saha。通过离散 Morse 理论研究完全图匹配复形的拓扑。离散数学与理论计算机科学，26:3(组合学)，2024 年 11 月。[7] James R. Munkres、Steven G. Krantz 和 Harold R. Parks。代数拓扑学基础。Chapman and Hall/CRC，2025 年 4 月。