arXiv:2603.13216v1 [math.CV] 13 Mar 2026

与反射相关的折叠的发散图

Patrícia H. Baptistelli，Maria Elenice R. Hernandes

数学系，马林加州立大学

科伦坡大道 5790 号，87020-900，马林加 - PR，巴西 *

Miriam Manoel

数学系，ICMC，圣保罗大学，13560-970，邮政信箱 668，
圣卡洛斯 - SP，巴西 †‡

摘要

我们分析与反射相关的、定义在$(\mathbb{C}^n, 0)$上的k重映射芽发散图，其中$k,n \geq 2$；为此，我们将$(\mathbb{R}^n, 0)$上与对合相关的折叠理论推广到复数情形。在复数情形中，k重映射自然地与由反射生成的循环群相关，这为奇性的解析分类提供了指引。在相关反射满足横截性和线性条件时，会出现与非平凡特征值有关的某些条件，它们是同时共轭下的不变量。我们还完整分类了横截线性反射对及其对应的发散图。

关键词：反射、k重折叠、发散图、横截性、标准形。

2020年数学主题分类：20F55,58K40, 32S05

*电子邮箱：phbaptistelli@uem.br（通讯作者），merhernandes@uem.br

†电子邮箱：miriam@icmc.usp.br

‡作者获得的 CNPq 资助部分来自项目 407454/2023-3。

1 引言

光滑映射图的研究是微分几何和奇性理论中的核心课题，尤其是在根据映射的奇点（例如折叠、尖点等）进行映射分类的背景下。Dufour 在 [3], 提出了一套研究图的理论，区分了两种不同的情形：收敛图和发散图。从经典奇性理论的角度来看，收敛情形的研究更为成熟，这主要归因于预备定理的存在（该定理实质上指出，局部而言，全纯芽可写成关于一个变量的多项式，差一个可逆因子）。相比之下，发散情形缺少预备定理，使得研究更加复杂，也缺乏系统性。尽管如此，在某些背景下，人们仍对发散图作出了重要贡献，例如 [1, 5, 6, 7, 9]。

反射通常被视为线性映射，研究者从多个角度对其进行了研究和应用。它们在 Coxeter 和 Weyl 的理论中发挥着核心作用（[2, 4]）。例如，我们还引用了 G. Shephard 和 J. A. Todd 对 $\mathbb{C}^n$ 上线性反射群的完整分类 [8]。在我们的研究中，$(\mathbb{C}^n, 0)$ 上的反射自然地作为非线性映射出现，因为它们与折叠奇性相关（见定义 2.1）。具体而言，$(\mathbb{C}^n, 0)$ 上的折叠发散图的分类，是通过它们与相应反射的关联推导出来的。

更准确地说，对于 $s \leq n$，我们证明，两个 s 折叠发散图在 Mather 群 $\mathcal{A} = \mathcal{R} \times \mathcal{L}$ （右左等价）下等价，当且仅当由相关的 s 元反射元组得到的乘积群共轭（见定理 4.4）。我们的结果推广了文献 [7] 中所研究的 $(\mathbb{R}^n, 0)$ 对应情形。

如上所述，本文致力于研究发散图，其中映射芽在$(\mathbb{C}^n, 0)$上的奇性为折叠奇性，且$n \geq 2$。我们讨论折叠的发散图分类与$(\mathbb{C}^n, 0)$上相关反射的分类之间的关联。我们的研究动机主要源于 Mancini、Manoel 和 Teixeira [7], 的研究，作者在其中探讨了与$(\mathbb{R}^n, 0)$上的对合相关的折叠发散图分类。在此背景下，对合是一个阶为 2 的微分同胚芽，其不动点子流形的余维可以是 1 到$n - 1$之间的任意值。在 [7] 中，作者讨论了余维为 1 且每个折叠都与唯一一个对合相关的情形。在复数情形下，反射是$(\mathbb{C}^n, 0)$ 上的有限阶双全纯映射芽，其不动点集是余维为 1 的子流形。在这种情况下，k重折叠自然与由一个阶为k的反射生成的循环群相关联。

本文探讨了这一根本差异所带来的影响。更重要的是，

本文所发展的复框架扩展阐明了实数情形标准形的代数表达式中出现的某些不变量，而这些不变量近二十年来一直未得到解释。

对于 $k \geq 2$ 整数，我们研究与反射相关的k重映射$p : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^n,0)$，即满足$p \circ \alpha = p$。此外，对于由整数构成的向量$k = (k_1, \ldots, k_s)$，我们研究发散图

$$(p_1, \ldots, p_s) : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n \times \cdots \times \mathbb{C}^n, 0),$$

以及它们与s元反射元组$(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$的关联，其中$p_i$是与反射 α_i相关的k_i重映射，也就是说，

$$p_i \circ \alpha_i = p_i, \ \ i = 1 \ldots, s.$$

简言之，我们称$(p_i)_s$与$(\alpha_i)_s$相关。我们主要关注如何根据s元反射元组$(\alpha_i)_s$的分类，对图$(p_i)_s$进行分类和识别。尤其是，受 [7] 启发，我们致力于对与线性反射横截集相关的k重映射进行分类。

本文结构如下。第 2 节分析反射与k重映射之间的相互作用，后文将会用到这些分析。第3节专门讨论与阶为k的反射相关的k重映射。尤其是，我们证明，在k重奇性的类别中，与给定反射相关这一关系是关于 $\mathcal{L}$-等价的完全不变量（定理 3.3）。第4节研究k重映射的发散图，首先借助相关反射确立这些图的等价性（定理4.3）。随后，我们将此结果用于给出满足相关反射对的线性和横截条件的二重映射图的显式标准形（定理4.11和4.13）。

2 与反射相关的k重折叠

本节旨在描述k重折叠与$(\mathbb{C}^n, 0)$上的反射之间的关系，其中k、$n \geq 2$，并阐述由这种联系所产生的结果。

（复）反射是有限阶 φ 的映射芽：$(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$，其不动点集 $\mathrm{Fix}(\varphi) = \{x \in (\mathbb{C}^n, 0); \ \varphi(x) = x${v40>是余维为 1 的子流形。对于任意$j$，如果$m \geq 2$是反射 φ^j 的阶，且

$$\varphi^j = \underbrace{\varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{j \text{ times}},$$

3

那么 m =~~r 最大公约数(j,r)~~，其中 最大公约数$(j,\ r)$是j和r的最大公约数。

我们还回顾 Mather 群 $\mathcal{A} = \mathcal{R} \times \mathcal{L}$，它由双全纯映射芽对 (h, l) 组成，其中 $\mathrm{h}, \mathrm{l} : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$，并在全纯映射芽 $\mathrm{f} : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ 的集合上按如下方式标准作用：$(\mathrm{h}, \mathrm{l}) \cdot \mathrm{f} = \mathrm{l} \circ \mathrm{f} \circ \mathrm{h}^{-1}$。对于 $\mathrm{k} \geq 2$，若一个映射芽与 $\mathrm{f}_1 : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ $\mathcal{A}$-等价，则称其为 k 重奇点，或简称 k 重映射，

$$f_1(x) = (x_1^k, x_2, \ldots, x_n) \tag{1}$$

对应$x = (x_1, \ldots\ldots, x_n) \in (\mathbb{C}^n, 0)$。

为简便起见，本文中我们省略“映射芽”一词，将（双）全纯映射芽简称为（双）全纯映射。

定义 2.1。给定一个反射 φ 和定义在$(\mathbb{C}^n, 0)$上的一个k重映射f，若<style id='f'>$\mathrm{f} \circ \varphi = f$，则称$f$与$\varphi$相关，并称 φ 与f相关。

根据此定义可立即得知，若 φ 与f相关，则由 φ 生成的群 $\langle\varphi\rangle$ 中的任意反射都与f相关；因此，与k重折叠相关的反射，其阶不一定是k。

对于式（1）中给出的典范k重折叠f_1，我们将 $\varphi_1 :\ (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^n,0)$ 记作典范线性反射

$$\varphi_1(x) = (\lambda x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{2}$$

其中 $\lambda = e^{\frac{2\pi i}{k}}$是第一个本原$k$次单位根。注意，$\varphi_1$ 生成一个循环群$\langle\varphi_1\rangle \simeq \mathbf{Z}_k$。根据式（1）和式（2），我们还引入以下自然记号：对于$i = 1, \ldots, n$，将这些k重折叠记作

$$f_i(x) = (x_1, \ldots, x_i^k, \ldots, x_n) \tag{3}$$

及其相关的典范反射

$$\varphi_i(x) = (x_1, \ldots, \lambda x_i, \ldots, x_n). \tag{4}$$

对于f_i的奇点集 $\Sigma(f_i)$，显然有

$$\Sigma(f_i) = \mathrm{Fix}(\varphi_i), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

现在我们定义反射集合上的等价关系。

定义 2.2. 若两个反射 $\alpha, \beta : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ 共轭，则称它们等价；也就是说，若 $\beta = h \circ \alpha \circ h^{-1}$，其中 h 是 $(\mathbb{C}^n, 0)$上的双全纯映射。

接下来，我们介绍一系列关于k重折叠奇性以及$(\mathbb{C}^n, 0)$上的反射的结果，这些结果推广了 [7] 关于$(\mathbb{R}^n,0)$上的折叠和对合的结果。对于有关规范k重折叠f_i（如式 (3)）及其规范相关反射 φ_i（如式 (4)）的结果，为简便起见，我们固定$i = 1$。

引理 2.3. 对于式 *(1)* 中给出的 f_1，任何与 f_1 相关的反射都属于群 $\langle\varphi_1\rangle$，其中 φ_1 由式 *(2)* 给出。

证明。令 $\rho: (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ 为一个满足 $\mathrm{f}_1 \circ \rho = \mathrm{f}_1$ 的反射。设其坐标函数为 $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$，对于 $\mathrm{x} = (\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n) \in (\mathbb{C}^n, 0)$，我们有 $(\rho_1(\mathrm{x}))^k = \mathrm{x}_1^k$，因此$\rho_1(\mathrm{x}) = \lambda^j \mathrm{x}_1,$，其中 $\lambda = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{ik}}$ 且 $\mathrm{j} \in \{1, \ldots, \mathrm{k}-1\}$。此外，对于所有 $\mathrm{i} \in \{2, \ldots, \mathrm{n}\}$，都有 $\rho_i(\mathrm{x}) = \mathrm{x}_i$。因此，$\rho \in \langle\varphi_1\rangle$。 □

以下结果推广了上述引理。

命题 2.4。对于一个 k 重映射 f 和式 *(2)* 中给出的 φ_1，任何与 f 相关的反射都属于 $h\langle\varphi_1\rangle h^{-1}$，其中 h 满足 $f = (h,l) \cdot f_1$, 且$(h,l) \in \mathcal{R} \times \mathcal{L}$。

证明。显然，$h\langle\varphi_1\rangle h^{-1}$ 中的元素都是与f相关的反射。现在，设 ρ 是一个反射，满足 $f \circ \rho = f$。于是$f_1 \circ (h^{-1} \circ \rho \circ h) = f_1,$，结合引理 2.3 可推出 $\rho \in h\langle\varphi_1\rangle h^{-1}$。

□

例 2.5。我们计算 4-fold f 的反射群：$(\mathbb{C}^3, 0) \to \mathbb{C}^3, 0)$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = \big((x_1 + x_3)^2 - x_3^4,\ x_3^4 + x_1 + x_3,\ 2x_2\big). \tag{6}$$

我们有 $\mathrm{f} = (\mathrm{h}, \mathrm{l}) \cdot \mathrm{f}_1,$，其中 f_1 由 (1) 给出，$\mathrm{l}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3) = (\mathrm{x}_2^2 - \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2, 2\mathrm{x}_3)$，且 $\mathrm{h}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3) = (\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2, \mathrm{x}3, -\mathrm{x}_1)$。对于如 (2) 中的 φ_1，其中 $\lambda = \mathrm{i}$，由命题 2.4 可知，由 $\varphi = \mathrm{h} \circ \varphi_1 \circ \mathrm{h}^{-1}$ 生成的群，

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + (1-i)x_3,\ x_2,\ ix_3),$$

是与f相关的反射群。

下一个结果揭示了k-折奇性在 $\mathcal{A}$-等价下的轨道，如何作为一组与反射相关的k-折叠进行分层。

命题 2.6. 设 f 和 g 是 k 重奇点，且 $g = (h, l) \cdot f$，其中$(h, l) \in \mathcal{R} \times \mathcal{L}$。那么，$f$ 和 g 相关的反射群由 h 共轭；更准确地说，若 $\langle\varphi\rangle$是与 f 相关的反射群，则 $h\langle\varphi\rangle h^{-1}$ 是与 g 相关的反射群。

证明. 由命题 2.4 可知，与f相关的反射群是$h_1\langle\varphi_1\rangle h_1^{-1}$，其中$h_1 \in \mathcal{R}$。现在将此命题应用于$g$，可得

$$(h \circ h_1)\langle\varphi_1\rangle(h \circ h_1)^{-1} = h\langle h_1\varphi_1 h_1^{-1}\rangle h^{-1}$$

是与g相关的反射群，由此得到结论。 □

现在我们给出命题 2.4 的另一个推论，它推广了（5）。

命题 2.7. 设 $f: (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ 是与反射 φ on $(\mathbb{C}^n, 0)$相关的一个 k 重映射。则 $\Sigma(f) = $不动点$(\varphi)$。

这里自然会提出一个问题：给定一个阶为$k \geq 2$的反射 φ，是否存在一个与 φ相关的k重映射？我们有：

命题 2.8. 给定一个阶为 $k \geq 2$、作用于$(\mathbb{C}^n, 0)$ 上的反射 φ，存在一个与 φ相关的 k 重映射。

证明. 每个反射 φ 都与其线性部分$d\varphi(0)$共轭。事实上，考虑平均共轭$H : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$,

$$H = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}(d\varphi(0))^{-j} \circ \varphi^j,$$

从而得到 $H \circ \varphi = d\varphi(0) \circ H$。由于 $d\varphi(0)$ 也是一个阶为k的反射，其标准形为φ_1^j，其中$j \in \{1, \ldots\ldots k-1\}$。因此，存在$h \in \mathcal{R}$，使得 $\varphi = h \circ \varphi_{j1} \circ h^{-1}$，且$f = f_1 \circ h^{-1}$ 是一个与 φ相关的k重映射。 □

现在，我们结合命题 2.6 和命题 2.8，得到如下结论：

定理 2.9。 给定 $k \geq 2$，任意阶为 k 的循环反射群都可实现为与一个 k 重映射奇点相关的反射群。

根据上述定理 2.9，在本文余下部分中，我们使用“反射群”一词来指由一个反射生成的循环群。

3 k 重映射与阶为k的反射相关

本节中，我们细化命题 2.6 中得到的分层。对于一个固定的阶为$k \geq 2$的反射，我们证明，在 $\mathcal{A}$-等价下，与之相关的k重奇性的轨道可约化为 $\mathcal{L}$-等价（定理 3.3 和推论 3.5）。换言之，对于任意

在$(\mathbb{C}^n,0)$上的反射 φ，与 φ 相关显然是 $\mathcal{L}$-等价下的不变量；我们将证明，若此外 φ 的阶为k，那么这个不变量实际上在k重奇性的类中是完备的。

作为预备步骤，我们先建立以下引理。

引理 3.1。设 $l:\ (\mathbb{C}^n,\ 0)\ \to(\mathbb{C}^n,\ 0)$ 是一个全纯映射，并且 $g\ =l\ \circ f_i$ 是某个 $i\ =1,\ \ldots,$ n 的 k 重映射，其中 f_i 满足 (3)。则 l 是一个双全纯映射。

证明。为便于叙述，不妨选取 $i\ =\ 1$。记 $x\ =x_1, y\ =(x_2,\ldots,\ x_n)$ 以及 $l\ =(dl)_0+$ R，其中 R 是阶大于 1 的余项。写成矩阵形式，

$$(dg)_0=(dl)_0(df_1)_0=\left(\begin{array}{c|c} a & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{n-1} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline 0 & D \end{array}\right),$$

其中 $a\ \in\mathbb{C}$为标量，B、C、D 为矩阵。

不妨设 D 可逆，因为 g 是一个 k 重映射。因此，$\mathrm{rank}(dl)_0=n\ -1$ 当且仅当 $a\ -$ $BD^{-1}C\ =0$。下面证明 $a\ -BD^{-1}C\ \neq 0$。

考虑矩阵如下的线性同构

$$L=\left(\begin{array}{c|c} 1 & -BD^{-1} \\ \hline 0 & D^{-1} \end{array}\right).$$

Then

$$L\circ l\circ f_1(x,y)=L\circ l(x^k,y)=\left(\begin{array}{c|c} a-BD^{-1}C & 0 \\ \hline D^{-1}C & I_{n-1} \end{array}\right)\begin{pmatrix} x^k \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} U_1(x,y) \\ U_2(x,y) \end{pmatrix},$$

即,

$$L\circ l\circ f_1(x,y)=((a-BD^{-1}C)x^k+U_1(x,y),\alpha(x,y)),$$

其中 $\alpha(\mathrm{x,\ y})\ =\mathrm{D}^{-1}\mathrm{C}x^k+\mathrm{y}\ +\mathrm{U}_2(\mathrm{x,\ y})$，$\mathrm{U}_1:(\mathbb{C}^n,0)\ \to(\mathbb{C},0)$，且 $\mathrm{U}_2:(\mathbb{C}^n,0)\ \to(\mathbb{C}^{n-1},$ $0)$，其项关于 x 的阶大于 2k，关于 y 的阶大于等于 1。我们有 $\phi(\mathrm{x,\ y})\ =(\mathrm{x},\alpha(\mathrm{x,\ y}))$ 在 $(\mathbb{C}^n,0)$ 上定义了一个双全纯映射，而且 $\alpha(\phi^{-1}(\mathrm{x,\ y}))\ =$y。因此,

$$L\circ l\circ f_1\circ\phi^{-1}(x,y)=((a-BD^{-1}C)x^k,y)+R'(x,y),$$

其中 $R'(x,y)\ =(U_1(\phi^{-1}(x,y)),0)$ 的项关于 x 的阶大于等于 $2k$。现在，$L\ \circ l\ \circ f$ $_1\circ\phi^{-1}$ 与 $\mathcal{A}$-等价于 f_1 意味着 $a\ -BD^{-1}C\ \neq 0$。

最后，$\mathrm{rank}(dl)_0\ \geq\mathrm{rank}((dl)_0d(f_1)_0)\ =\mathrm{rank}(dg)_0=n\ -1$，证明至此完成。

□

命题 3.2. 设 $k \geq 2$、f_1 和 φ_1 分别如 *(1)* 和 *(2)* 所示。令 g 为一个 k 重映射，且 $j \in \{1, \ldots, k-1\}$，满足 $gdc(j,k) = 1$。那么，

(a) 当且仅当 g 与 φ_1^j 相关时，g 与 f_1 是 $\mathcal{L}$-等价的；

(b) 对于 $h \in \mathcal{R}$，当且仅当 g 与 $f_1 \circ h^{-1}$ 是 $\mathcal{L}$-等价的时，g 与一个阶为 k 的反射 $\varphi \in h\langle\varphi_1\rangle h^{-1}$ 相关。

证明。(a) 若 g 是一个与 φ_1^j相关的 k 重映射，其中 gcd(j, k) = 1，则 g $\circ \varphi_1 =$g。g 的每个坐标函数 $g_m : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ 都满足 $g_m \circ \varphi_1 = g_m$，其中 $m \in \{1, \ldots, n\}$。因此，对所有 $x = (x_1, \ldots x_n)$，

$$g_m(x) = l_m(x_1^k, x_2, \ldots, x_n) = l_m \circ f_1(x),$$

对于某个全纯映射 $l_m : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$。现在，只需定义 $l = (l_1, \ldots, l_n)$，于是 $g = (g_1, \ldots, g_n) = (l_1 \circ f_1, \ldots, l_n \circ f_1) = l \circ f_1$。由引理 3.1，g 与 f_1 是 $\mathcal{L}$-等价的。反向结论显然。

(b) 设 g是与 $\varphi = h \circ \varphi_1^j \circ h^{-1}$相关的一个 k 重映射，且 $gcd(j,k) = 1$。则$(g \circ h) \circ \varphi_1^j = g \circ h$，并且由 *(a)* 可知，存在 $l \in \mathcal{L}$ 使得 $g = l \circ (f_1 \circ h^{-1})$。反过来显然成立。 □

现在我们推广命题 3.2(a)，证明与同阶反射相关的 $\mathcal{A}$-等价类中的 k 重折叠可约化为 $\mathcal{L}$-等价：

定理 3.3. 对于 $k \geq 2$，设 f 是与一个阶为 k 的反射 φ 相关的 k 重映射。那么，k 重映射 g 与 φ 相关，当且仅当 g 与 f $\mathcal{L}$-等价。

证明。记 f = (h, l) $\cdot$ f_1,，其中 (h, l) $\in \mathcal{R} \times \mathcal{L}$。若 f 与 φ相关，则由命题 2.4 可知，对于某个 j $\in \{1, \ldots k-1\}$，有 $\varphi =$ h $\circ \varphi_1^j \circ$ h^{-1}。根据命题 3.2(b)，若 g 是与 φ相关的 k 重映射，则对某个 $l' \in \mathcal{L}$，有 g $= l' \circ ($ f$_1 \circ$ h$^{-1})$。此时，g $= (l' \circ l^{-1}) \circ$f。因此，g 与 f $\mathcal{L}$-等价。结论的逆命题显然成立。 □

例3.4. 考虑四重映射 $g = f \circ h^{-1} : (\mathbb{C}^3, 0) \to \mathbb{C}^3, 0)$,

$$g(x_1, x_2, x_3) = \big((x_2 - x_3)^2 - x_2^4,\ x_2^4 + x_2 - x_3,\ 2(x_1 + x_3)\big),$$

以及与 f 相关的反射 φ，其中 f、h 和 φ 见例 2.5。根据定理 3.3，f 和 g 并非 $\mathcal{L}$-等价，因为 φ与 g 不相关。事实上，(g $\circ \varphi$)(x$_1$, x$_2$, x$_3$) =((x$_2$ − ix$_3$)^2 − x$_2^4$, x$_2^4$ + x$_2$ − ix$_3$, 2 (x$_1$ + x$_3$))，所以 g $\circ \varphi \neq$ g。

以下只是针对反射群陈述的定理 3.3。

推论 3.5. 对于 $k \geq 2$，设 f 是一个 k 重映射，且与一个阶为 k 的反射群相关。当且仅当 g 与 f $\mathcal{L}$-等价时，g 也是一个与该群相关的 k 重映射。

4 折叠的发散图

本文余下部分将建立关于 $(\mathbb{C}^n, 0)$ 上折叠发散图的框架并进行分类。正如预期，我们的结果重新得到了 [7] 关于 $(\mathbb{R}^n, 0)$ 上折叠与对合发散图分类的结果。更重要的是，正如引言中所提到的，本文所发展的复数情形推广澄清了实数情形下标准形代数表达式中出现的一些不变量；这些不变量此前近二十年来一直未得到解释。

对于 $s \leq n$ 和 $k_i \geq 2, i = 1, \ldots, s$，我们研究 $(\mathbb{C}^n, 0)$ 上的 k_i-折叠发散图 g_i，记作 $(g_i)_s : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^{ns}, 0)$，其中

$$(g_i)_s(x) = (g_1(x), \ldots, g_s(x)).$$

在此情形下，我们称 $(g_i)_s$ 为一个 k-折叠发散图，其中 $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_s)$ 是阶的向量。现在，令

$$(\beta_i)_s = (\beta_1, \ldots, \beta_s)$$

记作在$(\mathbb{C}^n, 0)$ 上的s元反射组，并考虑这些循环反射群的直积

$$G = \langle \beta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \beta_s \rangle.$$

简言之，我们将G 称为乘积群 $\prod_{i=1}^{s} \langle \beta_i \rangle$。

若r_i 是反射 β_i的阶，$i = 1$，.....，s，则G 是一个含有 $\prod_{i=1}^{s} r_i$ 个元素的群。回忆一下，当且仅当对所有$i \neq j$，$\gcd(r_i, ri)$ =1 时，G 是循环的。在这种情况下，$(\beta_i)_s$ 是G的一个生成元，其阶为

$$\operatorname{ord}(\beta_1, \ldots, \beta_s) = \operatorname{lcm}(r_1, \ldots, r_s),$$

这与该群的阶一致。

根据前几节关于k重折叠与反射（群）之间关联的术语，与一组s元反射$(\beta_i)_s$ 相关的发散图$(g_i)_s$ 这一概念是明确的，我们将交替使用以下术语：

- 与s元组$(\beta_i)_s$相关的k重折叠$(g_i)_s$ 发散图，
- 该s元组$(\beta_i)_s$ 与k重折叠的发散图$(g_i)_s$相关，
- k重折叠的发散图$(g_i)_s$ 与乘积群$G = \prod_{si=1}\langle\beta_i\rangle$相关。

反射s元组的等价关系由同时共轭给出。

定义4.1. 反射s元组$(\alpha_i)_s$ 和$(\beta_i)_s$ 等价，当且仅当存在$h \in \mathcal{R}$使得 $\beta_i = h \circ \alpha_i \circ h^{-1}$，$i = 1$，.....，$s$。

显然，如果 α_i 和 β_i 的阶相同，那么$(\alpha_i)_s$ 和$(\beta_i)_s$ 等价，当且仅当$\langle\alpha_i\rangle$ 和 $\langle\beta_i\rangle$ 共轭；此时我们称乘积群$P = \prod_{i=1}^{s}\langle\alpha_i\rangle$ 和$G = \prod_{i=1}^{s}\langle\beta_i\rangle$ 共轭。

现在我们定义 k 重映射发散图之间的等价：

定义4.2. 若存在$l_1, \ldots, l_s \in \mathcal{L}$ 和$h \in \mathcal{R}$，使得$g_i = l_i \circ p_i \circ h^{-1}$, $i = 1, \ldots, s$，则两个 k 重映射发散图$(p_i)_s$ 和$(g_i)_s$ 等价。

下面的定理是关于前述两种等价关系的第一个结果：

定理4.3. 设$(p_i)_s$ 和$(g_i)_s$ 是分别与反射的 s 元组$(\alpha_i)_s$ 和$(\beta_i)_s$相关的 k 重映射发散图，其中 α_i 和 β_i 的阶为 $k_i \geq 2$，对 $i \in \{1, \ldots, s\}$均成立。若$(\alpha_i)_s$ 和$(\beta_i)_s$ 等价，则$(p_i)_s$ 和$(g_i)_s$ 等价。

证明。考虑满足 $\beta_i = \mathrm{h} \circ \alpha_i \circ \mathrm{h}^{-1}$的 $\mathrm{h} \in \mathcal{R}$，其中 $\mathrm{i} \in \{1, \ldots, \mathrm{s}\}$。条件 $\mathrm{g}_i \circ \beta_i = \mathrm{g}_i$意味着 $(\mathrm{g}_i \circ \mathrm{h}) \circ \alpha_i = \mathrm{g}_i \circ \mathrm{h}$。因此，每个 k_i 重折叠 $\mathrm{g}_i \circ \mathrm{h}$ 都与 α_i相关。由于 α_i的阶为 k_i，且 p_i 是一个与 α_i相关的 k_i 重折叠，根据定理 3.3，$\mathrm{g}_i \circ \mathrm{h}$ 和 p_i是 $\mathcal{L}$-等价的，结论由此得出。 □

下一个结果表明，定理4.3的必要条件在群的层面上也是充分条件：

定理 4.4. 设$(p_i)_s$ 和$(g_i)_s$ 分别是与乘积群 $P = \prod_{i=1}^{s}\langle\alpha_i\rangle$ 和 $G = \prod_{i=1}^{s}\langle\beta_i\rangle$相关的 k 重映射发散图，其中 α_i 和 β_i 的阶为 $k_i \geq 2$。那么，当且仅当 P 和 G 共轭时，$(p_i)_s$ 和$(g_i)_s$ 等价。

证明. 设$(p_i)_s$ 和$(g_i)_s$ 分别是与群P e G相关的k重折叠发散图。根据命题 2.6，群 $\langle \alpha_i \rangle$ 和 $\langle \beta_i \rangle$ 共轭，$i \in \{1,\ldots\ldots, s\}$，因此$P$ 和G 共轭。反向结论可直接由定理 4.3 得出。

□

4.1 横截性下的标准形

本小节旨在推导满足标准横截性和线性假设的发散图及其对应反射元组的标准形。首先回顾，对于 $s \leq n$，反射集合 $\Lambda_s = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ 作用于$(\mathbb{C}^n, 0)$，若满足

- 对于$i \neq j$，$\mathrm{Fix}(\alpha_i)$ 与 $\mathrm{Fix}(\alpha_j)$ 在 0 处横截；
- $\operatorname{codim} \bigcap_{i=1}^{s} \mathrm{T}_0\mathrm{Fix}(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{s} \operatorname{codim}(\mathrm{Fix}(\alpha_i)) = s,$

其中，$\mathrm{T}_0\mathrm{Fix}(\alpha_i)$ 表示 $\mathrm{Fix}(\alpha_i)$ 在 0 处的切空间。一般而言，这意味着不动点超平面以尽可能理想的方式相交，即它们不会共享额外的方向：不动点子空间的法向方向线性独立，因此相对于其他反射而言，没有任何一个反射是“冗余”的。

横截条件的一个优点是，它允许通过同时共轭，将横截反射族的不动点子空间同时“拉直”为典范超平面。这进而为预标准形提供了一个简单的代数表达式，该表达式见下一命题中的（7）。

命题 4.5。设 $\Lambda_s = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ 是阶分别为 $k_1, \ldots, k_s \geq 2$ 的线性反射横截集。设 λ_i 是 α_i 的特征值，其中 $\lambda_i \neq 1$。那么 $(\alpha_i)_s$ 等价于 $(\beta_i)_s$，其中

$$\beta_i(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + a_{i1}x_i, \ldots, \lambda_i x_i, \ldots, x_n + a_{in}x_i), \tag{7}$$

对于 $a_{ij} \in \mathbb{C}, 1 \leq i \leq s, \quad 1 \leq j \leq n, \ j \neq i$。

证明。对于 $i = 1, \ldots, s$，我们将不动点超平面 $\mathrm{Fix}(\alpha_i) \subseteq (\mathbb{C}^n, 0)$ 写作

$$\mathrm{Fix}(\alpha_i) = \ker(F_i), \tag{8}$$

对于线性泛函 $F_i : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$。由 Λ_s 的横截性可知，这些向量线性无关；我们将此集合补充为$(\mathbb{C}^n)^*$的一组基 $\mathcal{B}$。考虑线性同构

h 将 $\mathcal{B}$ 的对偶基映射到 $\mathbb{C}^n$的标准基。对于$i = 1, \ldots\ldots, s$，考虑 $\beta_i = h \circ \alpha_i \circ h^{-1}$，它显然是一个阶为$k_i$ 的线性反射，其特征值与 α_i的特征值相同。由（8）可得，

$$\mathrm{Fix}(\beta_i) = h(\mathrm{Fix}(\alpha_i)) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n;\ x_i = 0\},$$

对于 $\mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{s}$。因此，$\beta_i(\mathrm{e}j) = \mathrm{e}\,\mathrm{j}$，其中 $\mathrm{j} \neq \mathrm{i}$。现在我们只需写出 $\beta_i(\mathrm{e}_i) = (\mathrm{a}_{i1}, \ldots, \mathrm{a}_{in})$，便可得到 $\beta_i(\mathrm{x}) = (\mathrm{x}_1 + \mathrm{a}_{i1}\mathrm{x}_i, \ldots, \mathrm{a}_{ii}\mathrm{x}_i, \ldots, \mathrm{x}_n + \mathrm{a}_{in}\mathrm{x}_i)$。但 a_{ii} 是 β_i 中除 1 以外唯一的特征值，因此 $\mathrm{a}_{ii} = \lambda_i$，从而 β_i 具有 (7) 给出的形式。 □

在下一个结果中，我们根据命题 4.5 的预标准形 (7) 中出现的参数，解决横截线性反射s元组的识别问题。

定理 4.6. 设 λ_i 是一个本原 k_i 次单位根。考虑横截线性反射的 s 元组$(\beta_{i_a})_s$和$(\beta_{i_b})_s$，其中

$$\beta_{i_a}(x) = (x_1 + a_{i1}x_i, \ldots, \lambda_i x_i, \ldots, x_n + a_{in}x_i)$$

and

$$\beta_{i_b}(x) = (x_1 + b_{i1}x_i, \ldots, \lambda_i x_i, \ldots, x_n + b_{in}x_i)$$

对所有 $i \in \{1,\ldots,s\}$，其阶为 $k_i \geq 2$，其中 $a^{ij}, b_{ij} \in \mathbb{C}$，且 $j \neq i$。那么，$(\beta_{i_a})_s$等价于 $(\beta_{i_b})_s$，当且仅当存在一个元素属于 $\mathbb{C}$ 的可逆矩阵 C，使其形式如下

$$C = \left(\begin{array}{cccc|ccc} \xi_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \xi_2 & \cdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \xi_s & 0 & \cdots & 0 \\ \hline c_{s+1,1} & c_{s+1,2} & \cdots & c_{s+1,s} & c_{s+1,s+1} & \cdots & c_{s+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{ns} & c_{n,s+1} & \cdots & c_{nn} \end{array}\right) \tag{9}$$

使得 $\xi_1 = 1$ 和

$$b_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\xi_j}{\xi_i} a_{ij}, & \text{for all } 1 \leq i, j \leq s, \text{ with } j \neq i \\ (\lambda_1 - 1)c_{j1} + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_{1k}c_{jk}, & \text{for } i = 1 \text{ and } s+1 \leq j \leq n \\ \dfrac{1}{\xi_i}((\lambda_i - 1)c_{ji} + \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} a_{ik}c_{jk}), & \text{for } 2 \leq i \leq s \text{ and } s+1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

证明。 根据定义，$(\beta_{i_a})_s$等价于$(\beta_{i_b})_s$当且仅当存在一个可逆矩阵$C = (c^{jk})_{n\times n}$ 使得

$$[\beta_{i_b}]C = C[\beta_{i_a}] \tag{10}$$

对所有 $i \in \{1,\dots,s\}$。若设

$$d_{jl} = \begin{cases} c_{jl} + c_{il}b_{ij}, & \text{for } j \neq i \\ \lambda_i c_{il}, & \text{for } j = i \end{cases} \quad \text{and} \quad e_{jl} = \begin{cases} c_{jl}, & \text{for } l \neq i \\ \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} a_{ik}c_{jk} + \lambda_i c_{ji}, & \text{for } l = i, \end{cases}$$

则 $[\beta_{i_b}]\mathrm{C} = (\mathrm{d\,jl})_{n\times n}$且 $\mathrm{C}[\beta_{i_a}] = (\mathrm{e\,jl})_{n\times n}$。对于 $\mathrm{i} \in \{1,\dots,\mathrm{s}\}$ 和 $\mathrm{j} \in \{1,\dots,\mathrm{n}\}$, 由 (10) 可得 $\mathrm{c}_{ij} = 0$，其中 $\mathrm{j} \neq \mathrm{i}$。由于 C 可逆，我们有 $\xi_i := \mathrm{c}_{ii} \neq 0$，显然可以假设 $\xi_1 = 1$。对于 $\mathrm{i,j} \in \{1,\dots,\mathrm{s}\}$，且 $\mathrm{j} \neq \mathrm{i}$,

$$c_{ji} + \xi_i b_{ij} = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} a_{ik}c_{jk} + \lambda_i c_{ji},$$

其中 $c_{ji} = 0$。因此，对于所有 i、$j \in \{1,\dots,s\}$，且 $j \neq i$,
有 $b_{ij} = \xi_j\xi_i a_{ij}$。

对于 $i = 1$ 和 $s+1 \leq j \leq n$，我们得到 $\sum a_{1k}c_{jk} + \lambda_1 c_{j1} = c_{j1} + \xi_1 b_{1j}$,
即

$$b_{1j} = (\lambda_1 - 1)c_{j1} + \sum_{k=2}^{n} a_{1k}c_{jk}.$$

同理，对于 $2 \leq i \leq s$和$s+1 \leq j \leq n$，我们得到 $\sum a_{ik}c_{jk} + \lambda_i c_{ji} = c_{ji} + \xi_i b_{ij}$，也就是说，

$$b_{ij} = \frac{1}{\xi_i}((\lambda_i - 1)c_{ji} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} a_{ik}c_{jk}).$$

□

我们以给出发散图的预标准形来结束本小节。从现在起，令f_i 表示典型的k_i重折叠

$$f_i(x) = (x_1,\dots,x_i^{k_i},\dots,x_n), \tag{11}$$

与第 2 节中 (3) 的记号一致，其中只考虑单个折叠。类似地，我们将 (4) 中引入的记号 φ_i 更新为 $\lambda = \lambda_i$，以表示阶为 k_i 的反射

$$\varphi_i(x) = (x_1,\dots,\lambda_i x_i,\dots,x_n). \tag{12}$$

命题 4.7. 设 $\Lambda_s = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ 是一个横截的线性反射集，其阶分别为 $k_1, \ldots, k_s \geq 2$。设 λ_i 为 α_i 的特征值，其中 $\lambda_i \neq 1$。与 $(\alpha_i)_s$ 相关的 k 重映射发散图 $(p_i)_s$，等价于与 $(\beta_i)_s$ 相关的 k 重映射发散图 $(g_i)_s$，其中 β_i 由 *(7)* 给出，且

$$g_i(x) = \Big(x_1 + \frac{a_{i1}}{1-\lambda_i}x_i, \ldots, x_i^{k_i}, \ldots, x_n + \frac{a_{in}}{1-\lambda_i}x_i\Big), \tag{13}$$

对于 $a_{ij} \in \mathbb{C}$，其中 $i \in \{1, \ldots, s\}$，$j \in \{1, \ldots, n\}$ 且 $j \neq i$。

证明。 根据命题 4.5，$(\alpha_i)_s$ 等价于$(\beta_i)_s$，其中 β_i 由式 (7) 定义。对于每个$i \in\{1, ..., s\}$，考虑式 (13) 中的g_i，并定义$h_i : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ 为

$$h_i(x) = \Big(x_1 - \frac{a_{i1}}{1-\lambda_i}x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_n - \frac{a_{in}}{1-\lambda_i}x_i\Big).$$

对于反射 φ_i 以及式 (12) 和 (11) 中的k_i阶f_i，分别有 $\beta_i = h_i \circ \varphi_i \circ h^{-1}{}_i$和$g_i = f_i \circ h^{-1}{}_i$。因此$g_i$ 是一个k_i阶函数，满足$g_i \circ \beta_i = g_i$。根据定理4.3，$(p_i)_s$ 等价于$(g_i)_s$。

□

前一结果中得到的标准形明确取决于 Λ_s的反射的非平凡特征值。然而，将任意一个 α_i 替换为阶为k_i的j次迭代 $\alpha^j{}_i$，其中 $\in \{1, ..., k_i - 1\}$，得到的标准g_i仍然相同。事实上，这种情况会得到另一个标准形$(\beta_1, \ldots, \beta^j{}_i, \ldots, \beta_s)$，其中

$$\beta_i^j(x_1, \ldots, x_n) = \Big(x_1 + \frac{a_{i1}(\lambda_i^j - 1)}{\lambda_i - 1}\, x_i,\ \ldots,\ \lambda_i^j x_i,\ \ldots,\ x_n + \frac{a_{in}(\lambda_i^j - 1)}{\lambda_i - 1}\, x_i\Big).$$

现在，它们对应的发散图（即 $(\tilde{g}_i)_s$）的标准形由 $\tilde{g}_i = f_i \circ \tilde{h}^{-1}{}_i$ 得到；通过直接计算可得 $\tilde{h}_i = h_i$。因此，

$$\tilde{g}_i = f_i \circ \tilde{h}_i^{-1} = f_i \circ h_i^{-1} = g_i.$$

因此，我们刚刚证明了：

定理 4.8. 命题 *4.7* 中得到的标准形(13) 的代数表达式不依赖于循环群 $\langle \alpha_i \rangle$ 的生成元的选择，其中任意 $i \in \{1, \ldots, s\}$。

我们在定理 4.10 中给出了与可交换反射的 s 元组相关的k重映射发散图的分类。这依赖于定理4.3以及同时共轭的以下重要性质：

引理 4.9. 横截性和阿贝尔性在等价下是不变量 .

定理 4.10。 设 $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_s\}$ 分别为阶数为 $k_1,\ldots,k_s \geq 2$ 的线性反射横截集。设 α_i 的特征值为 λ_i，其中 $\lambda_i \neq 1$。若 $\Lambda = \langle \alpha_1,\ldots,\alpha_s \rangle$ 是一个阿贝尔群，则 s 元组 $(\alpha_i)_s$ 等价于 $(\varphi_i)_s$，其中 φ_i 由式 *(12)* 给出；与 $(\alpha_i)_s$ 相关的 k 重映射发散图 $(p_i)_s$ 等价于 $(f_i)_s$，其中 f_i 由式 *(11)* 给出。

证明. 根据命题 4.5，s元组 $(\alpha_i)_s$ 与 $(\beta_i)_s$等价，其中 β_i 由 (7) 给出。由于反射 $\beta_1,\ldots,\beta_s$ 可对角化且生成一个阿贝尔群，它们可相对于 $\mathbb{C}^n$的基 $\mathcal{B}$ 同时对角化。利用 $\operatorname{codim}\operatorname{Fix}(\beta_i) = 1$ 以及 $\{\beta_1,\ldots,\beta_s\}$的横截性可知，经过可能的重新排序后，$\beta_i$ 具有 (12) 中给出的标准形 φ_i。因此，$(\alpha_i)_s$ 与 $(\varphi_i)_s$等价。$(\mathrm{p}_i)_s$ 与 $(\mathrm{f}_i)_s$ 之间的等价性直接由定理4.3得出。

□

4.2 与反射对相关的发散图的标准形

本小节专门讨论 $s = 2$ 的情形。我们给出横截的线性反射对的标准形（定理 4.11），以及在 $(\mathbb{C}^n,0)$ 上与之相关的发散图的标准形（定理 4.13），其中 $n \geq 2$；这将 [7] 中第 6 节和第 7 节针对实数情形所得的结果推广到了复数情形。我们的方法依赖于定理4.3和定理 4.6。

考虑定理 4.6 中的横截反射β_{1_a}和β_{2_a}，

$$\begin{aligned} \beta_{1_a}(x) &= (\lambda_1 x_1, x_2 + a_{12}x_1, x_3 + a_{13}x_1, \ldots, x_n + a_{1n}x_1), \\ \beta_{2_a}(x) &= (x_1 + a_{21}x_2, \lambda_2 x_2, x_3 + a_{23}x_2, \ldots, x_n + a_{2n}x_2), \end{aligned} \tag{14}$$

其中 $x = (x_1,\ldots,x_n)$，λ_i是单位根的本原k_i次根，$a_{ij} \in \mathbb{C}$，其中$i = 1、2$，且$1 \leq j \leq n$，$j \neq i$。我们有

$$\operatorname{tr}(\beta_{1_a} \circ \beta_{2_a}) = a_{12}a_{21} + \lambda_1 + \lambda_2 + n - 2. \tag{15}$$

我们还有，β_{1_a}和 β_{2_a}可交换当且仅当$a_{12} = a_{21} = 0$。

由上述内容可直接得出，当 $n = 2$ 时，参数空间 $(a_{12},a_{21}) \in \mathbb{C}^2$ 上存在一个等价关系，该关系继承自相应反射的等价关系：(a_{12},a_{21})等价于 (b_{12},b_{21})，当且仅当 $(\beta_{1_a}, \beta_{2_a})$和$(\beta_{1_b},\beta_{2_b})$是

等价的。在这种情况下，$\mathrm{tr}(\beta_{1_a}\circ\beta_{2_a}) = a_{12}a_{21}+\lambda_1+\lambda_2$，因此由定理 4.6 可得$(a_{12},a_{21})$的以下代表元：

$$\begin{cases}(0,0)，\text{ if the reflections commute;}\\ (1,0)，\text{ if } a_{12}\neq 0=a_{21};\\ (\mathrm{tr}(\beta_{1_a}\circ\beta_{2_a})-\lambda_1-\lambda_2,1)，\text{ if } a_{21}\neq 0.\end{cases}$$

下一个结果基于上述分层，并推广了 [7, 命题 7.1]。这样一来，此前在实情形中未得到解释的条件$a_{12}a_{21}=4$便清楚了，因为它自然地源于恒等式$a_{12}a_{21}=(\lambda_1-1)(\lambda_2-1)$，其中 $\lambda_1=\lambda_2=-1$。

定理 4.11。对于 $n\geq 2$，考虑$(\mathbb{C}^n,0)$上的一对$(\beta_{1_a},\beta_{2_a})$横截反射，其阶分别为 $k_1,k_2\geq 2$，特征值分别为 $\lambda_1,\lambda_2\neq 1$。若 $\Lambda=\langle\beta_{1_a},\beta_{2_a}\rangle$是阿贝尔的，则$(\beta_{1_a},\beta_{2_a})$等价于$(\varphi_1,\varphi_2)$，其中

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= (\lambda_1x_1,x_2,\ldots,x_n),\\ \varphi_2(x) &= (x_1,\lambda_2x_2,x_3,\ldots,x_n).\end{aligned}$$

若 Λ 是非阿贝尔的，则有以下几种情形：

(i) 若 $a_{12}a_{21}\neq(\lambda_1-1)(\lambda_2-1)$，则$(\beta_{1_a},\beta_{2_a})$等价于$(\gamma_1,\gamma_2)$，其中

$$\begin{aligned}\gamma_1(x) &= (\lambda_1x_1,x_1+x_2,x_3,\ldots,x_n),\\ \gamma_2(x) &= (x_1,\lambda_2x_2,x_3,\ldots,x_n)\end{aligned}\tag{16}$$

当 $a_{21}=0$ 时，且

$$\begin{aligned}\gamma_1(x) &= \big(\lambda_1x_1,a_{12}a_{21}x_1+x_2,x_3,\ldots,x_n\big),\\ \gamma_2(x) &= (x_1+x_2,\lambda_2x_2,x_3,\ldots,x_n)\end{aligned}\tag{17}$$

当 $a_{21}\neq 0$ 时。

(ii) 若 $n\geq 3$ 且 $a_{12}a_{21}=(\lambda_1-1)(\lambda_2-1)$，则$(\beta_{1_a},\beta_{2_a})$等价于$(\gamma_1,\gamma_2)$，其中

$$\begin{aligned}\gamma_1(x) &= (\lambda_1x_1,(\lambda_1-1)(\lambda_2-1)x_1+x_2,x_3,\ldots,x_n),\\ \gamma_2(x) &= (x_1+x_2,\lambda_2x_2,x_3,\ldots,x_n)\end{aligned}\tag{18}$$

当$(a_{23},\ldots,a_{2n})=a_{\frac{21}{\lambda_1-1}}(a_{13},\ldots,a_{1n})$时，且

$$\begin{aligned}\gamma_1(x) &= (\lambda_1x_1,(\lambda_1-1)(\lambda_2-1)x_1+x_2,x_3,\ldots,x_n),\\ \gamma_2(x) &= (x_1+x_2,\lambda_2x_2,x_2+x_3,x_4,\ldots,x_n),\end{aligned}\tag{19}$$

每当 $(a_{23},\ldots,a_{2n})\neq a_{\frac{21}{\lambda_1-1}}(a_{13},\ldots,a_{1n})$。

证明。 阿贝尔情形由定理 4.10 处理。对于非阿贝尔情形，$(\beta_{1_a}, \beta_{2_a})$ 等价于 $(\beta_{1_b}, \beta_{2_b})$，当且仅当存在如 (9) 中的$C = (c^{jk})$ 以及 $\xi \neq 0$，使得$(b_{12}, b_{21}) = (\xi a_{12}, \xi^{-1} a_{21})$ 并且

$$b_{1j} = (\lambda_1 - 1)c_{j1} + a_{12}c_{j2} + \sum_{k=3}^{n} a_{1k}c_{jk}, \quad b_{2j} = \xi^{-1}\big((\lambda_2 - 1)c_{j2} + a_{21}c_{j1} + \sum_{k=3}^{n} a_{2k}c_{jk}\big),$$

其中 $3 \leq j \leq n$。对于由 $\eta = (c^{jk})$ 诱导的线性同构，当 $3 \leq j$、$k \leq n$ 时，定义向量

$$v_{\xi\eta} = (\eta(a_{13}, \ldots, a_{1n}), \xi^{-1}\eta(a_{23}, \ldots, a_{2n})) \in \mathbb{C}^{2n-4}$$

以及辅助映射 $A^{\xi\eta} = T^{v_{\xi\eta}} \circ L^{\xi} \colon \mathbb{C}^{2n-4} \to \mathbb{C}^{2n-4}$，其中 $T^{v_{\xi\eta}}$ 是平移$v^{\xi\eta}$的映射，并且

$$L_{\xi}(z, w) = \big((\lambda_1 - 1)z + a_{12}w, \xi^{-1}(a_{21}z + (\lambda_2 - 1)w)\big),$$

对所有 $(z,w) \in \mathbb{C}^{n-2} \times \mathbb{C}^{n-2}$。注意，$L^{\xi}$ 是线性同构，当且仅当$a_{12}a_{21} \neq (\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)$。直接计算表明，$(\beta_{1_a}, \beta_{2_a})$与$(\beta_{1_b}, \beta_{2_b})$等价，当且仅当

$$(b_{12}, b_{21}) = (\xi a_{12}, \xi^{-1} a_{21}) \quad \text{and} \quad (b_{13}, \ldots, b_{1n}, b_{23}, \ldots, b_{2n}) \in \mathrm{Im}(A_{\xi\eta}), \tag{20}$$

对某个 $\xi \neq 0$。

(*i*) 若$a_{12}a_{21} \neq (\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)$，则 $\mathrm{Im}(A^{\xi\eta}) = \mathbb{C}^{2n-4}$，并且我们对所有$j \in \{1, 2\}$和$k \in \{3,, \ldots\ldots, n\}$设$b_{jk} = 0$。

若 $a_{21} = 0$，则 $a_{12} \neq 0$ （非阿贝尔假设），并在 (20) 中令 $\xi = a_{12}^{-1}$，可得 $(b_{12}, b_{21}) = (1, 0)$。若 $a_{21} \neq 0$，则取 $\xi = a_{21}$，使得 $(b_{12}, b_{21}) = (a_{12}a_{21}, 1)$。此时，$\beta_{1_b} = \gamma_1$ 和 $\beta_{2_b} = \gamma_2$ 分别如 (16) 和 (17) 所示。

(*ii*) 对于$n \geq 3$，若$a_{12}a_{21} = (\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)$，则$v_{\xi\eta} \in$ 属于 $\mathrm{Im}(L^{\xi})$ 当且仅当

$$(a_{23}, \ldots, a_{2n}) = \frac{a_{21}}{\lambda_1 - 1}(a_{13}, \ldots, a_{1n}). \tag{21}$$

在此情形下，$(0, \ldots, 0) \in$ 属于 $\mathrm{Im}(A^{\xi\eta}) =$ 属于 $\mathrm{Im}(L^{\xi})$，并且可在 (20) 中取 $\xi = a_{21}$，使$(b_{12}, b_{21}) = ((\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1), 1)$，从而得到 γ_1 和 γ_2，如 (18) 所示。若$(a_{23}, \ldots, a_{2n}) \neq \frac{a_{21}}{\lambda_1 - 1}(a_{13}, \ldots, a_{1n})$，则$(0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathrm{Im}(A^{\xi\eta})$对所有 η均成立。取 $\xi = a_{21}, b_{23} = 1$ 和 $b_{1k} = b_{2,k+1} = 0$ 对所有 $k \in \{3, \ldots, n\}$，即可得到 γ_1 和 γ_2，如式（19）所示。

□

注 4.12. 由式（15），等式 $a_{12}a_{21} = (\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)$ 等价于 $\mathrm{tr}(\beta_{1_a} \circ \beta_{2_a}) = \lambda_1\lambda_2 + (n-1)$。此时，对于式（14）中定义的 β_{1_a} 和 β_{2_a}，条件（21）可替换为 $E^{\beta_{1_a}}_{\lambda_1} = E^{\beta_{2_a}}_{\lambda_2}$，其中 $E^{\beta_{i_a}}_{\lambda_i}$ 表示对应于 β_{i_a} 的特征值 λ_i 的特征子空间，$i = 1, 2$。此外，$a_{21} = 0$ 当且仅当 $E^{\beta_{2_a}}_{\lambda_2} \subseteq \mathrm{Fix}(\beta_{1_a})$。这三个条件不依赖于共轭类代表元的选择，因为它们在同时共轭下保持不变。

现在我们使用定理 4.11，并将其改写为注 4.12 的形式：

定理 4.13。对于 $n \geq 2$，设 (p_1, p_2)：$(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^{2n}, 0)$ 是一个与 (α_1, α_2) 这一对定义在 $(\mathbb{C}^n, 0)$ 上、阶分别为 $k_1, k_2 \geq 2$、特征值分别为 $\lambda_1, \lambda_2 \neq 1$ 的横截线性反射相关的 k 折叠发散图。设 $\Lambda = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$。

(i) 如果 Λ 是阿贝尔的，那么 (p_1, p_2) 等价于 (f_1, f_2)，其中 f_i 如式（11）所示。

(ii) 假设 Λ 是非阿贝尔的，且 $\mathrm{tr}(\alpha_1 \circ \alpha_2) \neq \lambda_1\lambda_2 + (n-1)$。如果 $E^{\alpha_2}_{\lambda_2} \subseteq \mathrm{Fix}(\alpha_1)$，那么 (p_1, p_2) 等价于 (g_1, g_2)，其中

$$g_1(x) = \Big(x_1^{k_1}, \frac{1}{1-\lambda_1}x_1 + x_2, x_3, \ldots, x_n\Big),$$
$$g_2(x) = (x_1, x_2^{k_2}, x_3, \ldots, x_n).$$

若 $E^{\alpha_2}_{\lambda_2} \not\subseteq \mathrm{Fix}(\alpha_1)$，则 (p_1, p_2) 等价于 (g_1, g_2)，其中

$$g_1(x) = \Big(x_1^{k_1}, \frac{\mathrm{tr}(\alpha_1 \circ \alpha_2) - \lambda_1 - \lambda_2 + (2-n)}{1-\lambda_1}x_1 + x_2, x_3, \ldots, x_n\Big),$$
$$g_2(x) = \Big(x_1 + \frac{1}{1-\lambda_2}x_2, x_2^{k_2}, x_3, \ldots, x_n\Big).$$

(iii) 对于 $n \geq 3$，假设 Λ 是非阿贝尔的，且 $\mathrm{tr}(\alpha_1 \circ \alpha_2) = \lambda_1\lambda_2 + (n-1)$。若 $E^{\alpha_1}_{\lambda_1} = E^{\alpha_2}_{\lambda_2}$，则 (p_1, p_2) 等价于 (g_1, g_2)，其中

$$g_1(x) = \Big(x_1^{k_1}, (1-\lambda_2)x_1 + x_2, x_3, \ldots, x_n\Big),$$
$$g_2(x) = \Big(x_1 + \frac{1}{1-\lambda_2}x_2, x_2^{k_2}, x_3, \ldots, x_n\Big).$$

如果 $E^{\alpha_1}_{\lambda_1} \neq E^{\alpha_2}_{\lambda_2}$，那么 (p_1, p_2) 等价于 (g_1, g_2)，其中

$$g_1(x) = (x_1^{k_1}, (1-\lambda_2)x_1 + x_2, x_3, \ldots, x_n),$$
$$g_2(x) = \Big(x_1 + \frac{1}{1-\lambda_2}x_2, x_2^{k_2}, \frac{1}{1-\lambda_2}x_2 + x_3, x_4, \ldots, x_n\Big).$$

证明。 再次根据命题 4.7，与（α_1, α_2）相关的发散图（p_1, p_2）等价于与（β_{1_a}, β_{2_a}）相关的发散图（g_1, g_2），其中

$$g_1(x) = \big(x_1^{k_1}, \frac{a_{12}}{1-\lambda_1}x_1 + x_2, \ldots, \frac{a_{1n}}{1-\lambda_1}x_1 + x_n\big),$$
$$g_2(x) = \big(x_1 + \frac{a_{21}}{1-\lambda_2}x_2, x_2^{k_2}, \frac{a_{23}}{1-\lambda_2}x_2 + x_3, \ldots, \frac{a_{2n}}{1-\lambda_2}x_2 + x_n\big),$$

其中 $\lambda_i \neq 1$ 是 α_i 的特征值，$a_{ij} \in \mathbb{C}$ 根据式 (14) 中定义的反射 β_{1_a} 和 β_{2_a} 给出。回顾一下，$(\beta_{1_a}, \beta_{2_a})$与$(\alpha_1, \alpha_2)$属于同一个等价类。结论由定理 4.11 和注 4.12 得出。

□

例 4.14。 考虑$((4, 3)$ 折叠(p_1, p_2) 的发散图：$(\mathbb{C}^3, 0) \to (\mathbb{C}^6, 0)$,

$$p_1(x_1, x_2, x_3) = \big((x_1 + x_3)^2 - x_3^4, x_3^4 + x_1 + x_3, 2x_2\big),$$
$$p_2(x_1, x_2, x_3) = (-x_2, x_3, x_1^3).$$

折叠 p_1 由例 2.5 中的式 (6) 给出，且 $\mathrm{p}_2 = \mathrm{f}_3 \circ \mathrm{h}^{-1}$，其中 f_3 是 $\mathrm{i} = 3, \mathrm{k}_3 = 3$ 对应的典范折叠 (11)，而 $\mathrm{h}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3) = (\mathrm{x3}, -\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$。于是，$(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2)$ 与非交换反射对 (α_1, α_2) 相关,

$$\alpha_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + (1-i)x_3,\ x_2,\ ix_3), \quad \alpha_2(x_1, x_2, x_3) = (e^{\frac{2\pi i}{3}}x_1, x_2, x_3),$$

其中 $\lambda_1 = i$ 和 $\lambda_2 = e^{\frac{2\pi i}{3}}$。它们的不动点子空间是不同的坐标平面，因此 (α_1, α_2) 是横截的。我们计算得 $\mathrm{tr}(\alpha_1 \circ \alpha_2) = e^{2\pi i 3} + i + 1$，这不同于$\lambda_1\lambda_2 + 2 = ie^{\frac{2\pi i}{3}} + 2$。此外，$E^{\alpha_2}_{\lambda_2}$是$x_1$轴。因此，$(p_1, p_2)$ 属于定理 4.13(*ii*)所给出的类，其标准形为(g_1, g_2),

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = \big(x_1^4,\ \frac{1}{1-i}x_1 + x_2,\ x_3\big),$$
$$g_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1,\ x_2^3,\ x_3).$$

参考文献

[1] C.Bivià-Ausina、K. Kourliouros、M.A.S. Ruas。解析簇上导子模、对数理想与映射奇点。数学研究成果**80**，144 (2025)。
https://doi.org/10.1007/s00025-025-02427-0

[2]J. M. Douglass, G. Pfeiffer, G. Röehrle. 有限 *Coxeter* 群的反射子群. 代数通讯 **41** (7), 2574–2592 (2013). https://doi.org/10.1080/00927872.2012.661005

[3] J. P. Dufour. 可微映射图，论文，蒙彼利埃科学与技术大学，法国（1979）。[4] J. Humphreys. 反射群与考克斯特群. 剑桥高等数学研究丛书 **29**，剑桥大学出版社（1990）。[5] Y. Kurokawa. 光滑映射的发散图及其应用。博士论文，北海道大学（1996）。[6]S. Mancini, M. A. S. Ruas, M. A. Teixeira. 关于有限余维的发散图. 《葡萄牙数学》。新系列 **59** (2), 179-194 (2002)。<http://eudml.org/doc/50403>. [7] S. Mancini, M. Manoel, M. A. Teixeira. 折叠的发散图与对合的同时共轭. 《离散与连续动力系统》 **12** (4), 657-674 (2005). https://doi.org/10.3934/dcds.2005.12.657[8] G. Shephard, J. A. Todd. 有限酉反射群. 加拿大数学杂志**6**, 274–304 (1954). https://doi.org/10.4153/CJM-1954-028-3[9] M. A. Teixeira. 关于折叠发散图的拓扑稳定性. 《数学杂志》 **180**, 361–371 (1982). https://doi.org/10.1007/BF01214176