高阶 WKBJ 理论中斯托克斯乘子的自同构

Josh Shelton[1§] *、Samuel Crew[2§] †和 Christopher J. Lustri[3] ‡

[1]圣安德鲁斯大学数学与统计学院，圣安德鲁斯，KY16 9SS，英国[2]国立清华大学物理系，中国台湾新竹[3]悉尼大学数学与统计学院，悉尼，NSW，2006，澳大利亚

arXiv:2603.13332v1 [math.CA] 5 Mar 2026

摘要

我们研究线性微分方程和积分问题的 WKBJ 分析中出现的形式渐近超越级数的斯托克斯现象和高阶斯托克斯现象（HOSP）。我们引入一个作用于发散展开式的斯托克斯常数的自同构框架，并通过末阶项的末阶展开和参数化外星演算加以说明，以刻画这一现象。我们将该方法应用于一个典型例子：从突变理论中的燕尾问题出发，得到完整的斯托克斯线结构和自同构；该问题包含四个 WKBJ 分量。我们证明，在具有四个或更多 WKBJ 分量的系统中，与 HOSP 相关的自同构本身也可能在另一条高阶斯托克斯线上发生变化；这种情况出现在不同的高阶斯托克斯线相交时。随后我们指出，对于具有五个或更多 WKBJ 分量的超渐近级数，不会出现其他特殊行为。

1 引言

斯托克斯现象在刻画奇异摄动问题的解在复平面不同扇区中的渐近行为方面起着关键作用。一个典型例子是艾里函数：由于斯托克斯切换，它们沿实轴会从振荡行为转变为一致的指数衰减或增长（Stokes，1847，1864）。然而，这个著名例子并未展现斯托克斯现象所能导致的全部行为（Berk 等，1982；Howls 等，2004*b*；Body 等，2005；Chapman 与 Mortimer，2005；Shelton 等，2025；Aniceto 与 Crew，2024）。

艾里函数满足一个线性二阶奇异摄动微分方程，其渐近超渐越级数恰好包含两个 WKBJ 分量。这两个分量的相互作用会引发斯托克斯切换，从而导致行为发生变化。对于具有三个或更多 WKBJ 分量的系统，已知其渐近结构会变得更加复杂，进而产生高阶斯托克斯现象（HOSP），使斯托克斯线的作用在复平面中呈现变化（Howls 等，2004*b*；Body 等，2005；Chapman 与 Mortimer，2005）。

在本研究中，我们建立了一个用于刻画斯托克斯常数自同构的框架，并以此确立了两个相关结论。首先，对于超渐近级数包含四个或更多 WKBJ 分量的系统，HOSP 本身的行为通常会在复平面上发生变化。Body 等人（2005）也曾指出这一现象的一个例子。重要的是，我们证明这些变化也会发生在已有的高阶斯托克斯线上。其次，当存在五个或更多 WKBJ 分量时，不会出现根本性的新行为。因此，我们证明，包含四个 WKBJ 分量的系统已体现了斯托克斯现象的全部一般性。我们借助 Alien演算的语言得到这些结果，并用它解释高阶斯托克斯现象如何在这一框架中出现。我们将斯托克斯现象和高阶斯托克斯现象诠释为作用于与渐近超越级数相关的常数的自同构。作用于超渐近级数参数（这些参数乘在各个 WKBJ 分量上）的斯托克斯自同构就是斯托克斯现象，其最终跃变的大小与相应的斯托克斯常数成正比。作用于斯托克斯常数（这些常数控制一个 WKBJ 振幅函数在另一个振幅函数的后期项中所占比例）的高阶斯托克斯自同构就是高阶斯托克斯现象；研究表明，其最终跃变的大小与其他斯托克斯常数的乘积成正比。

*电子邮箱地址：josh.shelton@st-andrews.ac.uk †电子邮箱地址：samuel.c.crew@gmail.com ‡电子邮箱地址：christopher.lustri@sydney.edu.au§JS 和 SC 对本研究所开发的方法作出了同等贡献

1.1 常规与高阶斯托克斯现象

通过研究复平面中某个函数（即其渐近超越级数</style）的完整渐近展开，可以理解斯托克斯现象。考虑一个复变量 z 的复值函数 ψ，其中还包含某个参数 ϵ。当 $\epsilon \to 0$ 时，解具有如下渐近超越级数形式

$$\psi(z,\epsilon) \sim \sum_{i=1}^{N} \epsilon^{-\alpha_i} \sigma_i \mathrm{e}^{-\chi_i(z)/\epsilon} \left[\psi_0^{(i)}(z) + \epsilon \psi_1^{(i)}(z) + \cdots \right], \tag{1.1}$$

其中，χ_i 和 ψ_i 是复函数，包含渐近展开的所有可能阶数。每个不同的 χ_i 都代表一个不同的 WKBJ 分量。传级数参数 σ_i 是分段常数，但会在由斯托克斯线界定的复平面不同扇区中发生不连续变化。这种不连续变化导致了与斯托克斯现象相关的指数贡献迅速改变。关于复苏传级数及其形式的更详细讨论，可参见 Aniceto & Schiappa (2015)。

斯托克斯现象出现在至少包含两个不同 WKBJ 分量的渐近超越级数中，例如由二阶奇异摄动线性微分方程产生的渐近超越级数。这一背景已得到充分理解；基于对斯托克斯现象的这一认识开展的相关研究包括：通过发散展开和匹配渐近法求解非线性微分方程（Chapman 等，1998），或通过 WKBJ理论求解非线性微分方程（Kawai & Takei, 2005）；通过超渐近分析求解鞍点积分（Berry & Howls，1991）；以及借助 ´Écalle 的幽灵演算理论研究 Gevrey 发散传级数展开（Aniceto 等，2019）。该理论建立在 Dingle (1973) 首先确立的渐近展开的基本发散性之上。

Berry (1989) 指出，与斯托克斯现象相关的快速切换会在斯托克斯线两侧平滑地发生；通过研究超渐近分析理论中出现的超终结函数，可以为呈现斯托克斯现象的渐近超越级数获得严格的误差界（Olde Daalhuis, 1996, 1998*b*）。由于 σ_i 的行为，渐近形式 (1.1) 还具有其他微妙之处。σ_i 的值在斯托克斯线两侧发生的变化局限于一个宽度在渐近极限下不断缩小的边界层中；在大多数情况下，只需考虑斯托克斯线两侧的总变化量。因此，通常将超渐近级数参数视为分段常数函数，其值在斯托克斯线两侧不同；斯托克斯现象由此可视为作用于超渐近级数参数集合上的线性自同构。

这些研究主要讨论常规斯托克斯切换，即两个 WKBJ 分量之间相互作用所产生的现象。然而，随着相互作用的分量数量增加，会出现更复杂的行为。Berk 等人 (1982) 发现的高阶斯托克斯现象（HOSP），会出现在含有三个或更多 WKBJ 分量的渐近超越级数中，例如由三阶齐次线性微分方程产生的渐近超越级数。HOSP 会根据斯托克斯线在复平面中的位置影响常规斯托克斯线的作用，从而改变渐近解中观察到的斯托克斯切换。Howls 等人 (2004*b*) 、 Body 等人 (2005) 以及 Chapman & Mortimer (2005) 对此作了进一步研究。HOSP 消除了相交斯托克斯线所导致的矛盾，并可能使斯托克斯线失活或产生新的斯托克斯线。近期研究则着重于从渐近展开的后期项推导 HOSP（Shelton 等人，2025），并探究其如何影响原始渐近展开在斯托克斯线两侧的平滑行为（Howls 等人，2025）。

本文证明，高阶斯托克斯线的活跃性会在复平面上发生变化；这种情况会出现在具有四个或更多 WKBJ 分量的渐近超越级数中（例如，来自四阶或更高阶线性微分方程的级数）。要观察到这种渐近效应，至少需要四个 WKBJ 分量，因为这一现象要求两条不同的高阶斯托克斯线发生交叉，并且该现象发生在展开式中已经存在的其他高阶斯托克斯线上。

这种变化发生在其他高阶斯托克斯线上，因此还会带来一个额外结论：当超渐近级数包含五个或更多 WKBJ 分量时，不会出现进一步的新现象。我们将通过研究渐近展开的晚晚项（后期项的次主导分量）来证明这一点；对此的解释也将以 ´Écalle 的外微积分（´Écalle，1981年）的语言给出。

1.2 燕尾积分

为说明在确定发散级数展开的斯托克斯乘子时考虑高阶自同构的必要性，我们研究突变理论中燕尾问题的斯托克斯结构，

$$\Psi(x_1,x_2,x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\mathrm{i}[t^5 + x_3 t^3 + x_2 t^2 + x_1 t]\right) \mathrm{d}t, \tag{1.2}$$

其中 x_1、x_2 和 x_3 是实值参数。该积分属于特殊函数层次，其中还包括艾里函数和皮尔西函数，并满足一个四阶微分方程 (3.2)，该方程将在第 3.1 节中介绍。

此前，人们通过渐近方法和数值方法研究了燕尾积分在某些参数范围内的行为。请注意，在 § 3 研究燕尾问题时，我们对每个

参数 x_1、x_2 和 x_3（见 (1.2)）都进行了远场缩放，以展现因积分中包含四个鞍点而产生的斯托克斯现象的完整一般性。我们报告的斯托克斯常数变化，此前任何关于燕尾问题的研究都未曾发现。

Connor等人（1983年、1984年）对有限取值的 x_1、x_2 和 x_3 进行了燕尾积分的数值计算。Wright（1981年）研究了燕尾焦散，Kaminski（1992年）则针对对应于该焦散尖点的特定参数值，求得了远场中的渐近解。近来，Ferreira Gonz´alez 等人（2018年）和 Bennett 等人（2018年）都研究了特定参数值下的燕尾积分，此时产生了三个鞍点。Bennett 等人（2018年）开发了一种超渐近方法，并用它求得了这一表述中的斯托克斯常数（通常也称为乘子）。在我们的表述中，我们将研究 $|x_1|$、$x_2 = O(x_1^{3/4})$ 和 $x_3 = O(x_1^{1/2})$ 取较大值的情形；当考察该积分在四个不同鞍点下所产生行为的完整一般性时，这种情形会自然出现。稍后，在图 1 中，我们将展示皮尔西积分中鞍点合并时的参数值——此时，焦散的尖点对应于图中的原点。

由于该积分由四阶微分方程生成，因此包含四个 WKBJ 分量，也就包含众多高阶 Stokes 线。我们的分析将揭示，当某些不同的高阶 Stokes 线相交时，高阶 Stokes 切换本身会发生一种变体的 Stokes 现象。这会导致某些高阶 Stokes 线处于非激活状态；要正确确定渐近展开的完整 Stokes 结构，就必须将这一行为考虑在内。

由于此例包含四个 WKBJ 分量，因此涵盖了渐近超渐近级数中可能出现的所有 Stokes 现象变体。§ 2.2.1 将说明，由含有五个或更多 WKBJ 分量的高阶微分方程所产生的方程，不会引入任何新的 Stokes 切换行为变体。

1.3 论文结构

我们首先在 § 2 中推导盖夫雷发散超越级数展开的 Stokes 现象和高阶 Stokes 现象。这些现象通过考察作用于展开式的超渐近级数参数和 Stokes 常数的自同构来刻画。我们利用 Écalle 的幽灵演算理论中的参数桥方程来构造这些自同构。在 § 3 中，我们考察四阶燕尾常微分方程的超越级数展开，并推导其组成部分，即奇异量函数和振幅函数。我们还为复平面某个扇区内、给定且固定的一组边界条件指定 Stokes 常数的取值。在 § 4 中，我们首先应用高阶 Stokes 自同构求出整个复平面上的 Stokes 常数，继而通过常规 Stokes 自同构求出整个复平面上的超渐近级数参数，从而计算燕尾示例的完整 Stokes 线结构。最后，我们在 § 5 中作出总结。

2 奇异扰动理论中的超渐近级数

奇异扰动问题的渐近解通常采取渐近超越级数的形式，如前文（1.1）所示，该级数包含渐近展开的所有可能阶次，并在 $\epsilon \to 0$ 的极限下成立。此类渐近超越级数常出现在对微分方程、积分方程以及量子场论中可观测量的研究中。遵循 Dingle (1973) 的定义，我们将函数 $\chi_i(z)$ 称为奇异量，它们将决定复平面中的何处发生斯托克斯现象。

在 $\psi(z;\epsilon)$ 是某个微分方程的解这一背景下，函数 $\psi_n^{(i)}(z)$ 和 $\chi_i(z)$ 可由控制方程确定。随后，根据问题的远场条件或行为条件，在 $z \in \mathbb{C}$ 的某个扇区中设定超渐近级数参数 $\sigma_i(\epsilon)$。超渐近级数（1.1）中的线性无关 WKBJ 模态数 N 取决于具体问题。对于线性常微分方程，N 通常是有限的，并且等于微分方程的阶数，除非施加了外部强迫。对于非线性常微分方程，$N = \infty$ 通常是一般性的（Olde Daalhuis, 2022）。

根据奇异量 $\chi_i(z)$ 的取值不同，随着 z 的变化，不同模态之间可能会相互交换主导地位，这种情况发生在反斯托克斯线上。即使在某些情形下，$\psi(z;\epsilon)$ 的渐近行为跨越反斯托克斯线时并未发生显著的主导地位交换，通常仍有必要了解次主导分量。例如，在对展开式中的次主导分量施加量子化条件时，就会出现这种情况（Sueishi 等，2020）。因此，要用其超渐近级数解释复函数的行为，不仅需要追踪指数次主导项，还需要考察由这些项之间的相互作用所诱导的 Stokes 现象。

2.1 Stokes 现象

斯托克斯现象会导致解 $\psi(z;\epsilon)$ 在 $z \in \mathbb{C}$ 的不同扇区中具有不同的渐近近似。要确定复函数的完整超渐近级数表达式，必须确定每个扇区中的渐近行为，并弄清如何在跨越扇区边界（即斯托克斯线和反斯托克斯线）时，在不同渐近近似之间进行转换。本节将介绍如何确定斯托克斯线的位置，以及如何确定跨越斯托克斯线时 σ_i 的变化。

现在，我们考察超渐近级数（1.1）中作用于第 j 个指数项 $\mathrm{e}^{-\chi_j/\epsilon}$ 的斯托克斯现象，该现象由第 i 个指数项 $\mathrm{e}^{-\chi_i/\epsilon}$ 所诱发。斯托克斯现象源于振幅展开 $\psi^{(i)}(z) \sim \psi_0^{(i)}(z) + \epsilon\psi_1^{(i)}(z) + \cdots$ 的发散。对于作为线性常微分方程解而出现的 Gevrey-1渐近级数，振幅展开的第 n 项以阶乘除以幂的方式发散，其形式为 $n \to \infty$

$$\psi_n^{(i)}(z) \sim \sum_j \left[\sum_{p=0}^{\infty} \tilde{\psi}_p^{(j)}(z) \frac{\Gamma(n + \alpha_j - \alpha_i - p)}{\left[\chi_j(z) - \chi_i(z)\right]^{n+\alpha_j-\alpha_i-p}} \right]. \tag{2.1}$$

在式 (2.1) 中，对 j 求和，涵盖了 $\psi_n^{(i)}(z)$ 后期项渐近中的不同发散贡献；而对 p 求和，则涵盖了其中每一项在 n 中的低阶分量。

通过引入 Alien 导数 $\Delta_{\chi_j-\chi_i}$，可以将末项展开式 (2.1) 中出现的函数 $\tilde{\psi}_p^{(j)}(z)$ 归并为代数 ϵ 展开式。该导数作用于原始振幅展开式 $\psi^{(i)}(z) \sim \psi_0^{(i)}(z) + \epsilon\psi_1^{(i)}(z) + \cdots$。由此得到

$$\Delta_{\chi_j-\chi_i}\psi^{(i)}(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \epsilon^p \tilde{\psi}_p^{(j)}(z), \tag{2.2}$$

这定义了所谓的参数异化导数。[1] 它是一个线性映射，将形式 Gevrey-1渐近级数 $\psi^{(i)}(z)$ 映射为另一个形式 Gevrey-1渐近级数 $\tilde{\psi}^{(j)}(z)$。Alien 导数满足微分的莱布尼茨恒等式；并且通过定义 $\dot{\Delta}_\chi = \mathrm{e}^{-\chi(z)/\epsilon}\Delta_\chi$，有性质 $\dot{\Delta}_\chi(\mathrm{d}_F \mathrm{d}_z) = \mathrm{d}\,\mathrm{d}_z(\dot{\Delta}_\chi F)$。这一性质意味着，当超渐近级数 (1.1) 是某个线性微分方程的形式解时，$\psi(z;\epsilon)$ 关于 $\chi_j - \chi_i$ 的 Alien 导数与超渐近级数 (1.1) 的第 j 个分量成正比。关于 Alien 演算的更多细节和性质见附录 A。这一性质通常简洁地表述为（第二）桥接方程

$$\dot{\Delta}_{\chi_j-\chi_i}\psi = \frac{S_{ij}\sigma_i}{2\pi\mathrm{i}} \frac{\partial\psi}{\partial\sigma_j}, \tag{2.3}$$

由 Écalle（1981年）引入。比例常数 S_{ij} 称为斯托克斯常数，它们编码了问题中难以处理的解析数据。请注意，(2.3) 中包含的因子 $(2\pi\mathrm{i})^{-1}$ 确保斯托克斯常数与 Berry & Howls (1991)；Bennett 等 （2018年）的定义一致。我们将这些常数视为在复-z 平面上分段为常数。Ecalle 第二桥接方程的一个推论是，出现在末项展开式 (2.1) 中的函数 $\tilde{\psi}_p^{(j)}(z)$ 等于斯托克斯常数 S_{ij} 与原始超渐近级数展开式 (1.1) 中的振幅函数 $\psi^{(j)}{}_p(z)$ 的乘积，由此得到

$$\tilde{\psi}_p^{(j)}(z) = \frac{S_{ij}}{2\pi\mathrm{i}}\psi_p^{(j)}(z). \tag{2.4}$$

发散式 (2.1) 中由 j 标记的每个分量，都会在振幅函数 $\psi^{(i)}(z)$ 的渐近近似中引发斯托克斯现象。斯托克斯线位于量 $\chi_j(z) - \chi_i(z)$ 为正实数的所有位置；穿过这些线时，会出现如下形式的一个分量

$$S_{ij}\epsilon^{\alpha_i-\alpha_j}\psi^{(j)}(z)\mathrm{e}^{-[\chi_j(z)-\chi_i(z)]/\epsilon}$$

在 $\psi^{(i)}(z)$ 的渐近展开中获得。将这一项乘以 $\epsilon^{-\alpha_i}\sigma_i\mathrm{e}^{-\chi_i(z)}$ 后，我们看到对 $\psi(z;\epsilon)$ 的渐近分析的总贡献为

$$S_{ij}\epsilon^{-\alpha_j}\sigma_i\psi^{(j)}(z)\mathrm{e}^{-\chi_j(z)},$$

它是超渐近级数 (1.1) 中第 j 项的常数倍。因此，超渐近级数的第 i 项会产生一个作用于第 j 项的斯托克斯现象，并使传级数参数 σ_j 的值变为 $\sigma_j + S_{ij}\sigma_i$。第 j 个传级数参数 σ_j 的这一数值变化可视为一种自同构，我们将其记为 $\mathsf{S}^{i>j}$。我们用 $l_{i>j}$ 表示这一现象发生时跨越的斯托克斯线。因此，斯托克斯现象由超渐近级数系数 σ_i 的线性自同构构成，该自同构发生在斯托克斯线两侧；两者分别定义为

$$\text{(Stokes line } l_{i>j} \subset \mathbb{C}_z\text{)}: \quad \mathrm{Im}[\chi_j(z) - \chi_i(z)] = 0 \quad \text{and} \quad \mathrm{Re}[\chi_j(z) - \chi_i(z)] \geq 0, \tag{2.5a}$$

$$\text{（斯托克斯自同构 } \mathsf{S}^{i>j}\text{）}: \quad \sigma_j \mapsto \sigma_j + S_{ij}\sigma_i. \tag{2.5b}$$

具体而言，跨越斯托克斯线 $l_{i>j}$、从 $\mathrm{Im}[\chi_j - \chi_i] < 0$ 指向 $\mathrm{Im}[\chi_j - \chi_i] > 0$ 时，自同构 (2.5b) 对超渐近级数参数向量 $(\sigma_1, \ldots\ldots, \sigma_N)^T$ 作线性作用。因此，斯托克斯自同构 $\mathsf{S}^{i>j}$ 可表示为一个矩阵，其中第 j 行、第 i 列有一个非对角元 S_{ij}，如下所示:

$$(\mathcal{S}_{i>j})_{kl} = \delta_{kl} + S_{ij}\,\delta_{kj}\,\delta_{li}. \tag{2.6}$$

[1] 关于非参数情形下 Alien演算的综述，可参见 Aniceto 等人（2019）和 Dorigoni（2019）.

斯托克斯现象线 $l_{i>j}$ 是从转向点 $\tilde{z}$ 发出的拓扑半直线（实线），其中 $\chi_i(\tilde{z}) = \chi_j(\tilde{z})$。集合 o f 所有斯托克斯线 $\bigcup_{(i,\ j)}\ l_{i>j}$ 将斯托克斯图 G_S 定义为（可能是多层覆盖的）$\mathbb{C}_z$的一个子集。

斯托克斯现象如今已成为复兴理论和 WKBJ理论中的成熟概念。式 (2.1) 中的渐近分析描述了复苏复函数系数在大-n 时的行为；由于其表达式受阶乘除以幂函数的增长所限制，因此呈现出 Gevrey-1发散。推导这种行为有许多等效方法，包括 Borel求和（Aniceto 等，2019年）、对积分表述进行鞍点分析（Berry & Howls, 1991年；Bennett 等，2018年）以及匹配渐近展开（Olde Daalhuis 等，1995年）。

斯托克斯常数 S_{ij}的取值取决于具体问题（用 ´Ecalle 的说法， S_{ij}是底层常微分方程的解析不变量）。这与 σ_i形成对比；后者通常都由 $z \in \mathbb{C}$某个扇区中的行为条件确定。 S_{ij}的取值形式上由以下公式给出

$$S_{ij} = \frac{2\pi\mathrm{i}}{\psi_0^{(j)}(z)} \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\psi_n^{(i)}(z)[\chi_j(z) - \chi_i(z)]^{n+\alpha_j-\alpha_i}}{\Gamma(n+\alpha_j-\alpha_i)} \right], \tag{2.7}$$

该式在转向点 $\tilde{z} \in \mathbb{C}$ 附近成立，在此处 $\chi_j(\tilde{z}) - \chi_i(\tilde{z}) = 0$。由于控制问题可能具有多个转向点，因此通常已知 S_{ij} 在 $z \in \mathbb{C}$ 的不同扇区中的取值。对于仅包含常规斯托克斯现象的问题， S_{ij} 的值在整个复平面上保持不变。然而，对于具有额外转向点的问题， S_{ij} 的值可能会跨越高阶斯托克斯线发生变化，进而改变斯托克斯自同构 (2.5b) 中乘子的值。我们称一条斯托克斯线在某个区域中若不活跃，否则称其为活跃。

我们注意到，可以通过 Olde Daalhuis (1998*a*)；Bennett 等 (2018年) 的方法，在复平面中的固定位置确定每个斯托克斯常数 S_{ij} 的值（并给出严格的误差界）；该方法利用超渐近展开，以任意精度确定斯托克斯常数。

2.1.1 邻接图

斯托克斯线的活跃与否可通过邻接图方便地编码（Berry & Howls，1991年）。我们将奇异量 $\{\chi_1、\ldots\ldots、\chi_N\}$ 视为图的顶点，并且仅当 S_{ij}非零时才绘制一条边。等价地，当且仅当图中存在相应的边时，斯托克斯线才是活跃的。邻接图具有局部性，即图中的边会随 $z \in \mathbb{C}_z$ 而变化。特别是，每个高阶斯托克斯区域都有一个不同的邻接图，我们将在下一节详细展示。

2.2 高阶斯托克斯现象

当式（1.1）中存在三个或更多 WKBJ 分量时，渐近展开可能表现出一种称为高阶斯托克斯现象的行为。它可以理解为后期项（2.1）的 $n \to \infty$ 近似中发生的斯托克斯现象（Shelton 等，2025；Howls 等，2025）。这会导致斯托克斯常数 S_{ij} 在称为高阶斯托克斯线的曲线两侧发生变化。本节将描述由三个不同指数项引起的相互作用：$\mathrm{e}^{-\chi_i/\epsilon}$、$\mathrm{e}^{-\chi_j/\epsilon}$ 和 $\mathrm{e}^{-\chi_k/\epsilon}$，以及 $i \neq j \neq k$。

高阶斯托克斯现象可以通过考察 $\psi_n^{(i)}(z)$ 在 $n \to \infty$ 时后期项发散的低阶分量来刻画，该结果此前已在（2.1）中给出。将（2.4）中的解 $\tilde{\psi}^{(j)}{}_p = S_{ij}(2\pi\mathrm{i})^{-1}\psi^{(j)}{}_p$代入后， $\psi_n^{(i)}$ 的后期项渐近为

$$\psi_n^{(i)}(z) \sim \sum_j \frac{S_{ij}}{2\pi\mathrm{i}} \left[\sum_{p=0}^{\infty} \psi_p^{(j)}(z) \frac{\Gamma(n+\alpha_j-\alpha_i-p)}{\left[\chi_j(z)-\chi_i(z)\right]^{n+\alpha_j-\alpha_i-p}} \right] \tag{2.8}$$

当 $n \to \infty$ 时。由于 $\psi_p^{(j)}(z)$ 在 $p \to \infty$ 时发散，后期项（2.8）的 $n \to \infty$ 渐近展开式本身在 p 较大时构成一个发散渐近级数。 $\psi_p^{(j)}(z)$ 的发散与（2.1）中 $\psi_n^{(i)}(z)$ 的发散类似，其形式为

$$\psi_p^{(j)}(z) \sim \sum_k \frac{S_{jk}}{2\pi\mathrm{i}} \psi_0^{(k)}(z) \frac{\Gamma(p+\alpha_k-\alpha_j)}{\left[\chi_k(z)-\chi_j(z)\right]^{p+\alpha_k-\alpha_j}} \tag{2.9}$$

当 $p \to \infty$ 时。在（2.9）中，为了记号简便，我们仅写出了 k 求和中每一项的主导发散分量。这个后期项的重新展开，即该展开式的后后期项，可用 Alien 导数（2.2）表示为

$$\Delta_{\chi_k-\chi_j}\Delta_{\chi_j-\chi_i}\psi^{(i)}(z) = -\frac{S_{ij}S_{jk}}{(2\pi)^2}\psi^{(k)}(z), \tag{2.10}$$

这里我们两次应用了桥接方程（值得注意的是，这依赖于这样一个假设：超渐近级数是常微分方程的形式超渐近级数解）。需要特别注意的是， $\Delta_{\chi_k-\chi_i}\psi^{(i)}(z)$ 不必等于 $\Delta_{\chi_k-\chi_j}\Delta_{\chi_j-\chi_i}\psi^{(i)}(z)$。

由完整末项展开式 (2.8) 中的发散所引发的高阶斯托克斯现象，是 Shelton等人(2025) 通过对 (2.8) 中经最优截断的 p 求和所得余项进行重新求和而推导出来的；这一结果也已被

推广到 Howls等人(2025) 所述的 ϵ 展开式上呈现的相应平滑行为。结果表明，斯托克斯常数会在高阶斯托克斯线两侧发生变化；当量 $(\chi_k-\chi_j)/(\chi_j-\chi_i)$ 为正实数时，就会出现这条高阶斯托克斯线。因此，我们将高阶斯托克斯线$h_{i>k;j}$ 和高阶斯托克斯自同构 $\mathrm{T}_{i>k;j}$ 定义为

$$\text{(higher-order Stokes line } h_{i>k;j}\subset\mathbb{C}_z\text{)}: \quad \operatorname{Im}\left[\frac{\chi_k-\chi_j}{\chi_j-\chi_i}\right]=0 \quad \text{and} \quad \operatorname{Re}\left[\frac{\chi_k-\chi_j}{\chi_j-\chi_i}\right]\geq 0, \tag{2.11a}$$

$$\text{(higher-order Stokes automorphism } \mathcal{T}_{i>k;j}\text{)}: \quad S_{ik}\mapsto S_{ik}+S_{ij}S_{jk}, \tag{2.11b}$$

其中，自同构 $\mathrm{T}_{i>k;j}$ 沿着使量 $\operatorname{Im}[(\chi_k-\chi_j)/(\chi_j-\chi_i)]$ 由负变正的方向发生。高阶斯托克斯线同样定义了一个图 G_H，其定义为以下集合的并集$\bigcup_{i,\ j,\ k} h_{i>k;j}$。我们注意到，高阶斯托克斯线经过斯托克斯交叉点 $\chi_i=\chi_j=\chi_k$，并从转向点 $\chi_i=\chi_j$ 和 $\chi_j=\chi_k$发出或延伸至这些转向点。由高阶斯托克斯线和普通斯托克斯线构成的完整斯托克斯图记为 $\mathrm{G}=\mathrm{G}_S\cup\mathrm{G}_H$。

普通斯托克斯现象由一组与斯托克斯线 $l_{i>j}$相关联的自同构 $\mathrm{S}_{i>j}\subset GL_N(\mathbb{R})$ 构成（将其视为作用于超渐近级数参数向量时）。上述高阶斯托克斯自同构现在是斯托克斯自同构 $\mathrm{S}_{i>j}$的自同构，因此定义了 $\mathrm{Aut}(GL_N(\mathbb{R}))$ 中的元素。由此得到从开曲线 γ 到作用于超渐近级数参数 $(\sigma_1,\ \ldots\ldots,\ \sigma_N)^T$ 的自同构群的一个表示： $[0,1]\to\mathbb{C}_z$。曲线可以分解为由斯托克斯线对应的 $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ 中生成元 $\mathrm{S}_{i>j}$ 构成的词，以及由高阶斯托克斯自同构对应的 $\mathrm{Aut}(\mathrm{GL}_N(\mathbb{R}))$ 中生成元 $\mathrm{T}_{i>k;j}$ 构成的词。这样便可确定从 $\gamma(0)$ 到 $\gamma(1)$ 的总斯托克斯现象。从几何上看，图 G 在 $\mathbb{C}$ 上诱导出一个 $GL_N(\mathbb{R})\rtimes\mathrm{Aut}(GL_N(\mathbb{R}))$ 丛，并伴随有超渐近级数参数表示的平行移动。

活　跃性是我们框架中对常规斯托克斯线 $l_{i>j}$ 和高阶斯托克斯线 $h_{i>k;j}$ 的定义　　y

$$l_{i>j}\text{ is }\begin{cases}\text{active if}\quad S_{ij}\neq 0,\\ \text{inactive if}\quad S_{ij}=0,\\ \text{relevant if}\quad S_{ij}\sigma_i\neq 0,\\ \text{irrelevant if}\quad \sigma_i=0,\end{cases}\qquad h_{i>k;j}\text{ is }\begin{cases}\text{active if}\quad S_{ij}S_{jk}\neq 0,\\ \text{inactive if}\quad S_{ij}S_{jk}=0.\end{cases} \tag{2.12}$$

对高阶斯托克斯线自身活跃状态切换的一种直观描述如下。注意，高阶斯托克斯自同构 $\mathrm{T}_{i>k;j}$（它使 S_{ik}的值发生变化）涉及 S_{ij}和 S_{jk}。它们的值可能沿着 $h_{i>k;j}$发生变化；当 $h_{i>j;l}$或 $h_{j>k;l}$与 $h_{i>k;j}$相交时，就会出现这种情况。要发生这种情况，至少需要四个不同的奇异量函数。关键的是，如果 S_{ij}或 S_{jk}为零，那么高阶斯托克斯线本身就处于非活跃状态。可以从博雷尔平面的角度理解高阶斯托克斯线的非活跃状态（参见 Howls *et al.* (2004*b*)；Shelton *et al.* (2025)），也可以从积分最速下降分析中产生的邻接图（它编码了 S_{ij}是否非零）来理解（Berry & Howls，1991）。从博雷尔平面的角度看，由于 $S_{ij}=0$导致的非活跃状态意味着博雷尔奇点 $\chi_j-\chi_i$位于博雷尔平面的另一个黎曼面上。

2.2.1 其他指数项处的斯托克斯现象

观察到新的斯托克斯现象（高阶斯托克斯现象）是由三个奇异量的相互作用产生的，这自然引出了一个问题：当渐近超越级数（1.1）中存在四个或更多奇异量时，新的斯托克斯现象是否会继续出现。$\psi_p^{(j)}$在（2.9）中的表示仅涉及 $p\to\infty$时的首阶发散项，其振幅函数为 $\psi_0^{(k)}$。例如，考虑其振幅函数由 $\psi_l^{(k)}$ 给出的次主导分量，然后再考虑 $l\to\infty$时展开式的后后后期项，所得结果便与（2.9）完全相同，只是其中出现了 $j\mapsto k$ 和 $p\mapsto l$。因此，得到的是同样的现象。持续重新展开振幅函数，只会产生渐近超越级数中另一个分量的后期项。

当超渐近级数中存在四个或更多奇异量函数时，这些重新展开式的结果是，高阶斯托克斯自同构 $\mathrm{T}_{i>k;j}$ 可以沿着既有的高阶斯托克斯线 $h_{i>k;j}$ 改变取值。此外，这种情况发生在高阶斯托克斯交叉点，此处 $h_{i>k;j}$ 与 $h_{i>j;l}$ 或 $h_{j>k}$ 相交；$_l$。Body 等人（2005）此前已在所研究的五阶偏微分方程中发现这种现象。因此，在渐近超渐近级数中从三个 WKBJ 分量过渡到四个时，不会出现新的斯托克斯现象；唯一的例外是，高阶斯托克斯线的交叉会导致高阶自同构改变取值。

当过渡到超渐近级数中含有五个或更多指数项的问题时，同样的观察依然成立；唯一的新效应是交叉高阶斯托克斯线出现得更加频繁。尽管指数贡献的数量增加了，高阶斯托克斯自同构的所有变化仍发生在描述三个指数贡献相互作用的高阶斯托克斯线上。

3 燕尾灾变的渐近分析

现在我们考虑一个例子，它包含了 § 2 中提到的所有重要特征，并且需要仔细研究斯托克斯自同构和高阶斯托克斯自同构，才能充分确定其渐近行为。这个例子就是燕尾积分，它是艾里积分和皮尔西积分的推广。斯托克斯曾在其开创性著作（1864）中对艾里积分中的斯托克斯现象进行了著名研究；此后，皮尔西积分也被用于研究与相交斯托克斯线相关的高阶斯托克斯现象（Howls 等，2004*a*；Shelton 等，2025）。我们证明，燕尾积分中存在交叉高阶斯托克斯线，这会导致某些高阶斯托克斯线不起作用。通过应用我们针对渐近超渐近级数中斯托克斯常数提出的自同构，可以解释这一现象；而正确应用这些高阶斯托克斯自同构，对于确保问题满足量子化条件是必要的。

在 § 3.1 中，我们将燕尾积分化为奇异摄动形式；在 §3.2 中推导形式渐近超越级数；在 § 3.3 中求解奇异量函数；并在 §3.4 中推导斯托克斯常数的边界条件。随后将在 § 4 中讨论斯托克斯自同构和高阶斯托克斯自同构。

3.1 燕尾积分

燕尾　　积分是突变理论中出现的一种基本积分，通常以积分形式给出，　　s

$$\Psi(x_1,x_2,x_3)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\mathrm{i}[t^5+x_3t^3+x_2t^2+x_1t]\right)\mathrm{d}t, \tag{3.1}$$

该积分包含四个不同的指数贡献；我们将以此为例，说明斯托克斯自同构方法如何追踪此类系统中可能出现的所有斯托克斯现象。我们将不采用积分表述 (3.1)，而是着重研究燕尾微分方程

$$5\frac{\mathrm{d}^4\Psi}{\mathrm{d}x_1^4}-3x_3\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}x_1^2}-2\mathrm{i}x_2\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x_1}+x_1\Psi=0, \tag{3.2}$$

其中 x_1、x_2 和 x_3 为实值参数；在适当的行为条件下，积分表达式 (3.1) 满足该条件。与方程 (3.2) 的解相关的斯托克斯线结构，不依赖于行为条件的具体选择；这些条件将在后文的 (3.5b) 中给出。

我们将通过研究复平面 $x_1\in\mathbb{C}$ 中的斯托克斯现象，推导 Ψ 在 x_1 趋于无穷大时的渐近近似。通过对积分 (3.1) 和微分方程 (3.2) 进行解析延拓，可以研究 $x_1\in\mathbb{C}$ 的解；这两个表达式原本都是针对 $x_1\in\mathbb{R}$ 提出的。我们通过以下定义引入小参数 ϵ，对问题进行重标度：

$$z=\epsilon^{4/5}x_1,\quad b=\epsilon^{3/5}x_2,\quad a=\epsilon^{2/5}x_3,\quad \psi(z,a,b,\epsilon)=\Psi\left(\frac{z}{\epsilon^{4/5}},\frac{b}{\epsilon^{3/5}},\frac{a}{\epsilon^{2/5}}\right), \tag{3.3}$$

在这种情况下，Ψ 在 x_1 趋于无穷大时的渐近分析，对应于 ψ 在 ϵ 趋于零时的渐近分析。将重标度 (3.3) 代入积分定义 (3.1)，并通过 $t\mapsto -\mathrm{i}t$ 变换积分变量，可得

$$\psi(z,a,b,\epsilon)=\frac{1}{\mathrm{i}\epsilon^{1/5}}\int_{\mathscr{L}}\exp\left(\frac{t^5-at^3-\mathrm{i}bt^2+zt}{\epsilon}\right)\mathrm{d}t. \tag{3.4}$$

在这一变量变换下，积分（3.4）中的积分路径 L（其取值为 $t\in\mathbb{C}$）从扇区 $-3\pi/10<\arg[t]<-\pi/10$ 中的无穷远处出发，并在扇区 $\pi/10<\arg[t]<3\pi/10$ 中的无穷远处结束。积分表达式（3.4）是微分方程的一个解

$$5\epsilon^4\frac{\mathrm{d}^4\psi}{\mathrm{d}z^4}-3a\epsilon^2\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}z^2}-2\mathrm{i}b\epsilon\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}z}+z\psi=0, \tag{3.5a}$$

该方程由将重标度（3.3）代入（3.2）得到，其远场渐近为

$$\psi(z)\sim-\mathrm{i}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\cdot5^{1/4}\alpha^3z^{3/4}}}\mathrm{e}^{-\frac{4\alpha z^{5/4}}{5^{5/4}\epsilon}}\quad\text{as }|z|\to\infty\ \arg[z]=-3\pi/4, \tag{3.5b}$$

当 $\alpha=\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}$ 时。远场条件（3.5b）由此确保，常微分方程（3.5a）的解与积分（3.4）给出的解等价。由于通过第 3.4 节中的最速下降分析将发现，积分定义在 $|z|\to\infty$ 且 $\arg[z]=-3\pi/4$ 时具有超渐近级数参数 $\sigma_1=1$ 和 $\sigma_2=\sigma_3=\sigma_4=0$，因此远场条件（3.5b）指定，在该区域中渐近超越级数的四个可能 WKBJ 分量中只有一个存在。（3.5b）中未出现的另外三个 WKBJ 分量，其形式为 $\alpha=\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}$ 和 $\alpha=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi/4}$。还要注意，我们在（3.5b）中选取的 $\arg[z]$ 值使得指定的指数项在所有四个允许的指数项中最小——因此，由于（3.5b）将其指定为 $\psi(z)$ 的主导分量，其余三个 WKBJ 分量便明确为零。

在求解 ψ 于 $\epsilon\to0$ 的极限情形时，我们将 z 视为自变量，并将 a 和 b 视为自由参数；它们的取值会影响最终的斯托克斯线结构。这里，我们着重讨论 a 和 b 为实值、而 z 为复值的情形，但该方法也可轻松推广至 a 和 b 取复值的情形。

3.2 渐近超越级数

现在，我们求解 $\psi(z,\ a,\ b,\ \epsilon)$ 在 $\epsilon \to 0$ 极限下的渐近行为。为简洁起见，记号中省略了对 a 和 b 的函数依赖。第一步是求出渐近超越级数 (1.1) 的各个分量。将转级数试探解代入后，即可得到奇异量和振幅函数的方程

$$\psi(z;\epsilon) \sim \sum_{i=1}^{4} \psi^{(i)}(z;\epsilon)\mathrm{e}^{-\chi_i(z)/\epsilon} \tag{3.6}$$

代入燕尾方程 (3.5a)。通过平衡 ϵ 的幂次，我们得到首阶方程

$$(\chi_i')^4 - 3a(\chi_i')^2 + 2\mathrm{i}b\chi_i' + z = 0, \tag{3.7}$$

而在下一阶，

$$\begin{aligned}&\epsilon^3\frac{\mathrm{d}^4\psi^{(i)}}{\mathrm{d}z^4} - 20\epsilon^2\chi_i'\frac{\mathrm{d}^3\psi^{(i)}}{\mathrm{d}z^3} + 3\Big[10\epsilon(\chi_i')^2 - a\epsilon - 10\epsilon^2\chi_i''\Big]\frac{\mathrm{d}^2\psi^{(i)}}{\mathrm{d}z^2} + \Big[6a\chi_i' - 2\mathrm{i}b - 20(\chi_i')^3\\ &+ 60\epsilon\chi_i'\chi_i'' - 20\epsilon^2\chi_i'''\Big]\frac{\mathrm{d}\psi^{(i)}}{\mathrm{d}z} + \Big[3a\chi_i'' - 30\chi_i''(\chi_i')^2 + 20\epsilon\chi_i'\chi_i''' + 15\epsilon(\chi_i'')^2 - 5\epsilon^2\chi_i''''\Big]\psi^{(i)} = 0.\end{aligned} \tag{3.8}$$

首阶方程 (3.7) 是关于 χ_i' 的四次方程，可通过解析求解得到超渐近级数 (3.6) 中出现的四个不同指数。接下来，我们将振幅函数 $\psi^{(i)}(z;\ \epsilon)$ 展开为 $\epsilon \to 0$，具体做法是

$$\psi^{(i)}(z;\epsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \psi_n^{(i)}(z). \tag{3.9}$$

将 (3.9) 代入 (3.8) 并平衡 ϵ 的幂次，可得首阶项为 $\epsilon \to 0$

$$\big[-20(\chi_i')^3 + 6a\chi_i' - 2\mathrm{i}b\big]\frac{\mathrm{d}\psi_0^{(i)}}{\mathrm{d}z} + \big[3a\chi_i'' - 30\chi_i''(\chi_i')^2\big]\psi_0^{(i)} = 0, \tag{3.10}$$

其解为

$$\psi_0^{(i)}(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-10(\chi_i')^3 + 3a\chi_i' - \mathrm{i}b}}. \tag{3.11}$$

积分常数设为 $\sqrt{\pi}$，以符合积分精确渐近分析中常见的结果，其中斯托克斯常数取值为 -1、0 或 1。随后改变该积分常数的值，会改变超渐近级数参数 σ_i 和斯托克斯常数 S_{ij}的值，因此我们可以自由设定这些常数，而不失一般性。

3.2.1 奇点

当展开式 (3.6) 不再满足渐近性时，会在相应点处生成 Stokes 线；这些点对应于振幅 (3.11) 趋于无穷大的位置。只要 (3.11) 中的分母为零，首阶振幅函数 $\psi_0^{(i)}(z)$ 就会出现奇点；也就是说，凡是 χ_i'的值满足 $-10(\chi_i')^3 + 3a(\chi_i') - \mathrm{i}b = 0$ 的点，都会出现奇点。

首先在奇点处求解三次方程 $-10(\chi_i')^3 + 3a(\chi_i') - \mathrm{i}b = 0$，得到 $t_i = \chi_i'$的值；然后将 t_i代入方程 (3.7)，直接求出振幅出现奇点时 z的值，以及与之对应的 z值。由此得到

$$z_i = \frac{3t_i}{2}(at_i - \mathrm{i}b) \tag{3.12}$$

对于 $i = 1,\ 2,\ 3$。因此，渐近解在这三个位置 $z_i \in \mathbb{C}$ 处是奇异的。

一般而言，z_1、z_2 和 z_3 是彼此不同的点。然而，对于某些 a 和 b 的取值，这些奇点会在实轴上重合。例如，当 $a = b = 0$ 时，三个奇点都位于 $z = 0$。当 $b = 0$ 时，对于 a 的所有取值，均有两个不同的奇点：一个位于 $z = 0$，另一个是位于 $z = 9a^2/20$ 的重奇点。此外，对于 $b \neq 0$，当 $a = -(5/2)^{1/3}|b|^{2/3}$ 时，只会出现两个奇点，分别为 $z = 6a^2/5$ 和 $z = -3a^2/20$，后者为重奇点。a 和 b 的这些取值如图 1 所示。注意，所有这些情况都会产生包含四个 WKBJ 分量的超渐近级数展开式；但含有两个奇点的情况不会出现交叉高阶斯托克斯线，而含有一个奇点的情况则不会出现交叉斯托克斯线。第 4 节给出了 $(a,\ b) = (1,\ 3)$ 时的结果；对于 $z \in \mathbb{C}$，该取值会产生包含三个不同奇点的展开式，其斯托克斯线结构关于 $\mathrm{Im}[z] = 0$ 对称。此例将涵盖可能出现的各种斯托克斯自同构和高阶斯托克斯自同构，其中斯托克斯常数会因与另一条高阶斯托克斯线相交而沿一条高阶斯托克斯线发生变化。在第 5 节的讨论中，我们简要展示较简单情形 $(a,\ b) = (0,\ 0)$ 和 $(a,\ b) = (1,\ 0)$ 的斯托克斯结构。

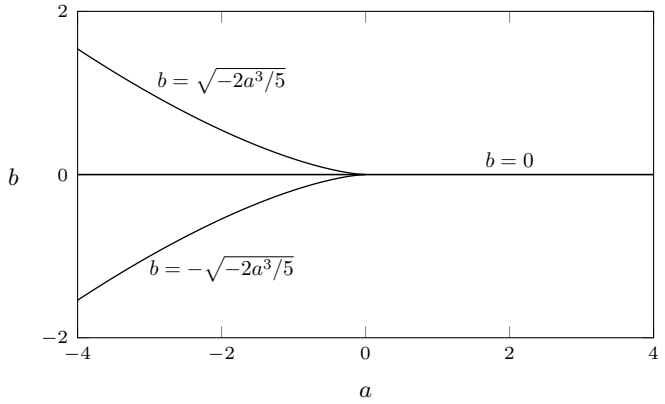


图 1：展示了导致三个奇点（3.12）合并的 a 和 b 的取值。沿着 $b = 0$，两个奇点在 $z = 9a^2/20$ 处重合；而在 $a = -(5/2)^{1/3}|b|^{2/3}$ 上，两个奇点在 $z = -3a^2/20$ 处重合。在 $a = b = 0$ 处，三个奇点都在 $z = 0$ 处重合。在上述每种情况下，超渐近级数（3.6）仍包含四个不同的 WKBJ 分量，但斯托克斯几何有所简化。一个奇点且含有 $a = b = 0$ 的情况没有相交斯托克斯线，因此类似于艾里积分的斯托克斯几何；两个奇点的情况则没有交叉高阶斯托克斯线，因此类似于皮尔西积分的斯托克斯几何。这些简化情形的斯托克斯线结构将在图 7 中展示。

3.3 奇异量函数

由四次方程 (3.7) 可得到 $\chi_i'(z)$ 的四个不同解。为了分析由此产生的斯托克斯线结构，必须对这些解进行积分。现在，我们通过求解由该微分方程的博雷尔算子导出的哈密顿–雅可比方程，对这些解进行解析积分（Kawai & Takei, 2005）。该方程的博雷尔算子 $\mathscr{P}_B$ 和符号 σ 为

$$\mathscr{P}_B = 5\partial_z^4 - 3a\partial_w^2\partial_z^2 - 2\mathrm{i}b\partial_w^3\partial_z + z\partial_w^4 \qquad \text{and} \qquad \sigma = 5\xi^4 - 3a\eta^2\xi^2 - 2\mathrm{i}b\eta^3\xi + z\eta^4, \tag{3.13}$$

其中 ξ 和 η 是余切方向上的局部坐标。由 $T^*(\mathbb{C}_w \times \mathbb{C}_z)$上的复辛结构导出的哈密顿方程及相应边界条件为

$$\dot{z}(\tau) = \partial_\xi\sigma, \quad \dot{w}(\tau) = \partial_\eta\sigma, \quad \dot{\xi}(\tau) = -\partial_z\sigma, \quad \dot{\eta}(\tau) = -\partial_w\sigma, \quad \sigma(\tau) = 0, \tag{3.14a}$$

$$z(0) = 0, \quad w(0) = w_0, \quad \xi(0) = 0, \quad \eta(0) = 1, \quad \sigma(0) = 0. \tag{3.14b}$$

η 和 ξ 的方程可直接求解，得到 $\eta(\tau) = 1$ 以及 $\xi(\tau) = -\tau$，利用它们可求解关于 z 和 w的其余方程，从而得到

$$z(\tau) = -5\tau^4 + 3a\tau^2 - 2\mathrm{i}b\tau, \qquad w(\tau) = -4\tau^5 + 2a\tau^3 - \mathrm{i}b\tau^2 + w_0. \tag{3.15a,b}$$

方程 (3.15a) 可辨认为与 (3.7) 中支配 $\chi_i'(z)$ 的同一个四次方程，因此 $\tau = \chi_i'(z)$。此外，通过对 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}z = (\mathrm{d}w/\mathrm{d}\tau)(\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}z)$ 应用链式法则可证明，$\mathrm{d}w/\mathrm{d}z = \mathrm{d}\chi/\mathrm{d}z$。这意味着 $w = \chi(z)$（相差一个积分常数），因此由 (3.15b) 可得每个奇异量 $\chi_i(z)$ 关于其导数 $\chi_i'(z)$ 的精确解。将四次方程 (3.7) 给出的 $(\chi_i')^4$定义代入后，该精确解为

$$\chi_i(z) = -\frac{2a}{5}(\chi_i')^3 + \frac{3\mathrm{i}b}{5}(\chi_i')^2 + \frac{4z}{5}\chi_i' + w_0 \tag{3.16a}$$

对于 $i = 1, 2, 3, 4$，满足边界条件

$$\chi_2(z_1) - \chi_1(z_1) = 0, \qquad \chi_4(z_2) - \chi_3(z_2) = 0, \qquad \chi_3(z_3) - \chi_2(z_3) = 0, \tag{3.16b}$$

这些条件在三个转向点中的每一个处都成立。因此，常数 w_0 是任意的，并由问题的远场条件确定；这些条件已在 (3.5b) 中给出，并得到 $w_0 = 0$。

注意，也可以从原始积分表述 (3.4) 推导出解 (3.16a)。这里，鞍点积分的指数为 $f(t,\ z) = t^5 - at^3 - ibt^2 + zt$，因此复 t 平面上的鞍点位置是满足 $\partial_t f(t_i,\ z) = 0$ 的解。总共有四个鞍点位置 t_i，它们是 $5t_i^4 - 3at_i^2 - 2ibt_i + z = 0$ 在 i = 1、2、3、4 时的解。随后，奇异量定义为 $\chi_i(z) = -f(t_i,\ z)$。另一方面，我们注意到 $\partial_z f(z,\ t) = t$，因此 $t_i = -\chi_i'(z)$。于是我们立即观察到关系 $\chi_i(z) = [2a(t_i)^3 + 3\mathrm{i}b(t_i)^2 - 4zt_i]/5$，这与 (3.16a) 一致。虽然通过积分表述求出 $\chi_i(z)$ 的解是本节给出的两种方法中较简单的一种，但求解哈密顿系统是更一般的方法，可用于线性微分方程。

3.4 斯托克斯常数的确定

斯托克斯常数 S_{ij} 是底层微分方程 (3.5a) 的解析不变量。由于高阶斯托克斯自同构 (2.11)，这些常数的值会在 $\mathbb{C}_z$ 两侧发生变化。现在我们确定它们在原点 $z = 0$ 处的值。

有多种方法可以计算斯托克斯常数 S_{ij} 的值。例如，公式 (2.7) 可得出 $\mathbb{C}_z$ 的不同扇区中 S_{ij} 的值，而超终结项方法（Bennett 等，2018年）则可得出 $\mathbb{C}_z$ 同一位置处每个斯托克斯常数的值。这里，我们将采用 Berry & Howls (1991) 的方法，利用积分解 (3.4) 求解斯托克斯常数。首先考虑展开式 $\psi^{(i)}(z;\,\epsilon) \sim \psi_0^{(i)}(z) + \epsilon\psi_1^{(i)}(z) + \cdots$ 以及 $n \geq 0$ 的 $\psi_n^{(i)}$ 的积分表示，它们由下式给出：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \psi_n^{(i)}(z) \sim \frac{1}{\epsilon^{1/2}} \int_{C_i(\arg[\epsilon])} \exp\left(-\frac{f(t,z)-\chi_i(z)}{\epsilon}\right) \mathrm{d}t, \tag{3.17a}$$

$$\psi_n^{(i)}(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint \frac{\Gamma(n+1/2)}{[f(t,z)-\chi_i(z)]^{n+1/2}} \mathrm{d}t. \tag{3.17b}$$

(3.17a) 中的积分路径是最速下降路径 $C_i(\arg[\epsilon])$，它经过鞍点 $t = \tilde{t}$，在该点处 $\partial_t f(\tilde{t},\ z) = 0$；而 (3.17b) 中的积分路径则是正向定向轮廓，该轮廓围绕经过 $\tilde{t}$ 的最速下降路径。

回忆一下，斯托克斯常数 S_{ij} 出现在 $\psi_n^{(i)}(z)$ 的末项展开式 (2.8) 中，形式为 $n \to \infty$。因此，对于较大的 n，我们需要通过将正向定向积分路径变形到其他最速下降路径上，来处理 (3.17b)。具体而言，我们考虑满足 $\arg[(\chi_j - \chi_i)/\epsilon] = 0$ 的 $\arg[\epsilon]$ 取值，并将这些取值记为 $\arg[\epsilon] = -\sigma_{ij}$（其中 $j \neq i$）。于是，对于给定的 i，至多存在三条最速下降路径 $C_j(\sigma_{ij})$，正向定向积分路径可由 (3.17b) 变形到这些路径上，由此得到结果

$$\psi_n^{(i)}(z) \sim \frac{\mathrm{i}}{2\pi} \sum_{j,j\neq i} (-1)^{\gamma_{ij}} A_{ij} \sum_{p=0}^{\infty} \psi_p^{(j)}(z) \frac{\Gamma(n-p)}{[\chi_j(z)-\chi_i(z)]^{n-p}}. \tag{3.18}$$

这里，A_{ij} 是邻接常数；若 (3.17b) 中积分路径的变形不包含积分路径 $C_j(\sigma_{ij})$，则其取值为零，否则为一。如果变形后的积分路径与 $C_j(\sigma_{ij})$ 同向，则常数 γ_{ij} 等于零；如果变形后的积分路径与 $C_j(\sigma_{ij})$ 方向相反，则该常数等于一。将燕尾问题后期项的 (3.18) 与一般的末项展开式 (2.8) 进行比较，可得解

$$S_{ij} = (-1)^{\gamma_{ij}} A_{ij} \tag{3.19}$$

对于斯托克斯常数。由于邻接常数 A_{ij} 只能取 0 或 1，因此斯托克斯常数 S_{ij} 只能取 -1、0 或 1。还要注意，在这个特定例子中，由于燕尾方程有一个简单的积分解，且首阶振幅函数（3.11）中的积分选择方式如此，我们得到 $S_{ij} = -S_{ji}$。

由于奇异量函数 $\chi_i(z)$ 中指标从 $i = 1$ 到 $i = 4$ 的选择是任意的，我们通过给出 $z = 3 + 0$ 的取值来明确这一点：$\chi_1 = -1$ 和 0464 + 0 分别为 .5i、.7948i、.0920i 和 .0196i、.6936i（精确到小数点后四位）。最速下降路径 $C_i(\arg[\epsilon])$ 如图 2 所示。积分（ 3.17a ）中沿这些路径的积分方向可以任意选择，图 2(*a*) 中的箭头标明了这一选择。接下来，为确定公式（3.19）所需的特殊最速下降曲线 $C_j(\sigma_{ij})$ 的方向，我们从指定的 $\arg[\epsilon] = 0$ 方向开始，并将其连续地改变为 σ_{ij}。特殊最速下降曲线最终的方向见图2的(*b*1)–(*b*4)。将每个鞍点周围的逆时针积分路径变形，使其沿所有相邻的最速下降曲线延伸，可得在 $z = 3 + 0.5\mathrm{i}$ 处，斯托克斯常数 S_{ij} 为

$$\begin{aligned} S_{12} = -1, \quad S_{13} = 0, \quad S_{14} = 0, \qquad S_{21} = 1, \quad S_{23} = 0, \quad S_{24} = -1, \\ S_{31} = 0, \quad S_{32} = 0, \quad S_{34} = 1, \qquad S_{41} = 0, \quad S_{42} = 1, \quad S_{43} = -1. \end{aligned} \tag{3.20}$$

在下一节中，我们将计算导致此处报告的 S_{ij} 在 $z = 3 + 0.5\mathrm{i}$ 处的值跨越高阶斯托克斯线时发生变化的高阶斯托克斯自同构。

4 燕尾系统的斯托克斯线结构

现在，我们计算燕尾系统（3.5）的高阶斯托克斯线集合 $h^{i>k;j}$ 以及斯托克斯线集合 $l_{i>j}$。具体而言，我们使用（3.16a）中得到的奇异量函数，以及适用于 $h^{i>k;j}$的条件（2.11）和适用于 $l_{i>j}$的条件（2.5a）来完成计算。我们还需要在整个复平面上计算斯托克斯常数 S_{ij}：首先采用在 $z = 3 + 0.5\mathrm{i}$ 处从解（3.20）得到的值，然后应用（2.11b）中的高阶斯托克斯自同构 $\mathrm{T}^{i>k;j}$。在整个 $\mathbb{C}_z$上确定斯托克斯常数后，我们再从远场条件（3.5b）得到的值出发，求解超渐近级数参数集合 σ_i。

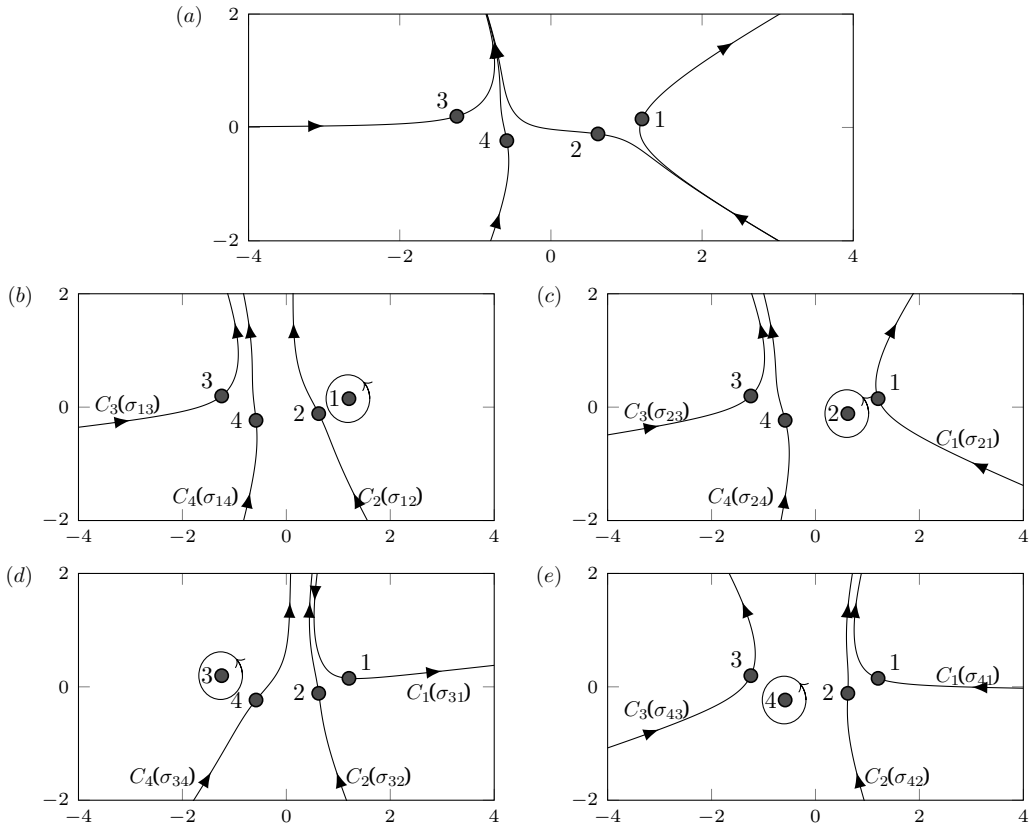


图2：燕尾积分（3.4）的最速下降路径 $C_i(\arg[\epsilon])$ 如图所示，它们定义为从鞍点 i 出发且满足 $(f(t,z)-\chi_i)/\epsilon$ 为实数且为正的曲线，参数为 $z = 3 + 0.5\mathrm{i}$。(*a*) 展示了 $\arg[\epsilon] = 0$ 情形下经过各鞍点的最速下降曲线 $C_i(0)$。沿每条曲线的箭头标示了（3.17a）中的积分方向。在（*b*1–*b*2）中，展示了 $\sigma_{ij} = \arg[\chi_j - \chi_i]$ 时的特殊最速下降曲线 $C_j(\sigma_{ij})$。每条最速下降曲线的方向通过取（*a*）中的方向，并将 $\arg[\epsilon]$ 从 0 连续改变至 σ_{ij} 得到。斯托克斯常数 S_{ij} 的值由（3.19）得到，方法是将（*bi*）面板中鞍点 i 周围的逆时针积分路径变形至所有相邻曲线 $C_j(\sigma_{ij})$ 上。

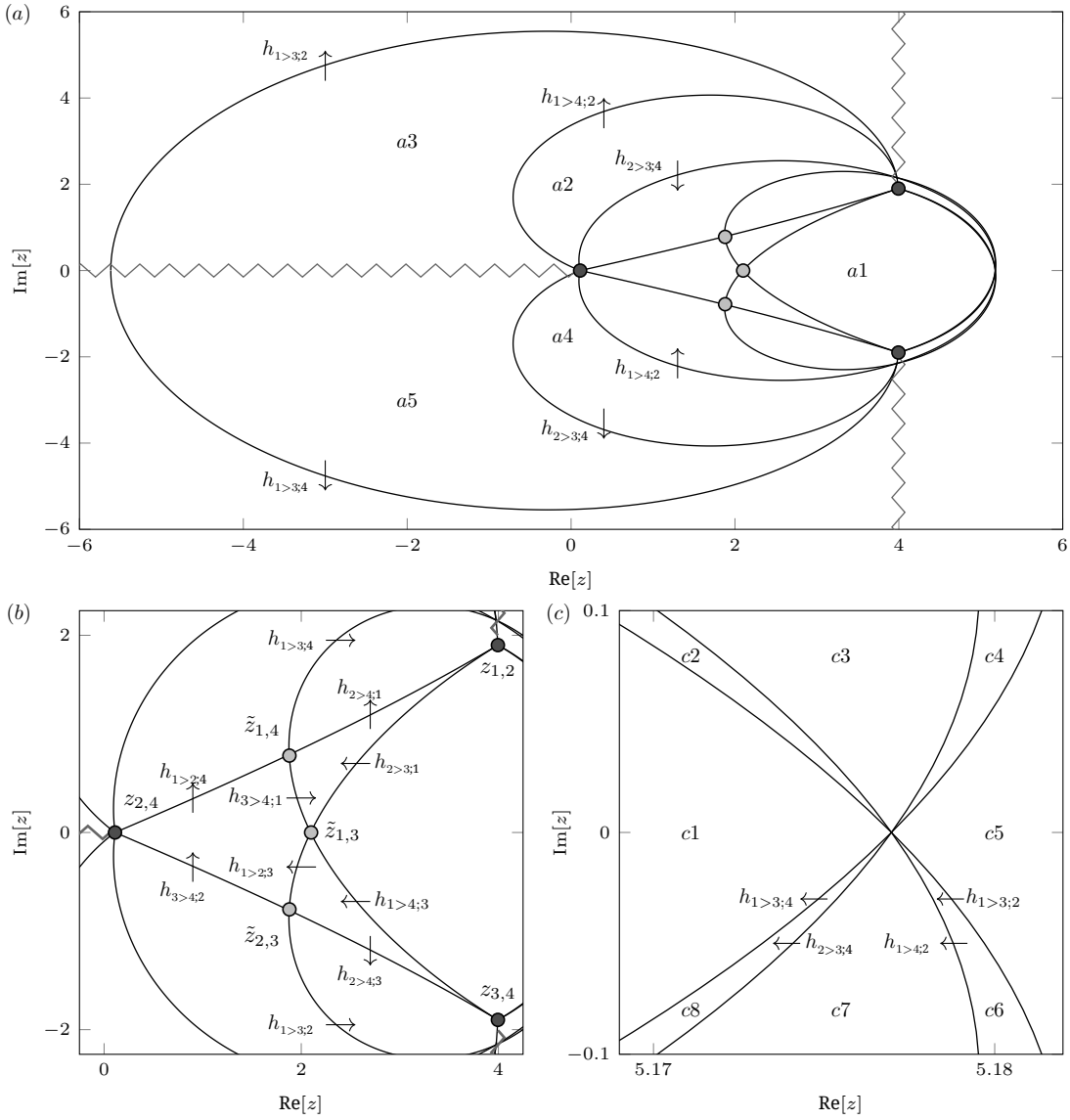


图3：(*a*) 展示了燕尾问题 (3.5a) 的高阶斯托克斯线几何，其中参数取值为 (*a*， *b*) = (1，3)。转向点以黑色圆圈表示，虚转向点以灰色圆圈表示，分支切割以灰线表示，高阶斯托克斯线以黑线表示。跨越 $h^{i>k;j}$ 的箭头表示自同构 $\mathrm{T}^{i>k;j}$ 的应用方向。在 (*b*) 中，展示了转向点附近的区域。在 (*c*) 中，展示了四条相交的高阶斯托克斯线所在的区域。请注意，$h^{i>k;j}$ 和 $h^{k>i;j}$ 沿同一条曲线重合，但自同构的应用方向相反。

区域	S_{12}	S_{13}	S_{14}	S_{23}	S_{24}	S_{34}
$a1$	−1	0	0	0	−1	1
$a2$	−1	0	0	−1	−1	1
$a3$	−1	0	1	−1	−1	1
$a4$	−1	0	−1	0	−1	1
$a5$	−1	0	−1	1	−1	1

区域	S_{12}	S_{13}	S_{14}	S_{23}	S_{24}	S_{34}
$c1$	−1	0	0	0	−1	1
$c2$	−1	0	0	0	−1	1
$c3$	−1	0	−1	0	−1	1
$c4$	−1	0	−1	−1	−1	1
$c5$	−1	−1	−1	−1	−1	1
$c6$	−1	0	−1	−1	−1	1
$c7$	−1	0	0	−1	−1	1
$c8$	−1	0	0	0	−1	1

表1：图3中各区域对应的斯托克斯常数值如 S_{ij} 所示。请注意，由于首阶振幅函数（3.10）中积分常数的选择，燕尾问题的 $S_{ij} = -S_{ji}$。总共有十二个斯托克斯常数，利用这一对称性，这里仅报告六个。区域 $a1$ 和 $c1$ 中的斯托克斯常数值由解（3.20）得到，其他区域中的值则通过将（2.11b）中的高阶斯托克斯自同构 $\mathrm{T}^{i>k;j}$ 应用于此解得到。每个区域的 $\mathbb{C}_z$ 邻接图是这样构造的：如果 S_{ij} 在该区域含有非零元素，则在节点 i 和 j 之间连一条边。

请回想，除 ϵ 之外，控制微分方程（3.5a）还包含两个参数 a 和 b，此处我们取其值为 $a = 1$ 和 $b = 3$。这使渐近展开出现三个不同的奇点，这是导致高阶斯托克斯线活动发生变化的最简单设置。请注意，对于此前图1所示的某些 a 和 b 取值，出现的奇点较少，因此高阶斯托克斯线不会相交。在图7中展示的这些特殊情形下，出现的渐近现象与三阶皮尔西问题中的现象类似（Howls 等，2004*a*；Shelton 等，2025）。

所有高阶斯托克斯线 $\boldsymbol{h}^{i>k;j}$，无论活跃还是非活跃，均显示在图3中，适用于 $(a,\ b) = (1,\ 3)$。每条高阶斯托克斯线上的箭头表示应用式（2.11b）中的高阶斯托克斯自同构 $\mathrm{T}^{i>k;j}$ 的方向。除了三个转向点 $z_{i,\ j}$（在这些点处 $\chi_i = \chi_j$）之外，还有三个虚转向点 $\tilde{z}_{i,\ j}$，在这些点处同一条件也成立。$z_{i,\ j}$ 与 $\tilde{z}_{i,\ j}$ 的区别在于，虚转向点并不对应实际奇点，因为附近相应的斯托克斯常数为零，所以这些奇点不会显现在渐近展开中。因此，从虚转向点 $\tilde{z}_{i,\ j}$ 发出的高阶斯托克斯线，如图3(*b*)所示，均为非活跃线。请注意，灰色锯齿线所示的分支切割，是渐近解中每个 WKBJ 分量的分支切割，而不是整体函数的分支切割。跨越这些渐近分支切割时，斯托克斯线和高阶斯托克斯线的指标会重新编号。图3(*c*)详细展示了四条高阶斯托克斯线相交的区域。可以看到，多条斯托克斯线会经过同一个交点，因此这里每个扇区都需要斯托克斯常数 S_{ij} 的取值。

复平面上斯托克斯常数 S_{ij} 的取值列于表1中。这里，五个区域 $a1$–$a5$ 是图3(*a*)中标出的区域，而八个区域 $c1$–$c8$ 是图3(*c*)中标出的区域。区域 $a1$ 和 $c1$ 中的 S_{ij} 取值，是通过在§ 3.4研究该问题的积分表述得到的；$\mathbb{C}_z$ 其他区域中的相应取值，则通过对图3所示的每条高阶斯托克斯线应用式(2.11b)中的自同构 $\mathrm{T}^{i>k;j}$ 而得出。

由于在区域 $a1$ 中有 $S_{13} = 0$、$S_{14} = 0$ 和 $S_{23} = 0$，图3(*b*)中从虚转向点发出的所有标记的高阶斯托克斯线均不活跃。由此得到的活跃高阶斯托克斯线与所有斯托克斯线 $l_{i>j}$ 一同显示于图4中。可以看到，斯托克斯线在四处相交。其中，$\mathrm{Re}[z] < 0$ 的三处交点各有三条斯托克斯线交汇，而正实轴上的交点则有六条斯托克斯线相交。在每个斯托克斯交叉点处，由于斯托克斯常数 S_{ij} 的取值发生变化，某些斯托克斯线的活跃状态会随之改变。例如，斯托克斯常数 S_{14} 在区域 $a2$ 中的取值为0，在区域 $a3$ 中则变为1。因此，相应斯托克斯交叉点两侧的斯托克斯线 $l_{4>1}$ 活跃状态会发生变化。此外，在正实轴交点附近，左侧（表1中的区域 $c1$ ）的三个斯托克斯常数 S_{13}、S_{14} 和 S_{23} 均为零，而交点右侧（表1中的区域 $c5$ ）则均非零。因此，经过这个斯托克斯交叉点的三条斯托克斯线的活跃状态会发生改变。

活跃斯托克斯线 $l_{i>j}$（其上有 $S_{ij} \neq 0$）如图5所示。我们看到，对于正虚轴上的斯托克斯交叉点，三条斯托克斯线 $l_{2>3}$、$l_{1>3}$ 和 $l_{1>4}$ 在经过该交叉点时会改变活跃状态。图5中两个标记的斯托克斯交叉点周围各扇区内的超渐近级数参数 σ_i 的取值列于表2。为计算这些取值，我们计算了穿过每条斯托克斯线 $l_{i>j}$ 的斯托克斯自同构（2.5b），其中使用了表1中的斯托克斯常数 S_{ij}。请注意，对于给定的微分方程，斯托克斯常数 S_{ij} 是固定的，而超渐近级数参数的取值对于该方程而言仍是任意的，而是由边界条件确定。因此，我们将这些参数保留为未指定，初始取值设为 $\sigma_i = \beta_i$，所在区域同时标记为 $a1$ 和 $b1$。

由远场条件 (3.5b) 导出的具体选择，该选择被规定为与边界条件相匹配

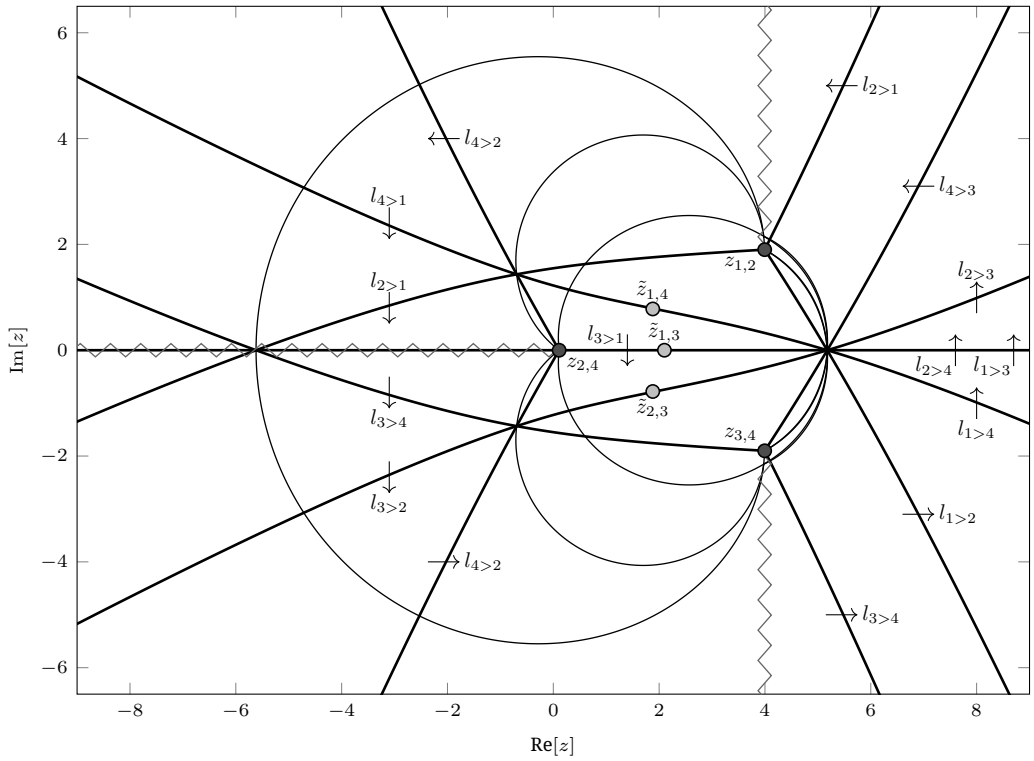


图4：燕尾问题 (3.5) 的斯托克斯线 $l_{i>j}$（粗线）和高阶斯托克斯线 $h^{i>k;j}$（细线）。斯托克斯线 $l_{i>j}$ 满足奇异量函数 (3.16a) 对应的判据 (2.5a)。请注意，图3展示了所有高阶斯托克斯线，而此处仅展示活跃高阶斯托克斯线。若由于 $S_{ij}=0$ 或 $S_{jk}=0$ 而抑制了自同构 (2.11b)，则高阶斯托克斯线 $h^{i>k;j}$ 不活跃。

	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
$a1$	β_1	β_2	β_3	β_4
$a2$	$\beta_1-\beta_2$	β_2	β_3	β_4
$a3$	$\beta_1-\beta_2$	$\beta_2+\beta_4$	β_3	β_4
$a4$	$\beta_1-\beta_2-\beta_4$	$\beta_2+\beta_4$	β_3	β_4
$a5$	β_1	$\beta_2+\beta_4$	β_3	β_4
$a1$	β_1	β_2	β_3	β_4

	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
$b1$	β_1	β_2	β_3	β_4
$b2$	β_1	$\beta_2-\beta_1$	β_3	β_4
$b3$	β_1	$\beta_2-\beta_1$	$\beta_3+\beta_4$	β_4
$b4$	β_1	$\beta_2-\beta_1$	$\beta_3+\beta_4+\beta_2-\beta_1$	β_4
$b5$	β_1	$\beta_2-\beta_1$	$\beta_3+\beta_4+\beta_2$	$\beta_4+\beta_2-\beta_1$
$b6$	β_1	$\beta_2-\beta_1$	$\beta_3+\beta_4+\beta_2$	$\beta_4+\beta_2$
$b7$	β_1	β_2	$\beta_3+\beta_4+\beta_2$	$\beta_4+\beta_2$
$b8$	β_1	β_2	β_3	$\beta_4+\beta_2$
$b1$	β_1	β_2	β_3	β_4

表2：给出了图5所示两个斯托克斯交叉点周围各区域中的超渐近级数参数 σ_i。第一个斯托克斯交叉点由三条斯托克斯线相交形成，将局部区域划分为五个扇区，标记为 $a1$–$a5$。第二个斯托克斯交叉点由六条斯托克斯线相交形成，将局部区域划分为八个扇区，标记为 $b1$–$b8$。

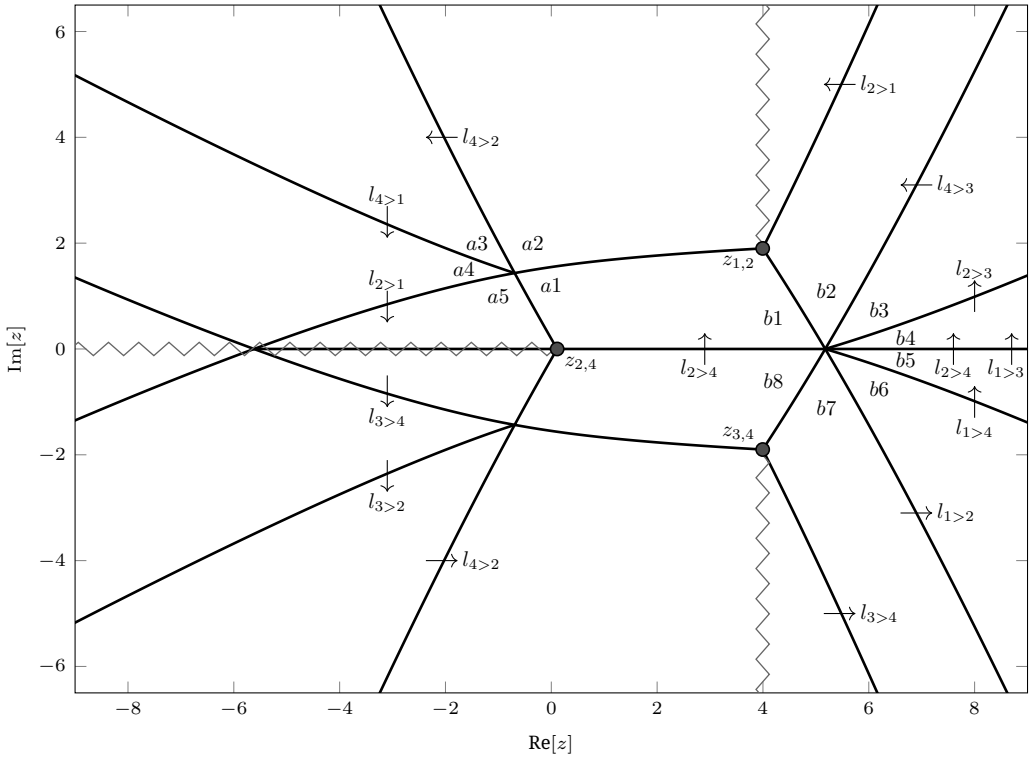


图5：燕尾问题 (3.5) 中的活跃 $l_{i>j}$ Stokes 线如图所示。这些线是从图4所示的所有 Stokes 线 $l_{i>j}$中筛选出来的，只保留了满足沿线 $S_{ij} \neq 0$的那些。斯托克斯常数 S_{ij}的取值取自表1。

在燕尾积分 (3.4) 中隐含的，对应于

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 0, \quad \beta_4 = 0. \tag{4.1}$$

因此，图5所示的许多活跃 Stokes 线并不相关，因为引发 Stokes 现象的相应指数项并不存在。回顾 (2.12)，若沿 Stokes 线 $l_{i>j}$同时满足 $\sigma_i \neq 0$和 $S_{ij} \neq 0$，则该线才相关。具有行为条件 (3.5b) 的燕尾问题所对应的相关 Stokes 线如图6所示；该条件产生的传级数参数取自表2，其取值由 (4.1) 指定。

5 讨论与后续方向

本研究考察了一个复函数，其渐近行为可表示为形式渐近超越级数。渐近行为可以用两组基本常数完全刻画：传级数参数 σ_i 控制各指数项的振幅，而斯托克斯常数 S_{ij} 则决定一个指数项的后期项中包含另一个指数项多少早期项。斯托克斯常数与边界数据或远场条件无关，可刻画该微分方程的所有解。传级数参数由问题的边界数据或远场条件决定，并因斯托克斯现象而在复平面上不断改变。

我们将斯托克斯现象解释为一种作用于传级数参数集合的自同构（2 .5b）作用于超渐近级数参数集上 .

然而，作用于传级数参数集合的自同构也涉及斯托克斯常数 S_{ij}，这些常数可能因高阶斯托克斯现象而在复平面上发生变化。在（2.11b）中，斯托克斯常数的这种变化被解释为作用于斯托克斯常数集合本身的一种自同构。我们的方法能够一致地确定这些现象；更重要的是，它还能处理更复杂的行为，即高阶斯托克斯自同构的取值沿相应的高阶斯托克斯线发生变化。后一种行为与相交的高阶斯托克斯线有关。

我们注意到，我们的方法假设高阶斯托克斯线不会与某些斯托克斯线完全重合，否则将导致斯托克斯自同构发生调整（Nemes，2022；Shelton 等，2024）；同时也假设某些高阶斯托克斯线彼此不会重合，否则将产生一种新形式的高阶斯托克斯自同构。这是一个复杂的问题，很大程度上取决于相重合的斯托克斯线和高阶斯托克斯线的性质

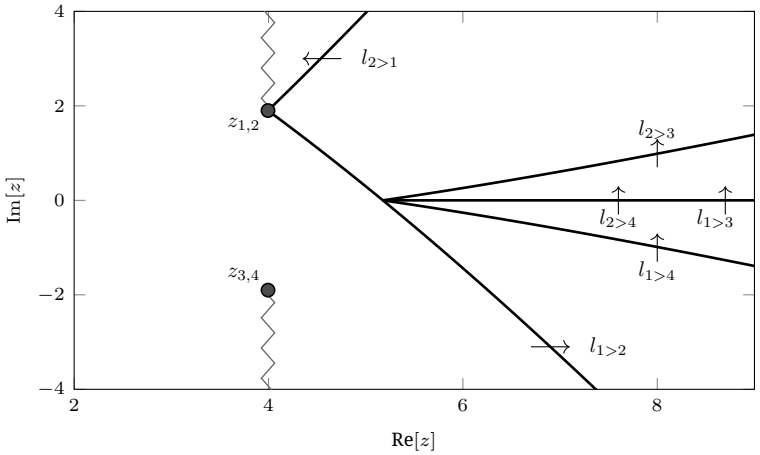


图6：图中展示了燕尾问题 (3.5) 中相关的 $l_{i>j}$ Stokes 线。这些线是从图5所示的所有活跃斯托克斯线 $l_{i>j}$ 中筛选出来的，仅保留沿其满足 $\sigma_i \neq 0$ 的那些线。超渐近级数参数 σ_i 的取值取自表2，其中指定了 $\beta_1 = 1$，以及由行为条件 (3.5b) 导出的 $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$。

；研究这种行为将是该领域未来研究中一个有趣的问题。当渐近解沿实轴由代数（Poincar´e）展开式主导时（这在应用数学和物理学问题中很常见），这种情形是我们方法的一个特例，其中 $\chi_1(z) = 0$。在这种情况下，非线性的影响也可以得到解析，但必须谨慎选择要研究的超渐近级数参数和斯托克斯常数，因为这两者的数量都没有上限。

我们通过求解燕尾积分的远场渐近分析展示了该方法，该积分可表示为一个四阶微分方程的解。在这个例子中，我们展示了高阶斯托克斯线的交叉，以及由此导致的高阶斯托克斯自同构取值变化，如何在渐近超越级数包含四个指数项的系统中出现。此前尚未有人以足以展现这一行为的普遍性研究过此例。由高阶斯托克斯线展现的这一现象，其结果是多个斯托克斯线经过同一个斯托克斯交叉点时，其活跃状态发生变化，如图5所示。

致谢

本研究构思于艾萨克·牛顿研究所举办的“适用的复苏渐近：迈向统一理论”项目，以及冲绳科学技术大学院大学举办的“精确渐近：从流体动力学到量子几何”访问项目期间。我们也感谢与 G. Nemes 教授（哈尔滨）、C. J. Howls 教授（南安普敦）和 I. Aniceto 教授（南安普敦）的有益讨论。CJL 感谢 ARC发现项目DP240101666 的资助。SC 的研究得到台湾国家科学及技术委员会项目 NSTC 113-2112-M-007-019 和 NSTC 114-2112-M-007-015 的资助。

参考文献

Aniceto, I., Bas¸ar, G. & Schiappa, R. 2019 复苏超越级数及其渐近的入门。《物理报告》**809**, 1–135. Aniceto, Inˆes & Crew, Samuel 2024 参数斯托克斯现象的代数研究。*arXiv*预印本*arXiv:2410.13690* . Aniceto, I. & Schiappa, R. 2015 非微扰歧义与复苏超越级数的实性。《数学物理通讯》**335** (1), 183–245. Bennett, T., Howls, C. J., Nemes, G. & Olde Daalhuis, A. B. 2018 任意阶鞍点积分的全局精确渐近。《*SIAM*数学分析杂志》**50**(2), 2144–2177. Berk, H. L., Nevins, W. M. & Roberts, K. V. 1982 WKB理论中的一条新斯托克斯线。《数学物理杂志》**23**(6), 988–1002. Berry, M. V. 1989 斯托克斯不连续性的一致渐近平滑化。《英国皇家学会会刊*A*辑》**422** (1862), 7–21.

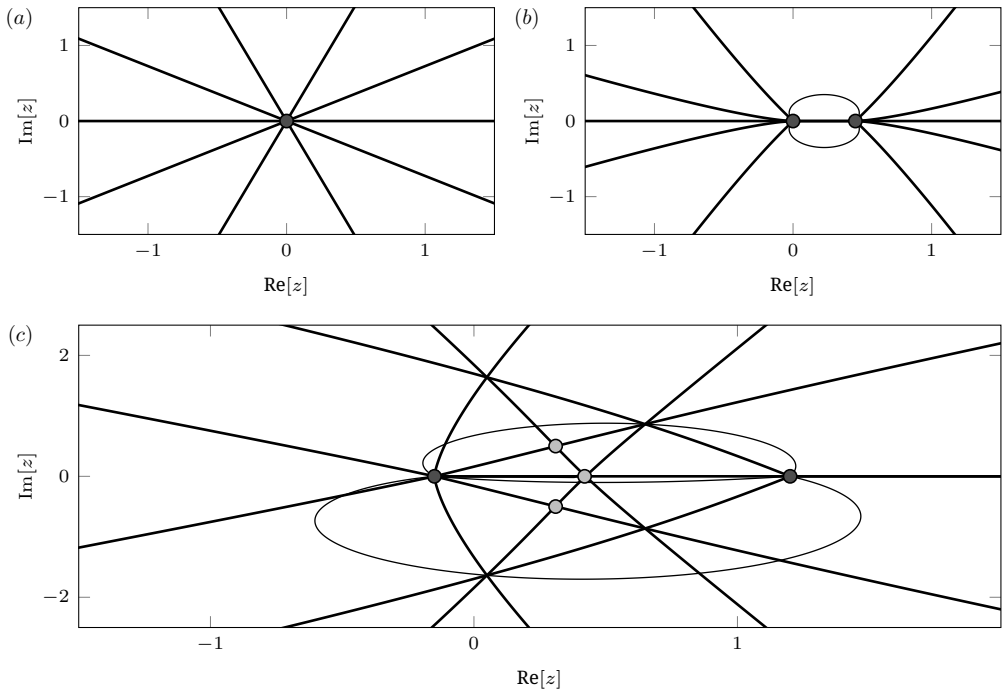


图 7：图中展示了三种情形下的斯托克斯线 $l_{i>j}$(粗线)和高阶斯托克斯线$h^{i>k;j}$(细线)：$(a,b)=(0,0)$ 对应 (a)，$(a,b)=(1,0)$ 对应 (b)，以及 $(a,b)=(-1,\sqrt{2/5})$ 对应 (c)。这些 a 和 b 的取值会产生一个或两个转向点，如图 1 所示。斯托克斯线从转向点（深灰色圆圈）和虚转向点（浅灰色圆圈）发出。

Berry, M. V. & Howls, C. J. 1991 积分鞍点的超渐近分析。《英国皇家学会会刊A辑》**434** (1892), 657–675. Body, G. L., King, J. R. & Tew, R. H. 2005 五阶偏微分方程的指数渐近分析。《欧洲应用数学杂志》**16** (5), 647–681. Chapman, S. J., King, J. R. & Adams, K. L. 1998 非线性常微分方程中的指数渐近分析与斯托克斯线。《英国皇家学会会刊A辑》**454** (1978), 2733–2755. Chapman, S. J. & Mortimer, D. B. 2005 偏微分方程中的指数渐近分析与斯托克斯线。《英国皇家学会会刊A辑》**461** (2060), 2385–2421. Connor, J.N.L., Curtis, P.R. & Farrelly, D. 1983 一种用于数值计算 Airy、皮尔西和燕尾型典范积分及其导数的微分方程方法。《分子物理学》**48** (6), 1305–1330. Connor, J.N.L., Curtis, P.R. & Farrelly, D. 1984 一致渐近燕尾型近似：适用于具有四个合并鞍点的振荡积分的实用方法。《物理学杂志A》**17** (2), 283. Dingle, R.B. 1973 《渐近展开：推导与诠释》。牛津：Academic Press。Dorigoni, D. 2019 复兴理论、超越级数与 Alien演算导论。《物理年鉴》**409**, 167914.´ Ecalle, J 1981 《复苏函数》，第 I–III 卷。奥赛数学出版物 **15**. Ferreira Gonz´alez, C., L´opez Garcia, J. & Perez Sinus´ıa, E. 2018 燕尾积分在高度振荡区域的渐近展开。《应用数学与计算》**339**, 837–845. Howls, C. J., King, J. R., Nemes, G. & Olde Daalhuis, A. B. 2025 高阶斯托克斯现象的平滑化。《应用数学研究》**154** (2), e70008. Howls, C. J., Langman, P. J. & Daalhuis, A. B. Olde 2004**460**, 2285 2303a 论高阶斯托克斯现象。《英国皇家学会会刊A辑》– . Howls, C. J., Langman, P. J. & Olde Daalhuis, A. B. 2004b 论高阶斯托克斯现象。《英国皇家学会会刊A辑》**460**(2048), 2285–2303.

Kaminski, D. 19 92 尖点焦散附近燕尾积分的渐近分析。《美国工业与应用数学学会数学分析杂志》**23** (1) , 262–285。

Kawai, T. & Takei, Y. 2005 奇异摄动理论的代数分析。《美国数学学会会刊》 c.

Nemes, G. 2022 Dingle 最终主规则、Berry 转变与 Howls 猜想。《物理学杂志*A*》**55** (49), 494001。

Olde Daalhuis, A.B. 1998*a* 具有一阶奇点的高阶线性微分方程的超渐近解。《英国皇家学会会刊*A*辑》**454**(1968), 1–29。

Olde Daalhuis, A. B. 1996 超终结项 I。《计算与应用数学杂志》**76**(1-2), 255–264。

Olde Daalhuis, A. B. 1998*b*超终结项 II。*J. Comp. Appl. Math.* **89** (1), 87–95。

Olde Daalhuis, A. B. 2022 未扰动与受扰动第一 Painlev´e 方程的指数改进渐近分析与数值计算。*J. Phys. A* **55** (30), 304004。

Olde Daalhuis, A. B.、Chapman, S. J.、King, J. R.、Ockendon, John R 和 Tew, R. H. 1995 斯托克斯现象与匹配渐近展开。美国工业与应用数学学会 *J. Appl. Math.* **55** (6), 1469–1483。

Shelton, J.、Chapman, S. J. 和 Trinh, P. H. 2024 赤道俘获罗斯贝波模型问题的指数渐近分析。美国工业与应用数学学会 *J. Appl. Math.* **84** (4), 1482–1503。

Shelton, J., Cre w, S. & Trinh, P. H. 2025 奇异扰动的常微分方程 Es.美国工业与应用数学学会应用数学杂志 **85** (2), 548–575.

Stokes, G. G. 1847 论振荡波理论。剑桥哲学学会学报 **8**, 411–455。

Stokes, G. G. 1864 论发散展开中出现的任意常数的不连续性。剑桥哲学学会学报 **10**, 105。

Sueishi, N., Kamata, S., Misumi, T. & ¨Unsal, M. 2020年 关于精确WKB分析、复苏结构与量子化条件。高能物理学杂志 **2020年** (12), 1–51.

Wright, F. J. 1981年 尖点灾变分岔集的奇异截面所呈现的平面曲线奇点。物理学杂志 *A* **14** (7), 1587.

参数化 Alien 演算

我们简要介绍 Écalle 的外微积分 ´，并将其应用于参数渐近级数；例如，这类级数可作为奇异摄动线性微分方程的形式解。首先，令 $\psi(z,\ \epsilon)$ 表示一个参数 Gevrey-1 渐近级数，并写作

$$\psi(z,\epsilon) \sim \psi_0(z) + \epsilon\psi_1(z) + \epsilon^2\psi_2(z) + \cdots . \tag{A.1}$$

如果进一步假设该级数是复苏的[2] (´Écalle, 1981年)，也就是说，它的 Borel 变换可以无穷次解析延拓[3]，那么系数 $\psi_n(z)$ 的大 n 渐近行为可由降阶乘表达式给出

$$\psi_n(z) \sim \sum_{\tilde{\chi}_i} \sum_{p=0}^{\infty} \tilde{\psi}_p^{(i)}(z) \frac{\Gamma(n+\alpha_j-p)}{\left(\tilde{\chi}_j(z)\right)^{n+\alpha_j-p}}. \tag{A.2}$$

将 $\mathbb{C}_1[[\epsilon]]_1$ 这个环[4] 记作复苏渐近级数环，***Alien*导数**是一组微分算子 $\Delta:\ \mathbb{C}_1[[\epsilon]]_1 \to \mathbb{C}_1[[\epsilon]]_1$ 与晚项渐近展开中的每个分量相关联。上述 Alien 导数及其在 $\psi(z,\ \epsilon)$ 上的作用构成

$$\Delta_{\tilde{\chi}_j} : \psi(z,\epsilon) \mapsto \epsilon^{-\alpha_j} \sum_{p=0}^{\infty} \tilde{\psi}_p^{(j)}(z)\epsilon^p. \tag{A.3}$$

线性

$$\Delta_\chi\left(a(z)\psi(z,\epsilon) + b(z)\phi(z,\epsilon)\right) = a(z)\Delta_\chi\psi(z,\epsilon) + b(z)\Delta_\chi\phi(z,\epsilon), \tag{A.4}$$

以及莱布尼茨性质

$$\Delta_\chi(\psi(z,\epsilon)\phi(z,\epsilon)) = \psi(z,\epsilon)\Delta_\chi\phi(z,\epsilon) + \phi(z,\epsilon)\Delta_\chi\psi(z,\epsilon), \tag{A.5}$$

[2]远离一组离散的“转向点” $z \in \mathbb{C}_z$。[3]如果一个复幂级数可以沿着避开一组离散奇点的任意路径进行解析延拓，那么它就是无穷可解析延拓的。[4] ´Ecalle（1981年）证明，形式幂级数的复苏性质在加法和乘法运算下保持不变。

直接由.....得出 给出定义并说明为何称其为外异 导数。最后，我们定义所谓的 带点的外异对 $\dot{\Delta}_\chi$ 求导 $= \mathrm{e}^{-\chi(z)/\epsilon}\Delta_\chi$。

点状艾利恩导数的一个显而易见但关键的性质是，它与通常的（奇异摄动）导数可交换，即

$$\dot{\Delta}_\chi\left(\epsilon\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}z}\right) = \epsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\dot{\Delta}_\chi\psi\right). \tag{A.6}$$

Alien 导数和点状艾利恩导数的作用自然地扩展为[5] 对形式超渐近级数进行线性作用。现在我们来考虑这样一个有限超渐近级数

$$\Psi(z,\epsilon;\sigma_1,\ldots,\sigma_N) := \sum_{i=1}^{N}\sigma_i\epsilon^{-\alpha_i}\mathrm{e}^{-\chi_i(z)/\epsilon}\left(\psi_0^{(i)}(z)+\psi_1^{(i)}(z)\epsilon+\psi_2^{(i)}(z)\epsilon^2+\cdots\right) \tag{A.7}$$

以及一组相应的 Alien 导数 $\Delta_{\chi i-\chi j}$，它们以超渐近级数指数项之差为标记。进一步假设 $\Psi(z,\ \epsilon;\sigma_1,\ \ldots\ldots,\ \sigma_N)$ 是某个线性常微分方程的形式超渐近级数解，也就是说，我们考虑一个奇异摄动线性算子

$$\mathscr{P} = \sum_{n=0}^{N} a_n(z)\epsilon^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} \tag{A.8}$$

使得 $\mathscr{P}\Psi = 0$。超渐近级数参数导数

$$\frac{\partial}{\partial\sigma_j}\Psi(z,\epsilon) = \epsilon^{-\alpha_j}\mathrm{e}^{-\chi_j(z)/\epsilon}\left(\psi_0^{(j)}(z)+\psi_1^{(j)}(z)\epsilon+\psi_2^{(j)}(z)\epsilon^2+\cdots\right),\quad j=1,2,\ldots,N \tag{A.9}$$

是 N 个线性无关的解，它们由各自的远场边界条件区分，且每个解都满足 $\mathscr{P}\left(\frac{\mathrm{d}\Psi}{\sigma_j}\right) = 0\mathrm{d}$。至关重要的是，交换性质 (A.6) 确保 Alien 导数也满足相同的常微分方程 $\mathscr{P}\left(\dot{\Delta}_{\chi_j}\Psi\right) = 0$，因此必定与超渐近级数关于传级数参数的导数线性相关。这一陈述简洁地写作第二桥接方程：

$$\dot{\Delta}_{\chi_i-\chi_j}\Psi = \frac{S_{ij}}{2\pi i}\sigma_i\frac{\partial\Psi}{\partial\sigma_j}, \tag{A.10}$$

其中比例常数定义了斯托克斯常数 S_{ij}。最后，利用桥接方程，我们注意到线性斯托克斯自同构 $\mathbb{S}^{i>j}$：$\sigma_j \to \sigma_j + S_{ij}\sigma_i$可以表示为算子

$$\mathcal{S}_{i>j} = \exp(2\pi i\dot{\Delta}_{\chi_i-\chi_j}). \tag{A.11}$$

正是在这个意义上，（带点的）Alien 导数生成斯托克斯自同构。

[5]也就是说，指数项被规定为 Alien 导数为零。