含经典零点辐射的经典电动力学中的经典线性振子

Timothy H. Boyer

纽约市立大学城市学院物理系

纽约市立大学，纽约州纽约市 *10031*

arXiv:2603.13446v1 [physics.class-ph] 13 Mar 2026

摘要

本文考察一个处于一维经典线性振子势中的经典带电粒子与经典电磁零点辐射的相互作用。我们表明，该振子具有稳定基态和不稳定共振激发态，类似于量子谐振子的相应状态。本文探讨六个主题。1）经典电磁零点辐射具有洛伦兹不变性，因此，任何在其中达到平衡的力学系统都必须至少近似具有洛伦兹不变性。很少有势能满足这一近似洛伦兹不变判据。2）经典相对论波以有限速度 c，传播，这意味着必须使用完整电场 $\mathbf{E}\,[\mathbf{r}(t)\quad t]$来处理位于 $\mathbf{r}(t)$ 的点电荷 e 的相互作用，而不能仅采用偶极近似，将电场视为 $\mathbf{E}\,[0,t]$。3）力学线性振子具有 $SO(2)$ 对称性，这种对称性与角变量$\phi(t)\ =\omega_0 t+\phi_0$的时间演化有关，并导出与作用量变量$J$的整数指标相关联的表示。4）在大质量近似下，即使分析中纳入较高阶辐射多极矩，基态在经典零点辐射中仍然稳定。5）对于共振激发态，带电振子发出的主要偶极辐射，与从经典电磁零点辐射的较高频率成分中获得的能量相平衡；这些频率对应于 ω_0 的奇数倍。6）玻尔频率条件 $\Delta\mathcal{E}=\hbar\omega_0$ 在经典背景下自然出现。洛伦兹不变零点辐射的存在似乎完全隐没于为振荡带电粒子提供能量平衡的过程中。本文的分析为旧量子图像中电子沿经典轨道运动这一观点奠定了经典电磁学理解的基础，但这要求力学系统在经典电磁零点辐射中发生共振。

I. 引言

A. 摘要

本文讨论一个处于一维经典线性振子势中的非相对论经典点电荷 e与经典电磁零点辐射的相互作用。我们表明，在小振幅极限下，振荡电荷具有稳定基态和不稳定共振激发态，类似于量子谐振子的相应状态。本文的分析为旧量子论图像中电子沿经典轨道运动这一观点提供了经典电磁学理解。

B. 基本思想

纯非相对论经典力学谐振子系统的质量为 M，频率为 ω_0，可以用作用-角变量表示，但振子的作用量变量 J_e没有特征尺度。另一方面，随机经典电磁零点辐射恰好有一个特征尺度，即与每个辐射正规模的随机辐射作用变量 J_{rad} 相关的 $\hbar$，其平均值为 $\langle J_{rad}\rangle = \hbar/2$，且每个辐射正规模的随机过程彼此独立。电荷与零点辐射达到平衡，要求机械振子从零点辐射$\hbar$中获得其作用量变量 J_e 的平均值。力学系统的 n^{th} 共振激发态 J_{e-n} 的作用量变量等于辐射作用变量 J_{rad} 的奇数倍，如 $J_{e-n} = (2n+1)\, J_{rad}$所示。力学系统与经典零点辐射之间的能量平衡由驱动辐射频率与振子运动频率的差异来实现，$\omega_{rad-n} = (2n+1)\,\omega_0$。

C. 文章概要

在回顾了一些基础背景材料之后，我们阐述六个基本主题。1）经典电磁零点辐射具有洛伦兹不变性，并要求任何达到平衡的带电力学系统至少近似具有洛伦兹不变性。虽然线性谐振子可以作为近似洛伦兹

不变的系统，但允许的其他势函数 $V(\mathbf{r})$ 极少。2）我们超越偶极近似，并要求将相对论性电磁波 $\mathbf{E}$ 与位于 $\mathbf{r}(t)$ 处的低速电荷之间的相互作用视为 $\mathbf{E}[\mathbf{r}(t) \quad t]$，而不是简单地采用对应于 $\mathbf{E}[0,t]$ 的偶极近似。3）带电机械线性振子具有与角变量的 时间 行为相关的 $SO(2)$ 对称性，$\phi(t) = \omega_0 t + \phi_0$，而共振的整数值源于 $SO(2)$ 对称群的整数指标表示。4）在大质量近似下，即使计入更高阶辐射多极矩，基态仍然稳定。5）对于共振激发态，带电振子发出的主要偶极辐射与从经典电磁零点辐射的较高频率成分中吸收的能量相平衡。6）共振激发态之间跃迁的玻尔频率条件 $\Delta\mathcal{E} = \hbar\omega_0$ 在经典分析中自然出现。洛伦兹不变零点辐射在为振荡带电粒子提供能量平衡方面似乎完全隐而不显。

II. 背景材料

A. 电磁模型

经典一维带电谐振子可以看作源自经典电磁模型中电荷沿一维方向的运动：电荷 e 位于两个与 e同号的固定电荷之间。于是，运动电荷 e 在两个固定电荷的排斥作用下前后振荡。由于振荡电荷不断振荡，因而会产生加速度，它通过发射辐射而损失能量。如果没有环境经典零点辐射提供随机力使电荷 e产生加速度，电荷 e在损失全部机械能后最终会停止运动。我们希望考察振荡电荷在经典零点辐射谱中的行为。我们将选择使带电振子沿 z轴取向，从而球面角为 $\theta = 0$，因此无需讨论方位角。

B. 洛伦兹不变性，至少在近似意义下

电磁理论的基本常数是元电荷 e、光速 c和普朗克常数 $\hbar$。因此还可以定义一个单位质量 M_u，它

将为该理论确定尺度。长度单位可取为 $e^2/(M_u c^2)$，时间单位可取为 $e^2/(M_u c^3)$，能量单位可取为 $M_u c^2$。精细结构常数 $e^2/(\hbar c)$是独立于单位质量选择的基本常数。在本文中，光速 c 不会影响低速电荷 e的机械运动，因此 c 仅在带电力学系统与辐射的联系中出现。因此，分析中不会出现精细结构常数。此外，电荷 e 同时出现在振子损失的能量和获得的能量中，因此在振子能量平衡方程中完全抵消。在非相对论分析中，常数 c 不会出现在机械运动中，而电荷 e可以取任意（较小的）值。

C. 具有经典零点辐射的经典电动力学

带电中性的导电表面之间存在卡西米尔力[1]，这意味着在经典物理学中，即使处于绝对零度，也必定存在随机辐射，称为经典电磁零点辐射。[2][3] 卡西米尔力的大小及其随距离的变化规律，可以通过与温度无关的随机经典辐射准确解释；其每个正规模的光谱由平均能量$U_{rad}(\omega) = \hbar\omega/2$，给出，这正是洛伦兹不变的经典零点辐射的光谱。我们强调，每个正规模的瞬时辐射能为 $J_{rad}\omega$，其中作用量变量 J_{rad} 是一个随机过程。经典零点辐射的作用量变量，在每个惯性系中，对每个频率 ω 的辐射都具有相同的平均值 $\langle J_{rad}\rangle = \hbar/2$ 。

含有经典电磁零点辐射的经典电动力学，是经典电动力学的一种特定形式，其中麦克斯韦方程组的无源解被选为具有洛伦兹不变能谱的随机经典辐射场。[4][5]这种理论通常称为“随机电动力学”。经典零点辐射的尺度经过选择，使其能够正确给出导电平行板之间的卡西米尔力。这种经典理论将普朗克常数 $\hbar$ 作为经典零点辐射的唯一尺度。50多年来，这种经典理论的意义逐渐得到揭示。这种经典理论得出了一系列通常被认为需要量子理论才能获得的结果。例如，已有经典

计算可以得出卡西米尔力、范德瓦耳斯力、振子比热、抗磁性、超流行为、原子塌缩的缺失[6]以及黑体谱[7]，这些结果的平均值与实验结果及相应的量子计算结果一致。[8]

D. 大振子质量下的近似相对论行为

经典电磁零点辐射是洛伦兹不变的。[4] 任何非相对论系统，例如振荡速度任意的非线性带电谐振子，都会倾向于将洛伦兹不变的零点谱推向瑞利–金斯谱。[9] 然而，非线性振子甚至不近似洛伦兹不变，因为非线性项中包含一个长度参数，它与振子的固有频率 ω_0 结合后，可得到一个基于参数的速度 v ，该速度不同于光速 c。为了实现近似的洛伦兹对称性，我们在此转而考虑一个线性振子，它涉及质量 M 和频率 ω_0这两个参数。此外，只有当带电振子的振幅 Z_0（J_e）（取决于振子的作用量变量 J_e）非常小，因而其最大速度 $v = Z_0\omega_0$ 也非常小时， $v << c$，线性振子运动才近似符合相对论系统。因此，我们将振子质量 M 取为极大值，使带电粒子 e的运动幅度很小，从而令振子动能的最大值很小，M（$Z_0\omega_0$）$^2/2 = Mv^2/2 << Mc^2$，得到 $v << c$。对相对论的强调严格限制了该理论适用的力学系统。一维线性简谐振子和库仑势是最重要的许可力学势系统。

E. 本文分析中的振子基态

重要的是要认识到，在采用偶极子 近似处理时，带电线性振子会与任意 随机经典辐射光谱达到稳态，[5] 非相对论带电粒子在库仑势中也是如此。然而，假设振子（在振幅趋于零的振荡极限下）与其偶极辐射场和四极辐射场两者都达到平衡，则平衡光谱（除一个整体常数外）便确定为洛伦兹不变的经典零点辐射。[10] 在其基态 </style》中，

带电一维线性谐振子与辐射的相互作用完全隐而不显。振子会散射零点辐射，但按时间平均，不存在沿任何方向传播的净辐射。[5] 人们或许会因此认为，尽管带电谐振子持续振荡，却并未与辐射发生相互作用。

F. 本文分析中的共振激发态

所有频率都存在于随机经典零点辐射中。另一方面，振荡的机械系统只有一个固有振荡频率 ω_0。如果带电机械振子在经典零点辐射存在时处于基态，那么偶极频率和四极频率处的辐射都会使机械振子产生相同的随机过程。测量辐射的观察者不会察觉到带电机械振子持续发射和吸收的辐射。然而，如果机械振子远高于基态振幅，带电振子仍会发射辐射，且主要发射到偶极辐射模中，其频率与其自然机械振荡频率ω_0相同。如果振子振幅恰好与某个驱动零点辐射模共振，那么偶极辐射发射将与从频率不同于机械振子固有振荡频率ω_0 的零点辐射中获得的偶极能量相平衡。对于这些共振激发态，带电振子在基频 ω_0 处发射的偶极辐射，其随机作用量变量为 $J_{e-n} = (2n+1)\, J_{rad}$；这可以由频率为 $\omega_{rad-n} = (2n+1)\,\omega_0$、且不同于振子自然机械振荡频率 ω_0 的零点辐射模所带来的偶极能量增益来平衡。然而，振子的能量 $\mathcal{E}_{e-n}$ ($J_{e-n}\omega_0 =]2n+1($ $J_{e-1}]\,\omega_0 = J_{rad}\,[)\,2n+1$与相关零点辐射的能量 $\mathcal{E}_{rad-n}$相同。共振态 $\Delta\mathcal{E}_e$发生变化时，便会导出玻尔条件 $\Delta\mathcal{E}_e = \hbar\omega_0$。本文余下部分将进行计算，以证实这些论述。

III. 线性振子系统

沿 z 轴取向的一维经典线性谐振子的哈密顿量为

$$H(p,z)=\frac{p^2}{2M}+\frac{1}{2}M\omega_0^2z^2 \tag{1}$$

其中，位置 z 和线性动量 p 是相空间上的动力学变量，而质量 M 和振荡（角）频率 ω_0 是固定参数。哈密顿量H 可用作用-角变量 J、和 ϕ改写为[11]

$$H(J,\phi)=J\omega_0, \tag{2}$$

其中，角变量 $\phi=\omega_0t+\phi_0$ 不出现，质量 M也不出现。由该哈密顿量得到的运动方程的解 $z(t)$写成多重周期展开时，完全不包含谐波机械振荡频率 ω_0，因此[11]

$$z(t)=Z_0\sin[\phi(t)]=\sqrt{\frac{2J}{M\omega_0}}\sin[\phi(t)]=\sqrt{\frac{2J}{M\omega_0}}\sin[\omega_0t+\phi_0] \tag{3}$$

and

$$p(t)=M\omega_0Z_0\cos[\phi(t)]=\sqrt{2M\omega_0J}\cos[\phi(t)]=\sqrt{2M\omega_0J}\cos[\omega_0t+\phi_0], \tag{4}$$

运动的振幅为

$$Z_0=\sqrt{\frac{2J}{M\omega_0}}. \tag{5}$$

因此，随着时间的推移，力学系统在由 p和 z 或由 J 和 ϕ标记的二维相空间中，沿角变量 $\phi=\omega_0t+\phi_0$ 进行匀速旋转。这些轨道对应于统计力学教材中经常提到的椭圆。[12] 可以说，哈密顿量在二维相空间上具有 $SO(2)$对称性。[13]

该振子的作用量变量 J 确实为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\oint pdz&=\frac{1}{2\pi}\oint\sqrt{2M\omega_0J}\cos[\omega_0t+\phi_0]\,d\left\{\sqrt{\frac{2J}{M\omega_0}}\sin[\omega_0t+\phi_0]\right\}\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega_0}2J\omega_0\cos^2[\omega_0t+\phi_0]\,dt=J.\end{aligned} \tag{6}$$

振荡器能量 $\mathcal{E}$ 为

$$\mathcal{E}=\frac{p^2}{2M}+\frac{1}{2}M\omega_0^2z^2=\frac{1}{2}M\omega_0^2Z_0^2=J\omega_0. \tag{7}$$

IV. 随机经典辐射的球模展开

某些参数的离散整数值与对称群的不可约表示相关。在此前对含有经典电磁零点辐射的经典电动力学的分析中，使用了平面波，这与对洛伦兹不变性的强调相吻合。[5] 对于本文所研究的随机经典电磁辐射，我们将强调涉及旋转群$SO(2)$ 和/或 $SO(3)$ 的旋转对称性。[14] 由于电磁波处于三维空间中，我们将其展开为球多极辐射场。于是，在半径为 R 的一个非常大的球形空腔中的随机辐射可写为 [15]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{m=l}\left\{\exp\left[i\left(-k_{nl}^{M}ct+\theta_{nlm}^{M}\right)\right]\left[ia_{nlm}^{M}j_l\left(k_{nlm}^{M}r\right)\mathbf{X}_{l,m}\left(\theta,\phi\right)\right]\right.$$
$$\left.+\exp\left[i\left(-k_{nlm}^{E}ct+\theta_{nlm}^{E}\right)\right]\left[a_{nlm}^{E}/\left(-ik_{nlm}^{E}\right)\right]\nabla\times\left[j_l\left(k_{nlm}^{E}r\right)\mathbf{X}_{lm}\left(\theta,\phi\right)\right]\right\}, \tag{8}$$

and

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{m=l}\left\{\exp\left[i\left(-k_{nlm}^{E}ct+\theta_{nlm}^{E}\right)\right]\left[ia_{nlm}^{E}j_l\left(k_{nlm}^{E}r\right)\mathbf{X}_{l,m}\left(\theta,\phi\right)\right]\right.$$
$$\left.+\exp\left[i\left(-k_{nlm}^{M}ct+\theta_{nlm}^{M}\right)\right]\left[a_{nlm}^{M}/\left(ik_{nlm}^{M}\right)\right]\nabla\times\left[j_l\left(k_{nlm}^{M}r\right)\mathbf{X}_{lm}\left(\theta,\phi\right)\right]\right\}, \tag{9}$$

其中，参数 $a_{lm}^{E}\left(k_{nl}^{E}\right)$ 和 $a_{lm}^{M}\left(k_{nl}^{M}\right)$ 与特定的随机电磁辐射谱相关，$\mathbf{X}_{lm}(\theta,\ \phi)$ 是矢量球谐函数，而随机相位 θ_{nlm}^{E} 和 θ_{nlm}^{M} 在 $[0,2\pi)$ 上均匀分布，并且对于每个辐射模彼此独立。[16] 对于一般随机辐射谱，我们有如下尺度：[17]

$$\left|a_{nlm}^{E}\right|^2 = \frac{16\pi\left(k_{nl}^{E}\right)^2}{\mathsf{R}}\left[U_{nlm}^{E}\left(k_{nlm}^{E}\right)\right] = \frac{16\pi\left(\omega_{nl}^{E}\right)^3}{c^2\mathsf{R}}\left\langle\left[J_{rad-nlm}\left(\omega\right)\right]\right\rangle, \tag{10}$$

辐射正规模的随机平均电能 U_{nlm}^{E} 由下式给出$U_{nlm}^{E}\left(k_{nlm}^{E}\right) = k_{nlm}^{E}c\left\langle\left[J_{rad\ nlm}(\omega)\right]\right\rangle_{\theta_{nlm}} = \omega_{nlm}^{E}\left\langle\left[J_{rad\ nlm}(\omega)\right]\right\rangle_{\theta_{nlm}}$，其中 $\left\langle\left[J_{rad\ nlm}(\omega)\right]\right\rangle_{\theta_{nlm}}$表示作用量变量 $J_{rad-nlm}$ 的随机平均值，且该变量是 ω. 的函数。对于磁辐射模式 $\left|a_{nlm}^{M}\right|^2$，也有一个与式（10）类似的表达式。然而，

对于一维带电线性谐振子沿 z轴的直线运动，不存在磁模式辐射耦合，因此只有电模式会驱动振子。这里我们用随机相位来体现随机性。单位体积内每单位（角）频率的正规模数为 $\omega^2/(\pi^2c^3)$，由此得到按θ^E_{nlm}和 θ^M_{nlm}平均的、单位体积内每单位角频率间隔的辐射能 $[\omega^2/(\pi^2c^3)]\,U(\omega)$。

对于包含驻波的包围球半径 R 趋于无穷大的极限，我们有[17] $dk = \pi dn/$R以及

$$\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \to \int_0^\infty dn = \int_0^\infty dk\frac{\mathsf{R}}{\pi} = \int_0^\infty d\omega\frac{\mathsf{R}}{\pi c}. \tag{11}$$

V. 从随机环境辐射中吸收的能量

A. 偶极子和四极子辐射的能量平衡

如果经典带电振子位于绝对空旷的无限空间中，经典辐射的发射将持续进行，直到振子的全部机械能都转移为电磁辐射。然而，如果振子位于随机经典辐射场中，例如热辐射场中，那么振子也会从环境辐射中获得能量。当带电振子发射的能量与从随机环境辐射中获得的平均能量在平均意义下达到平衡时，便达到了稳态。十九世纪末，普朗克首次计算了这种平衡（仅在偶极近似下）。[18] 普朗克得出结论：当线性振子的时间平均能量与辐射场中频率等于机械振子固有频率的各模式的平均能量相匹配时，线性振子便达到平衡。

对于振子基态，我们将超越偶极子 近似，并考虑在小源近似下，振子与之相互作用的球形多极辐射场中的四极 辐射。在一篇较早的文章中，[10] 我们证明，如果小型一维谐振子对偶极和四极散射的辐射谱都保持稳定，且不假设存在速度依赖阻尼，那么唯一允许的光谱就是经典电磁零点辐射的光谱，其中作用量变量与频率无关。在较早的文章中，经典

零点辐射是用平面波展开的；这里我们将使用方程（8）和（9）中的球面模展开。我们将假设辐射谱中包含平均能量为 $U_{rad}(\omega) = \hbar\omega/2$ 的经典零点辐射，并使用参数变易法计算稳态。[19][20]

B. 超越仅涉及偶极辐射的通常近似

带电线性振子的通常偶极子 近似将电场的作用视为 $eE_z(0,t)$，因此忽略电荷的任何位移，并写作[19]

$$M\ddot{z} = -M\omega_0^2 z(t) + eE_z(0,t), \tag{12}$$

其中，辐射发射造成的能量损失被单独考虑。在此方程中，线性谐振子恰有一个共振频率，即 ω_0。若振子初始静止，驱动场 $E_z(0,t)$ 会使粒子获得能量。若驱动场是随机辐射，线性振子平均而言将获得足够的能量，以平衡其因向偶极辐射中发射而造成的机械能损失；此时能量为$\mathcal{E} = (1/2)\hbar\omega_0$。这正是普朗克结果的基础：振子的平均能量等于辐射场中频率等于线性振子固有频率 ω_0 的正规模的平均能量。此近似分析既没有比较振子速度 $\dot{z}$ 与随机辐射速度 c，也没有考虑与高频辐射发生任何共振相互作用。本文超越了这一偶极近似，并使用 $\mathbf{E}[\mathbf{r}(t)\ \ t]$ 作为带电线性振子的驱动力。请注意，驱动辐射中包含了位置依赖性$\mathbf{r}(t)$。

C. 参数变分法

为了使带电机械振子从随机零点辐射中获得功率，我们要求存在一段足够长的时间 τ，使得在 τ, 期间发生许多次振荡，但又足够短，以至于振子振幅 Z_0 在 τ期间不会显著变化。[21] 对于振子上的小电荷 e，这种情况确实可能发生，因为小电荷 e 意味着每个振荡周期内获得或损失的能量很少。对于大质量 M （非相对论）近似（但仍忽略

辐射能的发射），我们有质量为 M的非相对论粒子的牛顿第二定律

$$M\,\ddot{z} = -M\omega_0^2 z\,(t) + eE_z\left[\hat{z}z\,(t)\,,t\right], \tag{13}$$

其中 $\mathbf{r}(t) = \hat{z}z\,(t)$ 描述振子的机械运动。特别注意，力取决于驱动辐射中的位置 $\hat{z}z(t)$。对于任何更高阶多极矩，包括共振激发态而言，这一点都很重要。

D. 微分方程的解

我们感兴趣的是由常数变易法给出的特解 $z_p(t)$[20],

$$z_p\,(t) = \frac{e}{M\omega_0}\int_0^t dt' E_z\left[\mathbf{r}\,(t')\,,t'\right]\sin\left[\omega_0\,(t-t')\right], \tag{14}$$

其中 $\mathbf{r}(t) = \hat{z}z\,(t)$。当我们计算粒子的速度和加速度时，可以验证此表达式 (14) 满足方程 (13)。电荷的速度为 e

$$\frac{dz_p}{dt} = \frac{e}{M}\int_0^t dt' E_z\left[\mathbf{r}\,(t')\,,t'\right]\cos\left[\omega_0\,(t-t')\right], \tag{15}$$

加速度为

$$\frac{d^2 z_p\,(t)}{dt^2} = -\frac{e\omega_0}{M}\int_0^t dt' E_z\left[\mathbf{r}\,(t')\,,t'\right]\sin\left[\omega_0\,(t-t')\right] + \frac{e}{M}E_z\left[\mathbf{r}\,(t')\,,t'\right]. \tag{16}$$

因此，式 (14) 中 $z_p(t)$ 的表达式满足微分方程 (13)，也满足初始条件 $z_p(0) = 0$ 和 $\dot{z}_p(0) = 0$。

E. 时间 τ 内的能量增益

振子在这段时间 τ 内从随机辐射中获得的能量由所传递功率的时间积分给出。如果我们将电磁驱动场的位置依赖性纳入考虑，则由公式（15）可得

$$\begin{aligned} W\,(\tau) &= \int_0^\tau dt\left[\frac{d}{dt}z_p\,(t)\right] eE_z\left[\mathbf{r}\,(t)\,,t\right] \\ &= \int_0^\tau dt\left[\frac{e}{M}\int_0^{t'=t} dt' E_z(\mathbf{r}\,(t')\,,t')\cos\left[\omega_0\,(t-t')\right]\right] eE_z\left[\mathbf{r}\,(t)\,,t\right] \\ &= \frac{e^2}{M}\int_0^\tau dt\int_0^{t'=t} dt'\cos\left[\omega_0\,(t-t')\right] E_z\left[\mathbf{r}\,(t')\,,t'\right] E_z\left[\mathbf{r}\,(t)\,,t\right]. \end{aligned} \tag{17}$$

现在，公式（17）中二重积分的被积函数在交换 t和 t'时具有对称性。积分区域是一个等腰直角三角形，其坐标轴标记为 t和t'；先对 t' 积分，从 0 到 t，然后对 t 积分，从 0 到 τ。然而，由于被积函数具有对称性，我们可以反转积分顺序，先对 t 从 t' 到 τ进行积分，再对 t' 从 0 到 τ 进行积分，从而得到[19][22]

$$W(\tau)=\int_0^\tau dt'\int_{t'}^\tau dt'\frac{e^2}{M}\cos\left[\omega_0(t-t')\right]E_z\left[\mathbf{r}(t'),t'\right]E_z\left[\mathbf{r}(t),t\right]. \tag{18}$$

但接着，我们可以交换 t 和 t' 的标签，并将两个表达式各取一半相加，得到

$$W(\tau)=\frac{1}{2}\int_0^\tau dt\int_0^\tau dt'\frac{e^2}{M}\cos\left[\omega_0(t-t')\right]E_z\left[\mathbf{r}(t'),t'\right]E_z\left[\mathbf{r}(t),t\right]. \tag{19}$$

F. 从随机辐射吸收的能量

随机辐射涉及一个随时间变化的随机过程，可以用随机相位[16] θ^E_{nlm}来描述。辐射沿z轴与带电偶极振子相互作用。我们感兴趣的是涉及对$\theta^E_{n1,\ 0}$取平均的随机平均值。对零点辐射的随机相位取平均，得到

$$\left\langle\cos\left[\theta^E_{n1,0}\right]\cos\left[\theta^E_{n'1,0}\right]\right\rangle_{\theta^E}=\left\langle\sin\left[\theta^E_{n1,0}\right]\sin\left[\theta^E_{n'1,0}\right]\right\rangle_{\theta^E}=\frac{1}{2}\delta_{nn'} \tag{20}$$

and

$$\left\langle\cos\left[\theta^E_{n1,0}\right]\sin\left[\theta^E_{n'1,0}\right]\right\rangle_{\theta^E}=0. \tag{21}$$

因此，对随机相位取平均，然后对式（1/2）$\delta_{n,\ n'}$中的克罗内克δ求和，得到

$$\begin{aligned}
&\left\langle E_z\left[\mathbf{r}(t'),t'\right]E_z\left[\mathbf{r}(t),t\right]\right\rangle_{\theta^E}\\
&=\left\langle\sum\nolimits_{nl}E_z^{nl0}\left[\mathbf{r}(t),0\right]\cos\left[-\omega^E_{nl}t+\theta^E_{nlm}\right]\sum\nolimits_{n'l'}E_z^{n'l'0}\left[\mathbf{r}(t'),0\right]\cos\left[-\omega^E_{nl}t'+\theta^E_{n'l'm'}\right]\right\rangle_{\theta^E}\\
&=\sum\nolimits_{nl}\frac{1}{2}\cos\left[-\omega^E_{nlm}(t-t')\right]\left\{E_z^{nl0}\left[\mathbf{r}(t),0\right]E_z^{nl0}\left[\mathbf{r}(t'),0\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{22}$$

于是，由式（22），根据式（19）可得从.....获得的平均能量

随机辐射

$$
\begin{aligned}
&\langle W(\tau)\rangle_{\theta^E} \\
&= \frac{e^2}{2M}\int_0^\tau dt\int_0^\tau dt'\cos\left[\omega_0(t-t')\right]\langle E_z\left[\mathbf{r}(t),t\right]E_z\left[\mathbf{r}(t'),t'\right]\rangle_{\theta^E} \\
&= \frac{e^2}{2M}\int_0^\tau dt\int_0^\tau dt'\cos\left[\omega_0(t-t')\right]\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cos\left[-k_{nl}^E c(t-t')\right]E_z^{nl0}\left[\mathbf{r}(t),0\right]E_z^{nl0}\left[\mathbf{r}(t'),0\right] \\
&= \frac{e^2}{2M}\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\int_0^\tau dt\int_0^\tau dt'\frac{1}{2}\left\{E_z^{nl}\left[\mathbf{r}(t),0\right]E_z^{nl}\left[\mathbf{r}(t'),0\right]\right\} \\
&\times\frac{1}{2}\left\{\cos\left[\left(\omega_{nlm}^E-\omega_0\right)(t-t')\right]+\cos\left[\left(\omega_{nlm}^E+\omega_0\right)(t-t')\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{23}
$$

此外，我们使用以下展开式

$$
\begin{aligned}
&\cos\left[\left(\omega_{nlm}^E\pm\omega_0\right)(t-t')\right] \\
&=\cos\left[\left(\omega_{nlm}^E\pm\omega_0\right)t\right]\cos\left[\left(\omega_{nlm}^E\pm\omega_0\right)t'\right]\mp\sin\left[\left(\omega_{nlm}^E\pm\omega_0\right)t\right]\sin\left[\left(\omega_{nlm}^E\pm\omega_0\right)t'\right]
\end{aligned}
\tag{24}
$$

并重新整理各项，得到

$$
\begin{aligned}
\langle W(\tau)\rangle_{\theta^E} &= \frac{e^2}{8M}\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\int_0^\tau dt\int_0^\tau dt'\left\{E_z\left[\mathbf{r}(t),0\right]E_z\left[\mathbf{r}(t'),0\right]\right\}\cos\left[\left(\omega_{nlm}^E-\omega_0\right)(t-t')\right] \\
&= \frac{e^2}{8M}\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^\tau dtE_z\left[\mathbf{r}(t),0\right]\cos\left[\left(\omega_{nlm}^E-\omega_0\right)t\right]\right]^2 \\
&+ \frac{e^2}{8M}\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^\tau dtE_z\left[\mathbf{r}(t),0\right]\sin\left[\left(\omega_{nlm}^E-\omega_0\right)t\right]\right]^2 \\
&+ \frac{e^2}{8M}\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^\tau dtE_z\left[\mathbf{r}(t),0\right]\cos\left[\left(\omega_{nlm}^E+\omega_0\right)t\right]\right]^2 \\
&+ \frac{e^2}{8M}\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^\tau dtE_z\left[\mathbf{r}(t),0\right]\sin\left[\left(\omega_{nlm}^E+\omega_0\right)t\right]\right]^2.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

G. 从随机经典辐射获得的能量

完整的驱动项由公式（8）得到，它是径向分量**E(r** t**)**，取值于 $\theta=0$和 $m=0$ 时，得到[23]

$$
E_z(\mathbf{r}(t),0)=-\sum\nolimits_{nl}\frac{a_{l0}^E}{\sqrt{l(l+1)}}l(l+1)\frac{j_l\left[k|z(t)|\right]}{k|z(t)|}Y_{l,0}(\theta=0,0) \tag{26}
$$

这里我们将涉及时间和随机相位的部分单独分离出来。于是，由公式（26）、（10）和（25）可得

$$\begin{aligned}
&\left\langle W\left(\tau\right)\right\rangle_{\theta^E}=\frac{e^2}{8M}\sum\nolimits_{nl}\left[\frac{16\pi\left(\omega_{nl}^{Ed}\right)^3}{c^2\mathsf{R}}\left\langle J_{rad}\right\rangle\right]l\left(l+1\right)\left|Y_{l,0}\right|^2\\
&\times\left\{\left[\int_0^\tau dt\frac{j_l\left(k_{nl}^E\left|z\left(t\right)\right|\right)}{k_{nl}^E\left|z\left(t\right)\right|}\cos\left[\left(\omega_{nl}^E-\omega_0\right)t\right]\right]^2+\left[\int_0^\tau dt\frac{j_l\left(k_{nl}^E\left|z\left(t\right)\right|\right)}{k_{nl}^E\left|z\left(t\right)\right|}\sin\left[\left(\omega_{nl}^E-\omega_0\right)t\right]\right]^2\right.\\
&\left.+\left[\int_0^\tau dt\frac{j_l\left(k_{nl}^E\left|z\left(t\right)\right|\right)}{k_{nl}^E\left|z\left(t\right)\right|}\cos\left[\left(\omega_{nl}^E+\omega_0\right)t\right]\right]^2+\left[\int_0^\tau dt\frac{j_l\left(k_{nl}^E\left|z\left(t\right)\right|\right)}{k_{nl}^E\left|z\left(t\right)\right|}\sin\left[\left(\omega_{nl}^E+\omega_0\right)t\right]\right]^2\right\},
\end{aligned}\tag{27}$$

其中上标“Ed”指的是与振子的固有频率相对应的电偶极辐射频率，

$$\omega_{nl}^{Ed}\approxeq\omega_0.$$

在大腔极限下，由式（11）可得

$$\begin{aligned}
&\left\langle W_{l,0}\left(\tau\right)\right\rangle=\frac{e^2}{8M}\int_0^\infty d\omega^E\frac{\mathsf{R}}{\pi c}\left[\frac{16\pi\left(\omega_{nl}^{Ed}\right)^3}{c^2\mathsf{R}}\left\langle J_{rad}\right\rangle\right]l\left(l+1\right)\left|Y_{l,0}\right|^2\\
&\times\left\{\left[\int_0^\tau dt\frac{j_l\left(k_{nl}^E\left|z\left(t\right)\right|\right)}{k_{nl}^E\left|z\left(t\right)\right|}\cos\left[\left(\omega_{nl}^E-\omega_0\right)t\right]\right]^2+\left[\int_0^\tau dt\frac{j_l\left(k_{nl}^E\left|z\left(t\right)\right|\right)}{k_{nl}^E\left|z\left(t\right)\right|}\sin\left[\left(\omega_{nl}^E-\omega_0\right)t\right]\right]^2\right.\\
&\left.+\left[\int_0^\tau dt\frac{j_l\left(k_{nl}^E\left|z\left(t\right)\right|\right)}{k_{nl}^E\left|z\left(t\right)\right|}\cos\left[\left(\omega_{nl}^E+\omega_0\right)t\right]\right]^2+\left[\int_0^\tau dt\frac{j_l\left(k_{nl}^E\left|z\left(t\right)\right|\right)}{k_{nl}^E\left|z\left(t\right)\right|}\sin\left[\left(\omega_{nl}^E+\omega_0\right)t\right]\right]^2\right\}\\
&=\frac{2e^2}{M}\int_0^\infty d\omega^E\left[\frac{\left(\omega_{nl}^{Ed}\right)^3}{c^3}\left\langle J_{rad}\right\rangle\right]l\left(l+1\right)\left|Y_{l,0}\right|^2\\
&\times\left\{\left[\int_0^\tau dt\frac{j_l\left(k_{nl}^E\left|z\left(t\right)\right|\right)}{k_{nl}^E\left|z\left(t\right)\right|}\cos\left[\left(\omega_{nl}^E-\omega_0\right)t\right]\right]^2+\left[\int_0^\tau dt\frac{j_l\left(k_{nl}^E\left|z\left(t\right)\right|\right)}{k_{nl}^E\left|z\left(t\right)\right|}\sin\left[\left(\omega_{nl}^E-\omega_0\right)t\right]\right]^2\right.\\
&\left.+\left[\int_0^\tau dt\frac{j_l\left(k_{nl}^E\left|z\left(t\right)\right|\right)}{k_{nl}^E\left|z\left(t\right)\right|}\cos\left[\left(\omega_{nl}^E+\omega_0\right)t\right]\right]^2+\left[\int_0^\tau dt\frac{j_l\left(k_{nl}^E\left|z\left(t\right)\right|\right)}{k_{nl}^E\left|z\left(t\right)\right|}\sin\left[\left(\omega_{nl}^E+\omega_0\right)t\right]\right]^2\right\}.
\end{aligned}\tag{28}$$

我们将反复使用这个方程（28），来求带电振子从随机经典电磁辐射中获得的平均能量。

VI. 零点辐射中的带电谐振子的基态

A. 小源近似

在讨论小源极限时，我们要求带电振子进行小幅振荡。基态是系统的最低能态。因此，我们假设球贝塞尔函数的自变量很小，并使用[24]

$$j_l(x) \approxeq \frac{x^l}{(2l+1)!!}. \tag{29}$$

现在，振子的运动范围由式（3）给出；在小参数极限下，式（28）中的积分变为

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau dt \frac{j_l\left(k_{nl}^E Z_0 \cos(\omega_0 t)\right)}{k_{nl}^E Z_0 \cos(\omega_0 t)} \cos\left[\left(\omega_{nl}^E \mp \omega_0\right) t\right] \\
&\approxeq \frac{\left(k_{nl}^E\right)^{l-1} (Z_0)^{l-1}}{(2l+1)!!} \int_0^\tau dt \left[\cos(\omega_0 t)\right]^{l-1} \cos\left[\left(\omega_{nl}^E \mp \omega_0\right) t\right]
\end{aligned} \tag{30}$$

and

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau dt \frac{j_l\left(k_{nl}^E Z_0 \cos(\omega_0 t)\right)}{k_{nl}^E Z_0 \cos(\omega_0 t)} \sin\left[\left(\omega_{nl}^E \mp \omega_0\right) t\right] \\
&\approxeq \frac{\left(k_{nl}^E\right)^{l-1} (Z_0)^{l-1}}{(2l+1)!!} \int_0^\tau dt \left[\cos(\omega_0 t)\right]^{l-1} \sin\left[\left(\omega_{nl}^E \mp \omega_0\right) t\right].
\end{aligned} \tag{31}$$

因此，式（28）变为

$$\begin{aligned}
&\langle W_{l,0}(\tau)\rangle_\theta \\
&= \frac{2e^2}{M} \int_0^\infty d\omega^E \left[\frac{\left(\omega^E\right)^3}{c^3} \left\langle J_{rad}\left(\omega^E\right)\right\rangle_\theta\right] l(l+1) |Y_{l,0}|^2 \left[\frac{\left(k_{nl}^E\right)^{l-1} (Z_0)^{l-1}}{(2l+1)!!}\right]^2 \\
&\times \left[\int_0^\tau dt \left[\cos(\omega_0 t)\right]^{l-1} \cos\left[\left(\omega_{nl}^E \mp \omega_0\right) t\right]\right]^2 + \left[\int_0^\tau dt \left[\cos(\omega_0 t)\right]^{l-1} \sin\left[\left(\omega_{nl}^E \mp \omega_0\right) t\right]\right]^2.
\end{aligned} \tag{32}$$

B. 普朗克偶极辐射情形，$l = 1$

这一情形 $l = 1$ 由普朗克在19世纪末处理过，并在其他出版物中重述。[25] 这一偶极辐射情形对应于忽略

式（25）中驱动随机辐射场的位置依赖性，并涉及式（30）和式（31）中的积分，得出

$$\int_0^\tau dt \cos\left[\left(\omega_{nl}^E \mp \omega_0\right) t\right] = \frac{\sin\left[\left(\omega_{nl}^E \mp \omega_0\right) \tau\right]}{\left(\omega_{nl}^E \mp \omega_0\right)} \tag{33}$$

and

$$\int_0^\tau dt \sin\left[\left(\omega_{nl}^E \mp \omega_0\right) t\right] = \frac{1-\cos\left[\left(\omega_{nl}^E \mp \omega_0\right) \tau\right]}{\left(\omega_{nl}^E \mp \omega_0\right)}. \tag{34}$$

对于偶极子 情形， $l=1$，没有迹象表明偶极子的运动，因为（Z_0）$^{l-1}$ =（Z_0）$^0 = 1$. 将这些表达式代入式（28），得到

$$\begin{aligned}
\left\langle W_{1,0}(\tau)\right\rangle_\theta &= \frac{2e^2}{M}\int_0^\infty d\omega^E \left[\frac{\left(\omega^E\right)^3}{c^3}\left\langle\left[J_{rad}\left(\omega^E\right)\right]\right\rangle_\theta\right] 2\left|\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\right|^2 \left[\frac{1}{3}\right]^2 \\
&\times\left\{\left[\frac{\sin\left[\left(\omega_{nl}^E \mp \omega_0\right)\tau\right]}{\left(\omega_{nl}^E \mp \omega_0\right)}\right]^2 + \left[\frac{1-\cos\left[\left(\omega_{nl}^E \mp \omega_0\right)\tau\right]}{\left(\omega_{nl}^E \mp \omega_0\right)}\right]^2\right\}_{l=1,m=0} \\
&= \left(\frac{3}{4\pi}\right)\frac{2\,(2)\,e^2}{(3)^2 Mc^3}\int_0^\infty d\omega^E\left[\left(\omega^E\right)^3\left\langle J_{rad}\left(\omega^E\right)\right\rangle_\theta\right] \\
&\times\left\{\left[\frac{\sin\left[\left(\omega_{nl}^E \mp \omega_0\right)\tau\right]}{\left(\omega_{nl}^E \mp \omega_0\right)}\right]^2 + \left[\frac{1-\cos\left[\left(\omega_{nl}^E \mp \omega_0\right)\tau\right]}{\left(\omega_{nl}^E \mp \omega_0\right)}\right]^2\right\} \\
&\cong \frac{e^2}{3\pi Mc^3}\omega_0^3\left\langle\left[J_{rad}(\omega_0)\right]\right\rangle_\theta 2\pi\tau = \frac{2e^2}{3Mc^3}\omega_0^2\left[U_{rad}(\omega_0)\right]\tau,
\end{aligned} \tag{35}$$

因为涉及 τ 的两个函数在 $\omega^E = \omega_0$ 处呈尖峰状。注意，平均辐射能为 $[U_{rad}$（ω_0）$] = \langle J_{rad}\rangle_\theta\,\omega_0$。

带电线性振子在非相对论偶极近似下的平均辐射功率，就是熟知的拉莫尔公式

$$\left\langle P_{1,0}^{loss}\right\rangle_\theta = \frac{2}{3}\frac{\omega_0^4}{c^3}\left\langle\left[Z_0\cos(\omega_0 t)\right]^2\right\rangle_\theta = \frac{2}{3}\frac{\omega_0^4}{c^3}\left(\frac{\langle J_e\rangle_\theta}{M\omega_0}\right) = \frac{2}{3}\frac{\omega_0^4}{c^3}\left(\frac{\langle\mathcal{E}_e(\omega_0)\rangle_\theta}{M\omega_0^2}\right). \tag{36}$$

因此，我们得到了普朗克的结论：机械振子的平均能量 $\langle[\mathcal{E}(\omega_0)]\rangle_\theta = \hbar\omega_0/2$与频率和该振子的机械频率相同的辐射模的平均能量 $[U_{rad}(\omega_0)]$ 相同

$$\left\langle\left[\mathcal{E}_e(\omega_0)\right]\right\rangle_\theta = \left[U_{rad}(\omega_0)\right] \quad \text{and} \quad \langle J_e\rangle_\theta = \langle J_{rad}\rangle_\theta = \hbar/2. \tag{37}$$

VII. 四极辐射发射计算

四极辐射发射则较不为人熟知。带电线性振子会产生一个矢量势

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{A}\left(\mathbf{r},t\right)\\
&=\int d^3r'\int dt'\frac{\delta\left(t-t'-\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|/c\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}',t')}{c}\\
&=\int d^3r'\int dt'\frac{\delta\left(t-t'-\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|/c\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\frac{e\widehat{z}Z_0\left(-\omega_0\right)\sin\left(\omega_0t'\right)\delta^3\left[\mathbf{r}'-\widehat{z}Z_0\cos\left(\omega_0t'\right)\right]}{c}\\
&=-\int d^3r'\int dt'\frac{\delta\left(t-t'-\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|/c\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\frac{e\widehat{z}Z_0\omega_0\sin\left(\omega_0t'\right)}{c}\left[\delta^3\left(\mathbf{r}'\right)\right.\\
&\left.-Z_0\cos\left(\omega_0t'\right)\widehat{z}\cdot\nabla'\delta^3\left(\mathbf{r}'\right)+....\right]
\end{aligned}
\tag{38}
$$

其中包含无穷多项。 $\delta^3(\mathbf{r})$ 中的项对应于偶极项，所有教科书中都有给出。目前，我们只关注四极项$\mathbf{A}^{(2)}\left(\mathbf{r}\ t\right)$。现在，我们对 $\nabla'\delta^3\left(\mathbf{r}'\right)$ 进行分部积分，以便将梯度移到外部，并利用狄拉克δ函数。我们得到

$$
\mathbf{A}^{(2)}\left(\mathbf{r},t\right)=\widehat{z}\frac{eZ_0^2\omega_0}{2}\widehat{z}\cdot\nabla\left[\frac{\sin\left[2\omega_0\left(t-r/c\right)\right]}{cr}\right]. \tag{39}
$$

我们只关注发射出的辐射，得到

$$
\mathbf{A}^{(2)}\left(\mathbf{r},t\right)\approxeq-\widehat{z}\frac{eZ_0^2\omega_0}{2cr}\left(\frac{2\omega_0}{c}\right)\left(\cos\theta\right)\left\{\cos\left[2\omega_0\left(ct-r\right)/c\right]\right\}. \tag{40}
$$

利用 $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$，我们在辐射区得到:

$$
\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\approxeq\left[\widehat{\phi}\frac{eZ_0^2\omega_0}{2c}\left(\frac{2\omega_0}{c}\right)^2\left(\cos\theta\sin\theta\right)\right]\frac{1}{r}\left[\sin\left[2\omega_0\left(ct-r\right)/c\right]\right] \tag{41}
$$

现在，我们计算 $dP_{quad}^{loss}/d\Omega=r^2\left[e/\left(4\pi\right)\right]\widehat{r}\cdot\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)=\left[e/(4\pi)\right]r^2B^2$ 的单位立体角辐射功率，并对所有立体角积分，得到$\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}d\theta\sin\theta\left(\cos\ \theta\sin\theta\right)^2\ =\ 8\pi/15.$因此，利用方程(5)，我们得到四极辐射发射的总时间平均功率为

$$
\begin{aligned}
\left\langle P_{quad}^{loss}\right\rangle_t&=\frac{c}{4\pi}\left[\frac{eZ_0^2\omega_0}{2c}\left(\frac{2\omega_0}{c}\right)^2\right]^2\frac{8\pi}{15}\left\langle\left[\sin\left[2\omega_0\left(ct-r\right)/c\right]\right]^2\right\rangle_t\\
&=\frac{16e^2\omega_0^4}{\left(15\right)c^5M^2}J_e^2=\frac{8}{5}\left[\left(\frac{2e^2}{3Mc^3}\right)\omega_0^2\right]J_e\omega_0\left(\frac{J_e\omega_0}{Mc^2}\right).
\end{aligned}
\tag{42}
$$

注意其对 $1/c^5$ 的依赖，而偶极辐射发射为 $1/c^3$.

A. 四极辐射情形， $l=2$

我们希望将这种辐射损失与从零点辐射中获得的辐射进行比较。对于 $l=2$ 的情况，方程（30）和（31）中的积分，其共振项变为

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau dt\left[\cos\left(\omega_0 t\right)\right]\cos\left[\left(\omega_{nl}^E-\omega_0\right)t\right]\\
&=\int_0^\tau dt\frac{1}{2}\left\{\cos\left[\left(\omega^E-2\omega_0\right)t\right]+\cos\left[\omega^E t\right]\right\}\\
&=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin\left[\left(\omega^E-2\omega_0\right)\tau\right]}{\left[\left(\omega^E-2\omega_0\right)\right]}+\frac{\sin\left[\omega^E\tau\right]}{\omega^E}\right\}
\end{aligned}\tag{43}$$

and

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau dt\left[\cos\left(\omega_0 t\right)\right]\sin\left[\left(\omega_{nl}^E-\omega_0\right)t\right]\\
&=\int_0^\tau dt\frac{1}{2}\left\{\sin\left[\left(\omega^E-2\omega_0\right)t\right]+\sin\left[\omega^E t\right]\right\}\\
&=\frac{1}{2}\left\{\frac{1-\cos\left[\left(\omega^E-2\omega_0\right)\tau\right]}{\left[\left(\omega^E-2\omega_0\right)\right]}+\frac{1-\cos\left[\omega^E\tau\right]}{\omega^E}\right\}.
\end{aligned}\tag{44}$$

只有分母中含有量 $\left(\omega^E-2\omega_0\right)$ 的项会在 $\omega^E\approx\!\!\approx 2\omega_0$ 时变大。随机经典零点辐射在每个正规模上彼此独立相关，因此 $2\omega_0$ 处的辐射与 ω_0 处的辐射不相关。因此，对于 $l=2$，式 (28) 中的能量增益方程变为

$$\begin{aligned}
&\left\langle W_{2,0}\left(\tau\right)\right\rangle_\theta\\
&=\frac{2e^2}{M}\int_0^\infty d\omega^E\left[\frac{\left(\omega_0\right)^3}{c^3}\left\langle J_{rad}\right\rangle_\theta\right]6\left[\frac{5}{4\pi}\right]\left[\frac{\left(k_{nl}^E\right)^1\left(Z_0\right)^1}{15}\right]^2\\
&\times\left[\int_0^\tau dt\left[\cos\left(\omega_0 t\right)\right]^1\cos\left[\left(\omega_{nl}^E\mp\omega_0\right)t\right]\right]^2+\left[\int_0^\tau dt\left[\cos\left(\omega_0 t\right)\right]^1\sin\left[\left(\omega_{nl}^E\mp\omega_0\right)t\right]\right]^2\\
&=\frac{2\left(2\right)3e^2}{\left(15\right)^2M}\left(\frac{5}{4\pi}\right)\int_0^\infty d\omega^E\left[\frac{\left(\omega^E\right)^3}{c^3}\left\langle\left[J_{rad}\left(\omega^E\right)\right]\right\rangle_\theta\right]\left(k_{nl}^E\right)^2\left(\frac{2J_e}{M\omega_0}\right)\\
&\times\left\{\left[\frac{\sin\left[\left(\omega^E-2\omega_0\right)\tau\right]}{\left[\left(\omega^E-2\omega_0\right)\right]}+\frac{\sin\left[\omega^E\tau\right]}{\omega^E}\right]^2+\left[\frac{1-\cos\left[\left(\omega^E-2\omega_0\right)\tau\right]}{\left[\left(\omega^E-2\omega_0\right)\right]}+\frac{1-\cos\left[\omega^E\tau\right]}{\omega^E}\right]^2\right\}\\
&=\frac{8}{5}\left(\frac{2e^2}{3Mc^3}\right)\left[\left(\omega_0\right)^2\left\langle\left[J_{rad}\left(2\omega_0\right)\right]\right\rangle_\theta\omega_0\right]\left(\frac{J_e\omega_0}{Mc^2}\right)\tau
\end{aligned}\tag{45}$$

其中我们使用了

$$Y_{2,0}\left(\theta=0\right)=\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^{2}\theta-\frac{1}{2}\right)_{\theta=0}=\sqrt{\frac{5}{4\pi}} \tag{46}$$

以及其中的积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\frac{\sin^{2}\left(xv\right)}{x^{2}}=\pi v\ \ \text{and}\ \int_{-\infty}^{\infty}dx\frac{\left[1-\cos\left(xv\right)\right]^{2}}{x^{2}}=\pi v. \tag{47}$$

此外，重要的是要注意，振幅 振子 运动主要由偶极子 相互作用频率 ω_0处的辐射驱动力决定，而不是由四极频率 $2\omega_0$决定。发射和吸收过程中的四极辐射都涉及更高次的 $1/c^2$ 因子，因此其贡献远小于振子偶极振幅，不过振子的随机过程相同。

现在我们需要将这一功率损失与带电振子以辐射形式发射的四极能量进行比较。式（42）中的这一结果与式（45）中计算的辐射增益一致。因此，对于相同的振子运动，我们发现，在经典零点辐射中，偶极辐射和四极辐射都满足能量平衡。我们认为，在大质量-M 极限下，这种平衡适用于所有多极辐射项。

VIII. 共振激发态

A. 初步概念

1. Huang 和 *Batelaan* 以及 *Cole* 的启发性研究

2015 年，Huang 和 Batelaan[26]证明，处于经典零点辐射中的经典带电简谐振子会从瞬态电磁脉冲中吸收辐射能。吸收发生在自然机械振荡频率 ω_0的整数 倍 $n\omega_0$ 处。此外，2018 年，Cole[27]指出，对于库仑势中的带电粒子，驱动辐射频率为轨道运动的机械频率 ω_e 的整数 倍 $n\omega_e$ 时，会出现强烈的共振。轨道运动还存在共振偏心率。Cole 的共振 {v?}对应于带电粒子吸收能量和角动量，其数值足以抵消辐射发射造成的机械能和角动量损失。不过，Cole 并未考虑零点辐射驱动，而是研究了圆偏振平面波 入射

至垂直于库仑势中带电粒子轨道平面的方向，且波振幅各不相同。这项早期研究表明，对于处于电磁辐射中的带电机械振子，可以考察球多极辐射在机械振荡频率整数倍处的共振。

2. 电磁波的共振

机械振子恰好只有一个共振频率，即其固有振荡频率 ω_0。因此，推秋千时，只有一个共振频率。然而，由于驱动电场的位置依赖性$\mathbf{E}(\mathbf{r}\ t) = \mathbf{E}\ [\hat{z}z(t)\ t]$，电磁辐射并不局限于带电谐振子的振子基频 ω_0 。这种位置依赖性对于共振激发态至关重要。正如公式（8）所示，经典零点辐射在所有频率和所有球多极上都提供驱动力。辐射场 $\mathbf{E}\,[\hat{z}z(t)\ \ t]$ 的自变量中出现 $\hat{z}z(t)$，意味着振子运动方程对应于一个参数振子，其共振频率构成一组全新的频率，等于其固有振荡频率 ω_0 的整数倍。在考虑共振激发态时，驱动电磁场的位置依赖性有时似乎会被忽视。

3. 共振激发态的偶极行为

在适用于带电线性振子机械运动的小源大-c 近似中，阶数为 l 的球多极矩所产生的辐射随$1/c^{2l+1}$变化。例如，偶极辐射所涉及的辐射功率为 $1/c^3$ ，而四极辐射功率则为 $1/c^5$。实际上，当机械速度较小时， l 的最低可能值始终主导由发射导致的辐射能量损失。对于点电荷，随 $1/c^3$ 变化的辐射功率始终占主导。

对式（28）最后几行进行数值积分，并将其视为零点驱动频率 ω^E 的函数后发现，当 $\omega^E = m\omega_0$ 为奇数整数 m，时，机械运动中会出现间距相等的峰值；除第一个峰值外，其余峰值在 ω^E 中的高度和宽度大致相同。因此，我们将寻找涉及偶极振子发射的共振激发态，此时辐射吸收接近奇数倍

的 ω_0。

B. 偶极辐射的贝塞尔函数 j_1

1. 球贝塞尔函数的宗量为零时的考察

虽然对于式 (29) 中的基态，我们只考虑了 $j_1(x)$ 的小宗量极限，但对于激发态，我们不能这样做；相反，我们需要完整表达式。我们可以用正弦函数、余弦函数以及宗量的负幂来表示所有球 贝塞尔函数。例如，当 $l=1$ 时，球贝塞尔函数为

$$j_1(x)=\frac{\sin(x)}{x^2}-\frac{\cos(x)}{x}. \tag{48}$$

现在，在式 (48) 中，x 中的负幂似乎表明当宗量 x 为零时会出现奇点。然而，对于宗量 x 的所有实数值，所有球贝塞尔函数都是有限的，即使在 $x=0$ 时也是如此。事实上，在 $x=0$ 附近展开正弦函数和余弦函数后可以看出，表观奇点会消去；对于小宗量 x，我们有 $j_1(x)/x$

$$\begin{aligned}\frac{j_1(x)}{x}&=\frac{\sin(x)}{x^3}-\frac{\cos(x)}{x^2}\\&=\frac{1}{x^3}\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...\right]-\frac{1}{x^2}\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...\right]\\&=\frac{1}{3}-\frac{x^2}{30}+...\end{aligned} \tag{49}$$

此外，还有一些额外的考虑。式（48）中的正弦函数和余弦函数以周期 π 变号。此外，式（28）中关注的函数涉及 $j_1\left(k^EZ_0\cos(\omega_0t)\right)/\left[k^EZ_0\cos(\omega_0t)\right]$。由于自变量为 $k^EZ_0\cos(\omega_0t)$，该函数关于时间 t 是周期性的。贝塞尔函数 $j_1(x)$ 是关于 x 的奇函数，而 x 也是关于 x 的奇函数。因此，函数 $j_1\left(k^EZ_0\cos(\omega_0t)\right)/\left[k^EZ_0\cos(\omega_0t)\right]$ 是其自变量的偶函数，并且只含有自变量 $k^EZ_0\cos(\omega_0t)$ 的偶次幂。$j_1\left(k^EZ_0\cos(\omega_0t)\right)/\left[k^EZ_0\cos(\omega_0t)\right]$ 的首项为常数；当 $\cos(\omega_0t)$ 为零时，该函数达到最大值，也就是在 $\omega_0t=m\pi+\pi/2$ 时，其中 m 是一个整数。函数 $j_1\left(k^EZ_0\cos(\omega_0t)\right)/\left[k^EZ_0\cos(\omega_0t)\right]$ 是关于 t 的光滑连续函数，即使 $\cos(\omega_0t)$ 趋于零时也是如此。因此，对于绝对值 $|x|$ 较小的 $\omega_0t=m\pi+\pi/2+x$，

qua量小于 π 时，球贝塞尔函数在 $k^E Z_0 x$ 较小时变为，

$$\frac{j_1(k^E Z_0 \cos(\omega_0 t))}{k^E Z_0 \cos(\omega_0 t)} = \frac{j_1(k^E Z_0 |\cos(\omega_0 t)|)}{k^E Z_0 |\cos(\omega_0 t)|} = \frac{j_1(k^E Z_0 |\cos(m\pi + \pi/2 + x)|)}{k^E Z_0 |\cos(m\pi + \pi/2 + x)|}$$
$$= \left(\frac{j_1(k^E Z_0 \sin(x))}{k^E Z_0 \sin(x)} \right) \tag{50}$$
$$= \left(\frac{\sin\left(k^E Z_0 \sin(x)\right)}{\left[k^E Z_0 \sin(x)\right]^3} - \frac{\cos\left(k^E Z_0 \sin(x)\right)}{\left[k^E Z_0 \sin(x)\right]^2} \right)$$
$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{\left[k^E Z_0 \sin(x)\right]^2}{30} + \ ... \right) \approxeq \frac{1}{3} - \frac{\left[k^E Z_0 x\right]^2}{30} + ... \tag{51}$$

请注意，这里 $x = \omega_0 t - (m\pi + \pi/2) = \omega_0(t - t_*)$ 是相对于 $\omega_0 t_* = m\pi + \pi/2$ 的微小位移。这对应于绝对值$\left| j_1\left(k^E Z_0 \cos(\omega_0 t)\right) / \left[k^E Z_0 \cos(\omega_0 t)\right] \right|$ 在 $\omega_0 t = \omega_0 t_* = m\pi + \pi/2$ 处的峰值，其中 $m \geq 1$ 为任意整数。在峰值处，余弦函数为零，$\cos(\omega_0 t_*) = \cos(\pi/2) = 0$，峰值为 $1/3$，随后该函数的绝对值从峰值向两侧递减。

2. 零点辐射中的傅里叶时间序列

现在，式（28）中的时间积分包含带电振子的多次振荡。然而，式（51）中的函数 $\left[j_1(k^E Z_0 \cos(\omega_0 t))\right] / (k^E Z_0 \cos(\omega_0 t))$ 是时间 t 的实周期函数，其周期为 $2\pi/\omega_0$。我们在式（51）中的计算表明，该函数在时间 $t = (m\pi + \pi/2 + x)/\omega_0$ 处的所有极大值，对于 $m \geq 1$，其高度都约为 $1/3$。

现在，如果时间 τ 与周期 $2\pi/\omega_0$相比足够长，那么 $\omega_0 \tau \approxeq p2\pi$ 其中 p是一个整数，所需的积分为 p 乘以一个周期内的积分，

$$\int_0^\tau dt \frac{j_1(k^E Z_0 \cos(\omega_0 t))}{k^E Z_0 \cos(\omega_0 t)} \cos\left[\left(\omega^E - \omega_0\right) t\right] \approxeq p \int_0^{2\pi/\omega_0} dt \frac{j_1(k^E Z_0 |\cos(\omega_0 t)|)}{k^E Z_0 |\cos(\omega_0 t)|} \cos\left[\left(\omega^E - \omega_0\right) t\right]. \tag{52}$$

函数 $j_1\left(k^E Z_0 |\cos(\omega_0 t)|\right) / \left[k^E Z_0 |\cos(\omega_0 t)|\right]$ 显然关于 $\omega_0 t = \pi$ 是偶函数，因为 $|\cos(\pi - \omega_0 t)| = |\cos(\pi + \omega_0 t)| = |\pm\cos(\omega_0 t)|$；而且关于 $\omega_0 t = \pi/2$, 也是偶函数，因为$|\cos(\pi/2 - \omega_0 t)| = |\cos(\pi/2 + \omega_0 t)| = |\pm\sin(\omega_0 t)|$。但是，如果比值 ω^E/ω_0 是偶整数，那么式（52）中的余弦函数 $\cos\left[\left(\omega^E - \omega_0\right) t\right]$ 关于 $\omega_0 t = \pm\pi/2$, 是奇函数，因此式（52）中的积分将为零。因此，共振激发态将涉及 ω^E/ω_0为奇数的情形， $\omega^E = (2n+1)\omega_0$。对于带电力学系统，在共振时，零点辐射的共振驱动频率恰好是奇整数。

C. 示例

1. 基态的情形，$\omega^E = \omega_0$

基态对应于最小的振荡振幅 Z_0 。这是一种特殊情形，此时球贝塞尔函数 j_1 的自变量 $k^E Z_0 \cos(\omega_0 t)$始终不会接近其第一个零点。于是，$j_1\left(k^E Z_0 \cos\left(\omega_0 t\right)\right) / \left[k^E Z_0 \cos\left(\omega_0 t\right)\right] \approx 1/3$ 只是一个正的常数，而对时间的积分给出

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau dt \frac{j_1(k^E Z_0 \cos(\omega_0 t))}{k^E Z_0 \cos(\omega_0 t)} \cos\left[\left(\omega^E - \omega_0\right) t\right] \\
&\approxeq \int_0^\tau dt \frac{1}{3} \cos\left[\left(\omega^E - \omega_0\right) t\right] = \frac{1}{3}\left\{\frac{\sin\left[\left(\omega^E - \omega_0\right) \tau\right]}{\omega^E - \omega_0}\right\},
\end{aligned} \tag{53}$$

其中，积分对应于式（33），而正弦函数对应的积分与式（34）类似。于是我们得到这些积分

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty d\omega^E \left(\omega^E\right)^3 \left[\int_0^\tau dt \frac{j_1(k^E Z_0 \cos(\omega_0 t))}{k^E Z_0 \cos(\omega_0 t)} \cos\left[\left(\omega^E - \omega_0\right) t\right]\right]^2 \\
&+ \int_0^\infty d\omega^E \left(\omega^E\right)^3 \left[\int_0^\tau dt \frac{j_1(k^E Z_0 \cos(\omega_0 t))}{k^E Z_0 \cos(\omega_0 t)} \sin\left[\left(\omega^E - \omega_0\right) t\right]\right]^2 \\
&= \int_0^\infty d\omega^E \left(\omega^E\right)^3 \left\{\left[\int_0^\tau dt \frac{1}{3} \cos\left[\left(\omega^E - \omega_0\right) t\right]\right]^2 + \left[\int_0^\tau dt \frac{1}{3} \sum in\left[\left(\omega^E - \omega_0\right) t\right]\right]^2\right\} \\
&= \left(\omega_0\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 2\pi\tau.
\end{aligned} \tag{54}$$

将这一结果与我们关于基态的工作进行比较，可以看出两者一致。

基态是一个特殊情形，在式（28）中同时涉及 $\cos\left[\left(\omega_{nl}^E - \omega_0\right) t\right]$ 函数和 $\sin\left[\left(\omega_{nl}^E - \omega_0\right) t\right]$ 函数，因此其值约为含有 $\omega^E \approxeq (2n+1)\omega_0$ 且满足 $n > 0$的项的 2 倍。

2. 第一个可能的泛音情形，$\omega^E \approxeq 2\omega_0$

驱动辐射的共振频率为偶 整数$\omega'^E = 2\omega_0$ 的这种情况对应于第一个可能的共振激发态。现在，在可能发生共振时，差值为 $\omega^E - \omega_0 = \omega_0$，于是我们有

$$\int_0^{\tau} dt \frac{j_1(k^E Z_1 \cos(\omega_0 t))}{k^E Z_1 \cos(\omega_0 t)} \cos\left[\left(\omega^E - \omega_0\right) t\right] \approx p \int_0^{2\pi/\omega_0} dt \frac{j_1(k^E Z_1 \cos(\omega_0 t))}{k^E Z_1 \cos(\omega_0 t)} \cos\left[\omega_0 t\right]$$
$$\approx 2p \int_0^{\pi/\omega_0} dt \left(\frac{j_1(k^E Z_1 \left|\cos(\omega_0 t)\right|)}{k^E Z_1 \left|\cos(\omega_0 t)\right|} \right) \cos\left[\omega_0 t\right] = 0, \tag{55}$$

因为 $\cos[\omega_0 t]$ 关于 $\omega_0 t = \pi$是偶函数，但关于 $\omega_0 t = \pi/2$是奇函数。注意积分上下限的变化 。

3. 第一共振激发态的情况， $\omega^E \approx 3\omega_0$

另一方面，当 $\omega^E = 3\omega_0$ 时，$\cos[(3-1)\,\omega_0 t] = \cos[2\omega_0 t]$，它在 $\omega_0 t = \pi$ 处达到最大值，并简单地重复了在 $t = 0$ 开始时发现的行为。因此，被积函数给出一个正积分。

4. 在 $\omega_n^E \approx$ （$2n+1$） ω_0, $n = 0, 1, 2,...$ 处的共振激发态

显然，共振激发态 $n = 2$ 将由辐射频率 $\omega_2^E = 5\omega_0$ 驱动，等等。回顾这一情形，具有 $n = 0$ 的基态在带电振子的固有频率 $\omega_{rad-0} \approx \omega_0$ 处发生共振。第一共振激发态 $n = 1$ 在 $\omega_{rad-1} = 3\omega_0$ 处发生共振。对于 $n = 2$，共振发生在 $\omega_{rad-2} = 5\omega_0$ 处，等等。共振激发态将在辐射驱动频率 $\omega_{rad-n} = \omega^E = (2n+1)\,\omega_0$ 处出现。这种行为与 $SO(2)$ 对称性一致，而共振激发态对应于标记 $SO(2)$ 表示的指标 n 的奇数值。

5. 振子能量

现在，为满足近似相对论限制 $v << c$，第 n个共振激发态中的振子振幅 Z_n 必须很小。然而，振荡振幅由 $\left\langle [Z_n \cos(\omega_0 t)]^2 \right\rangle_t = (Z_n)^2/2$ 给出；根据方程（5），振幅是一个固定值

$$Z_n^2 = \frac{2\langle J_{e-n}\rangle}{M\omega_0} = 2(2n+1)\frac{\langle J_{e-0}\rangle}{M\omega_0} = 2(2n+1)\frac{\langle J_{rad}\rangle}{M\omega_0}$$
$$= 2(2n+1)\frac{\hbar}{2}\frac{1}{M\omega_0} = (2n+1)\frac{\hbar}{M\omega_0}. \tag{56}$$

因此，振子的作用量变量平均值为

$$\langle J_{e-n}\rangle = (2n+1)\,\frac{\hbar}{2} = (n+\frac{1}{2})\hbar. \tag{57}$$

质量 M 可以任意增大，同时保持 J_{e-n} 不变。因此，在共振激发态中，辐射模 U_{rad} 的随机能量（它平衡了振子损失的能量 $\mathcal{E}_{e-n}$ ）与振子本身的平均能量 $\mathcal{E}_{e-n}$ 相同，

$$J_{e-n}\omega_0 = [(2n+1)\,J_{rad}]\,\omega_0 = J_{rad}\,[(2n+1)\,\omega_0] = J_{rad}\omega_{rad}, \tag{58}$$

而平均能量符合

$$\langle J_{e-n}\omega_0\rangle = [(2n+1)\,\langle J_{rad}\rangle]\,\omega_0 = \langle J_{rad}\rangle\,[(2n+1)\,\omega_0] = \langle J_{rad}\rangle\,\omega_{rad} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar.$$

经典零点辐射中包含所有频率，它们都试图向带电粒子传递能量。然而，只有当带电粒子反复沿同一轨道运动时，才会发生共振；而这只有在粒子从零点辐射获得的功率增益与其因辐射发射而损失的功率相平衡时才会发生。

IX. 能量跃迁与玻尔规则

即使处于共振激发态，振子损失的能量也主要出现在偶极子频率 ω_0上，而能量增益则出现在更高的频率 $\omega_{rad-n} = (2n+1)\,\omega_0$上。振子处于共振激发态期间，其偶极子能量并无不平衡。然而，除非振子处于基态，否则更高阶的驱动多极矩通常不处于能量平衡状态。从 n的一个取值转变为另一个取值，与带电机械振子的振幅变化以及驱动辐射 ω_{rad-n}的频率变化有关。如果整数 n 从 n 变为 $n-1$，那么带电机械振子的平均能量变化为

$$\Delta U_{e=n\to n} = \left[n+\frac{1}{2}\right]\hbar\omega_0 - \left[(n-1)+\frac{1}{2}\right]\hbar\omega_0 = \hbar\omega_0, \tag{59}$$

跃迁频率为 ω_0 ，这恰好是ω_0 带电振子在空旷空间中的固有振荡频率。

驱动辐射的能量差与振子的机械能变化相匹配。在 n不同取值之间的跃迁中，振子的能量变化与驱动辐射的能量变化相同。在每个标记为 n的共振激发态，振荡器能量平衡的情况下，带电粒子似乎完全没有辐射，因为振子的能量没有变化。只有当指标 $n.$ 发生变化时，才会出现净辐射。在跃迁过程中，带电粒子辐射无法被驱动零点辐射抵消。能量变化满足振子的玻尔关系 $\Delta U_{e-i\rightarrow f}$=$U_{e-i}-U_{e-f}=h\omega_0$。再一次，与基态的情况一样，经典零点辐射在共振激发态中所起的稳定作用似乎完全隐而不显。

X. 随机过程与本征值

在我们的经典电动力学分析中，随机经典零点辐射对于频率为 ω, H （J_{rad}， ω）的每个正规模而言都是一个随机过程。 $=J_{rad}\omega.$ 因此，由于频率 ω 对该正规模而言是固定的，而作用量变量 J_{rad} 是一个随机过程，所以每个正规模的能量 H （J_{rad}， ω）也必定是一个随机过程。 J_{rad} 的平均值为 $\langle J_{rad}\rangle=\hbar/2$，且与频率 $\omega.$ 无关。随后，这一随机过程会传递到具有哈密顿量 H（J_{e-n}， ω_0）的带电机械振子 $=J_{e-n}\omega_0$ 上，其平均能量为 $\langle H$（J_{e-n}， ω_0）$\rangle=\langle J_{e-n}\rangle\omega_0=\omega_0\hbar/2$。

这种经典描述与量子观点形成对比；量子观点将任意振子的振荡器能量 $\widehat{H}$ （ω_0）视为没有色散的本征值， $\left\langle \widehat{H}\ (\omega_0)\ \right\rangle$ =$\hbar\omega_0/2$。经典分析的平均值与量子分析的期望值一致，但两者的描述及色散却截然不同。[28]

在经典理论和量子理论中，一些作者都承认涉及 x 和p 的 SO(2)对称性。然而，在基础量子教材中，这种对称性往往未被提及。[29] 仅涉及 x 和 p 的 SO(2)对称性会导出整数指标表示[13] 以及平均值。不过，经典理论与量子理论中的涨落则大不相同。

无论如何，对于具有经典思维的人来说，旧量子论的某些部分可以理解为经典电荷在随机经典零点辐射的涨落作用下沿经典轨迹运动，这似乎令人欣慰。

XI. 总结

A. 共振：它在经典统计力学中缺失，却对经典电磁学至关重要

19世纪末和20世纪初，人们曾反复尝试将非相对论经典统计力学应用于与原子物理学相关的现象。瑞利－金斯定律便是这种尝试的结果。事实上，普朗克从热力学的角度研究黑体辐射，并将带电谐振子的平均能量与频率和该谐振子相同的经典辐射模的平均能量联系起来。然而，他并未引入经典电磁零点辐射。

统计力学教材中讨论的布朗运动，与带电力学系统在经典电动力学及经典电磁零点辐射作用下的运动，有着巨大差异。例如，由于碰撞，一个固有频率为 ω_0 的中性（不带电）一维力学谐振子会在 k_BT 达到热平衡，且与振子频率 ω_0无关。另一方面，在电磁学中，带电振子的响应在其固有频率 ω_0 处发生共振。事实上，电场对带电振子的驱动涉及带电粒子的位置，$\mathbf{F}(t) = e\mathbf{E}[\mathbf{r}_e(t) \quad t]$，因此振荡振幅$\mathbf{r}_e(t)$会影响作用于振子的驱动电磁力。在基态下，经典零点辐射场的高阶倍频会使带电振子呈现与偶极近似所给出的相同随机行为。在小源近似下，带电谐振子不会改变经典零点辐射的光谱。然而，电磁力对振荡振幅的依赖会导致参数驱动，进而使带电一维线性振子出现共振激发态。本文采用经典电动力学与经典电磁零点辐射来描述谐振子在零点辐射中的运动。

B. 零点辐射中的基态

对于涉及 $l=1$ 的一维带电谐振子的基态，偶极辐射决定机械振荡的振幅 Z_0，其取决于任意随机辐射光谱。一维带电谐振子会在任意随机辐射光谱下达到平衡。另一方面，如果要求经典电动力学成立，且辐射光谱对偶极与四极辐射都处于平衡状态，并且忽略振子的任何速度依赖阻尼，那么（除一个整体乘法常数外），唯一允许的随机辐射光谱就是洛伦兹不变的经典零点辐射光谱。在经典电磁零点辐射中，偶极辐射与四极辐射平衡时，带电振子涉及的是同一个随机过程。不过，四极辐射会因光速 $1/c^2$ 的额外幂次而受到抑制。根据基态辐射行为，人们无法察觉带电谐振子处于基态时存在零点辐射。

C. 共振激发态与偶极辐射

对于任何共振激发态，我们并不认为所有辐射模都会参与带电振子的同一随机过程，因为激发态是不稳定的，会发生衰变。因此，我们将注意力集中在可能的激发态所关联的偶极辐射上。在对带电力学系统进行的非相对论计算中，偶极辐射是主要的辐射多极。由于零点辐射具有洛伦兹不变性，而谐振子势并不具有这种性质，要使两者相容，就要求速度（从而也包括任何振荡振幅）非常小。此时，力学谐振子只有一个稳态共振频率，即其固有振荡频率 ω_0。然而，由于位置依赖的$\mathbf{E}\left[\hat{z}z(t)\quad t\right]$驱动辐射，进而由于驱动力，共振激发态基本上涉及 $l=1$，$m=0$、球多极场，但辐射发射与驱动辐射的频率不同。对于一维带电谐振子，辐射发射总是处于固有振荡频率 ω_0，但是对于共振激发态，振荡振幅 Z_n 较大，而驱动辐射将

处于 ω_{rad-n}。我们要求其中所含的净驱动力 $E\left[\hat{z}z\left(t\right)\ \ t\right]$ 包含一个与力学振子的固有频率相符的频率分量 ω_0。我们发现，带电振子（以 ω_0 振荡）的振子能量 $\mathcal{E}_{e-n}=J_{e-n}\omega_0=\left[\left(2n+1\right)J_{e-0}\right]\omega_0$ 与驱动零点辐射模（频率为 $\omega_{rad-n}=\left(2n+1\right)\omega_0$）的能量 $\mathcal{E}_{rad-n}=J_{rad}\omega_{rad-n}=J_{rad}\left[\left(2n+1\right)\omega_0\right]$相同。激发态变化时，振子的能量变化与辐射模的能量变化相同，但辐射发射对应于真空中的带电振子。经典零点辐射在确定基态和共振激发态精确平均振幅方面所起的重要作用，似乎并不明显。本研究为电子沿经典轨道运动这一旧量子论图像提供了经典电磁学理解。

XII. 致谢

我深深感谢 Daniel C. Cole 教授的研究。他与 Y. Zou 合著的论文，在只有线性系统似乎能够取得成功的时期，推动了经典零点辐射分析的进展；他关于次谐波共振的研究也发人深省。Herman Batelaan 教授和 W. Huang 的研究同样引人入胜。此外，关于经典电动力学、量子力学、量子场论、群论和统计物理学的许多书籍与论文，都对我理解经典电磁学情形起到了重要作用。我还要感谢 Cole 教授指出稿件中的错字和含糊之处。

---

[1] H. B. G. Casimir，“关于两块理想导体板之间的吸引力”，《荷兰皇家科学院院刊》**51**，793-795（1948）。[2] T. H. Boyer，“由含有经典电磁零点辐射的经典电动力学推导出的适用于所有距离的延迟范德瓦耳斯力”，《物理评论 A》**7**，1832-1840（1973）。[3] M. J. Sparnaay，“平板之间吸引力的测量”，《Physica》（阿姆斯特丹）**24**，751-764（1958）；S. K. Lamoreaux，“展示 0.6 至……范围内的卡西米尔力

6 μm 范围内，”《物理评论快报》**78**, 5-8 (1997): **81**, 5475-5476 (1998)；U. Mohideen，“0.1 至 0.9 μm 范围内卡西米尔力的精密测量”，同上。 **81**, 4549-4552 (1998)；H. B. Chan、V. A. Aksyuk、R. N. Kleinman、D. J. Bishop 和 F. Capasso，“卡西米尔力对微机电系统的量子力学驱动”，《科学》**291**, 1941-1944 (2001)：G. Bressi、G. Carugno、R. Onofrio 和 G. Ruoso，“平行金属表面间卡西米尔力的测量”，《物理评论快报》**88**, 041804(4) (2002)。[4] T. W. Marshall，“统计电动力学”，《剑桥哲学学会会刊》**61**, 537-546 (1965)。T. H. Boyer，“无需量子假设推导黑体辐射谱”，《物理评论》**182**, 1374-1383 (1969)。经典零点辐射的存在似乎会与贝尔定理有效性所需的贝尔“局域性 ”假设相矛盾，这一点颇为奇怪。[5] T. H. Boyer，“随机电动力学：含经典电磁零点辐射的经典电动力学理论”，Phys. Rev. D**11**, 790-808 (1975)。[6] D. C. Cole 和 Y. Zou，“通过经典电动力学获得氢原子的量子力学基态”，《物理快报 A》**317**, 14-20 (2003)。[7] T. H. Boyer，“经典物理学中普朗克谱需要相对论波”，《物理学通讯》**9**, 095001 (8pp) (2025)。[8] T. H. Boyer，“随机电动力学：最接近量子理论的经典近似”，《原子》**7**(1), 29-38 (2019)。[9] T. H. Boyer，“非相对论非线性电偶极振子存在时随机经典电磁辐射的平衡”，Phys. Rev. D**13**, 2832-2845 (1976)。[10] T. H. Boyer，“经典零点辐射的平衡：经典带电谐振子散射下的细致平衡”，《物理学通讯》**2**, 105014(17) (2018)。[11] H. Goldstein，经典力学 第2版，（艾迪生-韦斯利，雷丁，马萨诸塞州，1981），第462页。[12] R. Reif，统计与热物理学基础（麦格劳-希尔，纽约，1985），第55-56页。[13] W. Miller, Jr.，对称群及其应用，第397-398页。[14] A. Zee，物理学家速成群论 （普林斯顿大学出版社，普林斯顿，2016）。[15] J. D. Jackson，经典电动力学 第2版（约翰·威立父子出版公司，纽约，1975），第746页。.[16] A. Einstein 和 L. Hopf，“关于概率论中的一个定理及其应用——

《辐射理论中的……》，《物理学年鉴》（莱比锡）**33**，1096-1104（1910）。S. O. Rice，《随机噪声的数学分析》，载于 N. Wax 编《噪声与随机过程选集》（多佛出版社，纽约，1954），第138页。[17] T. H. Boyer，“经典电子理论中伪装的电磁联系”，《欧洲物理学杂志》**43**, 025201（共21页）（2022）。[18] 例如，参见 M. Planck，《热辐射理论》（多佛出版社，纽约，1959）。[19] M. Born，《原子物理学》第7版（Hafner，纽约，1966），第424-427页。[20] M. D. Greenberg，《高等工程数学》第2版（普伦蒂斯·霍尔，上萨德尔河，新泽西州，1998），第141-144页。[21] T. W. Marshall，“布朗运动与准马尔可夫过程”，《Physica》**103A**，172-182（1980）。[22] 例如，参见参考文献12，第571-572页。[23] 参见参考文献15，第745页。[24] 参见参考文献15，第741页。[25] 例如，参见 B. H. Lavenda，《统计物理学：概率论方法》（威利出版社，纽约，1991），第73-74页。[26] W. C-W. Huang 和 H. Batelaan，“零点辐射中经典谐振子的离散激发谱”，《基础物理学》**45**，333-353（2015）。[27] D. C. Cole，“经典氢原子系统的次谐振共振与临界偏心率”，《欧洲物理学杂志 D》**72**，200-214（2018）。[28] T. H. Boyer，“谐振子的狄拉克的经典—量子类比：热辐射（包括零点辐射）中的经典方面”，《美国物理学杂志》**88**，640-648（2020）。[29] 例如，参见 D. J. Griffiths，《量子力学导论》第2版（培生普伦蒂斯·霍尔，上萨德尔河，新泽西州，2005）。