经典零点辐射下经典电动力学中的相对论氢原子

Timothy H. Boyer

纽约市立大学城市学院物理系

纽约市立大学，纽约州纽约市 *10031*

arXiv:2603.13448v1 [physics.class-ph] 13 Mar 2026

摘要

包含经典电磁零点辐射在内的经典电动力学，为处于库仑势中的带电粒子导出一个基态和多个共振激发态。这些共振态对应于作用量变量的整数值，类似于氢原子的玻尔-索末菲理论中出现的整数值。关于经典零点辐射的这项工作是对1975年报告的分析的延续，但加入了相对论以及带电粒子轨道与经典零点辐射之间共振的思想。

一、引言

A. 旧量子论

旧量子论在氢的能级问题上取得了巨大成功。它接受了经典粒子轨道的思想，却忽略了与之相关的经典辐射；它只是预先假定作用量变量具有离散值。1924年，Born在其《原子物理学》中写道：“尽可能保留经典力学的努力已被证明是一种富有成效的方法，因此我们首先要求，一个原子系统的定态应尽可能依据经典力学定律进行计算，但经典辐射理论则不予考虑。”[1]

旧量子论并未说明为何作用量变量会取所假定的整数倍$\hbar$ 值。事实上，如今这套理论被视为历史上的先驱，因为它似乎无法解释反常塞曼效应、氢分子离子的能级以及氦原子。因此，随着海森堡和薛定谔的工作催生新量子力学，人们将其视为一项重大进步。如今，薛定谔方程、电子自旋、塞曼效应，以及与能级角动量值相关的分数量子数，都被视为“已确立的物理学”；与之相悖的观点通常被斥为“毫无意义”或完全错误。即便是索末菲在1916年对氢能级的相对论修正所作的完全精确计算[2] ，如今也被视为“错误”，不过是一次“偶然的巧合”，因为其中既没有波动力学，也没有自旋。[3][4]

B. 经典电动力学与经典零点辐射

另一方面，60多年来，一小群物理学家一直在探索一种截然不同的观点，认为至少相当一部分微观物理现象可以用纯粹的经典电磁学来解释，而经典理论包含经典电磁零点辐射。仅用经典术语来说，该理论已成功解释了卡西米尔力、范德瓦耳斯力、固体的低温比热、抗磁性、超流行为、黑体辐射谱以及原子塌缩的缺失。[5][6] 在本文中，我们将继续这一探索。

1975年发表的一篇综述文章[7] 提出了经典电磁零点辐射这一概念，并由此解释了氢原子基态的稳定性。然而，该文并未将允许的系统限制为相对论性系统，也未提及共振——即轨道上的带电粒子与经典零点辐射之间的共振。在此，我们提出：玻尔-索末菲理论中的作用量变量取整数值，是带电粒子轨道与经典电磁零点辐射发生共振的结果。在相关文章中，我们将提出，电子是没有自旋的点状带电粒子；斯特恩-盖拉赫实验和塞曼效应也都可以用包含经典零点辐射的经典电磁学来解释。

将范围限制在相对论性（或近似相对论性）系统内，以及要求零点辐射中的轨道运动带电粒子满足共振，这些观念在旧量子论中完全缺失。玻尔[8] 于1913年提出他的理论时，加速的带电粒子会发射辐射这一点已被广泛接受；但带电粒子反复沿轨道运动、穿过随机经典零点辐射时，能够获得恰当能量这一点，似乎并未受到考虑。

C. 经典零点辐射中的共振现象

经典电磁学与非相对论统计力学截然不同：经典电磁理论允许辐射与物质之间发生共振，而非相对论统计力学则不允许。例如，在非相对论统计力学中，具有固有频率 ω_0 的一维带电谐振子，在温度为 T的热浴中会达到热平衡，其平衡状态与 ω_0取何值无关。另一方面，在经典电动力学中，谐振子会与频率和 ω_0 相匹配的辐射发生偶极共振，而 ω_0 位于谐振子所在位置。如果谐振子具有有限的空间范围，那么在 ω_0的整数倍处也可能发生共振。[9]

旧有的玻尔原子模型很容易想象；尽管有人声称它已被较新的进展所淘汰，但现代物理学教科书中仍经常重复介绍这一模型[10]。我们认为，由于经典电磁零点辐射下的辐射能量平衡，该模型在作用量变量取整数值时适用于共振。共振轨道不过是一种达到辐射能量平衡的轨道，它涉及经典粒子的轨道，而所有作用量变量均取整数值，因为共振要求

效应反复累积。这些整数值源自洛伦兹不变零点辐射。对于氢原子这类单电子系统，情况因而特别简单。要产生共振，需要选择一条所有作用量变量均取整数值的经典粒子轨迹。这适用于玻尔-威尔逊-索末菲非相对论原子，也适用于索末菲相对论原子。进一步的修正（如兰姆位移）则涉及更详细的辐射平衡。

D. 库仑势

经典零点辐射具有洛伦兹不变性，而库仑势是相对论经典电动力学的一部分。基态涉及振子的基态频率所有整数倍对应的共振。基态以上的共振通常涉及辐射与带电粒子之间的偶极相互作用。这些激发态共振是不稳定的，会衰变至基态，并发射符合玻尔频率条件的电磁辐射。在将光速视为远大于带电粒子速度的极限下，结果（但分析过程并非如此）将与非相对论的玻尔-威尔逊-索末菲理论一致。

II. 库仑势中的相对论带电粒子

A. 力学系统哈密顿量

在经典电磁理论中，氢原子由一个质量极大的原子核和一个（相对论性）电子组成。电子沿经典轨道运动，该轨道由原子核的经典静电相互作用以及经典零点辐射的驱动所决定。假设电子在 xy 平面内运动，原子核产生的静电力提供向心加速度

$$M_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) = -\widehat{r}\frac{e^2}{r^2}. \tag{1}$$

在球坐标中，该系统的哈密顿量[11]由其动能和库仑势能给出

$$H = \sqrt{\left(p_r^2 + p_\phi^2\right) c^2 + \left(M_0 c^2\right)^2} - \frac{e^2}{r}, \tag{2}$$

其中，$\mathbf{p} = \widehat{r} p_r + \widehat{\phi} p_\phi = M_0 \gamma \mathbf{v}$，$M_0$ 是静止质量，$\mathbf{v}$ 是速度，而 $\gamma = \left[1 - (v/c)^2\right]^{-1/2}$。轨道角动量为

$$L_\phi = r p_\phi = M_0 \gamma r^2 \dot{\phi}. \tag{3}$$

系统的能量 U_e 和角动量 L_ϕ 都是经典运动中的守恒量。

B. 轨道与能量

我们希望求解轨道和粒子能量。按照传统方法，我们引入

$$s = 1/r \tag{4}$$

并注意到

$$p_r = M_0 \gamma \dot{r} = M_0 \gamma \frac{dr}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} = \left(M_0 \gamma r^2 \frac{d\phi}{dt}\right)\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\phi}\right) = -L_\phi \left(ds/d\phi\right). \tag{5}$$

将变量 s 和 L_ϕ 代入方程（2），得到

$$\left(\frac{H + e^2 s}{M_0 c^2}\right)^2 = 1 + \left[\left(\frac{L_\phi c}{e^2}\right)\left(\frac{e^2}{M_0 c^2}\right)\right]^2 \left[\left(\frac{ds}{d\phi}\right)^2 + s^2\right] \tag{6}$$

对该方程关于 ϕ 求导，然后约去公因子，得到

$$\frac{d^2 s}{d\phi^2} + \Gamma^2 \left(s - \frac{e^2 H}{\Gamma^2 L_\phi^2 c^2}\right) = 0, \tag{7}$$

其中

$$\Gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{e^2}{L_\phi c}\right)^2}, \tag{8}$$

and

$$\frac{L_\phi c}{e^2}\Gamma = \sqrt{\left(\frac{L_\phi c}{e^2}\right)^2 - 1}. \tag{9}$$

方程 (7) 的解为

$$s = \zeta \cos\left(\Gamma\phi + \beta\right) + \frac{e^2 H}{\Gamma^2 L_\phi^2 c^2}, \tag{10}$$

其中， ζ 和 β 是积分常数。令近日点出现在 $\phi = 0$，则常数 β 消失，方程化为更简单的形式

$$\frac{1}{r} = \zeta \cos\left(\Gamma\phi\right) + \frac{e^2 H}{\Gamma^2 L_\phi^2 c^2} = \zeta \cos\left(\Gamma\phi\right) + \left(\frac{U}{M_0 c^2}\right)\left(\frac{e^2}{\Gamma L_\phi c}\right)^2 \left(\frac{M_0 c^2}{e^2}\right), \tag{11}$$

或熟悉的玫瑰线形式

$$r = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos\left(\Gamma\phi\right)}, \tag{12}$$

其中，在近日点处， $r_{per} = a\left(1-\epsilon\right)$；在远日点处， $r_{aph} = a(1+\epsilon)$，因此 $2a = r_{per} + r_{aph}$。于是，恒定能量可用近日点或远日点处的恒定角动量表示为

$$U = \sqrt{\left(L_\phi / r_{per}\right)^2 c^2 + \left(M_0 c^2\right)^2} - \frac{e^2}{r_{per}} = \sqrt{\left(L_\phi / r_{aph}\right)^2 c^2 + \left(M_0 c^2\right)^2} - \frac{e^2}{r_{aph}}. \tag{13}$$

轨道方程给出

$$\zeta = \frac{\epsilon}{a\left(1-\epsilon^2\right)} \tag{14}$$

and

$$\frac{e^2 H}{L_\phi^2 c^2 \Gamma^2} = \frac{1}{a\left(1-\epsilon^2\right)}. \tag{15}$$

C. 作用量-角变量

xy平面内轨道的轨道角和动量可用作用量-角变量 ϕ_r， ϕ_ϕ， J_r， J_ϕ重新表示。角动量是一个常数，因此有

$$J_\phi = \frac{1}{2\pi}\oint p_\phi d\phi = L_\phi. \tag{16}$$

径向变量是

$$\begin{aligned} J_r &= \frac{1}{2\pi}\oint p_r dr = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi\Gamma}\left[M_0\gamma\left(\frac{dr}{d\phi}\right)\dot{\phi}\right]\left(\frac{dr}{d\phi}d\phi\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi\Gamma} L_\phi\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\phi}\right)^2 d\phi = L_\phi\Gamma\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\epsilon^2\sin^2\psi}{(1+\epsilon\cos\psi)^2}d\psi\right] \\ &= L_\phi\Gamma\left[\frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} - 1\right], \end{aligned} \tag{17}$$

因为该积分与非相对论积分相同，且只涉及椭圆的参数。

D. 用作用-角变量表示能量、频率和偏心率 s

现在利用方程（8）、（13）、（15）和（17），我们得到以带电粒子系统的作用量变量表示的相对论经典哈密顿量[Goldstein498]

$$U\left(J_r, J_\theta, J_\phi\right) = M_0c^2\left(1+\left[\frac{e^2/c}{J_r+\sqrt{\left(J_\theta+J_\phi\right)^2-\left(e^2/c\right)^2}}\right]^2\right)^{-1/2}. \tag{18}$$

由此可得，径向频率 ω_r 为

$$\frac{\partial U}{\partial J_r} = \omega_r = \frac{M_0c^2\left(e^2/c\right)^2}{\left[\left(e^2/c\right)^2+\left(J_r+\sqrt{\left(J_\theta+J_\phi\right)^2-\left(e^2/c\right)^2}\right)^2\right]^{3/2}}, \tag{19}$$

而频率 ω_θ 和 ω_ϕ 为

$$\omega_\theta = \omega_\phi = \frac{M_0c^2\left(e^2/c\right)^2}{\sqrt{1-\left[e^2/\left[\left(J_\theta+J_\phi\right)c\right]^2\right]}\left[\left(e^2/c\right)^2+\left(J_r+\sqrt{\left(J_\theta+J_\phi\right)^2-\left(e^2/c\right)^2}\right)^2\right]^{3/2}}. \tag{20}$$

因此涉及两个不同的频率，得到

$$\omega_r = \Gamma\omega_\theta = \Gamma\omega_\phi \quad \text{where} \quad \Gamma = \sqrt{1-\left\{e^2/\left[\left(J_\theta+J_\phi\right)c\right]\right\}^2}. \tag{21}$$

半长轴为

$$a = \frac{e^2U}{\left(M_0c^2\right)^2-U^2}, \tag{22}$$

偏心率为

$$\epsilon = \sqrt{1-\frac{1}{\left[1+J_r/\sqrt{\left(J_\theta+J_\phi\right)^2-\left(e^2/c\right)^2}\right]^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{\left\{1+J_r/\left[\left(J_\theta+J_\phi\right)\Gamma\right]\right\}^2}}, \tag{23}$$

而时间与轨道运动的关系为

$$t = \int_0^\phi d\phi'\frac{r^2\left[U+e^2/r\right]}{c^2\left(J_\theta+J_\phi\right)} = \left[1+\frac{\left(1-\epsilon^2\right)}{\left[\left(M_0c^2/U\right)^2-1\right]}\right]^{-1/2}\times\int_0^\phi\frac{d\phi'}{c}\left(\frac{r^2U}{e^2}+r\right). \tag{24}$$

E. 圆形轨道

对于 xy 平面内的圆形轨道，角动量为

$$J_\phi = M_0\gamma rv = \frac{M_0}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}}rv, \tag{25}$$

而轨道角 ϕ 随时间 t均匀变化,

$$\phi_\phi(t) = \omega_\phi t + \phi_{\phi 0}, \tag{26}$$

此时角度 ϕ_r 变为

$$\phi_r(t) = \omega_r t + \phi_{r0} = \Gamma\omega_\phi t + \phi_{r0}. \tag{27}$$

由式 (18)，圆形轨道中的能量为

$$U = \frac{M_0c^2}{\gamma} = M_0c^2\sqrt{1 - \left(\frac{e^2}{J_\phi c}\right)^2}, \tag{28}$$

得到比值

$$\frac{J_\phi}{U} = \frac{J_\phi}{M_0c^2\sqrt{1 - \left[e^2/\left(J_\phi c\right)\right]^2}}. \tag{29}$$

轨道频率 ω_ϕ 的形式为

$$\begin{aligned}\omega_\phi &= \left(\frac{\partial H}{\partial J_\phi}\right) = \frac{M_0c^2}{\sqrt{1 - \left[e^2/\left(J_\phi c\right)\right]^2}}\left(\frac{e^2}{c}\right)^2\frac{1}{J_\phi^3} \\ &= \left(\frac{M_0c^3}{e^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1 - \left[e^2/\left(J_\phi c\right)\right]^2}}\left(\frac{e^2}{J_\phi c}\right)^3 = \left(\frac{M_0\gamma c^3}{e^2}\right)\left(\frac{e^2}{J_\phi c}\right)^3\end{aligned} \tag{30}$$

而半径为

$$\begin{aligned}r &= \frac{v}{\omega} = \frac{e^2}{\omega J_\phi} = \frac{e^2}{J_\phi}\frac{e^2\sqrt{1 - \left[e^2/\left(J_\phi c\right)\right]^2}}{M_0c^3}\left(\frac{J_\phi c}{e^2}\right)^3 \\ &= \frac{e^2}{M_0c^2}\sqrt{1 - \left[e^2/\left(J_\phi c\right)\right]^2}\left(\frac{J_\phi c}{e^2}\right)^2 = \frac{e^2}{M_0\gamma c^2}\left(\frac{J_\phi c}{e^2}\right)^2,\end{aligned} \tag{31}$$

因此速度为

$$\omega r = v = \frac{e^2}{J_\phi}. \tag{32}$$

我们注意到，在圆形轨道中 $J_r = 0$，而比值

$$\frac{J_\phi\omega_\phi}{U} = \frac{1}{1 - \left[e^2/\left(J_\phi c\right)\right]^2}\left(\frac{e^2}{J_\phi c}\right)^2 = \frac{1}{\left[J_\phi c/\left(e^2\right)\right]^2 - 1} = \left[\left(\frac{J_\phi c}{e^2}\right)^2 - 1\right]^{-1}, \tag{33}$$

which 是总轨道角动量 J_ϕ with $e^2/c < J_\phi$.[12] 的函数

III. 与经典电磁零点辐射的相互作用

A. 经典电磁零点辐射的必要性

我们对库仑（或开普勒）势中带电粒子的相对论经典力学分析，已经进行到需要知道作用量变量的数值，才能描述系统运动的阶段。然而，除了与引力相关的卡文迪许常数外，经典力学不包含任何基本常数。我们的分析不涉及引力，因此作用量变量没有与机械运动相关联的基本数值。因此，我们必须超越相对论经典力学，才能在经典理论框架内描述自然。

如果我们倾向于保留经典理论，就会转向经典电动力学，因为许多系统都涉及带电粒子之间的相互作用。为了说明不带电的导电平行板之间所观测到的力的空间依赖关系（卡西米尔效应[13][14]），我们必须假设自然界包含具有洛伦兹不变谱的随机经典电磁零点辐射。[15] 洛伦兹不变性的假设将经典零点辐射的谱确定到一个尚未确定的整体常数。平行板之间的力的空间依赖关系与经典零点辐射相符。然而，为了说明所观测到的力的大小，我们必须将经典零点辐射的尺度选为与普朗克常数 $\hbar$成正比的数值；每个频率为 ω 的正常模的平均零点辐射能量 U^{zp}（ω）必须是

$$U^{zp}(\omega) = (1/2)\,\hbar\omega. \tag{34}$$

但是，这种随机经典辐射不可能仅限于一种现象；它会迫使所有带电粒子都以与 $\hbar$. 相关的尺度作随机运动。这种经典电磁零点辐射确实会为处于库仑势中的带电粒子的作用量变量 J_i e 赋予一个尺度。

B. 与辐射相关的整数值

尽管零点辐射的尺度可能会确定粒子作用量变量的基态值，但它与辐射的关联意味着其与更高阶多极行为之间存在整数联系。如果经典零点辐射是洛伦兹不变的，那么它必定是各向同性的，并遵循旋转群的不可约表示。由于群的不可约表示与整数值相关联，我们预计带电粒子的作用量变量也会与整数值相关联。此外，周期运动使轨道运动的带电粒子与驱动辐射之间可能发生共振。与辐射相关的共振可能性是一个关键概念，旧量子论以及许多先前的分析都缺少这一概念。

C. 经典电磁辐射

半径为 R 的超大球形空腔中的无源经典零点辐射可写为[16]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{m=l}\left\{\exp\left[i\left(-k_{nl}^{M}ct+\theta_{nlm}^{M}\right)\right]\left[ia_{nlm}^{M}j_l\left(k_{nlm}^{M}r\right)\mathbf{X}_{l,m}\left(\theta,\phi\right)\right]\right.$$
$$\left.+\exp\left[i\left(-k_{nlm}^{E}ct+\theta_{nlm}^{E}\right)\right]\left[a_{nlm}^{E}/\left(-ik_{nlm}^{E}\right)\right]\nabla\times\left[j_l\left(k_{nlm}^{E}r\right)\mathbf{X}_{lm}\left(\theta,\phi\right)\right]\right\}, \qquad (35)$$

and

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{m=l}\left\{\exp\left[i\left(-k_{nlm}^{E}ct+\theta_{nlm}^{E}\right)\right]\left[ia_{nlm}^{E}j_l\left(k_{nlm}^{E}r\right)\mathbf{X}_{l,m}\left(\theta,\phi\right)\right]\right.$$
$$\left.+\exp\left[i\left(-k_{nlm}^{M}ct+\theta_{nlm}^{M}\right)\right]\left[a_{nlm}^{M}/\left(ik_{nlm}^{M}\right)\right]\nabla\times\left[j_l\left(k_{nlm}^{M}r\right)\mathbf{X}_{lm}\left(\theta,\phi\right)\right]\right\}, \qquad (36)$$

其中， a_{nlm}^{E} 和 a_{nlm}^{M} 分别是电模和磁模的振幅， j_l 是阶数为 l的球贝塞尔函数， $\mathbf{X}_{l,m}\left(\theta,\phi\right)$ 是矢量球谐函数，而 $\theta_{nlm}^{E},\theta_{nlm}^{E}$ 是在 $(0,2\pi]$ 上均匀分布且对每个模彼此独立的随机相位。[17][18]球面驻波的振幅对应于式（34）中给出的谱 $U^{zp}(c\mathbf{k}) = \frac{1}{2}\hbar ck$，其中角频率为 $\omega = ck = c\left|\mathbf{k}\right|$，而随机性则由电模和磁模的随机相位 θ_{nlm}^{E} 和 θ_{nlm}^{M}引入。旋转群的表示涉及整数 l 和 m，它们与正常模的频率 ω 无关。

这里的矢量球谐函数为[19]

$$\mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi)=\frac{\mathbf{L}Y_{lm}(\theta,\phi)}{\sqrt{l(l+1)}}=\frac{\mathbf{r}\times\nabla Y_{l,m}(\theta,\phi)}{i\sqrt{l(l+1)}}, \tag{37}$$

其中球谐函数由[20]给出

$$\begin{aligned}Y_{lm}(\theta=\pi/2,\phi)&=\left[\sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)\right]_{\theta=\pi/2}\exp[im\phi]\\&=Y_{lm}(\pi/2,0)\{\cos[m\phi]+i\sin[m\phi]\},\end{aligned} \tag{38}$$

唯一的复数部分是 ϕ中的指数形式 $\exp[im\phi]$。

对于随机辐射，其尺度由[21]给出

$$\left|a_{nlm}^E\right|^2=\frac{16\pi\left(k_{nl}^E\right)^2}{\mathsf{R}}\left[U_{nlm}\left(k_{nlm}^E\right)\right]. \tag{39}$$

对于磁模，情况 a_{nlm}^M 完全类似。带电粒子沿圆形轨道运动时，从 $l=2$开始便会产生磁辐射模，其大小与 $l=3$阶电多极相当。

对于包含驻波的包围球，其半径 R 趋于无穷大的极限下，有[21] $dk=\pi dn/\mathsf{R}$，且

$$\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\to\int_0^{\infty}dn=\int_0^{\infty}dk\frac{\mathsf{R}}{\pi}=\int_0^{\infty}d\omega\frac{\mathsf{R}}{\pi c}. \tag{40}$$

如果对标记为 nlm的密集分布的辐射模采用随机相位，那么振幅涉及平均能量 U_{nlm}. 。每单位（角）频率、单位体积内的正常模数量为 $\omega^2/$（π^2c^3），由此得到每单位角频率间隔、单位体积内的能量 $[\omega^2/$（π^2c^3）$]U$（ω）。

IV. 零点辐射中圆形轨道电荷的能量增益

A. 随机辐射驱动的电荷运动方程

电荷 e 在 xy平面内沿圆形轨道运动时，会受到电场 $E_\phi^E(r_e,\pi/2,\phi_e(t)\ \ t)$ 的 ϕ 分量所产生的力，该电荷位于角位置 $\phi_e(t)$。牛顿第二定律给出

$$Mr_e^2\frac{d^2\phi_e(t)}{dt^2}=r_eeE_\phi^E(\mathbf{r}_e(t),t), \tag{41}$$

其中， $M = M_0\gamma$ 是相对论性粒子质量，假设它在短时间 τ 内保持不变。为求解此方程，我们采用与 Born 为线性谐振子所做工作[22] 类似的常数变易法。现在，圆形轨道对应的齐次方程 $Mr_0^2\ddot{\phi} = 0$ 的无源解为 $\phi(t) = a$ 和 $\phi(t) = bt$，其中a 和 b 为常数。因此，方程 (41) 的特解 $\phi_p(t)$ 可通过常数变易法求得：[23]

$$\begin{aligned} Mr_e\phi_p(t) &= -\int_0^{t'=t} dt' \left[eE_\phi^E(\mathbf{r}_e(t'), t')\right] t' + \int_0^{t'=t} dt' \left[eE_\phi^E(\mathbf{r}_e(t'), t')\right] t \\ &= \int_0^{t'=t} dt' \left[eE_\phi^E(\mathbf{r}_e(t'), t')\right] (t - t'). \end{aligned} \tag{42}$$

注意，角速度 $d\phi_p(t)/dt$ 由此可得

$$\begin{aligned} Mr_e\frac{d\phi_p(t)}{dt} &= -\left[eE_\phi^E(\mathbf{r}_e(t), t)\right] t + \left[eE_\phi^E(r_e, \pi/2, \phi_e(t), t)\right] t \\ &\quad + \int_0^{t'=t} dt' \left[eE_\phi^E(\mathbf{r}_e(t'), t')\right] \\ &= \int_0^{t'=t} dt' \left[eE_\phi^E(\mathbf{r}_e(t'), t')\right], \end{aligned} \tag{43}$$

事实上，运动方程 (41) 确实成立，因为对时间 t 求二阶导数后，我们得到

$$Mr_e\frac{d^2\phi_p(t)}{dt^2} = \left[eE_\phi^E(\mathbf{r}_e(t), t)\right]. \tag{44}$$

因此，方程 (42) 中提出的解确实满足微分方程 (41)，并且 $\dot{}$ 也满足圆形轨道的边界条件 $\phi_p(0) = 0$ 和 $\phi_p(0) = 0$。

B. 随机辐射的能量增益

随机辐射在短时间间隔 τ 内传递的能量；在此期间，粒子的机械角动量 J_ϕ 经历许多次振荡，但变化很小

is

$$
\begin{aligned}
W(\tau) &= \int_0^{\tau} dt \left[eE_{\phi}^{E}(\mathbf{r}_e(t), t)\right] \left[r_e \frac{d\phi_p(t)}{dt}\right] \\
&= \frac{1}{M} \int_0^{\tau} dt \left[eE_{\phi}^{E}(\mathbf{r}_e(t), t)\right] \left\{ \int_0^{t'=t} dt' \left[eE_{\phi}^{E}(\mathbf{r}_e(t'), t')\right] \right\} \\
&= \frac{e^2}{M} \int_0^{\tau} dt \int_0^{t'=t} dt' \left[E_{\phi}^{E}(\mathbf{r}_e(t), t)\right] \left[E_{\phi}^{E}(\mathbf{r}_e(t'), t')\right], \qquad (45)
\end{aligned}
$$

其中 $M = M_0\gamma$ 仍为相对论质量。方程（45）中的被积函数在交换 t 和 t'后对称。因此，我们可以进行 Born 的对称化。于是，方程（45）中对 t和 t' 所对应的等腰三角形区域进行二重积分，与先对 t 从 t' 积分到 τ，再对 t' 从 0 积分到 τ 所得结果相同，即

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\tau} dt \int_0^{t'=t} dt' \left[E_{\phi}^{E}(\mathbf{r}_e(t), t)\right] \left[E_{\phi}^{E}(\mathbf{r}_e(t'), t')\right] \\
&= \int_0^{\tau} dt' \int_{t=t'}^{t=\tau} dt \left[E_{\phi}^{E}(\mathbf{r}_e(t), t)\right] \left[E_{\phi}^{E}(\mathbf{r}_e(t'), t')\right]. \qquad (46)
\end{aligned}
$$

不过，我们可以交换带撇和不带撇的标签，并将两个表达式相加后取一半，得到

$$
W(\tau) = \frac{e^2}{2M} \int_0^{t=\tau} dt \int_0^{t'=\tau} dt' \left[E_{\phi}^{E}(\mathbf{r}_e(t), t)\right] \left[E_{\phi}^{E}(\mathbf{r}_e(t'), t')\right], \qquad (47)
$$

此时两个时间积分的积分范围均为从 0 到 τ。

C. 对零点辐射的随机相位取平均

现在，我们需要计算在短时间 τ 内吸收的平均能量；在此期间，粒子会多次经过带电粒子轨道。因此，方程（47）变为

$$
\langle W(\tau) \rangle_{\theta^E} = \frac{e^2}{2M} \int_0^{\tau} dt \int_0^{\tau} dt' \left\langle \left[E_{\phi}^{E}(\mathbf{r}_e(t), t)\right] \left[E_{\phi}^{E}(\mathbf{r}_e(t'), t')\right] \right\rangle_{\theta^E}, \qquad (48)
$$

其中，我们对驱动辐射的随机相位 θ^E 取平均。

这里的$\mathbf{r}_e(t)$指的是带电粒子在库仑势中的周期运动，与驱动零点辐射的相位无关。然而，我们必须保留$\mathbf{r}_e(t)$的依赖关系，它对应于粒子随时间的周期运动。于是，零点辐射产生的电场的 ϕ分量可以改写为

$$
\begin{aligned}
\left[E_{\phi}^{E}(\mathbf{r}_e(t), t)\right] &= \mathrm{Re}\, E_{\phi}^{E}(\mathbf{r}_e(t), 0) \exp\left[-i\omega^E t + i\theta^E\right] \\
&= E_{\phi}^{E}(\mathbf{r}_e(t), 0) \cos\left[\omega^E t - \theta^E\right]. \qquad (49)
\end{aligned}
$$

随机辐射可以通过为辐射波引入随机相位来处理。然而，问题中已经存在一个相位，即带电粒子在其轨道上的相位。因此，我们必须谨慎处理，以保留辐射波相对于轨道运动中既有相位的随机性。在方程（48）中，涉及积分的是两个不同辐射波在 t和 t' 时刻所对应的两个相位。然而，如果这两个相位不同，对多个周期积分将得到零结果。因此，积分后唯一保留下来的贡献，是辐射波与其自身相匹配的情形。不过，与轨道运动的电荷的相位相比，这个辐射波仍然具有随机性。

我们感兴趣的是对随机相位取平均 $\theta^E_{n'l'm'}$，以得到 $\langle W(\tau)\rangle_{\theta^{E'}}$，如式（48）所示。我们需要

$$\left\langle \cos\left[\theta^E_{nlm}\right]\cos\left[\theta^E_{n'l'm'}\right]\right\rangle_{\theta^{E'}} = \left\langle \sin\left[\theta^E_{nlm}\right]\sin\left[\theta^E_{n'l'm'}\right]\right\rangle_{\theta^{E'}} = \frac{1}{2}\delta_{nlm,n'l'm'}, \tag{50}$$

and

$$\left\langle \cos\left[\theta^E_{nlm}\right]\sin\left[\theta^E_{n'l'm'}\right]\right\rangle_{\theta^{E'}} = 0. \tag{51}$$

于是，对于电多极辐射，先取平均，再求和以消去$\delta_{nlm,\ n'l'm'}$，我们有

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left[E^E_\phi(\mathbf{r}_e(t),t)\right]\left[E^E_\phi(\mathbf{r}_e(t'),t')\right]\right\rangle_{\theta^{E'}} \\
&= \left\langle \sum\nolimits_{nlm} E^E_\phi(\mathbf{r}_e(t),0)\cos\left[\omega^E t-\theta^E_{nlm}\right]\sum\nolimits_{n'l'm'} E^E_\phi(\mathbf{r}_e(t'),0)\cos\left[\omega^E t'-\theta^E_{n'l'm'}\right]\right\rangle_{\theta^{E'}} \\
&= \sum\nolimits_{nlm} E^E_{nlm-\phi}(\mathbf{r}_e(t),0)\sum\nolimits_{n'l'm'} E^E_{n'l'm'-\phi}(\mathbf{r}_e(t'),0)\cos\left[\omega^E_{n'l'm'}(t-t')\right]\frac{1}{2}\delta_{nlm,n'l'm'} \\
&= \frac{1}{2}\sum\nolimits_{nlm}\left[E^E_{nlm-\phi}(\mathbf{r}_e(t),0)\right]\left[E^E_{nlm-\phi}(\mathbf{r}_e(t'),0)\right]\cos\left[\omega^E_{nlm}(t-t')\right].
\end{aligned} \tag{52}$$

于是，式（48）中吸收的平均能量为

$$\begin{aligned}
&\left\langle W^E(\tau)\right\rangle_{\theta^{E'}} \\
&= \frac{e^2}{2M}\int_0^\tau dt\int_0^\tau dt'\left\langle \left[E^E_\phi(\mathbf{r}_e(t),t)\right]\left[E^E_\phi(\mathbf{r}_e(t'),t')\right]\right\rangle \\
&= \frac{e^2}{2M}\int_0^\tau dt\int_0^\tau dt'\frac{1}{2}\sum\nolimits_{nlm}\left[E^E_{nlm-\phi}(\mathbf{r}_e(t),0)\right]\left[E^E_{nlm-\phi}(\mathbf{r}_e(t'),0)\right]\cos\left[\omega^E_{nlm}(t-t')\right].
\end{aligned} \tag{53}$$

现在我们可以使用展开式

$$\cos\left[\omega^E_{nlm}(t-t')-\theta^E_{nlm}\right] = \cos\left[\omega^E_{nlm}t-\theta^E_{nlm}\right]\cos\left[\omega^E_{nlm}t'\right]+\sin\left[\omega^E_{nlm}t-\theta^E_{nlm}\right]\sin\left[\omega^E_{nlm}t'\right] \tag{54}$$

因此可以将公式（53）改写为

$$\left\langle W^{E}\left(\tau\right)\right\rangle =\frac{e^{2}}{4M}\sum\nolimits_{nlm}\left\{\left[\int_{0}^{\tau}dt\left[E_{nlm-\phi}^{E}(\mathbf{r}_{e}\left(t\right),0)\right]\cos\left[\omega_{nlm}^{E}t\right]\right]^{2}\right.$$
$$\left.+\left[\int_{0}^{\tau}dt\left[E_{nlm-\phi}^{E}(\mathbf{r}_{e}\left(t\right),0)\right]\sin\left[\omega_{nlm}^{E}t\right]\right]^{2}\right\} \tag{55}$$

现在，带电粒子以频率 ω_{e-n} 沿半径为r_{e-n}的圆形轨道运动，因此其速度为 $\omega_{e-n}r_{e-n}=v_{e-n}$。相应地，公式（55）中电场多极场的第一个积分需要展开为

$$E_{\phi}^{E}\left[\mathbf{r}_{e}\left(t\right),0\right]=\sum\nolimits_{n'lm}^{\infty}E_{n'lm-\phi}^{E}\left(k_{n'lm}^{E}r_{e}\right)\cos\left[\omega_{e-n}t\right]. \tag{56}$$

然后，将电场的时间变化考虑在内，可得

$$\begin{aligned}
&\int_{0}^{\tau}dt\left[E_{n'lm-\phi}^{E}(\mathbf{r}_{e}\left(t\right),0)\right]\cos\left[\omega_{n'lm}^{E}t\right]\\
&=\int_{0}^{\tau}dt\left[\sum\nolimits_{n'lm}^{\infty}E_{n'lm-\phi}^{E}\left(k_{n'lm}^{E}r\right)\cos\left[\omega_{e-n}t\right]\right]\cos\left[\omega_{n'lm}^{E}t\right]\\
&=\int_{0}^{\tau}dt\sum\nolimits_{n'lm}^{\infty}E_{n'lm-\phi}^{E}\left(k_{n'lm}^{E}r\right)\frac{1}{2}\left\{\cos\left[\left(\omega_{e-n}-\omega_{nlm}^{E}\right)t\right]+\cos\left[\left(\omega_{e-n}+\omega_{nlm}^{E}\right)t\right]\right\}\\
&=\sum\nolimits_{n'lm}^{\infty}E_{n'lm-\phi}^{E}\left(k_{n'lm}^{E}r\right)\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin\left[\left(\omega_{e-n}-\omega_{n'lm}^{E}\right)\tau\right]}{\left(\omega_{e-n}-\omega_{n'lm}^{E}\right)}+\frac{\sin\left[\left(\omega_{e-n}+\omega_{n'lm}^{E}\right)\tau\right]}{\left(\omega_{e-n}+\omega_{n'lm}^{E}\right)}\right\},
\end{aligned} \tag{57}$$

其中，ω_{e-n} 是带电粒子沿其轨道运动的频率。对于圆形轨道，表达式 $\left[E_{nlm-\phi}^{E}(r_{e},\ \pi/2,\ 0,\ 0)\right]$ 不含时间 t，因此可以移到时间积分号外。

对于非常大的球形围腔，求和转化为积分，我们可以使用方程。

由式 (35) 和 (39) 得到

$$
\begin{aligned}
&\left\langle W_{l,m}^{E}(\tau)\right\rangle \\
&=\frac{e^{2}}{4M}\sum\nolimits_{nlm}\left[E_{nlm-\phi}^{E}(r_{e},\pi/2,0,0)\right]^{2}\left\{\left[\int_{0}^{\tau}dt\cos\left[\left(\omega_{e}-\omega_{n'l'm'}^{E}\right)t\right]\right]^{2}\right. \\
&\left.+\left[\int_{0}^{\tau}dt\sin\left[\left(\omega_{e}-\omega_{n'l'm'}^{E}\right)t\right]\right]^{2}\right\} \\
&=\frac{e^{2}}{4M}\left(\int_{0}^{\infty}d\omega^{E}\frac{\mathsf{R}}{\pi c}\right)\left[m^{2}\left[\frac{1}{x}\left(\frac{d\left[xj_{l}\left(x\right)\right]}{d\left(x\right)}\right)\right]_{x=mv/c}Y_{lm}\frac{a_{lm}^{E}}{\sqrt{l\left(l+1\right)}}\right]_{\theta=\pi/2,\phi=0}^{2} \\
&\times\left\{\left[\int_{0}^{\tau}dt\cos\left[\left(\omega_{e}-\omega^{E}\right)t\right]\right]^{2}+\left[\int_{0}^{\tau}dt\sin\left[\left(\omega_{e}-\omega^{E}\right)t\right]\right]^{2}\right\} \\
&=\frac{e^{2}}{4M}\left(\int_{0}^{\infty}d\omega^{E}\frac{\mathsf{R}}{\pi c}\right)m^{4}\left[\frac{1}{x}\left(\frac{d\left(xj_{l}\left(x\right)\right)}{dx}\right)\right]_{x=mv/c}^{2}\frac{\left|Y_{lm}\right|^{2}}{l\left(l+1\right)}\left[\frac{16\pi\left(\omega_{nl}^{E}\right)^{3}}{c^{2}\mathsf{R}}\left\langle J_{rad}\left(\omega_{nl}^{E}\right)\right\rangle\right] \\
&\times\left\{\left[\int_{0}^{\tau}dt\cos\left[\left(\omega_{e}-\omega^{E}\right)t\right]\right]^{2}+\left[\int_{0}^{\tau}dt\sin\left[\left(\omega_{e}-\omega^{E}\right)t\right]\right]^{2}\right\} \\
&=\frac{4\pi e^{2}}{M}\left(\int_{0}^{\infty}d\omega^{E}\frac{\mathsf{R}}{\pi c}\right)m^{4}\left[\frac{1}{x}\left(\frac{d\left(xj_{l}\left(x\right)\right)}{dx}\right)\right]_{x=mv/c}^{2}\frac{\left|Y_{lm}\right|^{2}}{l\left(l+1\right)}\left[\frac{\left(\omega_{nl}^{E}\right)^{3}}{c^{2}\mathsf{R}}\left\langle J_{rad}\left(\omega_{nl}^{E}\right)\right\rangle\right] \\
&\times\left\{\left[\frac{\sin^{2}\left[\left(\omega_{e}-\omega^{E}\right)\tau\right]}{\left(\omega_{e}-\omega^{E}\right)^{2}}\right]+\left[\frac{\left(1-\cos\left[\left(\omega_{e}-\omega^{E}\right)\tau\right]\right)^{2}}{\left(\omega_{e}-\omega^{E}\right)^{2}}\right]\right\},
\end{aligned}
\tag{58}
$$

对于频率为 ω^{E} 的单个球面波模 l，m，我们对 ω^{E} 进行如下积分

$$
\int_{0}^{\infty}d\omega^{E}\left[\frac{\sin^{2}\left[\left(\omega_{e}-\omega^{E}\right)\tau\right]}{\left(\omega_{e}-\omega^{E}\right)^{2}}\right]\approxeq\int_{-\infty}^{\infty}d\omega^{E}\left[\frac{\sin^{2}\left[\left(\omega_{e}-\omega^{E}\right)\tau\right]}{\left(\omega_{e}-\omega^{E}\right)^{2}}\right]=\pi\tau, \tag{59}
$$

and

$$
\int_{0}^{\infty}d\omega^{E}\left[\frac{\left(1-\cos\left[\left(\omega_{e}-\omega^{E}\right)\tau\right]\right)^{2}}{\left(\omega_{e}-\omega^{E}\right)^{2}}\right]\approxeq\int_{-\infty}^{\infty}d\omega^{E}\left[\frac{\left(1-\cos\left[\left(\omega_{e}-\omega^{E}\right)\tau\right]\right)^{2}}{\left(\omega_{e}-\omega^{E}\right)^{2}}\right]=\pi\tau. \tag{60}
$$

对于满足 $\omega^{E}=\omega_{e}$ 的基态，ω^{E} 中的积分因 $\omega^{E}=\omega_{e}$ 处的共振而简化，于是我们得到

$$
P_{l,m}^{gain-E}=\frac{e^{2}}{M_{0}\gamma_{e}}\frac{\left(\omega^{E}\right)^{3}}{c^{3}}\left\langle\left[J_{rad}\left(\omega_{nl}^{E}\right)\right]\right\rangle\left\{8\pi\frac{m^{4}\left[Y_{lm}\right]^{2}}{l\left(l+1\right)}\left[\frac{1}{x}\frac{d\left[xj_{l}(x)\right]}{dx}\right]_{x=mv/c}^{2}\right\}. \tag{61}
$$

将此表达式与同一辐射模中损失的功率进行比较，后者由下式给出

Burko[24]

$$P_{l,m}^{loss-E} = 8\pi\frac{e^2}{c^3}m^4\omega_e^4 r_e^2\frac{l\left(l+1\right)}{\left(2l+1\right)^2}\left[Y_{l,m}\left(\pi/2,0\right)\right]^2\left[\frac{1}{l+1}j_{l+1}\left(m\omega_e r_e/c\right)-\frac{1}{l}j_{l-1}\left(m\omega_e r_e/c\right)\right]^2$$
$$= M_0c^2\left(\frac{M_0c^3}{e^2}\right)\frac{\left[e^2/\left(J_\phi c\right)\right]^8}{1-\left[e^2/\left(J_\phi c\right)\right]^2}\left\{8\pi\frac{m^4\left[Y_{l,m}\left(\pi/2,0\right)\right]^2}{l\left(l+1\right)}\left[\frac{1}{x}\frac{d\left[xj_l(x)\right]}{dx}\right]^2_{x=mv/c}\right\} \tag{62}$$

We 令损失的功率与获得的功率相等，即可得到能量平衡条件 d,

$$P_{l,m}^{loss-E} = P_{l,m}^{gain-E}. \tag{63}$$

我们消去公因子

$$8\pi\frac{m^4\left|Y_{lm}\right|^2}{l\left(l+1\right)}\left[\frac{1}{x}\frac{d\left[xj_l(mx)\right]}{dx}\right]^2_{x=v/c}, \tag{64}$$

并利用方程（30）化简，得到

$$J_\phi = J_{rad} = \hbar. \tag{65}$$

在基态中，方程（65）中的关系给出了相对论性电荷因辐射发射而损失的能量与零点辐射驱动偶极振荡所获得的能量之间的平衡。

我们预期基态完全稳定，因此能量平衡不应只适用于偶极辐射，而应适用于每一种辐射模。Burko[24] 给出了带电粒子沿圆形轨道运动时所有辐射模的辐射发射。我们注意到，从一种辐射模到下一种辐射模的变化，包含在轨道运动的电荷损失和获得能量时共有的因子中，这些因子列于公式（64）中。我们预期这种情况也适用于磁辐射模。

V. 共振激发态

A. 圆形共振激发态的频率较低

库仑势中的带电粒子的共振激发态 预计是不稳定的，并会通过辐射发射而衰减，能量逐渐降低，最终到达稳定的基态。因此，我们只考虑共振激发态中偶极 辐射的能量平衡。高阶多极项缺乏平衡，正是导致

共振激发态的不稳定行为。在辐射衰减过程中，带电粒子从一个激发态转变到另一个不同的状态、改变轨道时，通常发射的是偶极辐射。

对于标记为 n 的圆形共振激发态，其轨道角动量 J_{e-n}大于基态 J_{e-1}. 的轨道角动量

$$J_{e-n} = nJ_{e-1}, \tag{66}$$

圆形轨道的半径也更大

$$r_{e-n} = \left(\frac{e^2}{M_0\gamma_{e-n}c^2}\right)\left(\frac{J_{e-n}c}{e^2}\right)^2 = \left(\frac{e^2}{M_0c^2}\right)\sqrt{1-\left(\frac{e^2}{J_{e-n}c}\right)^2}\left(\frac{J_{e-n}c}{e^2}\right)^2, \tag{67}$$

而轨道角频率更小

$$\omega_{e-n} = \left(\frac{M_0\gamma_{e-n}c^3}{e^2}\right)\left(\frac{e^2}{J_{e-n}c}\right)^3 = \left(\frac{M_0c^3}{e^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\left[e^2/\left(J_{e-n}c\right)\right]^2}}\left(\frac{e^2}{J_{e-n}c}\right)^3. \tag{68}$$

这些方程与圆形轨道对应的方程一致，其中的平方根项源自相对论质量表达式。

$$P_{l,m}^{gain-E} = \frac{e^2}{M_0\gamma_e}\frac{\left(\omega^E\right)^3}{c^3}\left[J_{rad}\left(\omega_{nl}^E\right)\right]\left\{8\pi\frac{m^4\left[Y_{lm}\right]^2}{l\left(l+1\right)}\left[\frac{1}{x}\frac{d\left[xj_l(x)\right]}{dx}\right]^2_{x=mv/c}\right\} \tag{69}$$

$$\begin{aligned} &P_{l,m}^{loss-E} \\ &= M_0c^2\left(\frac{M_0c^3}{e^2}\right)\frac{\left[e^2/\left(J_\phi c\right)\right]^8}{1-\left[e^2/\left(J_\phi c\right)\right]^2}\left\{8\pi\frac{m^4\left[Y_{l,m}\left(\pi/2,0\right)\right]^2}{l\left(l+1\right)}\left[\frac{1}{x}\frac{d\left[xj_l(x)\right]}{dx}\right]^2_{x=mv/c}\right\} \end{aligned} \tag{70}$$

去掉方程 (69) 和 (70) 中花括号内的公因子后，圆形轨道的能量平衡条件为

$$\frac{e^2}{M_0\gamma_{e-n}}\frac{\left(\omega_{e-1}/n^3\right)^3}{c^3}\left\langle\left[J_{rad}\left(\omega_{nl}^E\right)\right]\right\rangle = M_0c^2\left(\frac{M_0c^3}{e^2}\right)\frac{\left[e^2/\left(nJ_{e-1}c\right)\right]^8}{1-\left[e^2/\left(nJ_{e-1}c\right)\right]^2}. \tag{71}$$

简化后，我们得到能量平衡条件:

$$\frac{1}{nJ_{e-1}}J_{rad} = 1. \tag{72}$$

这一关系意味着，零点辐射应向电荷提供的功率是其在辐射发射中损失功率的 n 倍。

B. 更高阶辐射多极与重复作用力

由于电荷的轨道具有有限范围， $r_{e-n} \neq 0$， 它不能被视为点偶极子。该电荷的电荷密度为

$$\rho_e(r,\phi,0,t) = e\delta^2\left[\mathbf{r} - \widehat{x}r\cos(\omega t) - \widehat{y}r\sin(\omega t)\right], \tag{73}$$

这是时间的周期函数 t，但包含基态轨道频率的所有倍频[25] 因此，电荷密度为

$$\rho_e(r,\phi,0,t) = e\sum\nolimits_{m=0}^{\infty}\rho_m(r)\cos\left[m\omega_e t\right] \tag{74}$$

其中，傅里叶变换为

$$\rho_m(r) = \frac{4\pi}{\omega_e}\int_0^{\omega_e/(2\pi)} dt\,\rho_e(r,\phi,0,t)\cos\left[m\omega_e t\right]. \tag{75}$$

基态频率下的零点辐射模 $\omega_{rad} = \omega_{e-1}$，绕行速度比半径较大时较慢的轨道运动 $\omega_{e-n} = \omega_{e-1}/n^3$ 更快。因此，旋转的辐射波会扫过轨道运动的带电粒子 n 次，因为零点辐射仍以相同的力和频率 $\omega_{rad} = \omega_{n-1} = \omega_{e-1}$推动带电粒子。带电粒子的轨道频率远低于其处于基态时的轨道频率。例如，如果 $n = 2$，电荷在其轨道上的速度只有基态时的一半，

$$r_{e-2}\omega_{e-2} = \left(r_{e-1}n^2\right)\left(\omega_{e-1}/n^3\right) = v_{e-2} = e^2/\left(2J_{e-1}\right) = e^2/\left(2\hbar\right). \tag{76}$$

这意味着，当电荷绕轨道运行一周时，辐射波会扫过电荷 n 次。但如果辐射波现在在电荷绕轨道运行一周时扫过粒子 n 次，那么它获得的能量就是原来的 n 倍。这恰好是共振激发态中式（72）的偶极辐射达到能量平衡所需的因子 n 。

VI. 非相对论极限

在带电粒子的速度相对于光速非常小时 c，上述所有方程都会转化为它们的非相对论极限。这

似乎很令人着迷：玻尔理论的所有非相对论公式都是有限的，且不涉及常数 c。因此，当 c 被视为远大于任何粒子速度时，相对论表达式的公式便会转化为不含常数 c 的非相对论力学表达式。例如，粒子速度（如往常一样）就是

$$v_{e-n} = \frac{e^2}{n\hbar}, \tag{77}$$

非相对论性轨道半径为

$$r_{e-n} = \frac{e^2}{M_0 c^2}\left[\sqrt{1-\left(\frac{e^2}{J_\phi c}\right)^2}\left(\frac{J_\phi c}{e^2}\right)^2\right] \to \frac{n^2\hbar^2}{M_0 e^2}, \tag{78}$$

轨道频率为

$$\omega_{e-n} = \frac{M_0 c^3}{e^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\left[e^2/\left(J_\phi c\right)\right]^2}}\left(\frac{e^2}{J_\phi c}\right)^3\right] \to \frac{M_0 e^4}{n^3\hbar}. \tag{79}$$

辐射发射与吸收确实涉及 c. 然而，在零点辐射中，辐射能量平衡与 c的实际取值无关，而且这种平衡是隐蔽的。事实上，玻尔理论假定，带电粒子在某些优选轨道上根本不会辐射。

七、总结

1913年，玻尔提出电子在某些优选轨道上不会辐射，这一观点在物理学家中引起了极大的怀疑。经典电动力学的成功众所周知，而加速的带电粒子会发射辐射也被广泛接受。然而，尽管玻尔理论的观点令人不安，它仍给出了氢线光谱波长的正确结果，甚至还正确给出了正氦离子的约化质量修正。1916年，索末菲[2]扩展了玻尔的思想，从而得出了氢光谱线精细结构的正确结果。

如今，物理学的情形已大不相同。经典电磁学被认为适用于宏观情形，而量子力学及其种种非寻常观念则主宰着微观领域。正如费曼所说：“我想我可以有把握地说，没有人理解量子力学。”

在本文中，我们提出，玻尔1913年的思想可以用包含随机经典零点辐射的经典电磁学来理解。尽管能斯特[26] 在1916年考虑过经典零点辐射 这一思想，但它从未在物理学界获得广泛认可。Marshall[27]在1963年对谐振子问题认真而深入地研究了这一思想，此后也有其他人进行了研究。但只有自由场或线性势取得了成功。

一篇于[7] 1975年发表的综述文章引起了一些关注。然而，仅仅引入零点能，并不能解释许多看似可以通过量子处理来说明的现象。许多起初对零点能这一想法满怀热情的物理学家后来失去了兴趣，有些人甚至转而积极反对它。在这种情况下，Cole[6] 进行的一项细致的氢原子数值模拟带来了一线难得的亮光。

显然，仅仅引入经典零点辐射的概念，并继续对系统使用非相对论势是不够的。必须将注意力限制在相对论或近似相对论系统上。此外，Cole 对垂直于轨道传播的单个圆偏振平面波作用下的氢进行了数值计算[28] ，并指出在轨道频率的整数倍处存在共振。在本研究中，我们发现有必要考虑相对论经典带电粒子与经典零点辐射之间的共振。具备这三个要素——经典零点辐射、相对论和共振——后，经典电动力学便能为氢得出与玻尔最初提出的旧量子论相同的结果。

---

[1] M. Born，《原子的力学》（Ungar，纽约，1970年），第52–53页。[2] A. Sommerfeld，“论谱线的量子理论”，《物理学年鉴》，**356**，1–94（1916年）。[3] W. Yourgrau 和 S. Mandelstam，《动力学与量子理论中的变分原理》第3版（W. B. Saunders Co.，费城，1968年），第113页。[4] L. C. Biedenharn，“重新审视并解决‘索末菲难题’”，Found. Phys. **13**，258–279（1983年），第259页。我们遵循 Biedenharn 的做法，但使用的符号略有不同。[5] T. H. Boyer，“随机电动力学：最接近量子的经典近似

理论》，《Atoms》**7**(1), 29-38 (2019)。

[6] D. C. Cole 和 Y. Zou，《通过经典电动力学获得氢的量子力学基态》，《Phys. Lett. A》**317**,14-20（2003年）。

[7] T. H. Boyer，《随机电动力学：具有经典电磁零点辐射的经典电动力学理论》，《Physical Review D》**11**, 790-808（1975年）。

[8] N. 玻尔，《论原子与分子的构成》，《Philosophical Magazine》**26**, 1-25（1913年 ）.

[9] T. H. Boyer，《经典零点辐射下经典电动力学中的经典线性振子》，待提交发表。

[10] 例如，参见 R. Eisberg 和 R. Resnick，《原子、分子、固体、原子核与粒子的量子物理》，第*2*版（Wiley，纽约，1985年）；K. S. Krane，《现代物理学》，第*2*版（Wiley，纽约，1996年）；R. Taylor、C. D. Zafiratos 和 M. A. Dubson，《科学家与工程师的现代物理学》，第*2*版（培生，纽约，2003年）；S. T. Thornton 和 A. Rex，《科学家与工程师的现代物理学》，第*4*版（Brooks/Cole，圣智学习，波士顿，马萨诸塞州，2013年）。

[11] 参见参考文献 4，第 260 页。

[12] 相对论与非相对论理论之间的不相容性。在非相对论极限下，光速 c 远大于任何其他参数，并且减去静能 M_0c^2 （因为 c 非常大），相关比值便成为一个常数，

$$\begin{aligned}&\frac{J_\phi\omega_\phi}{U-M_0c^2}\\&=\frac{J_\phi}{\left[M_0c^2\sqrt{1-\left[Ze^2/\left(J_\phi c\right)\right]^2}-M_0c^2\right]}\left(\frac{M_0c^3}{Ze^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\left[Ze^2/\left(J_\phi c\right)\right]^2}}\left(\frac{Ze^2}{J_\phi c}\right)^3\\&\to\frac{1}{1/2\left\{-\left[Ze^2/\left(J_\phi c\right)\right]^2\right\}}\left(\frac{Ze^2}{J_\phi c}\right)^2=-2.\end{aligned}$$

这样的常数值与 Jackson 文本中讨论的球形多极辐射场不一致；该辐射场导出了关系式 $\left(dL_z/dr\right)/\left(dU dr\right)=m/\omega$，将球形体积中的辐射角动量 L_z 与辐射能量 U 联系起来。

[13] H. B. G. Casimir，《两块理想导体板之间的吸引力》，《荷兰皇家科学院学报》**51**,793-795 (1948)。

[14] M. J. Sparnaay，《平板之间吸引力的测量》，《Physica》（阿姆斯特丹）**24**，751-764（1958）；S. K. Lamoreaux，《在0.6至

6 μm范围内展示卡西米尔力》，《物理评论快报》**78**，5-8（1997）：**81**，5475-5476（1998）；U. Mohideen，《从0.1至0.9 μm的卡西米尔力精密测量》，同上。**81**，4549-4552（1998）；H. B. Chan、V. A. Aksyuk、R. N. Kleinman、D. J. Bishop和F. Capasso，《卡西米尔力对微机电系统的量子力学驱动》，《科学》**291**，1941-1944（2001）；G. Bressi、G. Carugno、R. Onofrio和G. Ruoso，《平行金属表面之间卡西米尔力的测量》，《物理评论快报》**88**，041804(4)（2002）。[15] T. W. Marshall，《统计电动力学》，《剑桥哲学学会会刊》**61**，537-546（1965）。[16] J. D. Jackson，《经典电动力学第2版》（约翰·威立父子出版公司，纽约，1975年），第746页。.[17] A. Einstein和L. Hopf，《概率论中的一个定理及其在辐射理论中的应用》，《物理学年鉴》（莱比锡）**33**，1096-1104（1910）。[18] 关于随机相位的随机辐射讨论，见S. O. Rice的文章《随机噪声的数学分析》，载于N. Wax编《噪声与随机过程论文选集》（Dover，纽约，1954年），第138页。[19] 参见参考文献16，第746页。[20] 参见参考文献16，第99-100页。[21] T. H. Boyer，《经典电子理论中隐蔽的电磁联系》，《欧洲物理学杂志》**43**，025201（21页）（2022）。[22] M. Born，《原子物理学第7版》（Hafner，纽约，1966年），第116-117页。[23] M. D. Greenberg，《高等工程数学，第2版》（Prentice Hall，新泽西州上萨德尔河，1998年），第141-144页。[24] L. M. Burko，《同步辐射的自力方法》，Am. J. Phys. **68**，456-468（2000）。见第463页，方程（46）。[25] 参见参考文献16，习题9.1，第460-461页。.[26] W. Nernst，《关于从量子理论考察转而接受能量连续变化这一尝试》，《德国物理学会会刊》**18**，83–116（1916年）。[27] T. W. Marshall，《随机电动力学》，《皇家学会会刊》**A276**，475-491（1963年）。[28] D. C. Cole，《经典氢原子系统的次谐波共振与临界偏心率》，《欧洲物理学杂志D辑》**72**，200-214（2018）。D. C. Cole和Y. Zou，《经典氢原子系统的次谐波共振行为》，《科学计算杂志》39，1-27（2009）。