arXiv:2603.13553v1 [math.CO] 13 Mar 2026

作为余循环条件的匹配规则：彭罗斯与典范投影铺砌上的离散势

SebastianPardo-Guerra*，Jonathan Washburn†，Elshad Allahyarov[1, 2, 3, ‡]

摘要

非周期铺砌具有两种经典研究但迄今分别阐述的结构：匹配规则通过局部约束强制形成全局有序结构；高度函数则通过整数值势函数编码全局几何。文献中对两者之间的确切关系一直语焉不详。本文通过上链优先框架将二者联系起来，证明四重等价关系——匹配规则、Ammann 杆线连续性、相关 1-上链的环闭合以及高度函数存在性彼此等价；该证明适用于候选铺砌，且不预设这四个条件中的任何一个。

证明通过半边／粘合构造进行：对于每一族 Ammann 杆线，我们为每条有向边赋予一个带符号的杆线穿越计数，从而得到一个反对称 1-上链。瓦片边侧穿越函数与全局上链分两步构造；当且仅当相邻瓦片在共享边上的取值一致时，全局上链才存在。粘合蕴含环闭合；随后，离散庞加莱引理给出一个标量势，该势与经典 Ammann 高度函数一致。

该框架可统一推广至由 $\mathbb{Z}^N$ 得到的典范投影铺砌（CPT）：格坐标上链通过 $v = \sum_{k=1}^{N} x_k(v)\,\mathbf{e}_k^*$ 重构顶点位置；对于具有一般位置窗口的 CPT，这些上链还构成 $H^1 \cong \mathbb{Z}^N$ (Forrest–Hunton–Kellendonk) 的一个 $\mathbb{Z}$-基，从而形成一种守恒强制结构，其识别差距为 $\mathcal{R}(\mathcal{T}) \cong \mathbb{Z}^N$。该框架已在斐波那契链、彭罗斯 P2、阿曼–比恩克以及二十面体阿曼铺砌中得到验证；守恒强制是否恰好刻画 Pisot 替换 CPT，仍是一个开放猜想。

关键词：彭罗斯镶嵌、典范投影铺砌、非周期序、离散势理论、阿曼高度函数、匹配规则、环闭合、守恒强制、图案等变上同调、斐波那契链、二十面体镶嵌

2020年数学学科分类：52C23（准晶体、非周期铺砌）；55N05（切赫上同调）；05C21（图上的流）

*Recognition Physics Institute，奥斯汀，得克萨斯州，美国。sebas@recognitionphysics.org

†Recognition Physics Institute，奥斯汀，得克萨斯州，美国。jon@recognitionphysics.org

‡Recognition Physics Institute，奥斯汀，得克萨斯州，美国。[1]理论物理研究所 II：软物质，杜塞尔多夫海因里希·海涅大学，Universitätsstraße 1，40225 杜塞尔多夫，德国。[2]理论部，高温联合研究所，俄罗斯科学院（IVTAN），Izhorskaya 街 13/19 号，莫斯科 125412，俄罗斯。[3]物理系，凯斯西储大学，克利夫兰，俄亥俄州 44106-7202，美国。elshad.allakhyarov@case.edu

目录

1 引言 **3**

1.1 背景与研究动机 .31.2 与先前研究的关系 .31.3 综述范围与核心对应 .41.4 贡献范围 .41.5 结构安排 .6

2 背景：彭罗斯镶嵌与典范投影铺砌 6

2.1 基本假设与范围约定 .62.2 原型瓦片、匹配规则与 Ammann 条带 .72.3 候选装饰镶嵌与局部条带数据 .82.4 Ammann 条的几何性质 .92.5 典范投影铺砌 .9

3 图上的离散势理论 12

4 镶嵌—势对应 14

4.1 杆穿越函数作为反对称1-余链 .154.2 具体拼片示例 .184.3 高度函数作为离散势 .204.4 匹配规则作为守恒律 .214.5 五族有效性判据与五网格重构 .224.6 上同调解释.244.7 镶嵌验证.25

5 守恒强制的非周期序 26

5.1 守恒强制铺砌系统 .265.2 主要定理：本原替换 CPT 是守恒强制的 . . . . . 285.3 彭罗斯铺砌和阿曼–比恩克铺砌的验证 .295.4 斐波那契链的验证 .295.5 二十面体阿曼铺砌的验证 .295.6 识别差距.315.7 未决问题：守恒强制系统的刻画 31

6 讨论 **32**

7 结论 34

A 显式瓦片边界计算 35

B 黄金比例、替换熵与相干层级 36

1 引言

1.1 背景与动机

彭罗斯非周期铺砌 [1, 2] 是具有长程取向有序、但不具平移周期性的平面镶嵌。其组合结构由 匹配规则——禁止周期性拼组的局部边装饰约束——所规定，并由 阿曼高度函数 [3, 2], 组织；该函数为顶点赋予整数值，使高度差能够编码有关边类型的几何信息。

尽管经过数十年的平行研究，这两种结构仍是在截然不同的技术语言体系中发展起来的：匹配规则被视为组合局部约束，而高度函数则只有在假定铺砌有效后才从全局构造出来。迄今尚未建立一种统一的代数框架，能够处理候选铺砌——即已具备装饰、但可能违反匹配规则的拼组。本文要解决的核心问题正是这一缺口。

本文通过一种上链优先框架弥补这一缺口。关键方法是两阶段半边／粘合构造（§4）：首先根据局部装饰数据逐瓦片定义杆穿越函数，而不预先假定全局有效性；当且仅当相邻瓦片在每条共享有向边上的取值一致时，才存在全局一致的1-上链——这正是匹配规则条件。因此，匹配规则就是局部守恒定律：有向图上的代数闭路闭合条件。精确的四重等价见下文§1.3 。

1.2 与既有研究的关系

现在，我们将本文置于既有研究背景中。了解已有成果，有助于明确本文统一框架的新颖之处。

镶嵌条件与离散1-上链之间的对应关系源自若干彼此独立的研究脉络，这些脉络共同促成了本文所发展的统一视角。

最接近的结构先例是 Thurston [4], 的工作，他证明了用多米诺骨牌或菱形砖铺砌平面区域，与对偶图上高度差上链的环闭合等价；第 §§3–4节是这一框架在非周期情形下的直接类比。Conway–Lagarias [5], 则提供了另一种互补的全局方法，将可铺砌性表述为群中的字问题；从本文的意义上说，群单位元条件就是一种守恒律。第 §6节将详细比较这两种框架，并阐述它们与上链方法在结构上的差异。

与本文最直接相关的上同调框架是 Forrest、Hunton 和 Kellendonk [6], 提出的框架。他们通过图案等变余链发展了典范投影铺砌的切赫上同调，并计算了 $\check{H}^1(\Omega_P;\ \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^5$，其中对象是彭罗斯镶嵌包络，五种杆穿越余链构成生成元。本文针对 P2 铺砌，为 FHK 在一般典范投影镶嵌层面确立的性质提供了明确且自成一体的图论证明：半边／粘合构造（定义 4.1、引理 4.5）、面和消失（引理 4.3 和 2.10），以及五族有效性与重构定理（定理 4.13），均以图论术语完整、自成一体地阐述。

De Bruijn 提出的第四种研究思路 [7], 表明，每个 P2 铺砌都可视为下述对象的对偶

：一个“五重网格”——由五族平行线叠加而成，并由五个整数条带坐标编为索引。定理 4.13(ii) 将这些条带指标直接对应到五个阿曼高度函数，从而将顶点位置的势函数描述与五重网格描述统一为一个公式：每个顶点都是其五个高度值沿五个条法向的$_{2\ 5}$加权和。这一对应关系连同高度元组映射的单射性Φ：$V \to \mathbb{Z}^5$，明确揭示了 Forrest–Hunton–Kellendonk 框架中隐含、但未以坐标形式表述的一个推论。

关于彭罗斯镶嵌、典范投影铺砌及其上同调的全面背景知识，我们推荐阅读 Baake–Grimm [2], Grünbaum–Shephard [3],和 Sadun [8]。

总的来说，先前的研究确立了各个组成部分——高度函数、环路闭合条件、上同调生成元和五重网格坐标——但尚未形成统一且具备候选镶嵌感知能力的上链语言，也未提供自足的图论证明，或将其直接推广至一般的典范投影铺砌。本文从头构建这一语言，填补了这一空白。

1.3 综述范围与核心对应关系

了解先前的研究后，下面我们将介绍本文所构建的统一框架的主要结果及其适用范围。

各个组成部分——高度函数、匹配规则、离散庞加莱引理、条带连续性以及镶嵌空间的上同调——均已有研究（见 §1.2）。本文将这些组成部分整合为统一的上链/势框架，采用一致的符号，并清楚地区分图上 1-上链的一般事实与彭罗斯装饰及阿曼棒数据的特定结果；经典、重新组织或新提出的内容分类见 §1.4。

定理4.11 确立了候选铺砌的以下四重等价（命题4.10 指出单个杆穿越上链是标量势）：

(i) $\mathcal{T}$满足彭罗斯匹配规则。(ii) Ammann 条带在 $\mathcal{T}$ 上形成连续直线。(iii) 杆穿越函数 $\Delta_{\mathbf{n}}$ 满足环闭合。(iv) 存在全局一致的高度函数 $h\colon V \to \mathbb{Z}$ 。

等价关系 (i)⇔(ii)（匹配规则 ⇔ 杆线连续性）是经典结果 [3, 2]；其余三条蕴含关系则是新的，本文通过半边／粘合构造（定义4.1、引理4.5）予以证明。

表1概述了第 §§3–4节所建立的结构对应关系：

1.4 贡献范围

为便于读者了解，本文内容分为三类，以下按创新程度由低到高进行综述：为使论述自成一体而回顾的经典结果、以统一的上链势语言重新组织的已知结果，以及本文证明的若干结果和构造。

本文为保持自足性，在此不再证明若干经典事实。已知有效彭罗斯镶嵌的高度函数存在，且与 Am- mann 高度一致 [3, 2], 匹配规则等价于高度函数存在性 [2], 并且

表 1：彭罗斯铺砌理论与离散势理论之间的结构对应关系。

彭罗斯铺砌理论	**离散势理论**
铺砌邻接图 $G_{\mathcal{T}}$	连通图 G
带有横杆交叉数据的边	带有反对称函数的有向边 Δ
条带连续性（来自匹配规则）	环闭合
阿曼高度函数 h	标量势 h
共享边上的匹配规则	反对称守恒

任意本原代换的替换熵等于 $\ln \lambda_{\mathrm{PF}}$ [9]。Thurston 的高度函数框架 [4] 在周期情形下确立了循环闭合—高度函数等价，本文将其引入非周期情形；在上同调层面，由五个杆穿越余链作为生成元的计算 $\check{H}^1(\Omega_P;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^5$ 归功于 Forrest–Hunton–Kellendonk [6]；de Bruijn 的五网格构造 [7]则通过五个整数条带坐标确定顶点位置。

论文的第二层工作将这些要素重新组织起来，形成一套连贯的上链势语言，并统一了记号。其关键的组织性贡献是两阶段粘合构造（定义 4.1，引理4.5），它逐块定义杆穿越函数，而后才假定其全局有效；这一方法使命题 4.10和定理 4.11 能够以非循环的方式概括候选铺砌的经典等价性，因为全局上链未必先验存在。定理4.13 随后将全部五个高度函数汇总为一个联合重构公式，把 de Bruijn 的条带指标与 Ammann 高度对应起来，从而为这两种描述提供一套自成一体的统一记号。将匹配规则解读为守恒律，是把 Conway–Lagarias 的环闭合刻画应用于 P2 情形的结果 [5]；而识别差距（§5.6）则指称一个标准的上同调观察：$H^1(X_{\mathcal{T}};\ \mathbb{Z}) = 0$，而 $H^1_{PE} \cong \mathbb{Z}^5$，这明确说明了每个杆穿越上链在局部可读、在全局却并非平凡的意义。针对 Ammann–Beenker 铺砌的推论 5.8 提供了另一个独立例子，证实同一套上链术语无需修改即可扩展到彭罗斯之外。

本文的主要贡献可概括如下。首先，本文给出了彭罗斯匹配规则的自包含上链优先表述，并通过半边／粘合构造（定义 候选（可能无效的）带装饰镶嵌，从而对其进行严格处理（4.1，引理4.5）。其次，本文将经典的彭罗斯对应关系整理为明确的图论陈述：候选铺砌的四重等价（定理 4.11）以及五族有效性与重构定理（定理 4.13），并采用统一的记号。第三，本文引入了守恒强制框架（定义 5.1），并证明本原替换 CPT 是守恒强制的，且其守恒秩等于环境格维数（定理 5.7），从而为 CPT 类建立了猜想 (a)⇒5.6 中蕴含关系（b）的证明。

1.5 组织结构

第 2 节介绍彭罗斯镶嵌和典范投影铺砌的背景，包括候选带装饰镶嵌和局部 Ammann 杆线数据。第 3 节发展图上的离散势理论。第 4 节构建完整的镶嵌—势对应：半边／粘合构造、两个核心等价性结果（命题 4.10 和定理 4.11）、五族有效性与五网重构定理、上同调解释以及一则验证性说明。第 5 节引入守恒强制铺砌系统的概念，证明一般的 CPT 定理（定理 5.7），验证彭罗斯 P2（秩 5）、阿曼–比恩克（秩 4）、斐波那契链（秩 2）和二十面体镶嵌（秩 6）满足该定义，陈述识别差距 $\mathcal{R}(\mathcal{T}) \cong \mathbb{Z}^N$，并提出分类猜想。第 6 节详细比较 Thurston [4] 和 Conway–Lagarias [5], ，并列出开放问题。第 7 节作总结。附录A给出显式瓦片边界计算。附录 B 记录 φ作为罗宾逊替换的佩龙–弗罗贝尼乌斯特征值的作用、其与替换熵图景的联系，以及按照佩龙–弗罗贝尼乌斯特征值对四个已验证 CPT 族进行相干性层级排序。

2 背景：彭罗斯镶嵌与典范投影铺砌

本节为第 3–5 节的内容铺垫背景。其组织如下。§2.1确定全文采用的约定。§2.2 回顾彭罗斯 P2 飞镖形–风筝形原型瓦片、匹配规则、Ammann 条带以及阿曼高度函数。§2.3介绍候选带装饰镶嵌，对可能违反匹配规则的铺砌的局部条带数据进行形式化，并定义铺砌邻接图 $G_{\mathcal{T}}$，该图承载第 3 节的所有上链。§2.4 汇集第 4 节半边／粘合构造中所用的 Ammann 条的几何性质。§2.5 将这一框架推广至典范投影铺砌，为第 5 节的守恒强制分析做好准备。

在介绍本节研究的对象之前，我们先确定全文采用的约定和适用范围限制。

2.1 基本假设与适用范围约定

为避免隐含地使用未明示的假设，我们采用以下约定。

(a) **彭罗斯模型**。 除非另有说明，“彭罗斯铺砌”均指采用标准边装饰和 Ammann 杆线的 P2（飞镖形–风筝形）系统，见 §2.2。 （b）**候选与有效镶嵌**。“候选带装饰镶嵌”指定义2.1（其中已有装饰，但可能违反匹配规则）。明确要求有效性的陈述均假设满足匹配规则（或援引定理 4.11）。（c）**图的约定**。镶嵌上的所有上链都是定义在铺砌邻接图 $\vec{E}$的有向边集 $G_{\mathcal{T}}$ 上（定义 2.3）。

(d) **切割与投影的含义**。“典范投影镶嵌（CPT）”始终指定义 2.7，其中包括 单射性以及一般位置窗口条件。援引 Forrest–Hunton–Kellendonk 的秩／基结果时，相关前提是一般窗口假设。

（e）**替换的适用范围**。一般的守恒强制定理（定理 5.7）针对本原替换典范投影铺砌进行证明。凡提及“Pisot”，都是将其作为开放方向中的一种潜在分类假设（猜想 5.6），而非已证明方向所需的前提。

2.2 原型瓦片、匹配规则与Ammann 条带

我们采用飞镖形–风筝形（P2）表述 [1, 2]，，其中每个原型瓦片都是四边形，其边长为 1（短）和 $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$（长）。罗宾逊三角形分解 [10, 2] 将每个飞镖形或风筝形分割为黄金三角形 T（等腰，36°-72°-72°）和黄金锯形 G（等腰，108°-36°-36°）。这两种相似类型满足本原 Robinson 三角形替换

$$T \;\to\; T+G, \qquad G \;\to\; T, \tag{1}$$

其瓦片数量的演化由斐波那契矩阵编码

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{with eigenvalues} \quad \lambda_1 = \varphi, \quad \lambda_2 = -1/\varphi. \tag{2}$$

佩龙–弗罗贝尼乌斯特征值 φ 支配迭代替换过程中瓦片数量的指数增长：经过 n 步后，总数增长为 φ^n。替换结构及其相关矩阵 M 是此处的背景知识；到了第 5节，它们便成为关键内容，因为佩龙–弗罗贝尼乌斯特征值是区分守恒强制铺砌系统的关键不变量。

每块原型瓦片的边都带有箭头和弧线装饰，以强制执行匹配规则：只有装饰相符的两块瓦片才能共用一条边，而这些局部约束会禁止周期性排列，并确保全局非周期性 [1]。

对于有效铺砌，装饰还决定了五个族的*Ammann* 杆线——即连续穿过铺砌的一组组平行直线 [3, 2]。每个族都有一个固定方向（五个相关方向之一，它们之间相差 72° 旋转，如图1所示），相邻杆线之间的垂直间距构成一个斐波那契准周期序列，其中短间距为 S，长间距为 $L = \varphi S$。

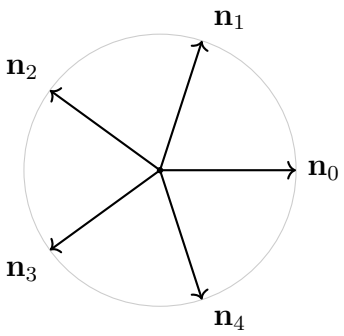


图1：彭罗斯 P2 的五个 Ammann 杆线族可由单位法向量 $\mathbf{n}_k$索引，它们之间满足 72° 旋转关系。“条带族方向”指杆线的方向；其法向量 $\mathbf{n}_k$ 用于为有向边赋予带符号的穿越数。

一项经典结果 [2] 证明，当且仅当 Am- mann 杆线构成连续直线时，匹配规则才得到满足（杆线不能在铺砌内部终止；条带连续性的正式定义见下文定义2.2 ）。固定一个单位法向量为$\mathbf{n}$的杆族，阿曼高度函数 $h\colon\ V \to \mathbb{Z}$ 为每个顶点 v 赋予相对于参考顶点 v_0 和 v之间的带符号条带数，计数方向相对于$\mathbf{n}$ [3]；每条边两端的高度差编码了该边是否穿过一条杆线，以及穿过的方向。

2.3 候选装饰镶嵌与局部线条数据

以下定义使候选镶嵌的线条数据具有明确含义，即使它们可能违反匹配规则——为定理4.11和注4.15提供所需术语——并引入承载第3节上链的邻接图。

定义 2.1（候选装饰彭罗斯铺砌）。候选（装饰）彭罗斯铺砌是由飞镖形和风筝形原型瓦片构成的边对边镶嵌 $\mathcal{T}$，其铺砌块均带有标准彭罗斯边装饰（箭头/弧线），但相邻铺砌块不一定满足匹配规则（公共边上的装饰可能不一致）。

定义 2.2（局部与全局 Ammann 条带）。 固定五个 Ammann 杆族方向之一，由单位法向量 $\mathbf{n}$指定。每个装饰原型瓦片都确定瓦片内部有限个共线的局部杆线段，它们所在直线的法向量均为 $\mathbf{n}$（等价地说，所有线段都平行于杆方向） [3, 2]。对于候选铺砌 $\mathcal{T}$，令 $\mathcal{B}_{\mathbf{n}}(\mathcal{T})$ 表示铺砌块 $\mathcal{T}$ 中所有此类线段之并集的连通分支集合。 $\mathcal{B}_{\mathbf{n}}(\mathcal{T})$ 中的元素即为族 $\mathbf{n}$ 的（可能断裂的）*Ammann* 条带 。如果 $\mathcal{B}_{\mathbf{n}}(\mathcal{T})$ 的每个分支都是 $\mathbb{R}^2$ 中的一条完整直线（等价地说，在 $\mathbb{R}^2$ 的内部没有端点），则称$\mathbf{n}$-杆族连续 。

候选铺砌及其线条数据具有一种自然的组合结构：将共享瓦片边的瓦片定义为相邻，由此得到以下图。

定义 2.3（铺砌邻接图）。 设 $\mathcal{T}$ 是一个彭罗斯铺砌，其顶点集为 V，边集为 E。其铺砌邻接图为 $G_{\mathcal{T}} = (V,\ E)$，其中 $(u,\ v) \in E$ 当且仅当 u 和 v 由一条瓦片边相连。

注 2.4（图的基本性质）。 对于由多边形砖块构成的边对边局部有限铺砌 $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^2$，其邻接图 $G_{\mathcal{T}}$ 是连通且平面的：它是嵌入平面中的铺砌 CW 复形的1-骨架。参见 Grünbaum–Shephard [3]或 Baake– Grimm [2]。

2.4 Ammann 杆线的几何性质

§4中会用到彭罗斯 P2 装饰和 Ammann 杆线的以下标准性质；关于具体约定和图示，参见 Baake–Grimm [2, 第 6] 章。

引理 2.5（局部杆线段由装饰决定）。 固定一个条族方向（等价地，固定一个条法向 $\mathbf{n}$）。对于每个定向的 *Penrose* 原型瓦片，标准边缘装饰决定瓦片内部一组有限的直线 局部 *Ammann* 杆线段，其含义见定义*2.2*。特别地，对于候选带装饰镶嵌（定义 *2.1*），无需全局有效性假设，就能逐块读取局部条带数据。

证明。 根据定义 2.2，每个带装饰原型瓦片仅凭其装饰数据，就能确定一组有限的局部杆线段，无需参考相邻瓦片。由于候选铺砌是逐块赋予装饰的（定义 2.1），每块瓦片的局部杆线段都有定义，不论全局匹配规则是否满足。 □

注 2.6（横截性与唯一性性质）。 对于采用标准 Ammann 杆线方向的彭罗斯 P2 铺砌，以下几何性质成立（见 [2, 第 6]章）：

（i）给定杆族中的任何 Ammann 杆线都不与任何瓦片边平行，且没有任何杆线穿过铺砌顶点。（ii）对于每个瓦片和每个杆族，每条瓦片边至多被该杆族的一条局部杆线段穿过。（iii）五个杆族分别对应 P2 的五个边方向类别：每个边方向类别都确定一个唯一的杆族，其杆线穿过该方向的边。（iv）对于与某一边方向类别相关联的唯一相关条族，该类别中的每条边都被该杆族的一条局部杆线段穿过（因此，相关的瓦片侧穿越值始终为 ± 1，绝不会为 0）。

这些性质为定义 $\{-1, 0, +1\}$ 中的取值穿越约定 4.1 以及引理 4.5 中“唯一相关条族”的表述提供了依据。

2.5 典范投影铺砌

势函数理论不仅适用于彭罗斯镶嵌，也适用于整个典范投影铺砌（*CPT*）类；我们在此引入这一类，以便为第5节做准备。

定义 2.7（典范投影铺砌）。设 $N > d \geq 1$ 为整数，$\Lambda \subset \mathbb{R}^N$ 为满秩格（通常为 $\mathbb{Z}^N$），$E_{\parallel} \subset \mathbb{R}^N$ 为 d维子空间（即物理空间），使得投影 $\pi\colon\ \mathbb{R}^N \to E_{\parallel}$ 满足：

(i) 无理性：　$\pi(\Lambda)$ 在 $E_{\parallel}$中稠密。

(ii) 单射性： $\pi|_\Lambda$ 是单射（等价地， $\Lambda \cap E_\perp = \{\mathbf{0}\}$）。(iii)一般位置窗口： 接受窗 $W \subset E_\perp := (E_\parallel)^\perp$ 是一个紧致多胞体，其边界不与任何投影格点相交，即 $\partial W \cap \pi_\perp(\Lambda) = \varnothing$。

CPT 的顶点集为 $V = \{\pi(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \Lambda, \ \pi_\perp(\mathbf{x}) \in W\}$，其中 $\pi_\perp : \mathbb{R}^N \to E_\perp$ 是互补投影。瓦片是将 Λ 的沃罗诺伊胞在 π 下的像，其中其 $\pi_\perp$-投影与 W 相交。

本文研究的五个标准CPT族汇总于表2中。

表2：标准CPT族。这里 N 是环境格维数， d 是物理维数。列 λ_{PF} 是替换的佩龙–弗罗贝尼乌斯特征值。

铺砌	原型瓦片	d	N	λ_{PF}
斐波那契链	S、L 线段	1	2	$\varphi \approx 1.618$
彭罗斯 P2/P3	飞镖形–风筝形 / 厚–薄菱形	2	5	$\varphi \approx 1.618$
阿曼–比恩克	正方形, 45° 菱形	2	4	$1+\sqrt{2} \approx 2.414$
二十面体 Ammann	两个菱面体	3	6	$\varphi \approx 1.618$

定义 2.8 （格坐标映射）。对于定义 2.7 中的 CPT，格坐标映射 为

$$\Phi : V \longrightarrow \mathbb{Z}^N, \qquad \Phi(v) := \mathbf{x}(v),$$

其中，$\mathbf{x}(v) \in \Lambda$ 是满足 $\pi(\mathbf{x}(v)) = v$ 且 $\pi_\perp(\mathbf{x}(v)) \in W$的唯一格点。唯一性由定义 2.7 中 $\pi|_\Lambda$ 的单射性得出。对于标准格 $\Lambda = \mathbb{Z}^N$，记$\Phi(v) = (x_1(v) \ldots, x_N(v))$，并定义第 k 个杆穿越上链如下

$$\Delta_k(u \to v) := x_k(v) - x_k(u), \qquad k = 1, \ldots, N. \tag{3}$$

注记 2.9（梯度结构）。由于 Δ_k 定义为坐标差 $x_k(v) - x_k(u)$，沿闭合环路求和时会发生望远镜消去；引理 2.10 对此作出了精确说明。

引理 2.10 （CPT 2-胞的广义面和消失）。设 $\mathcal{T}$ 是定义 $\mathbb{R}^d$（定义 *2.7*）中由格 $\mathbb{Z}^N$导出的 *CPT*，并设 Δ_k 为由 k 定义的第 (3) 个杆穿越上链。则对于铺砌 *CW* 复形 $X_\mathcal{T}$ 中的每个 2-胞 f （等价地，对于 $\mathcal{T}$中出现的每个多边形 2-面），以及任意 $k \in \{1, \ldots, N\}$，

$$\sum_{(u \to v) \in \partial f} \Delta_k(u \to v) = 0, \tag{4}$$

其中 ∂f 按其诱导的边界定向遍历。

证明。根据注2.9， $\Delta_k(u \to v) = x_k(v) - x_k(u)$ 是一个坐标差。因此，边界和会望远镜式消去：

$$\sum_{(u \to v) \in \partial f} \Delta_k(u \to v) = \sum_{(u \to v) \in \partial f} \big[x_k(v) - x_k(u)\big] = 0,$$

因为 ea f 的每个顶点在遍历 ∂f 时都会恰好作为起点和终点各出现一次 d. □

注 2.11（与彭罗斯几何论证的比较）。 引理 2.10 给出了一个纯代数证明，证明面和消失对所有 CPT 维数及所有格坐标上链均成立，并表明余循环条件是形式上的推论，源自梯度结构 $\Delta_k = \delta_0 x_k$，而非原型砖族的某种特殊几何性质。引理4.3 （§4.1）通过几何横截性论证证明了彭罗斯 P2 的同一消失性质。

引理 *2.12*（格步的局部确定性）。设 $\mathcal{T}$ 是一个具有有限局部复杂度（*FLC*：对于每个 $R > 0$，在平移意义下，半径为 R 的不同拼片只有有限多个）的 *CPT*，其格坐标映射为 Φ: $V \to \mathbb{Z}^N$ （定义 *2.8*）。那么，存在 $R > 0$，使得对于 $G_{\mathcal{T}}$ 中的每条有向边 $(u \to v)$，格差向量 $\Phi(v) - \Phi(u) \in \mathbb{Z}^N$ 由有向边 $(u \to v)$ 周围 $\mathcal{T}$ 的半径为 R 的拼片确定。特别地，对于每个 $k = 1, \ldots\ldots, N$，上链 $\Delta_k(u \to v) = x_k(v) - x_k(u)$ 是图案等变的。

证明。 我们证明，跨越任意有向边 $(u \to v)$ 的格步 $\Phi(v) - \Phi(u) \in \mathbb{Z}^N$ 由该边的一个有界邻域确定。

步骤 1（有限多个格步）。根据定义 2.7，每个瓦片 $t \in \mathcal{T}$ 都是 π 在 $\mathbb{R}^N$ 中 $\Lambda = \mathbb{Z}^N$ 的沃罗诺伊胞的一个 d 维面的像。若 $t = \pi(F)$ 对于一个顶点为 $\mathbf{x}0, \ldots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{Z}^N$ 的沃罗诺伊面 F 成立，那么 t 的顶点为 $\pi(\mathbf{x}_0) \ldots, \pi(\mathbf{x}_m)$，且 t 的每条边都具有 $\{\pi(\mathbf{x}_i)\ \pi(\mathbf{x}_j)\}$ 的形式，其中 $\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i$ 是一个沃罗诺伊邻接向量：两个沃罗诺伊胞共面相邻的格点之间的差。 $\mathbb{Z}^N$ 的沃罗诺伊邻接向量构成一个固定的有限集合 S，仅取决于格（而非铺砌），因此，对于每条有向边 $(u \to v)$，都有 $\Phi(v) - \Phi(u) \in S$。

步骤 *2*（原型砖块类型决定格步）。 $\mathcal{T}$ 的每种原型砖块类型都是 π下特定沃罗诺伊面类型 F_α 的像，其中 $\mathbb{Z}^N$ （此类类型只有有限种，因为 $\mathbb{Z}^N$在格平移下只有有限个沃罗诺伊面等价类）。 F_α的边界边带有来自 S的特定沃罗诺伊邻接向量；因此，对于每种原型砖块类型及其内部的每个边位置，格步 $\Phi(v) - \Phi(u)$ 都是 S中的固定元素。

步骤 *3*（局部斑块决定原型砖块和边位置）。有限局部复杂性意味着，对于任何固定的 R，半径为 R 的边中心斑块在平移意义下只有有限种不同形式。取大于任何原型瓦片直径的 R。则有向边（$u \to v$）周围半径为 R的斑块能够确定与该边相邻的原型砖块类型，以及各相邻原型砖块中与之对应的边界边 $\{u, v\}$。根据步骤 2，这就确定了 $\Phi(v) - \Phi(u)$。

步骤 *4*（图案等变性）。如果两个有向边（$u \to v$）和（$u' \to v'$）的半径为 R 的拼片平移等价，那么它们占据同一原型砖块类型中的同一边位置，因此步骤 2–3 得出 Φ（v）$-\Phi$（u）$=\Phi$（v'）$-\Phi$（u'）。因此，每个坐标差 Δ_k（$u \to v$）$= x_k$（v）$- x_k$（u）仅取决于半径为 R 的拼片，即具有图案等变性。 □

命题 2.13 (CPT 的重构公式)。 设 $\mathcal{T}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中一个由格 $\mathbb{Z}^N$ 产生的典范投影铺砌，其正交归一基为 $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^N$，且 $\mathbb{R}^N$。将投影基向量记为 $\mathbf{e}_j^* := \pi(\mathbf{e}j) \in \mathbb{R}^d$。那么对于每个顶点 $v \in V$,

$$v = \sum_{k=1}^{N} x_k(v)\, \mathbf{e}_k^*, \tag{5}$$

其中 $x_k(v)$ 是 $\Phi(v)$ 的第 k 个格点坐标。特别地，v 由这些整数高度函数 N $h_k := x_k$: $V \to \mathbb{Z}$ 确定。

证明。 根据定义 2.8，$\Phi(v) = \sum_{k=1}^{N} x_k(v)\,\mathbf{e}_k \in \mathbb{Z}^N \subset \mathbb{R}^N$。应用 π:

$$v = \pi(\Phi(v)) = \pi\Big(\sum_{k=1}^{N} x_k(v)\,\mathbf{e}_k\Big) = \sum_{k=1}^{N} x_k(v)\,\pi(\mathbf{e}_k) = \sum_{k=1}^{N} x_k(v)\,\mathbf{e}_k^*. \qquad \square$$

注记 2.14（彭罗斯特例）。 对于彭罗斯 P2/P3，有 $d = 2$, $N = 5$。记$\mathbf{n}_k = (\cos(2\pi k/5), \sin(2\pi k/5))$ 为 Ammann 杆线族的五个单位法向量。在标准的彭罗斯切投影方案中，物理空间投影 π: $\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ 将标准基向量映射为

$$\mathbf{e}_k^* \;=\; \pi(\mathbf{e}_k) \;=\; \tfrac{2}{5}\,\mathbf{n}_k \;=\; \tfrac{2}{5}\big(\cos(2\pi k/5),\ \sin(2\pi k/5)\big), \qquad k = 0, \dots, 4.$$

因子 $_{2\,5}$ 出现的原因是五个单位法向量满足恒等分解 $\sum_{k=0}^{4}(\mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k) = \frac{5}{2}\,I_2$ （这一事实将在下文定理 4.13（ii）中验证）：线性映射 $\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ 定义为 $\mathbf{x} \mapsto \sum_k x_k\,\mathbf{n}_k$ 其格拉姆矩阵为 $\frac{5}{2}\,I_2$，因此在度量上正确的投影带有倒数因子 $_{2\,5}$。于是，方程（5）给出

$$v \;=\; \sum_{k=0}^{4} x_k(v)\,\mathbf{e}_k^* \;=\; \frac{2}{5}\sum_{k=0}^{4} h_k(v)\,\mathbf{n}_k,$$

恢复 de Bruijn 五重网格公式 [7]。

在 CPT 框架建立之后，第 3 节将发展抽象代数工具——反对称边函数、环闭合以及离散庞加莱引理——并在第 4 节将其专门应用于彭罗斯铺砌，在第 5节将其应用于一般 CPT。

3 图上的离散势理论

本节建立第 4节和第5节所使用的抽象代数基础。我们研究任意连通图——因此该理论既适用于第 4 节中的彭罗斯铺砌，也适用于第 5节中的典范投影铺砌——并引入反对称边函数（1-上链）和回路闭合条件，同时证明离散庞加莱引理（定理 3.5）：当且仅当一个 1-上链是回路闭合的，它才可表示为某个标量势的梯度。正如第 4节将要证明的，在铺砌邻接图上，带符号阿曼棒穿越计数 $G_{\mathcal{T}}$（定义 2.3）恰好就是这样的 1-上链，而回路闭合等价于匹配规则。该势函数就是经典 Ammann 高度函数。

以下定义是组合霍奇理论和图上上同调中的标准定义；参见 Biggs [11]，以及 Thurston [4]（关于铺砌高度函数的观点）。

定义 3.1 （反对称边函数）。 设 $G = (V,\ E)$ 是一个连通图，其顶点集为 V，（无向）边集为 E。记

$$\vec{E} := \{\,(u \to v)\ :\ \{u, v\} \in E\,\}$$

为有向边集（每条无向边对应两种定向）。 G 上的反$\vec{}$对称边函数 是一个函数 Δ: $E \to \mathbb{R}$，满足

$$\Delta(v \to u) = -\Delta(u \to v) \quad \text{for all } \{u, v\} \in E. \tag{6}$$

注 3.2（1-上链术语）。 G上的反对称边函数也称为 G上的 1-上链（或反对称1-余链）：它恰好是定义在有向边上的一个函数，满足符号反转条件（6），即胞腔上链群 $C^1(G;\mathbb{R})$ 的一个元素。于是，环闭合条件（见下文定义 3.3）恰好是指 Δ 为一个余循环——也就是胞腔余边界序列中的$\delta^1\Delta = 0$ ——这使得离散庞加莱引理（定理 3.5）成为关于连通图的第一上同调群 $H^1(G;\mathbb{R})$ 平凡的陈述。这一代数恒等式正是本文核心主张的基础：匹配规则就是余循环条件。

定义 3.3（环闭合）。 反对称边函数 Δ 满足回路闭合条件，若对每个有向闭游走 $\gamma = (v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_k = v_0)$，在 G 中（顶点可以重复），

$$\sum_{i=0}^{k-1} \Delta(v_i \to v_{i+1}) = 0. \tag{7}$$

例 3.4（回路闭合与势函数的示意例子）。 考虑一个正方形图，包含四个顶点 a、b、c、d（按此顺序）以及边 $\{a,b\}$、$\{b,c\}$、$\{c,d\}$、$\{d,a\}$。定义反对称边函数

$$\Delta(a \to b) = +1, \quad \Delta(b \to c) = 0, \quad \Delta(c \to d) = -1, \quad \Delta(d \to a) = 0.$$

闭游走 $a \to b \to c \to d \to a$ 的和为 $(+1) + 0 + (-1) + 0 = 0$：环闭合成立。令 $h(a) = 0$，便可恢复 $h(b) = 1$、$h(c) = 1$、$h(d) = 0$，使得在每条边上都有 $\Delta(u \to v) = h(v) - h(u)$。在 §4 中，同样的算术将与 $\Delta = \Delta_{\mathbf{n}}$（杆穿越函数）和 $h = h_{\mathbf{n}}$（Ammann 高度）一起出现。下面的定理将其形式化。

定理 3.5（离散庞加莱引理）。 设 Δ 是连通图 $G = (V, E)$ 上的反对称边函数。当且仅当存在函数 $h\colon V \to \mathbb{R}$（在加法常数意义下唯一）时，Δ 满足环闭合，使得

$$\Delta(u \to v) = h(v) - h(u) \quad \textit{for all } (u \to v) \in \vec{E}. \tag{8}$$

此外，若 $\Delta(\vec{E}) \subseteq \mathbb{Z}$，并在一个参考顶点处固定 $h(v_0) = 0$，则路径积分构造给出 $h\colon V \to \mathbb{Z}$。

证明。这一结果在组合霍奇理论中是标准的；为求完整起见，我们给出证明，因为第4节整数值情形中会用到显式的路径积分构造。图论背景参见 Biggs [11]，高度函数类比参见 Thurston [4]。

正向（势函数 $\Rightarrow$ 环闭合）。设 $v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_k = v_0$ 为任意闭游走。那么

$$\sum_{i=0}^{k-1} \Delta(v_i \to v_{i+1}) = \sum_{i=0}^{k-1} \big(h(v_{i+1}) - h(v_i)\big) = h(v_k) - h(v_0) = 0.$$

逆向（环闭合 $\Rightarrow$ 势函数）。固定一个参考顶点 v_0。对于 $v \in V$，任选一条从 v_0 到 v 的路径 $\gamma_{v_0 \to v}$，并定义

$$h(v) := \sum_{e \in \gamma_{v_0 \to v}} \Delta(e).$$

若 γ 和 γ' 是两条这样的路径，则 $\gamma \cdot (\gamma')^{-1}$ 是一个闭游走，因此根据环闭合，其 Δ和为 0，故两条路径的路径和相等。因此， h 是良定义的，并且对每条有向边都满足 $\Delta(u \to v) = h(v) - h(u)$。

整数值情形。若 $\Delta(\vec{E}) \subseteq \mathbb{Z}$ 且 $h(v_0) = 0$，则每条路径上的和都是有限个整数之和，因此对所有 $v \in V$，都有 $h(v) \in \mathbb{Z}$。 □

注 3.6（上同调解释）。定理 3.5 等价于任意连通图 G的第一上同调群 $H^1(G;\mathbb{R})$ 为零。具体而言，1-上链群 $C^1(G;\mathbb{R})$ 分解为 $\ker \delta^1 = \operatorname{im} \delta^0$（余循环 $=$余边界），其中 $\delta^0 h(u \to v) := h(v) - h(u)$，而 $\delta^1 \Delta(f) := \sum_{e \in \partial f} \Delta(e)$（面边界和）。在整数值情形 $\Delta: \vec{E} \to \mathbb{Z}$中，相关的群是 $H^1(G;\mathbb{Z})$；对于树，该群是平凡群；而对于一般图，根据泛系数定理，该群等于 $\mathrm{Hom}(H_1(G;\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$。对于铺砌邻接图 $G_{\mathcal{T}}$， H^1 为零等价于满足匹配规则（第 4 节）；衡量全局条带连续性障碍的整数类 $[\Delta_{\mathbf{n}}] \in H^1(G_{\mathcal{T}};\mathbb{Z})$则是第 4.6 节的主题。

第 4 节将定理 3.5 应用于彭罗斯情形：抽象的 1-上链 Δ 由带符号条带穿越计数取代 $\Delta_{\mathbf{n}}$，抽象的标量势 h则变为阿曼高度函数。“环闭合 $\Leftrightarrow$ 匹配规则”的等价性是第4节的核心结果。

4 镶嵌—势对应

本节是本文的技术核心。借助第2节介绍的彭罗斯背景以及第 3节的抽象代数工具，我们证明，带符号 Ammann 杆线穿越计数是铺砌邻接图 $G_{\mathcal{T}}$上的 1-上链，且离散庞加莱引理（定理3.5）可用于导出经典 Ammann 高度函数，作为相应的标量势。核心结果是定理 4.11：对于任意候选装饰彭罗斯铺砌，四个条件——匹配规则、条带连续性、环闭合和高度函数存在性——彼此等价。这种等价性正是匹配规则即守恒律（余循环条件）的精确代数意义。

本节的内容安排如下：§4.1 定义瓦片边侧穿越棒数据，以及使其成为全局 1-上链的粘合条件；§4.2 给出一个明确的拼片级示例和具体的匹配规则违例；§4.3 将由此得到的势函数确认为阿曼高度；§4.4 证明候选铺砌的四重等价；§4.5 汇集全部五个族，并证明五网格重构；§4.6 阐释其上同调意义；以及§4.7 提取出一个线性时间验证过程。

现在回到彭罗斯铺砌图 $G_{\mathcal{T}}$（§2.3），并证明 §2.2 中的 Ammann 杆线数据在 $G_{\mathcal{T}}$ 上给出一个自然的反对称边函数（定义3.1）。一般的

§3的理论随后适用：环闭合（定义3.3）给出一个势函数（定理3.5，公式（8）），而该势函数最终证明就是经典 Ammann 高度函数。

4.1 杆穿越函数作为反对称 1-上链

杆穿越余链的构造分为两个阶段：首先定义一个仅根据每块瓦片自身装饰确定的瓦片边（半边）函数；然后构造一个全局上链，且只有当相邻瓦片在每条公共边上都一致——也就是说，匹配规则成立时——该上链才存在。这种两阶段方法使守恒律解释变得严格，并消除了候选铺砌情形中的任何歧义。

定义 4.1（瓦片边杆穿越函数）。固定 $\mathcal{T}$ 的五个 Ammann 杆线族之一，其单位法向量为$\mathbf{n}$。对于每块瓦片 $t \in \mathcal{T}$ 以及其边界 ∂t 上的每条有向边 $(u \to v)$，定义

$$\Delta_{\mathbf{n}}^{(t)}(u \to v) := \begin{cases} +1 & \text{if tile } t\text{'s local bar segment crosses } (uv) \text{ and } \mathbf{n} \cdot (v-u) > 0, \\ -1 & \text{if tile } t\text{'s local bar segment crosses } (uv) \text{ and } \mathbf{n} \cdot (v-u) < 0, \\ 0 & \text{if no local bar segment of } t \text{ crosses } (uv). \end{cases} \tag{9}$$

这里，“ t的局部杆线段”指的是瓦片 t内部的有限杆线段，它仅由 t自身的彭罗斯装饰（定义 2.2）决定，与相邻瓦片无关。对于任何候选铺砌，该函数都有良好定义：每条瓦片边与每个杆族 $[2]$, 至多相交于一条局部杆线段，因此 $\Delta_{\mathbf{n}}^{(t)}(u \to v) \in \{-1, 0, +1\}$（符号约定见图 2）；而反转边的方向会使符号反转，因此该函数在 ∂t 上是反对称的。

这些瓦片侧值的具体计算见例4.8，见 §4.2。

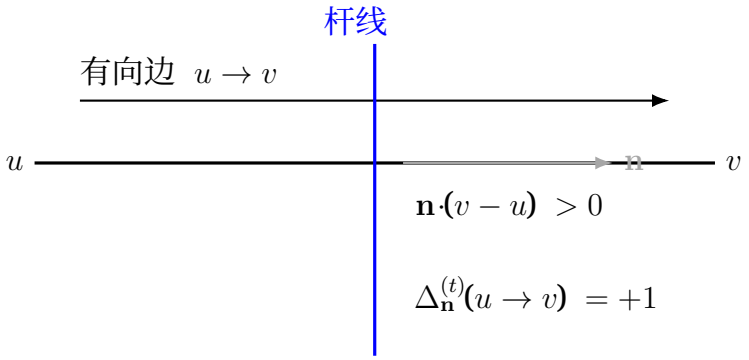


图 2：定义4.1的符号约定：与 $\mathbf{n}\cdot(v-u) > 0$ 的交叉贡献 $+1$；反向有向边贡献 -1。

注记 4.2（为何仅凭边类型并不足够）。我们或许会尝试仅根据边类型来定义 $\Delta_{\mathbf{n}}^{(t)}$（“$+1$ 长边取 0，短边取$+1$”）。但这行不通：这种规则无论遍历方向如何，都会赋予$+1$，从而违背反对称性。杆族法向量$\mathbf{n}$ 通过提供一种独立于边的定向解决了这一问题；不同的杆族会产生不同的瓦片侧函数 $\Delta_{\mathbf{n}}^{(t)}$，每个函数对应五个彼此不同的阿曼高度函数之一（其独立性由下文的定理 4.13（ii）证明）。

引理4.3（瓦片边界和为零）。 对于每个瓦片 t 以及每个杆族$\mathbf{n}$，

$$\sum_{(u\to v)\in\partial t} \Delta_{\mathbf{n}}^{(t)}(u \to v) = 0, \tag{10}$$

其中， ∂t 沿逆时针边界方向遍历。

证明。 内的每条局部杆线段 t 都是一条平行于杆方向的直线段 [3, 2]。对于彭罗斯 P2 瓦片（飞镖形和风筝形），五个 Ammann 杆族的方向经过设定，使其杆线既不与任何瓦片边平行，也不经过任何瓦片顶点 [2]；因此，每条局部杆线段都横截 ∂t ，并且恰好穿过两条边界边的相对内部——从一条边进入，从另一条边离开。

为说明这两个交点的符号相反，我们使用以下拓扑观察：边界 ∂t 是一条 $\mathbb{R}^2$中的简单闭曲线，而任意闭曲线与任意定向直线的代数交数为零。具体而言，族$\mathbf{n}$的杆线是一条法向量为$\mathbf{n}$的定向直线。对于适当的常数 c，定义 $H^+ := \{\mathbf{n}\cdot x > c\}$ 和 $H^- := \{\mathbf{n}\cdot x < c\}$ 。当 ∂t 沿逆时针方向遍历时，它起初位于某个开半平面内，不妨记为 H^-；在进入边处穿入 H^+ （此处贡献 $\Delta_{\mathbf{n}}^{(t)} = +1$ ，因为$\mathbf{n}\cdot(v-u) > 0$）；随后，为返回起始顶点，它最终必须在离开边处穿回 H^- （此处贡献$\Delta_{\mathbf{n}}^{(t)} = -1$ ，因为$\mathbf{n}\cdot(v'-u') < 0$ ）。由于 ∂t 是一条闭曲线，与杆线的交点带符号计数为零。任何未穿过 ∂t 的杆线段，其贡献均为零。对 t内的所有杆线段求和，结果为零。

□

在陈述粘合条件之前，我们先记录边标记与穿越值之间的精确联系，正是这一联系使等价关系（粘合 $\Leftrightarrow$ 匹配）成立。

注 4.4（从边装饰到带符号穿越）。 这些 $\{-1, 0, +1\}$ 穿越值由装饰决定（引理 2.5）：瓦片侧值 $\Delta_{\mathbf{n}}^{(t)}(u \to v)$ 可直接从瓦片 t 在 $\{u, v\}$上设置的标记读出。对于与 $\mathbf{n}^*$ 相关的边方向类别 $\{u, v\}$ （注 2.6（iii）），瓦片侧值相等因此等价于装饰一致；显式的标记到交叉值对照表见 [2, 第 6]章。

引理 4.5（粘合条件与全局上链）。 设 $\mathcal{T}$为候选装饰彭罗斯铺砌（示意图见图 3）。在彭罗斯 *P2* 铺砌中，五个杆族分别对应五个不同的边方向类别（注 *2.6*（*iii*））：每条内部边 $\{u, v\}$ 都被恰好一个杆族的条带穿过（该杆族的法向量 $\mathbf{n}^*$ 与 $\{u, v\}$的方向平行）；对于其他四个杆族，两个瓦片侧值均平凡地为 0 。固定一个法向量为 $\mathbf{n}$ 的杆族。

(i) **(**粘合即匹配。**)**对于铺砌块 A 和 B 共享的每条内部边 $\{u, v\}$ ：

$$\Delta_{\mathbf{n}}^{(A)}(u \to v) = \Delta_{\mathbf{n}}^{(B)}(u \to v). \tag{11}$$

此外，(11) 当且仅当彭罗斯匹配规则在 $\{u, v\}$ 上相对于族$\mathbf{n}$成立。这里，“相对于族$\mathbf{n}$的匹配规则”是指：来自 A 和 B 的 $\{u, v\}$ 上的标记从族$\mathbf{n}$的视角来看一**致**。如果$\mathbf{n}$不是其

横杠穿过类型为 $\{u, v\}$的边时，两侧均显然为 0，因此该条件不包含任何信息。完整的彭罗斯匹配规则在 $\{u, v\}$ 上成立，当且仅当粘合条件(11) 对唯一的族$\mathbf{n}^*$ 成立，该族穿过 $\{u, v\}$。

（*ii*）（全局上链。） $\Delta_{\mathbf{n}}$ 在 $G_{\mathcal{T}}$ 存在，当且仅当粘合条件（11）在每条内部边上成立。它是一个反对称边函数

$$\Delta_{\mathbf{n}} \colon \vec{E} \to \{-1, 0, +1\}.$$

当其存在时， $\Delta_{\mathbf{n}}(u \to v)$ 是 $\Delta_{\mathbf{n}}^{(A)}$和 $\Delta_{\mathbf{n}}^{(B)}$在公共边上的共同值。

证明。第（*i*）部分。在彭罗斯 P2 装饰中，每个原型瓦片的每条边都带有特定的箭头/弧线标记，而瓦片 t的局部杆线段是否穿过给定的边界边 $\{u, v\}$ （属于 t），以及相对于$\mathbf{n}$的方向，完全由边上的标记决定，而该标记由 t 放置在 $\{u, v\}$ 上（引理2.5）；另见 Baake–Grimm [2, 第 6]章。因此，$\Delta_{\mathbf{n}}^{(t)}(u \to v)$ 只取决于 t自身在 $\{u, v\}$上的标记。

（$\Leftarrow$，匹配蕴含粘合。）彭罗斯匹配规则断言，在 $\{u, v\}$ 上， A 和B 放置相同的标记。由于 $\Delta_{*\,\mathbf{n}}^{(t)}(u \to v)$只取决于 t自身的标记，相同的标记会产生相同的瓦片侧值。

（$\Rightarrow$，粘合意味着匹配。）方向类别为 α 的每条边都带有指向两个确定方向之一的箭头装饰，因此 $|M_\alpha| = 2$。根据备注 2.6(iv)，相关杆族 $\mathbf{n}_\alpha^*$ 穿过类别为 α的每条边，因此对于两种标记，瓦片侧穿越值始终为 ± 1 （绝不为 0）。两种标记对应相反的箭头方向；交换箭头方向会使穿越值变号，因此一种标记对应 $+1$，另一种对应 -1。由于 $+1 \neq -1$，映射 $m \mapsto \Delta^{(t)}{}_{\mathbf{n}_\alpha^*}(u \to v)$ 在 M_α上是单射。因此，相等的瓦片侧值 $\Delta_{*\,\mathbf{n}}^{(A)}(u \to v) = \Delta_{*\,\mathbf{n}}^{(B)}(u \to v)$意味着标记相同，这正是 $\{u, v\}$上的匹配规则。

对于任何其他族 $\mathbf{n} \neq \mathbf{n}^*$，无论匹配规则如何，两侧都等于 0，因此粘合条件显然成立。

第 *(ii)* 部分。 如果每条内部边都满足粘合条件，则将 $\Delta_{\mathbf{n}}(u \to v)$ 定义为共享边上的公共值，并将 $\Delta_{\mathbf{n}}^{(t)}(u \to v)$ 定义为边界边（仅属于一个瓦片）上的值。全局函数的反对称性由每个瓦片内部的反对称性推出。反之，如果 $\Delta_{\mathbf{n}}$ 是一个定义良好的全局反对称函数，则其在每条共享边上的值必须同时等于 $\Delta_{\mathbf{n}}^{(A)}$ 和 $\Delta_{\mathbf{n}}^{(B)}$，因此粘合条件成立。 □

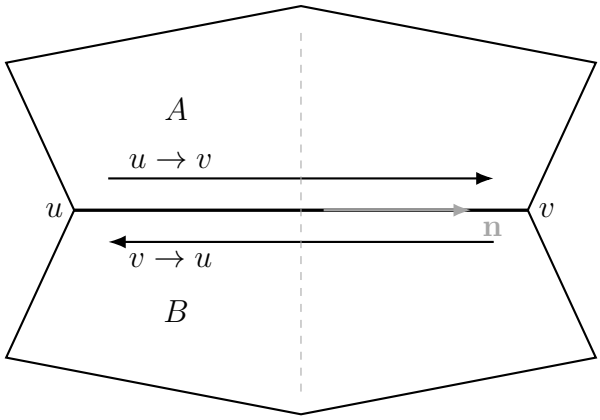


图 3：公共边上粘合条件的示意图。瓦片 A 和 B 在同一条有向边 $\Delta_{\mathbf{n}}^{(A)}$上诱导出的瓦片侧值分别为 $\Delta_{\mathbf{n}}^{(B)}$和 $u \to v$。彭罗斯匹配规则在 $\{u, v\}$上（对于唯一相关条族）等价于这些诱导值相等（引理 4.5）。

定义 4.6（杆穿越函数（全局））。 设 $\mathcal{T}$ 满足匹配规则，因此引理 4.5的粘合条件对每个杆族都成立。族 杆穿越函数 对于族 $\mathbf{n}$ 是全局一致的反对称边函数

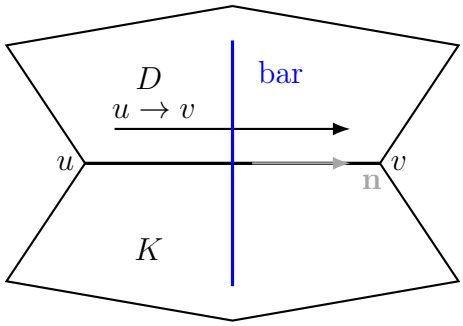
$$\Delta_{\mathbf{n}} \colon \vec{E} \longrightarrow \{-1, 0, +1\}$$

由 $\Delta_{\mathbf{n}}(u \to v) = \Delta_{\mathbf{n}}^{(t)}(u \to v)$ 给出，对于任意与边 t 相邻的瓦片 $\{u, v\}$均成立。根据引理 4.5**(ii)**，该值与 t的选择无关。

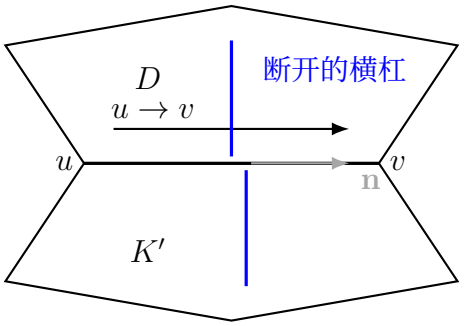
注 4.7（粘合条件的守恒律解读）。 每个瓦片都贡献一个在自身边界上平衡的瓦片侧函数 $\Delta_{\mathbf{n}}^{(t)}$（引理 4.3）。匹配规则正是粘合条件：相邻瓦片必须对每条公共有向边赋予相同的值。不匹配——一个瓦片赋值为 $+1$，另一个则赋值为 -1 或 0 ——是局部违规，会导致无法存在全局一致的上链（详细的守恒律解释见注 4.12 ）。

4.2 具体拼片示例

我们通过明确的瓦片面计算使抽象理论具体化，随后展示匹配规则遭到违反时如何破坏环闭合。



(a) 匹配：横杠在 $\{u, v\}$ 处连续延伸。



(b) 不匹配：横杠在 $\{u, v\}$ 处中断。

图4：示例4.8–4.9的示意图。蓝色线段表示所选族中的一段局部阿曼棒线段。在匹配的情况下，局部线段拼接成一条笔直的横杠；在不匹配的情况下，它们无法拼接，因此该族不存在全局上链（也就不存在全局势函数）。

例4.8 (飞镖–风筝对上的杆穿越函数)。(见图 4，左图。) 固定单位法向量为 $\mathbf{n}$ 的杆族。考虑一个风筝瓦片 D，其顶点为 v_0、v_1、v_2、v_3 (按逆时针方向)，其中 v_0v_1 和 v_3v_2 是两条长边，v_1v_2、v_0v_3 是两条短边。假设杆族的方向使条带穿过两条长边。风筝边界上的铺砖边界上的棒线穿越值 $\Delta_{\mathbf{n}}^{(D)}$如下：

$$\begin{aligned}
&\Delta_{\mathbf{n}}^{(D)}(v_0 \to v_1) = +1 && \text{(long edge } \overline{v_0v_1}\text{, crossed in } +\mathbf{n} \text{ direction)},\\
&\Delta_{\mathbf{n}}^{(D)}(v_1 \to v_2) = 0 && \text{(short edge } \overline{v_1v_2}\text{, no crossing)},\\
&\Delta_{\mathbf{n}}^{(D)}(v_2 \to v_3) = -1 && \text{(long edge } \overline{v_3v_2}\text{, crossed in } -\mathbf{n} \text{ direction)},\\
&\Delta_{\mathbf{n}}^{(D)}(v_3 \to v_0) = 0 && \text{(short edge } \overline{v_0v_3}\text{, no crossing)}.
\end{aligned}$$

铺砖边界和 D：$(+1) + 0 + (-1) + 0 = 0$。 ✓ (引理 4.3。)

将 $h_{\mathbf{n}}(v_0) = 0$ 归一化后，高度值为 $h_{\mathbf{n}}(v_1) = 1$, $h_{\mathbf{n}}(v_2) = 1$, $h_{\mathbf{n}}(v_3) = 0$。

现在添加一个风筝形 K，使其长边 v_0v_1 与 D 相接。彭罗斯匹配规则要求风筝形在这条公共边上的装饰与飞镖形的装饰一致；由引理 4.5(i) 可知，这等价于粘合条件 $\Delta_{\mathbf{n}}^{(K)}(v_0 \to v_1) = \Delta_{\mathbf{n}}^{(D)}(v_0 \to v_1) = +1$。因此，全局棒线穿越函数 $\Delta_{\mathbf{n}}$ （定义 4.6）在 v_0v_1 上定义良好，Ammann 杆线从 D 继续笔直延伸至 K。风筝边界和也为 0（引理4.3），高度值 $h_{\mathbf{n}}(v_0) = 0$, $h_{\mathbf{n}}(v_1) = 1$ 也能一致地延伸到风筝形其余的顶点。（完整的铺砖朝向枚举见附录A。）

例4.9 (匹配规则违例会破坏环闭合)。(见图4，右图。) 保留例 D 中的飞镖形 4.8，但添加一个 不匹配的风筝形 K'，使其违反边v_0v_1上的匹配规则：边的这一侧 K'的装饰与飞镖形的装饰不一致。由引理4.5(i) 可知，这种装饰不匹配恰好意味着粘合条件不成立：

$$\Delta_{\mathbf{n}}^{(D)}(v_0 \to v_1) = +1 \;\neq\; \Delta_{\mathbf{n}}^{(K')}(v_0 \to v_1).$$

若 K' 的不匹配棒线段沿相反方向穿过 $\overline{v_0v_1}$，则 $\Delta^{(K')}{}_{\mathbf{n}}(v_0 \to v_1) = -1$；若 K' 未在此边上放置横杠，则 $\Delta^{(K')}{}_{\mathbf{n}}(v_0 \to v_1) = 0$。在这两种情况下，根据

引理 4.5（ii），不存在全局一致的 $\Delta_{\mathbf{n}}$ 存在于 $G_{\mathcal{T}}$。由于装饰不一致， D 内的局部杆线段与 K' 内的线段无法在 v_0v_1处连接；横杠终止于 公共边处（注 4.12）。粘合条件检查（注 4.15）会直接检测到边 $\{v_0, v_1\}$ 上的杆族 $\mathbf{n}$发生了粘合违反。

4.3 高度函数作为离散势函数

下述命题将条带连续性、离散庞加莱引理和经典 Ammann 高度函数整合为一个陈述：引理所构造的势函数与高度函数是同一对象，二者均由同一个路径积分构造。

命题 4.10 (高度函数作为离散势函数)。 设 $\mathcal{T}$ 是满足匹配规则的彭罗斯铺砌，并设 $\Delta_{\mathbf{n}}$ 是定义 *4.6* 中的杆穿越函数。则：

(i) *(闭 cle 性。)* 对于 $G_{\mathcal{T}}$ 中的每个闭游走 $\gamma = (v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_k = v_0)$,

$$\sum_{i=0}^{k-1} \Delta_{\mathbf{n}}(v_i \to v_{i+1}) = 0. \tag{12}$$

(ii)(势函数的存在性。)根据离散庞加莱引理（定理 *3.5*），存在一个势函数

$$h_{\mathbf{n}} \colon V \longrightarrow \mathbb{Z}$$

使得 $\Delta_{\mathbf{n}}(u \to v) = h_{\mathbf{n}}(v) - h_{\mathbf{n}}(u)$ 对所有 $(u \to v) \in \vec{E}$都成立，且在全局加法常数意义下唯一。

(iii) （识别。） 势函数 $h_{\mathbf{n}}$ 与 $\mathcal{T}$的经典 *Ammann* 高度函数重合，该函数对应于法向量为 $\mathbf{n}$的杆族。这是一种定义上的识别：二者都是从同一个参考顶点出发，对带符号条带穿越计数进行路径积分构造而成。

证明。第（*i*）部分：由条带连续性得到环闭合。

由于 $\mathcal{T}$满足匹配规则，每根 Ammann 杆线都形成一条连续的直线，贯穿整个铺砌 [2]。我们证明 $\Delta_{\mathbf{n}}$ 沿任意闭游走的总和为零。

设 γ 是一条闭游走， ℓ 是所选杆族中的任意一根 Ammann 杆线。杆线 ℓ 是一条直线，将平面分为两个开半平面： H^+ （$\mathbf{n}$侧）和 H^-（ $-\mathbf{n}$侧）。由于 γ 是一条闭游走，它的起点和终点是同一个顶点。每当 γ从 H^- 穿越 ℓ 到 H^+时，为了返回起点，它最终必须从 H^+ 穿越回来，到达 H^- （反之亦然）。因此， ℓ 的正向穿越次数等于负向穿越次数。杆线 ℓ 对 $\sum_i \Delta_{\mathbf{n}}(v_i \to v_{i+1})$ 的贡献为零。

由于 γ 只有有限条边，且每条边至多穿过一条横杠，因此只有有限条横杠会产生贡献。总和可分解为对各条横杠分别求和，而每条横杠的贡献均为零：

$$\sum_{i=0}^{k-1} \Delta_{\mathbf{n}}(v_i \to v_{i+1}) = \sum_{\ell \in \mathcal{B}_{\mathbf{n}}(\mathcal{T})} \big(\text{signed crossings of } \ell \text{ by } \gamma\big) = 0.$$

第（*ii*）部分：势函数的存在性。函数 $\Delta_{\mathbf{n}}$ 是反对称的（定义 4.6），并满足环闭合条件（第（i）部分）。图 $G_{\mathcal{T}}$ 是连通的（注2.4）。离散庞加莱引理（定理 3.5）给出了势函数 $h_{\mathbf{n}}$。由于 $\Delta_{\mathbf{n}}$的取值属于 $\{-1,0,+1\}$，势函数的取值属于 $\mathbb{Z}$（将 $h_{\mathbf{n}}(v_0)$ 归一化为 $=0$之后）。

第（*iii*）部分：与阿曼高度的对应。经典 Ammann 高度函数$h^{\mathrm{cl}}_{\mathbf{n}}$ 的定义是，为每个顶点 v 赋值：沿$\mathbf{n}$ 族条带的带符号条数（若沿 $+1$ 方向穿过，则符号为；若沿 -1 方向穿过，则符号为 $-\mathbf{n}$方向），即任意从参考顶点 v_0 到 v [3, 2]的路径上所穿过的带符号条带数。对于有效的彭罗斯铺砌，这一计数的路径无关性正是第（i）部分（环闭合）和第（ii）部分（定理3.5）所证明的：对 $\Delta_{\mathbf{n}}$ 的路径积分与所选路径无关。

还需验证“ $\Delta_{\mathbf{n}}$的路径积分”与“沿路径的带符号条带计数”是同一回事。根据 $\Delta_{\mathbf{n}}$ 的定义（定义4.6 和定义4.1），每条有向边$(u \to v)$ 根据是否沿 $+1$、 -1或0 方向穿过$\mathbf{n}$ 族条带，分别贡献相应的值：沿$\mathbf{n}$方向、沿 $-\mathbf{n}$方向穿过，或根本没有穿过。因此 $\sum_{e\in\gamma}\Delta_{\mathbf{n}}(e)$ 恰好就是沿 γ的带符号条带计数。

将 $h_{\mathbf{n}}(v_0) = 0 = h^{\mathrm{cl}}_{\mathbf{n}}(v_0)$ 归一化后，我们得出 $h_{\mathbf{n}} = h^{\mathrm{cl}}_{\mathbf{n}}$。 □

4.4 匹配规则即守恒律

以下定理是本文的主要结果：它表明，对于任意候选彭罗斯铺砌，匹配规则、条带连续性、环闭合和高度函数存在性彼此等价。在本小节中，“守恒律”始终指 CW 上同调中 1-上链的离散余循环（闭性）条件；这是一种纯粹的代数条件，并不涉及任何诺特型对称性原理。

命题 4.10 建立了有效铺砌的余链—势函数对应关系。以下定理通过表明匹配规则、条带连续性、环闭合和高度函数存在性彼此等价，将这一图景扩展到候选铺砌，而无需预先假定其中任何一项。经典的等价性 (i)⇔(ii) 引自 [3, 2]；其余蕴含关系则由第 §4.1 节的半边／粘合构造得到。

定理 4.11（匹配规则即守恒律）。设 $\mathcal{T}$是定义 *2.1* 意义下的一个候选装饰彭罗斯铺砌（不一定满足匹配规则）。以下条件等价：

（*i*）（匹配规则。） $\mathcal{T}$满足彭罗斯匹配规则（边装饰在所有共享边上都一致）。

（*ii*）（条带连续性。）对于五个杆族方向中的每一个， $\mathcal{T}$的 *Ammann* 条带都构成连续的直线（没有条带在铺砌内部终止）；也就是说，对于每个杆族法向量$\mathbf{n}$ （定义 *2.2*）， $\mathcal{B}_{\mathbf{n}}(\mathcal{T})$ 的每个连通分支都是一条完整直线$\mathbf{n}$ （定义 *2.2*）。

（*iii*）（环闭合。）对于每个杆族方向$\mathbf{n}$，粘合条件（11）在每条内部边上都成立——等价地（引理 *4.5*（*ii*））， 存在全局杆穿越余链$\Delta_{\mathbf{n}}$: $\vec{E} \to \{-1,0,+1\}$， 并且 $\Delta_{\mathbf{n}}$ 在 $G_{\mathcal{T}}$上满足环闭合。

(iv)（高度 函数。）对于每个杆族$\mathbf{n}$，存在一个函数 $h_{\mathbf{n}}$: $V \to \mathbb{Z}$， 使得 t

$$h_{\mathbf{n}}(v) - h_{\mathbf{n}}(u) = \Delta^{(t)}_{\mathbf{n}}(u \to v) \tag{13}$$

对每条有向边 $(u \to v)$ 以及每个与 $\{u, v\}$ 相邻的瓦片 t。

证明。 (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*)。这是一个经典结果：匹配规则迫使 Ammann 杆线段（由瓦片装饰局部确定）在共享边处一致地连接起来，从而形成无限延伸的直线 [3, 2]。

(ii) $\Rightarrow$ *(iii).* 族 $\mathbf{n}$ 中的每条横杠都是一条贯穿整个铺砌的直线，这就是条带连续性。特别是，当一条横杠穿过共用的内部边 $\{u, v\}$时，它会通过 $\{u, v\}$ 进入瓦片 A，并通过同一条边离开瓦片 B（反之亦然），因此两个瓦片对 $\{u, v\}$赋予相同的穿越方向。于是，对于每条内部边，$\Delta_{\mathbf{n}}^{(A)}(u \to v) = \Delta_{\mathbf{n}}^{(B)}(u \to v)$ 成立：粘合条件 (11) 成立，并由引理 4.5(ii)，全局上链 $\Delta_{\mathbf{n}}$ 存在。环闭合则可用命题 4.10(i) 中的相同论证得到：由于每条横杠都是一条完整的直线，任意闭游走沿两个方向穿越该横杠的次数相同，因此带符号穿越计数为零。

(iii) $\Rightarrow$ (iv)。根据假设，$\Delta_{\mathbf{n}}$ 作为全局反对称函数存在，并满足环闭合。图 $G_{\mathcal{T}}$ 是连通的（注 2.4）。由离散庞加莱引理（定理 3.5），存在 $h_{\mathbf{n}}\colon V \to \mathbb{Z}$，使得 $\Delta_{\mathbf{n}}(u \to v) = h_{\mathbf{n}}(v) - h_{\mathbf{n}}(u)$。由于对于任意与 $\{u, v\}$ 相邻的瓦片 A、B，$\Delta_{\mathbf{n}}(u \to v)$ 是 $\Delta_{\mathbf{n}}^{(A)}(u \to v)$ 和 $\Delta_{\mathbf{n}}^{(B)}(u \to v)$ 的共同值（引理 4.5(ii)），所以条件 (13) 对每条边及其相邻的每个瓦片都成立。

(iv) $\Rightarrow$ ***(i)***。设 $\{u, v\}$ 是由瓦片 A 和 B共享的任意内部边。根据条件（13），

$$\Delta_{\mathbf{n}}^{(A)}(u \to v) = h_{\mathbf{n}}(v) - h_{\mathbf{n}}(u) = \Delta_{\mathbf{n}}^{(B)}(u \to v).$$

因此，粘合条件（11）在 $\{u, v\}$上成立，并且根据引理 4.5（i），彭罗斯匹配规则在 $\{u, v\}$上成立。由于这适用于每一条内部边和每一个杆族，故（i）得证。

□

注 4.12（守恒律解释）。每条由瓦片 A 和B 共享的边 $\{u, v\}$ 都是一个比较事件。反对称条件要求 $\Delta_{\mathbf{n}}(u \to v) = -\Delta_{\mathbf{n}}(v \to u)$：对于边的固定定向，有向边（$u \to v$）上的值是反向有向边（$v \to u$）上值的负值。粘合（匹配）条件则不同：它要求 $\Delta_{\mathbf{n}}^{(A)}(u \to v) = \Delta_{\mathbf{n}}^{(B)}(u \to v)$，即两个关联瓦片都为有向边（$u \to v$）赋予相同的值。这是一个双侧一致性条件：两个关联瓦片必须为同一条有向边赋予相同的穿越值；反对称性仅适用于反转方向。在 $\{u, v\}$ 处发生匹配规则违例意味着 $\Delta^{(A)} \neq \Delta^{(B)}$，从而破坏 Ammann 杆线的连续性，并摧毁环闭合和全局势函数。从这个意义上说，匹配规则是铺砌理论中对高度势守恒的表达。

4.5 五族有效性判据与五网格重构

前述结果每次只处理一个杆族。将五个杆族同时组合起来，可得一个联合有效性判据；此外，通过将高度函数与 de Bruijn 的条带指标对应起来，还可得到一个显式公式，根据五个整数恢复每个顶点位置。将五个 Ammann 杆线族标记为 $\mathbf{n}_k = (\cos(2\pi k/5), \sin(2\pi k/5))$，$k = 0$，1，2，3，4。

定理 4.13 (五族有效性与五网格重构)。设 $\mathcal{T}$ 是一个候选彭罗斯铺砌，并固定一个参考顶点 $v_0 \in V$，使得 $h_{\mathbf{n}_k}(v_0) = 0$ 对所有 k 均成立。

(i)(完整有效性判据。)$\mathcal{T}$ 满足彭罗斯匹配规则，当且仅当对于每个 $k \in \{0,1,2,3,4\}$，都存在一个全局一致的高度函数 $h_{\mathbf{n}_k}\colon V \to \mathbb{Z}$，满足高度一致性方程 (13)，且该方程对每条有向边 $(u \to v)$以及每个与 t 相邻的瓦片 $\{u,v\}$均成立。

(ii) （五网格重构。）若 $\mathcal{T}$有效，则对每个顶点 $v \in V$ ：

$$v - v_0 = \frac{2}{5}\sum_{k=0}^{4} h_{\mathbf{n}_k}(v)\,\mathbf{n}_k. \tag{14}$$

特别地，映射 $\Phi\colon V \to \mathbb{Z}^5$，$\Phi(v) = (h_{\mathbf{n}_0}(v) \ldots, h_{\mathbf{n}_4}(v))$ 是单射：不同顶点对应不同的高度函数5元组。像集 $\Phi(V)$ 位于一个3维仿射子空间 $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^5$中，而在 $\mathcal{L}$ 内，离散集合 $\Phi(V) \subset \mathbb{Z}^5$ 构成彭罗斯切投影构造的标准提升阶梯曲面。铺砌 $\mathcal{T}$ 可通过 *de Bruijn* 的五网格对偶 *[7]*从 $\Phi(V)$ 重构。

证明。第（*i*）部分。由引理 4.5（i），每条内部边 $\{u,v\}$ 都有唯一一个“相关”的杆族$\mathbf{n}^*(u,v)$（即其条带会穿过该几何类型边的杆族）；当且仅当 $\{u,v\}$ 上的匹配规则满足$\mathbf{n}^*(u,v)$ 在 $\{u,v\}$上满足粘合条件。由于五个杆族分别对应 P2 彭罗斯镶嵌的五个边方向类别，每条内部边都属于其中一类，因此每条边都由其唯一相关的杆族进行检验。对每个杆族4.11 （条件（i） $\Leftrightarrow$ 条件（iv））分别应用定理，再对 $k = 0,\ldots,4$取合取：完整匹配规则在每条边上成立，当且仅当 $\Leftrightarrow$ 五个族都存在高度函数。

第二部分：条带索引识别。顶点 v 在第 k 族中的 de Bruijn 条带索引 $m_k^{\mathrm{dB}}(v)$ 是唯一的整数 m，使得 v 位于从参考顶点 v_0 沿 $\mathbf{n}_k$ 方向计数的第 m 根与第 $(m+1)$ 根横杠之间，符号约定为

$$m_k^{\mathrm{dB}}(v) > m_k^{\mathrm{dB}}(v_0) \;\text{ iff }\; \mathbf{n}_k \cdot (v - v_0) > 0.$$

我们声称，对于所有 $v \in V$，$= h_{\mathbf{n}_k}(v)$ 等于 $m_k^{\mathrm{dB}}(v)$。

根据定义 4.1，对于每条有向边 $(u \to v)$，若穿过第 k 族的一根横杠且 $\mathbf{n}_k \cdot (v-u) > 0$（即沿递增-$m$ 方向穿过横杠），则其值 $\Delta_{\mathbf{n}_k}(u \to v)$ 为 $= +1$；若穿过横杠且 $\mathbf{n}_k \cdot (v-u) < 0$，则为 -1；若未穿过任何横杠，则为 0。因此，从 v_0 到 v 的路径积分 $\sum_{e\in\gamma} \Delta_{\mathbf{n}_k}(e)$ 计算的是沿 $+\mathbf{n}_k$ 方向穿过的横杠数减去沿 $-\mathbf{n}_k$ 方向穿过的横杠数。这个净带符号计数等于 $m_k^{\mathrm{dB}}(v) - m_k^{\mathrm{dB}}(v_0) = m_k^{\mathrm{dB}}(v)$（使用 $m_k^{\mathrm{dB}}(v_0) = 0$）。因此，对于每个 v，均有 $h_{\mathbf{n}_k}(v) = m_k^{\mathrm{dB}}(v)$。

重建公式。 de Bruijn 的投影公式 [7,式 (2.2)]给出 s

$$v - v_0 = \frac{2}{5}\sum_{k=0}^{4} m_k^{\mathrm{dB}}(v)\,\mathbf{n}_k = \frac{2}{5}\sum_{k=0}^{4} h_{\mathbf{n}_k}(v)\,\mathbf{n}_k,$$

利用恒等式 $\sum_{k=0}^{4}(\mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k) = \frac{5}{2} I_2$，该恒等式成立是因为 $\mathbf{n}_k = (\cos(2\pi k/5), \sin(2\pi k/5))$ 是五个等间隔的单位向量：对角元素为 $\sum_k \cos^2(2\pi k/5) = \frac{5}{2}$（利用 $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$ 以及 $\sum_{k=0}^{4}\cos(4\pi k/5) = 0$），而非对角元素为 $\sum_k \cos(2\pi k/5)\sin(2\pi k/5)$ $=$ $\frac{1}{2}\sum_k \sin(4\pi k/5) = 0$。

单射性。若 $\Phi(u) = \Phi(v)$，则 $u - v = \frac{2}{5}\sum_k [h_{\mathbf{n}_k}(u) - h_{\mathbf{n}_k}(v)]\mathbf{n}_k = \mathbf{0}$ 根据（14），因此 $u = v$。所以 Φ 是单射的。

三维仿射子空间中的像（以及抬升曲面的视角）。五个条带指标并非彼此独立：五网格约束（参见 [7, 第 2]节）是指 $\sum_{k=0}^{4} m_k^{\mathrm{dB}}(v)$ 在 V 上为常数（该值仅取决于参考顶点和五重网格偏移量的选择，而与 v无关），并且还有第二个线性关系

$$\sum_{k=0}^{4} (-1)^k \, m_k^{\mathrm{dB}}(v) \;=\; \text{const}$$

对所有 $v \in V$ 均成立（参见 [7, 第 2]节）。这两个独立的仿射约束截出一个包含 $\Phi(V)$ 的三维仿射子空间 $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^5$。在 $\mathcal{L}$内，离散集合 $\Phi(V) \subset \mathbb{Z}^5$构成了与彭罗斯切割投影构造相关的标准抬升（二维阶梯曲面）；关于其明确的线性代数描述及其与 $\mathbb{R}^5$中嵌入的物理平面的关系，见 [7] 。 □

4.6 上同调解释

回路闭合条件具有自然的上同调解读，可用胞腔上同调和图案等变上同调的语言重新阐释第 §§4.3–4.5 节的结果。令 $X_{\mathcal{T}}$ 表示铺砌所对应的 2维 CW 复形：其0维胞腔是镶嵌顶点，1维胞腔是瓦片边，而 2维胞腔是沿其边界回路附接的瓦片内部。于是$X_{\mathcal{T}}$同胚于平面，其1维骨架为 $G_{\mathcal{T}}$。杆穿越函数 $\Delta_{\mathbf{n}}$ 可视为 1维胞腔上链，取值于 $C^1(X_{\mathcal{T}};\ \mathbb{Z})$（等价地，它是定义在有向边上的反对称函数）。对于一个 2维胞腔 f（一个瓦片），其余边满足

$$(\delta\Delta_{\mathbf{n}})(f) \;=\; \sum_{e \in \partial f} \Delta_{\mathbf{n}}(e),$$

因此，定向边界和为零就是余循环条件 $\delta\Delta_{\mathbf{n}} = 0$。

对于平面复形 $X_{\mathcal{T}}$，余循环条件 $\delta\Delta_{\mathbf{n}} = 0$ 等价于所有闭游走上的环闭合，而不仅仅是简单环。关键步骤如下：任意闭游走 γ在 $G_{\mathcal{T}}$中都可以在 $C_1(X_{\mathcal{T}};\mathbb{Z})$中分解为瓦片边界 ∂f_i的整数线性组合：

$$\gamma \;=\; \sum_i \epsilon_i \, \partial f_i \quad \text{in } C_1(X_{\mathcal{T}};\mathbb{Z}), \tag{15}$$

其中 $\epsilon_i \in \{+1, -1\}$ 是由定向决定的符号，且求和为有限项。（这是因为$H_1(X_{\mathcal{T}};\mathbb{Z}) = 0$——平面 $\mathbb{R}^2$ 是单连通的——因此每个 1-循环都是一个 1-边界，即若干个 2-胞腔边界之和。）在等式（ $\Delta_{\mathbf{n}}$ 两边代入（15）：

$$\sum_{e \in \gamma} \Delta_{\mathbf{n}}(e) = \sum_i \epsilon_i \sum_{e \in \partial f_i} \Delta_{\mathbf{n}}(e) = \sum_i \epsilon_i \cdot 0 = 0,$$

使用 $\delta\Delta_{\mathbf{n}} = 0$。因此，面和消失意味着所有闭游走上的环闭合。反过来（环闭合意味着面和消失）则显而易见，因为每个瓦片边界 ∂f本身就是一个闭游走。

势函数 h 的存在且满足 $\Delta_{\mathbf{n}} = \delta_0 h$，恰恰意味着 $\Delta_{\mathbf{n}}$ 是一个余边界，因此 $[\Delta_{\mathbf{n}}] = 0 \in H^1(X_{\mathcal{T}}; \mathbb{Z})$：该 1-上链是恰当的，而不只是闭的。

此外，$\Delta_{\mathbf{n}}$ 具有图案等变性：其在任意一条边上的取值仅取决于该边的有限邻域（局部瓦片类型和定向）。通过 Kellendonk–Putnam 同构 [12]，图案等变余链生成铺砌包络的切赫上同调。对于彭罗斯镶嵌，$\check{H}^1(\Omega_P; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^5$，由五个杆穿越余循环生成；见 [8]。用 Forrest–Hunton–Kellendonk [6], 的术语来说，这五个类生成 $\check{H}^1(\Omega_P; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^5$。定理 4.13(ii)补充了一个明确的推论：这一推论在 FHK 框架中虽隐含其中，却未曾明言——五个相应的高度函数共同通过 de Bruijn 五重网格公式（14）恢复每个顶点的位置。每个 $\Delta_{\mathbf{n}}$ 作为定义在可缩平面上的普通 1-余循环都是恰当的（命题 4.10(ii)），但在图案等变上同调中代表一个非平凡的类：任何势函数 $h_{\mathbf{n}}$ 都必然是非局部的（不具图案等变性）：$h_{\mathbf{n}}(v)$是从参考顶点 v_0出发的路径积分，沿任意长的路径累积带符号的杆穿越次数；仅凭 v 的有限邻域无法确定 $h_{\mathbf{n}}(v)$。正式陈述见 [8] 或 [6]。

因此，杆穿越上链展现出一组三重性质——局部可读、全局守恒、在普通上同调中恰当但在图案等变上同调中非平凡——这些性质将在第5节形式化为条件*CF1–CF3*，并对由此产生的识别差距进行命名和量化（注5.14）。

4.7 镶嵌验证

命题 4.14 (线性时间镶嵌验证)。设 $\mathcal{T}$ 是一个有限的单连通候选装饰彭罗斯铺砌，具有 n 个顶点。那么：

(i) 通过对五个杆族中的每一个，检查每条内部边上的粘合条件 (11)，即可验证彭罗斯匹配规则。根据欧拉公式，内部边集的基数为 $O(n)$，因此五轮检查的总成本为 $O(n)$。*(ii)* 当且仅当五项粘合检查全部通过时，该铺砌满足匹配规则（定理*4.13(i)*）。*(iii)* 边 $\{u, v\}$ 处的粘合失效 $\Delta_{\mathbf{n}}^{(A)}(u \to v) \neq \Delta_{\mathbf{n}}^{(B)}(u \to v)$ 可确定违例边及其对应的杆族，从而能够对匹配规则违规进行定向定位。

证明。 根据引理 4.5（i），给定边 $\{u, v\}$ 对应唯一相关条族 $\mathbf{n}^*$ 的粘合条件，等价于 $\{u, v\}$上的彭罗斯匹配规则。一个具有 n 个顶点的平面图有 $O(n)$ 条边，这是由欧拉公式（$|E| \leq 3n - 6$）得出的，因此，对边集进行五轮遍历的总成本为 $O(n)$正确性（第（ii）部分）由定理 4.13（i）立即推出；错误定位（第（iii）部分）则由引理 4.5（ii）得出。□

备注 4.15（带错误定位的线性时间验证）。 定理4.11为有限单连通候选拼片提供了一个直接的验证过程 $\mathcal{T}$，其具有 n个顶点：对于五个杆族中的每一个，都检查每条内部边上的粘合条件（11）。根据引理 4.5（i），每次此类检查都等价于检查唯一相关族在该边上的匹配规则。根据欧拉公式，具有 n 个顶点的平面图有 O（n） 条边，因此进行五次遍历即可，总代价为 O（n）。

朴素装饰检查（比较每条公共边上的箭头/弧线标记）的运行时间同样为 $O(n)$。上链表述的意义不在于渐近速度，而在于结构化诊断：一次粘合失效 $\Delta_{\mathbf{n}}^{(A)}(u \to v) \neq \Delta_{\mathbf{n}}^{(B)}(u \to v)$ 可以同时确定违规边$\{u, v\}$ 和负责的杆族 $\mathbf{n}$，从而能够对候选铺砌进行针对性修复。

根据定理4.13(i)，当且仅当五项检查全部通过时，该铺砌才有效。由于五个边类彼此不相交，这五项检查可以并行进行；总工作量仍为 $O(n)$。

第4 节详细阐述了彭罗斯 P2 的杆交叉构造；§2.5 节的 CPT 框架已展示了如何将其推广。第5 节探讨此处确定的结构三元组——局部可读上链（CF1–CF2）、全局守恒（CF1）和非局部势函数（CF3）——是否刻画了更广泛的一类非周期铺砌。对于所有本原替换典范投影铺砌，答案是肯定的；其精确表述见定义5.1 和定理5.7。

5 守恒强制的非周期序

第4 节详细确立了彭罗斯 P2 的守恒结构。本节探讨：这一结构能否推广？答案是肯定的，适用于整个本原替换典范投影铺砌（CPT）类别。我们将其基本性质形式化为一个五条件定义（定义5.1），证明一个涵盖所有 CPT 的一般定理（定理5.7），明确验证四个标准族，并指出构成本节整体框架的开放分类问题。

§4 的结果确立了五个彭罗斯杆穿越上链具有以下性质：(i) 可在局部计算（图案等变）；(ii) 全局守恒（环闭合成立）；(iii) 在普通上同调中是恰当的，但在图案等变上同调中非平凡。这是第4.4节所阐述的匹配规则守恒律解读的形式化版本。我们将证明，这三项性质为彭罗斯镶嵌、阿曼–比恩克镶嵌、斐波那契链和二十面体阿曼铺砌所共有，这表明它们或许能刻画更广泛的本原替换 CPT 类。

本节安排如下。在 §5.1 中，我们定义守恒强制铺砌系统（CF1–CF5），并陈述统领本节的开放猜想（猜想 5.6）。在 §5.2中，我们证明一般的 CPT 定理。第 5.3–5.5 节验证四类标准情形。第 5.6 节引入识别差距这一上同调度量，用以衡量每条守恒律所编码的全局信息量。第 5.7 节总结全文并提出开放问题。

5.1 守恒强制镶嵌系统

若上链 $\omega \in C^1(G_{\mathcal{T}}; \mathbb{Z})$ 是半径为 R 的图案等变（PE）上链，则其在每条有向边上的取值仅取决于以该边为中心的 R-拼片。PE 上链构成的子复形的上同调为 $H^1_{PE}(G_{\mathcal{T}}; \mathbb{Z})$，而 Kellendonk–Putnam 同构给出$H^1_{PE} \cong \check{H}^1(\Omega_{\mathcal{T}}; \mathbb{Z})$ [12]；完整细节请参见 [8, 12]。

定义 5.1（守恒律强制铺砌系统）。若有限局部复杂性的 $\mathbb{R}^d$ 本原替换铺砌系统 $(\mathcal{T}, \sigma, M)$ 存在满足以下条件的图案等变 1-上链 $\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(r)}$，则称其为秩为 r 的守恒律强制铺砌系统：

(CF1) 每个 $\omega^{(k)}$ 都是余循环：每个 2-胞腔边界上的定向和均为零（在 $d=2$ 中即“每个瓦片”）。**(CF2)** 每个 $\omega^{(k)}$ 都是图案等变的：其取值可由局部信息确定。**(CF3)** $[\omega^{(k)}]\neq 0$ 属于 H^1_{PE}：该势函数是非局部的。**(CF4)** 这些类 $[\omega^{(k)}]$ 在 $H^1_{PE}(G_{\mathcal{T}};\mathbb{Z})$ 中线性无关（系数取自 $\mathbb{Z}$）。**(CF5)** 秩 r 是最大的：$r=\text{秩}_{\mathbb{Z}}\,H^1_{PE}(G_{\mathcal{T}};\mathbb{Z})$，也就是说，这些类 $\{[\omega^{(k)}]\}$ 构成 H^1_{PE} 自由部分的一个 $\mathbb{Z}$- 基。

集合 $\{\omega^{(k)}\}$是一个守恒基；r 是守恒秩。

备注 5.2（术语：“守恒律”）。此处的“守恒”纯粹是离散的／代数的：CF1 是 CW 上同调中的余循环（闭性）条件；我们并未诉诸诺特式的对称性原理。

备注 5.3（CF3 的挠元与冗余性）。在此处考察的所有例子中，H^1_{PE} 无挠（同构于 $\mathbb{Z}^r$）；定义针对的正是这种情形。若 H^1_{PE} 含有挠元，则 CF5 应理解为 $r=\text{秩}_{\mathbb{Z}}\,H^1_{PE}$（自由部分的秩）；在无挠情形下，CF3 在逻辑上可由 CF4 推出（一个 $\mathbb{Z}$-线性无关集不可能包含零类）。我们保留 CF3 作为一个概念上有别的条件，以强调每个势函数各自都是非局部的。

备注 5.4（CF1–CF3 蕴含非周期性）。若 $(\mathcal{T},\ \sigma,\ M)$ 满足 CF1–CF3，则 $\mathcal{T}$是非周期的。事实上，若铺砌具有周期性，则高度函数也会具有周期性，因而有界且图案等变，这与 CF3 矛盾。

在后续每次验证中确立 CF3 的关键工具是以下引理，它将原函数的无界性转化为图案等变上同调中的非平凡性。

引理 5.5（无界高度导出非平凡的图案等变类）。设 $\mathcal{T}$ 是具有有限局部复杂度（*FLC*）的 $\mathbb{R}^d$ 铺砌，并设 $\Delta\in C^1(G_{\mathcal{T}};\ \mathbb{Z})$ 是一个余循环，其原函数 $h\colon\ V\to\mathbb{Z}$（即 $\Delta=\delta_0 h$）在 V 上无界。那么 $[\Delta]\neq 0$ 属于 $H^1_{PE}(G_{\mathcal{T}};\ \mathbb{Z})$，也就是说，$\Delta$ 不是模式等变余边界。

证明。反设对于某个半径为 R 的图案等变 0-上链 $f\colon\ V\to\mathbb{Z}$，有 $\Delta=\delta_0 f$。那么 $f(v)$ 只取决于 v 处的 R-拼片；由于 $\mathcal{T}$ 具有有限局部复杂度，R-拼片只有有限种，因此 f 只取有限多个值。但 $\Delta=\delta_0 h=\delta_0 f$ 意味着 $h-f$ 在 V 上为常数（连通图 $G_{\mathcal{T}}$ 上的局部常值函数必为常数）；因此对某个固定的 $c\in\mathbb{Z}$，$h(v)=f(v)+c$，所以 h 也有界——矛盾。 □

结构三元组 CF1–CF3 引出了以下分类问题，该问题构成了定理 5.7 以及第§5.3–5.5节中验证的框架：

猜想 5.6（部分结果：(b)⇒ (a) 已证明；(a)⇒ (b) 尚未解决）。对于具有有限局部复杂性的 $\mathbb{R}^d$ 上的本原替换铺砌系统 $(\mathcal{T},\sigma,M)$，以下条件等价：

(a)（$\mathcal{T}$，σ，M）是守恒强制的。(b) $\mathcal{T}$是由格 $\Lambda\subset\mathbb{R}^N$导出的本原替换典范投影铺砌，并满足定义 *2.7*，且 $\lambda_{\mathrm{PF}}(M)$ 是一个 *Pisot* 数。

蕴含关系 (b)⇒(a) 由定理 *5.7*证明（事实上，无需使用 *Pisot* 假设）。蕴含关系 (a)⇒(b) 仍是一个开放问题。

5.2 主定理：本原替换 CPT 守恒强制

现在我们证明猜想 5.6中 CPT 类的蕴含关系 (b)⇒(a)。事实上，下面的论证不使用 Pisot 性质：它表明，任何满足定义 2.7且具有本原替换结构的 CPT 都是守恒强制的。

定理 *5.7*（本原替换 *CPT* 守恒强制）。设 $(\mathcal{T}, \sigma, M)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中由格 $\mathbb{Z}^N$ 生成且满足定义 *2.7* 的典范投影铺砌，并配备本原替换结构。等价地（展开假设），我们假设：*(i)* $E_\parallel$ 是无理的（定义 *2.7(i)*），*(ii)* $\pi|_\Lambda$ 是单射（定义 *2.7(ii)*），*(iii)* W 是一般的（定义 *2.7(iii)*），*(iv)* $\mathcal{T}$ 具有有限局部复杂性，且 *(v)* 该替换是本原的。则 $(\mathcal{T}, \sigma, M)$ 是秩为 $r = N$ 的守恒强制结构。守恒基为式 *(3)* 中定义的 $\{\Delta_1, \dots, \Delta_N\}$。

证明。 我们验证 $(\mathcal{T}, \sigma, M)$ 满足 CF1–CF5。

CF1（余循环／面和为零）。根据引理2.10，每个 Δ_k 都是余循环。

CF2（图案等变性）。由于 $(\mathcal{T}, \sigma, M)$ 具有有限局部复杂性，任意有向边 $(u \to v)$ 上的格步 $\Phi(v) - \Phi(u)$ 都由 $(u \to v)$ 的一个有界邻域决定（引理 2.12）。因此，每个坐标差 $\Delta_k(u \to v) = x_k(v) - x_k(u)$ 都是图案等变的。

CF3（H^1_{PE}中的非平凡性）。原函数 $h_k = x_k$：$V \to \mathbb{Z}$ 在 V上无界：由于$E_\parallel$ 是无理数（定义 2.7(i)），投影 $\pi(\mathbf{e}_k)$在 $E_\parallel$ 中非零（$\pi|_\Lambda$的单射性意味着，对于每个非零格向量，$\pi(\mathbf{e}_k) \neq 0$），因此，当 $v \to \infty$ 沿着 $E_\parallel$ 中在 $\pi(\mathbf{e}_k)$方向上具有正分量的任意射线增长时，$x_k(v) = \Phi(v) \cdot \mathbf{e}_k$会无限增大。根据引理 5.5，$[\Delta_k] \neq 0$ 在 H^1_{PE}中。

CF4（关于在 $\mathbb{Z}$上的线性无关性）。（无关性。）对于具有一般位置窗口的典范投影铺砌（定义 2.7（iii）），其图案等变上同调是秩为 N的自由阿贝尔群，并且 N格坐标上链 Δ_1，……，Δ_N构成一个 $\mathbb{Z}$-基；参见 Forrest–Hunton–Kellendonk [6]。特别地，这些类 $[\Delta_k]$是 $\mathbb{Z}$-线性无关的。

CF5（秩 N的极大性）。The Forrest–Hunton–Kellendonk 计算 [6] 给出

$$\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}} \check{H}^1(\Omega_{\mathcal{T}}; \mathbb{Z}) = N$$

对于任何满足一般窗口条件（定义2.7（iii））的典范投影铺砌。结合 CF4，N线性无关类 $[\Delta_1]$，……，$[\Delta_N]$构成 $\mathbb{Z}$的自由部分的一个H^1_{PE}-基，因此 $r = N$。 □

推论 5.8（彭罗斯、阿曼–比恩克、斐波那契、二十面体）。斐波那契链（$N = 2$）、彭罗斯 *P2*（$N = 5$）、阿曼–比恩克（$N = 4$）以及二十面体阿曼铺砌（$N = 6$）各自都是秩为 N 的守恒强制铺砌，其守恒基由格坐标上链 $\{\Delta_k\}$ 给出。

证明。 这些系统均为满足定义 2.7且具有本原替换结构的 CPT；参见 [2]。定理 5.7适用。 □

5.3 彭罗斯和阿曼–比恩克的验证

在具备 §5.1中的定义和工具后，我们验证 §4中构建的两个平面铺砌族满足五个 CF 条件。为便于后文参考，彭罗斯铺砌中特有的关键构件包括：边类型警示（注4.2）、装饰→交叉连接（注 4.4），以及拼接／守恒视角（注4.7）。

命题 5.9 (彭罗斯 P2 是秩为5的守恒强制图案。 这五个上链构成彭罗斯 *P2* 的守恒基。

验证。*CF1*：引理 4.3 (面和为零)以及命题 4.10(i) (环闭合)。

CF2：根据定义 4.1， $\Delta_{\mathbf{n}_k}(u \to v)$ 由彭罗斯边装饰决定，该装饰位于1邻域内，中心为 $\{u, v\}$ [2, 第 6]章。

CF3：高度函数 $h_{\mathbf{n}_k}$ 计算从 v_0 到 v穿过的 Ammann 条带数量；由于条带间距有下界 $S > 0$， $h_{\mathbf{n}_k}$ 在 V上无界。根据引理 5.5， $[\Delta_{\mathbf{n}_k}] \neq 0$ 在H^1_{PE}中。

CF4–CF5：根据安德森–普特南 [13] 和凯伦东克–普特南 [12],

$$H^1_{PE} \cong \check{H}^1(\Omega_P; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^5,$$

而五个条穿越类构成一个 $\mathbb{Z}$-基 [8]；参见 §4.6，了解其上同调解释。

□

阿曼–比恩克（八边形）铺砌 $\mathcal{T}_{\mathrm{AB}}$ 由正方形和 45°-菱形 $\mathbb{R}^2$ 铺成，其膨胀因子为 $\lambda_{\mathrm{PF}} = 1 + \sqrt{2}$（白银比例），替换矩阵为 $M_{\mathrm{AB}} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ [2]。它有四个 Ammann 杆线族，角度分别为 0°、 45°、 90°、 135°。

Ammann–Beenker 铺砌是秩为 4的守恒强制铺砌；这是推论 $N = 4$ 的情形 5.8。下面介绍几何细节。

注 5.10。 从几何直观上看，可以将 Ammann–Beenker 铺砌的四个守恒上链视为四个 Ammann 杆线族穿过有向边时的带符号穿越，这与彭罗斯情形有间接的类比。

5.4 斐波那契链的验证

斐波那契链 是最简单的非平凡 CPT： $d = 1$, $N = 2$，由两种原型瓦片组成（短 S 线段和长 L 线段，长度比为 1 : φ）。它通过将 $\mathbb{Z}^2$ 投影到直线$E_{\parallel} = \{(x,\ y)\colon\ y = x/\varphi\}$，并采用接受窗 $W = [0, 1)$, 在 $E_{\perp}$中得到。斐波那契链的顶点满足 $\Phi(v) = (x_1(v)\ x_2(v)) \in \mathbb{Z}^2$，其中 $v = x_1(v) + x_2(v)/\varphi \in \mathbb{R}$。

斐波那契链是秩 2的守恒强制铺砌；这是系 $N = 2$ 推论 5.8的情形，守恒基为 $\{\Delta_1, \Delta_2\}$，见（3）。

5.5 二十面体阿曼铺砌的验证

二十面体阿曼铺砌是具有 $d = 3$、 $N = 6$ 和 $\lambda_{\mathrm{PF}} = \varphi$ 的三维 CPT。它源自将 $\mathbb{Z}^6$ 投影到与二十面体对称群 I_h 对齐的 $\mathbb{R}^3$ ；其原型瓦片是两个通过黄金比例缩放相互关联的菱面体（扁长型和扁平型）。有关标准参考资料，请参见 [2] 。

命题 5.11（二十面体阿曼铺砌是秩为 6 的守恒强制铺砌）。 六个格坐标上链 Δ_k、$k = 1$、.....、6 构成二十面体阿曼铺砌的守恒基。

CF1–CF5 的验证。 我们逐一明确验证各个条件，突出三维二十面体情形所特有的特征。

CF1（余循环）。 由引理 2.10， Δ_k 绕每个2-胞腔边界的定向和均为零：对于每个2-胞腔（一个具有四个顶点的菱形面 v_0、 v_1、 v_2、 v_3，满足 $v_0 - v_1 + v_2 - v_3 = 0$ 在 $\mathbb{Z}^6$中），交替的 k-个坐标和为零。这纯粹是格算术性质，与维数 d 或群 I_h无关。

CF2（图案等变性）。二十面体 Ammann 铺砌具有有限局部复杂性：一般窗口条件（定义 2.7(iii)）和 $W \subset E_\perp$ 的紧致性意味着，在任意固定半径为 [2] 的球内出现的顶点构型只有有限种。每条有向边的瓦片类型（$u \to v$）只有有限种可能（两个菱面体在定向后贡献 $2 \times 6 = 12$ 种有向边类型），因此格步 $\Phi(v) - \Phi(u) \in \{\pm \mathbf{e}_k\}$ 由（$u \to v$）的 1-邻域决定（引理 2.12）。因此，每个 $\Delta_k(u \to v) = x_k(v) - x_k(u) \in \{0, \pm 1\}$ 都是半径为 $R = 1$ 的图案等变函数。

CF3（ H^1_{PE}中的非平凡性）。六个投影后的二十面体生成元 $\mathbf{e}_k^* = \pi(\mathbf{e}_k) \in \mathbb{R}^3$均非零：由于 $\pi|_{\mathbb{Z}^6}$ 是单射的（定义 2.7(ii)），没有标准基向量属于 $\ker \pi$。因此，对于 $v \to \infty$ 沿着 $E_\parallel$ 中具有正 $\mathbf{e}_k^*$分量的任意射线增长时， $x_k(v) = \Phi(v) \cdot \mathbf{e}_k$ 会无限增大。根据引理 5.5， $[\Delta_k] \neq 0$ 对于每个 k都属于 H^1_{PE}。

CF4（线性无关）。二十面体对称群 I_h （阶为 120）通过置换六个生成元作用于 $\mathbb{Z}^6$；六个投影$\mathbf{e}_k^*$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中正二十面体的顶点，并且在 $\mathbb{R}^3$ [2]中两两 $\mathbb{Q}$-线性无关。假设对于某个 $c_k \in \mathbb{Z}$， H^1_{PE} 中有 $\sum_{k=1}^6 c_k[\Delta_k] = 0$。那么 $\sum_k c_k \Delta_k = \delta_0 f$ 对于一个图案等变函数 f 成立： $V \to \mathbb{Z}$；由于 f 是图案等变的，且 $\mathcal{T}$ 具有有限局部复杂度， f 有界。但 $\sum_k c_k \Delta_k = \delta_0(\sum_k c_k x_k)$，因此 $\sum_k c_k x_k - f$ 为常数。函数 $\sum_k c_k x_k(v) = \Phi(v) \cdot \sum_k c_k \mathbf{e}_k$ 有界，当且仅当 $\sum_k c_k \mathbf{e}_k \in$ 属于 $\ker \pi$；由$\pi|_{\mathbb{Z}^6}$ 的单射性可知，这迫使 $\sum_k c_k \mathbf{e}_k = 0$，而这当且仅当对所有 k 都有 $c_k = 0$ （标准基线性无关）。因此这些等价类线性无关。

CF5（极大性， $r = 6$）。Forrest–Hunton–Kellendonk 计算 [6] 给出秩$_\mathbb{Z}\check{}H^1(\Omega_\mathcal{T}; \mathbb{Z}) = N = 6$ 对任何满足一般窗口条件（定义2.7(iii)）的 CPT 均成立。结合 CF4，这六个线性无关的类 $[\Delta_1], \ldots, [\Delta_6]$ 构成 $\mathbb{Z}$-基，生成 H^1_{PE}自由部分，因此 $r = 6$。 □

推论 5.12（三维重构）。对于二十面体阿曼铺砌的每个顶点 v， $v = \sum_{k=1}^6 x_k(v)\mathbf{e}_k^* \in \mathbb{R}^3$，其中$\mathbf{e}_k^* = \pi(\mathbf{e}_k)$ 是六个投影后的二十面体生成元。六个高度函数 x_1，…， x_6 均为整数值、局部可读，且它们在任意顶点处的取值都能恰当地确定该顶点的位置。

证明。 由命题 2.13 及 $N = 6$， $d = 3$， □

在验证了全部四个族之后，我们现在引入一个能够量化这些已验证系统所共有特征的概念。

5.6 识别差距

对于任意 CPT，铺砌 CW 复形 $X_{\mathcal{T}}$ 都是可缩的（同胚于 $\mathbb{R}^d$）。因此$H^1(X_{\mathcal{T}};\,\mathbb{Z}) = 0$，每个杆穿越余链 Δ_k 在普通上同调中都是恰当的，其原函数为 $h_k = x_k$。相比之下，h_k 是无界的（引理5.5），因此不可能是图案等变的，并且 $[\Delta_k] \neq 0$ 在 H^1_{PE} 中对每个 k均成立。关于普通上同调与图案等变上同调之间这一比较的上同调解释，请参见第 4.6 节。因此，守恒基上链位于自然比较映射 ι的核中，但不属于零群，这促成了下面的定义。

定义 5.13（识别差距）。 设 $(\mathcal{T}, \sigma, M)$ 是一个具有有限局部复杂度的铺砌系统，并且

$$\iota\colon H^1_{PE}(G_{\mathcal{T}};\mathbb{Z}) \to H^1(X_{\mathcal{T}};\mathbb{Z})$$

是由模式等变上链包含于所有上链所诱导的、从图案等变上同调到普通上同调的自然比较映射。$\mathcal{T}$的识别差距为

$$\mathcal{R}(\mathcal{T}) \;:=\; \ker(\iota) \;\subseteq\; H^1_{PE}(G_{\mathcal{T}};\mathbb{Z}).$$

$\mathcal{R}(\mathcal{T})$ 中的一个类表示一种局部可读的守恒律（上链是图案等变的），但其原函数却由全局决定（它不是模式等变余边界）。

备注5.14（CPT 的识别差距）。 对于 CPT，空间 $X_{\mathcal{T}}$ 是可缩的，因此$H^1 = 0$。所以，图案等变上同调（$\mathbb{Z}^N$）与普通上同调（0）之间的差距就是整个 $\mathbb{Z}^N$：

$$\mathcal{R}(\mathcal{T}) \;\cong\; \mathbb{Z}^N. \tag{16}$$

对于彭罗斯 P2，$\mathcal{R} \cong \mathbb{Z}^5$；对于斐波那契链，$\mathcal{R} \cong \mathbb{Z}^2$；对于二十面体镶嵌，$\mathcal{R} \cong \mathbb{Z}^6$。备注5.15（斐波那契重构与识别差距）。 命题2.13给出了斐波那契链中每个顶点的显式公式 $v = x_1(v)\cdot 1 + x_2(v)\cdot\varphi^{-1}$。识别差距（定义 5.13）为 $\mathcal{R} = H^1_{PE} \cong \mathbb{Z}^2$：两个高度函数 x_1，x_2 均无界，但可在局部计算（由每条边的瓦片类型确定），因此是非图案等变原函数。该链完全由两个不断增长的整数序列描述；增量$\Delta_k(u \to v) \in \{0, 1\}$ 每一步只取两个值，但这些值的出现序列是准周期的（斯特姆词／斐波那契词），而非周期性的。

5.7 未决问题：守恒强制系统的刻画

命题 5.9、推论5.8 (阿曼–比恩克、斐波那契），以及命题5.11，连同定理 5.7，确立了猜想 ⇒5.6 的方向 (b)（a），适用于完整的 CPT 类（四种情况汇总于表 3）。反向命题 —— 每个守恒强制铺砌都必定是皮索 CPT——仍未解决，也是本文的主要未决问题：

方向 (b)⇒已在斐波那契链（$N = 2$，推论 5.8）、彭罗斯 P2（$N = 5$，命题 5.9 和定理 4.13）、阿曼–比恩克（$N = 4$，推论 5.8）以及二十面体镶嵌（$N = 6$，命题 5.11）中得到验证。这些标准情形总结于推论 5.8；显式的斐波那契重构公式另见注5.15 。特别是，CF1–CF3 已足以推出非周期性（注 5.4）。尚未解决的逆向命题以及非 CPT／非 Pisot 情形将在第 §6节讨论。

表 3：本文验证的守恒约束的准晶代换系统。守恒秩 $r = N$ 等于环境格维数（定理 5.7）。

系统	原型瓦片	d	$N{=}r$	λ_{PF}	已证明
斐波那契链	S、L 线段	1	2	$\varphi \approx 1.618$	推论 5.8
彭罗斯（P2）	飞镖形，风筝形	2	5	$\varphi \approx 1.618$	命题 5.9
阿曼–比恩克	正方形、菱形	2	4	$1+\sqrt{2} \approx 2.414$	推论 5.8
二十面体 Ammann	两个菱面体	3	6	$\varphi \approx 1.618$	命题 5.11

注 5.16（超出四种已验证情形）。 定理 5.7 适用于任何满足定义 2.7的原函数替换 CPT。例如，十二边形镶嵌的特征值为 $\lambda_{\mathrm{PF}} = 2+\sqrt{3} \approx 3.732$（参见 [2, 第 6]章）。有几种互不等价的12重替换镶嵌共享这一特征值，而守恒秩取决于具体的镶嵌包络。附录 λ_{PF} 中按 J排序（或等价地按倒数不变量标量 λ_{PF}排序）的已验证系统见 B。

第 5 节已证明，守恒强制结构并非彭罗斯特有的现象，而是适用于整个 CPT 类的定理。第6 节将这些结果置于相关理论框架（Thurston、Conway–Lagarias）的更广阔背景下，并指出尚待解决的开放问题。

6 讨论

本节针对主要结果留下的三个未解问题展开讨论。首先，我们明确该框架能够在已验证的四个族之外扩展到多大范围：根据定理 5.7，它适用于所有本原替换 CPT；而扩展到非 CPT 和非 Pisot 情形则仍是猜想。其次，我们将该框架置于经典先例（Thurston；Conway–Lagarias）之中。第三，我们提出两个受物理启发的开放问题，探讨守恒结构的可观测特征。

根据定理 5.7，将该框架扩展到完整的本原替换 CPT 类是已经证明的结果，而非假设。真正悬而未决的问题是，彭罗斯特有的半边／粘合构造能够在多大程度上扩展到 CPT 之外。对于高维系统，定理 5.7 和命题 5.11 已经表明，守恒强制适用于二十面体阿曼铺砌（$d = 3,\ N = 6$）。其他 3维 CPT 族（例如由切投影方案产生的其他二十面体模型集）是适合采用同样方法分析的自然对象；关于具有二十面体对称性的准周期 3维切投影构造的背景介绍，参见 [14] 。关于 CPT 类中的其他示例，参见注释 5.16。

彭罗斯族内及其拓展的适用范围。 在彭罗斯族中，结果是针对 P2（飞镖形–风筝形）形式表述的；对于 P3（厚／薄菱形），五个 Ammann 杆线族具有相同的结构，因此该框架可直接迁移；而 P1（六种原型瓦片）的条纹结构更为复杂，需要单独验证（关于 P1 的杆族，见 [2,第 6] 章）。

更难的问题是非 Pisot 情形。对于具有非 Pisot 佩龙–弗罗贝尼乌斯特征值的替换，这一框架能否推广仍未有定论。在非 Pisot 情形下，替换矩阵的特征向量张成的方向彼此不满足有理相关关系

与标准基；因此，格坐标上链 $\Delta_k = \delta_0 x_k$ 在顶点集上可能无法取整数值。即使 Δ_k 取整数值，它也可能无法再通过 CPT 公式（5）重构顶点位置，因为该公式所依赖的 $\pi|_\Lambda$ 单射性在 Pisot 情形之外可能不再成立。有关代数数论的内容，请参阅 [2, 第 5], [8], 章和 [15] 。

与经典先驱工作的关系。 有必要明确说明这一框架与两项经典先驱工作的关系。Thurston [4]证明了一个区域能否由多米诺骨牌或菱形砖铺砌，等价于高度差上链在对偶图上的环闭合；并且，当且仅当该区域可铺砌时，才存在一致的高度函数。因此，命题 4.10 和定理 4.11 的概念架构源自 Thurston 的理论，只是将其专门用于非周期彭罗斯情形。不过，两者在结构上有所不同。Thurston 的框架只涉及一个高度函数，而彭罗斯镶嵌需要五个相互独立的上链——每个杆族对应一个——由此形成一个五维上同调群 $\mathbb{Z}^5 \cong H^1_{PE}$；五族有效性判据和五网格重构（定理 4.13）在 Thurston 的框架中都没有对应概念。Thurston 的框架适用于有限区域，因此高度函数在紧域上全局确定，且只取有限多个值；而在彭罗斯情形中，高度函数无界且不具图案等变性，从而造成识别差距（备注 5.14 ）。最后，Thurston 的框架以一个固定的可铺砌区域为起点，并探讨是否存在铺砌；半边／粘合构造（定义 4.1、引理 4.5）则处理与之互补的问题——给定一个可能违反匹配规则的候选铺砌，检测并定位其中的违规之处。

Conway 和 Lagarias [5] 将可铺砌性表述为一个字问题：每种砖块形状对应一个群元素，而一个区域可铺砌，当且仅当某个特定乘积等于单位元。这个单位元条件在本文的意义上是一条守恒律——沿闭合路径的字必须等于单位元，这正是环闭合的群论类比——因此这两种框架具有共同的代数核心。不过，它们所能揭示的内容有所不同。铺砌群方法在全局层面检测障碍：计算区域边界对应的群元素，并检查其是否等于单位元。相比之下，粘合条件检查（注4.15；另见第4.7节）在局部层面检测障碍：它能找出发生违规的具体边和杆族，从而有助于进行针对性修复。铺砌群也承载着代数信息——例如群的同构类，以及给定区域边界所对应的字——但它无法自然地为每个顶点给出一个标量不变量；势论框架则能构造五个整数值函数 $h_{\mathbf{n}_0}$，……，$h_{\mathbf{n}_4}$，并通过 de Bruijn 公式（定理4.13(ii)）编码顶点位置。在上同调层面，铺砌群与带孔区域 [5], 的基本群相关，而本文框架则直接关联到铺砌包络的胞腔上同调和图案等变上同调，并自然衔接 Forrest–Hunton–Kellendonk 理论工具 [6] ，从而能够进行第 §5.3节中的守恒秩计算。总而言之，势论重述提供了第三种视角：它具有局部性（逐边验证）、定量性（带有重建公式的整数值高度函数），并且与图案等变上同调直接相关；它并不取代 Thurston 或 Conway–Lagarias 的方法，而是对其加以补充。

开放问题与物理问题。 超越猜想5.6——§5.7中已提出的开放分类问题——本研究还引出了另外两个问题。这些问题从纯数学背景转向受物理启发的背景，探讨

守恒强制结构在真实准晶材料中是否具有可观测的特征。首先，能否在准晶衍射图样或电子结构测量中直接观测到高度势？Ammann 杆线在直接晶格图像中几何可见，而守恒解释表明，其信息论内容可能具有物理后果。其次，基于守恒余链的尺度比统计——也就是说，从固定基点出发沿有向边 Δ_k 路径对穿棒增量求和，得到整数值路径积分，以追踪第 k 个格点坐标中的位置——能否在物理准晶中检测到，例如通过对 Al–Pd–Mn 表面进行扫描隧道显微镜观测（参见 [16]）？这两个问题都关乎铺砌的守恒强制结构是否会在物理准晶层面呈现可观测特征；这一研究方向或可将本文的数学框架与实验联系起来。

第 7节简要总结主要结果与贡献，并重申核心的未解问题。

7 结论

本文从余链优先的角度解读彭罗斯非周期铺砌，并通过格坐标上链将其推广至典范投影铺砌；对于满足定义 2.7 的本原替换 CPT，本文还给出了完整的守恒性强制定理。其统一的观察是：有向边上的带符号阿曼穿棒计数构成一个反对称的 1-上链；由匹配规则强制实现的条带连续性恰好等同于环闭合；由此得到的离散势就是经典 Ammann 高度函数。定理 4.11 通过半边／粘合构造，将此结果表述为候选铺砌的四重等价：匹配规则、条带连续性、环闭合和高度函数存在性彼此等价，且无需预先假定其中任何一项。定理 4.13 进而将五个高度函数汇总为 de Bruijn 的五重网格重构公式，并以统一记法确定势函数论与代数描述中的顶点位置。

本文的主要创新贡献如下：(i) 半边／粘合构造使针对候选铺砌的匹配规则/余链等价性得以严格确立；(ii) 定理4.13以统一记号给出了五族有效性判据和五网格重构；(iii) 守恒强制框架和定义 5.1；(iv) 将守恒强制图景拓展至维数1–3的标准CPT族；以及 (v) 线性时间铺砌验证算法（命题 4.14），该算法提供了一种 $O(n)$ 逐边验证匹配规则的流程，并能将任何违规定位到特定杆族和边。

对于典范投影铺砌，格坐标上链 $\Delta_k = \delta_0 x_k$ 是余循环（引理2.10），并且能够重构顶点位置（命题 2.13）：

$$v = \sum_{k=1}^{N} h_k(v)\, \mathbf{e}_k^*,$$

并且，对于满足定义 2.7 的本原替换 CPT，构成一个秩为 $r = N$ 的守恒基（定理 5.7）。这一结果已针对斐波那契链（N =2）、彭罗斯 P2（$N = 5$）、阿曼–比恩克（$N = 4$）以及二十面体阿曼铺砌

（$N=6$），证明了猜想 5.6 对 CPT 类的蕴含关系 (b)⇒(a)（尤其是对 Pisot 替换 CPT）。明确的 3D 重构陈述见推论 5.12。

这些结果的上同调内容在于识别差距 $\mathcal{R}(\mathcal{T}) \cong \mathbb{Z}^N$ (定义 5.13 和方程（16）)：每个 Δ_k 在普通上同调中都是恰当的——它的原函数 $h_k = x_k$是一个全局定义的整数值函数——但在图案等变上同调中却非平凡，因为 h_k 是无界的，而有限局部复杂性迫使每个图案等变函数只能取有限多个值。守恒律可以在局部读取，但守恒量由全局决定。反向命题——每个守恒律强制铺砌都必须是满足定义 2.7的 Pisot 本原替换 CPT——仍未解决，也是本文的主要开放问题。若猜想 5.6 得到肯定解决，就能确立守恒强制是 CPT 类中非周期序的完备代数刻画，并给出一个统一的上同调条件，同时验证准晶体结构、重建顶点位置，并将这些铺砌与所有周期系统及非 Pisot 替换系统区分开来。

数据可用性声明

所有数据均包含在本文中。

A 显式瓦片边界计算

正文（示例4.8–4.9）给出了代表性情形；此处我们记录具有代表性的瓦片边界计算，以说明符号约定和望远镜式循环和。

我们通过对每个原型瓦片边界进行显式计算，验证环闭合（命题 4.10(i)）。固定一个法向量为 $\mathbf{n}$ 的 Ammann 杆族。

风筝边界。 风筝瓦片的顶点为 $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$，长边为 v_0v_1 和 v_3v_2，短边为 $v_1\overline{v_2}$和 v_0v_3（参见第 4.2 节）。对于杆条带与两条长边相交的情形：

$$\begin{aligned}
&\Delta_{\mathbf{n}}(v_0 \to v_1) = +1 && \text{（长边 } v_0\overline{v_1}\text{，正向穿过横杠），（短}\\
&\Delta_{\mathbf{n}}(v_1 \to v_2) = 0 && \text{边 } v_1v_2\text{，未穿过），（长边 } v_3v_2\text{，反}\\
&\Delta_{\mathbf{n}}(v_2 \to v_3) = -1 && \text{向穿过），（短边 } v_0v_3\text{，未穿过）。}\\
&\Delta_{\mathbf{n}}(v_3 \to v_0) = 0
\end{aligned}$$

循环和：$(+1) + 0 + (-1) + 0 = 0$。

风筝边界。 一个顶点为 $\{w_0, w_1, w_2, w_3\}$ 的风筝瓦片有两条长边和两条短边。对于同一杆族：

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{n}}(w_0 \to w_1) &= +1 && \text{（长边，正向），} \\ \Delta_{\mathbf{n}}(w_1 \to w_2) &= 0 && \text{（短边），（短边），} \\ \Delta_{\mathbf{n}}(w_2 \to w_3) &= 0 && \text{（长边，反向）。} \\ \Delta_{\mathbf{n}}(w_3 \to w_0) &= -1 \end{aligned}$$

循环和：$(+1) + 0 + 0 + (-1) = 0$。

这些计算取决于瓦片的相对方向和杆族。对于其他方向，± 1和0 值的模式会发生变化，但引理4.3 保证总和始终为零：每个通过一个边界边进入瓦片 t的局部杆线段都必须通过另一个边界边离开（根据横截性和Jordan曲线论证），因此穿越贡献总是成对抵消。

B 黄金比例、替换熵与相干层级

备注 B.1（替换图景中的黄金比例）。 罗宾逊三角形替换（方程（1））的佩龙–弗罗贝尼乌斯特征值为 $\lambda_{\mathrm{PF}} = \varphi$，替换熵为

$$h_{\mathrm{sub}} = \ln \varphi \approx 0.481 \text{ nats} \tag{17}$$

根据本原替换的标准公式 [9]。（注意，在 $\mathbb{R}^2$-平移下，彭罗斯系统的拓扑熵为零，因为斑块复杂度呈多项式增长；h_{sub} 衡量的是层级瓦片计数增长，而非平移复杂度。）

定义方程 $\varphi^2 = \varphi + 1$，等价地，$\varphi^{-1} = \varphi - 1$，给出了简洁的闭式表达：若设 $J(x) = \frac{1}{2}(x + x^{-1}) - 1 = \cosh(\ln x) - 1$（即满足 $J(1) = 0$ 及达朗贝尔关系的唯一尺度比较代价；见 [17, 18]），则

$$J(\varphi) = \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi - 1) - 1 = \varphi - \tfrac{3}{2} \approx 0.118.$$

由于 J 在 $(1, \infty)$ 上严格递增，且 φ 是最小的二次Pisot数 [19]，$J(\varphi) < J(\alpha)$，对其他任何二次Pisot单位 α均成立。注意，φ 并非在所有Pisot数中使 J 达到最小值的数：塑性常数 $\theta_P \approx 1.325$（$x^3 - x - 1$的根）给出 $J(\theta_P) \approx 0.040$。对于本综述所涉及系统中的三个不同的 λ_{PF} 值：

$$J(\varphi) \approx 0.118 \;<\; J(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414 \;<\; J(2 + \sqrt{3}) = 1.000.$$

注释 B.2（相干性层级排序）。 守恒约束系统可以按其佩龙–弗罗贝尼乌斯特征值 λ_{PF}排序，或等价地按倒数不变量标量$J(\lambda) = \cosh(\ln \lambda) - 1 = \frac{1}{2}(\lambda + \lambda^{-1}) - 1$排序。由于 J在 $(1, \infty)$ 上严格递增，按 J 排序与按 λ_{PF}排序完全相同：

$$J(\varphi) \approx 0.118 \;<\; J(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414 \;<\; J(2 + \sqrt{3}) = 1.000. \tag{18}$$

斐波那契链和彭罗斯 P2 共享 $\lambda_{\mathrm{PF}} = \varphi$，因为罗宾逊三角形的替换矩阵 $M_{P2} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 与斐波那契矩阵相同（公式（2））；二维彭罗斯铺砌将这种一维动力学嵌入 $\mathbb{R}^2$，其中有五个独立的横杠族，使守恒秩从 2 提高到 5。替换熵 $h_{\mathrm{sub}} = \ln \lambda_{\mathrm{PF}}$ 满足 $J(\lambda_{\mathrm{PF}}) = \cosh(h_{\mathrm{sub}}) - 1$。关于如何从信息论原理公理化推导代价函数 J，请参见 [20]。

参考文献

[1] R. Penrose, 《美学在纯粹数学与应用数学研究中的作用》, *Bull. Inst.Math. Appl.***10** （1974）, 266–271。[2] M. Baake 和 U. Grimm, 《非周期序，第*1*卷：数学导论》, 剑桥大学出版社，2013。[3] B. Grünbaum 和 G. C. Shephard, 《镶嵌与图案》, W. H. Freeman，纽约，1987。[4] W. P. Thurston，Conway 镶嵌群，*Amer. Math. Monthly* **97**（1990）, 757–773。[5] J. H. Conway 和 J. C. Lagarias，多格骨牌铺砌与组合群论，*J. Combin. Theory Ser. A* **53**（1990）, 183–208。[6] A. Forrest、J. Hunton 和 J. Kellendonk, 《典范投影铺砌的上同调》, Mem. Amer. Math. Soc.**159** （2002）, 第758号。[7] N. G. de Bruijn，平面上彭罗斯非周期镶嵌的代数理论，*Indag.Math. (Proc.)* **84**（1981）, 38–52及53–66。[8] L. Sadun, 《镶嵌空间的拓扑》, 大学讲座系列第46卷，美国数学学会，2008。[9]M. Queffélec, 《替换动力系统——谱分析》, 第2版，数学讲义第1294卷，施普林格，2010。[10] R. M. Robinson，平面镶嵌的不可判定性与非周期性，*Invent. Math.***12**（1975）, 177–209。[11] N. L. Biggs, 《代数图论》, 剑桥大学出版社，1974。[12] J. Kellendonk 和 I. F. Putnam，作用于 $\mathbb{R}^n$ 的 Ruelle–Sullivan 映射，*Math. Ann.***334**（2006）, 693–711。[13] J. E. Anderson 和 I. F. Putnam，替换镶嵌及其相关 C^*-代数的拓扑不变量，*Ergodic Theory Dynam. Systems* **18**（1998）, 509–537。[14] A. Katz 和 M. Duneau，准周期图案与二十面体对称性，*J. Physique***47**（1986）, 181–196。

[15] C. L. Siegel，共轭元位于单位圆上的代数整数，*Duke Math. J.* **11**（1944），597–602。[16] Z. Shen、C. R. Stoldt、C. J. Jenks、T. A. Lograsso 和 P. A. Thiel，准晶态 Al–Pd–Mn 平面曲面上的精细结构，*Phys. Rev. B* **60**（1999），14688–14694。[17] J. Washburn 和 M. Zlatanović，规范互易成本的唯一性，《数学》**14**（2026），935。[18] J. Aczél，《函数方程及其应用讲义》，学术出版社，1966。[19] R. Salem，《代数数与傅里叶分析》，Heath数学专著，波士顿，1963。[20] S. Pardo-Guerra、M. Simons、A. Thapa 和 J. Washburn，将相干比较作为信息成本：离散动力学的成本优先账本框架，已投稿至《基础》，MDPI，https://doi.org/10.48550/arXiv.2601.12194（2026）。