arXiv:2603.13569v1 [math.CT] 13 Mar 2026

极性、电压和电容器：一种关于包络、包络与完备化的范畴论方法

IVAN DI LIBERTI 和 MARTINO LUPINI

Abstract. 本文在范畴论语境下提供了一个一般框架，在该框架中，可以将若干完备化、包络和包络的概念视为同一抽象构造的特例，例如布尔代数的布尔代数完备化、序集的Dedekind–MacNeille完备化、环的乘子环、C*-代数的乘子代数和冯·诺伊曼包络。

为实现这一目标，我们奠定了 *polarized* 范畴论的基础。这是经典范畴论的一种细化，其中范畴被赋予两类特殊的 *positive* 和 *negative* 箭头。我们在此语境下定义了 *polarity*和 *voltage*的概念。我们解释了如何通过 *capacitor*构造电压；这本质上是反射子范畴概念的极性版本。特别地，这会产生一个 *completionfunctor* （在经典情形下，它就是反射函子），为每个对象指定其完备化或包络。即使完备化不是（也不可能是）由整个范畴上的函子给出时，这些结论仍然成立，而这种情况恰恰最为常见。

在这一框架下，我们得到一个一般性定理，确保函子性完备化函子的存在性与唯一性。每个对象相应的完备化由其相对于正箭头和负箭头的两个泛性质刻画。

危险！高压

Contents

1. 引言 1
2. 极性与电压 3
3. 自然界中的单极体 6
4. 电容器产生的电压 10
5. 布尔代数及其完备化 15
6. 有序空间及其麦克尼尔完备化 16
7. 环及其乘子环 18
8. C*-代数及其乘子代数 20
9. C*-代数的包络冯·诺伊曼代数 21
参考文献 22

1. Introduction

从创立之初，Eilenberg 和 Mac Lane 的工作便展现出范畴论发展的一个主要动机 [38], ： 为数学中的概念和构造提供一个框架，使它们能够得到恰当的形式化和理解。对于 Eilenberg 和 Mac Lane 而言，他们所关注的是泛系数定理中联系空间的同调与上同调的正合序列的自然性

Date：2026年3月17日。2000 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 18G05、18A40；次要分类号 06B23、06B35、46L05。*Key words and phrases.* 单极、极性、电压、电容器、半阿贝尔范畴、完备化、包络、布尔代数、序集、C*-代数、局部单位环、麦克尼尔完备化、乘子环、乘子C*-代数。作者的研究工作部分得到欧洲研究委员会“可定义代数拓扑”启动基金（101077154）、意大利高等数学国家研究所（INDAM）代数、几何结构及其应用国家小组（GNSAGA）以及博洛尼亚大学的资助。部分工作是在M.L.访问查尔姆斯理工大学和G¨哥德堡大学期间完成的。谨此感谢这些机构的热情接待。

。这一概念的形式化促使他们引入了范畴、函子和自然变换；关于范畴论起源的更多历史信息，请参见 [72, 第 2] 章。从早期至今，范畴论已在数学的诸多领域得到广泛应用（更不用说计算机科学了），因为人们已认识到，其许多概念和构造都是范畴、函子、自然变换及其他基本范畴论概念的具体实例。

范畴论的近期研究聚焦于进一步细化和推广其工具，使之能够应用于那些无法直接应用的情境。例如，高阶范畴论和 ∞-范畴论 [83] 对于处理结合律及其他恒等式仅本质上成立（即在同构意义下成立，或满足其他高阶相容性要求）的情境已变得不可或缺。同样，富化范畴论 [70]提供了一种背景，其中同态集带有结构，从而自身成为某个范畴中的对象。（这两个框架密切相关并非偶然。）

本工作的动机与此类似，旨在提供一个框架，使代数和泛函分析中的重要构造——它们不符合传统的“范畴—函子—自然变换”模式——能够得到恰当处理。这些构造包括若干完备化、包络、包络（内射或其他类型）以及其他典范扩张。

这些构造出现于多个领域，包括代数 [34, 39, 40, 48, 87, 92, 92, 105]，（无点）拓扑 [6, 14, 49,79, 96, 97], 泛函分析 [29, 64, 65, 77, 93], 算子代数 [28, 54–57, 99], 动力系统 [22, 58, 59],以及有序代数结构理论 [2, 25, 31, 50, 87, 101]。

例如，布尔代数的完备化 、偏序集的麦克尼尔完备化、阿贝尔格序群的侧完备化 [11, 30, 102], 非阿基米德格序群的本质闭包[10, 31], 环的乘子环 [32], C*-代数的乘子代数 [23], C*-代数的包络冯·诺伊曼代数 [94], 巴拿赫空间的内射包 [29], 算子系统的内射包 [56], 算子空间的内射包 [99], C*-代数的内射包 [56],动力系统的内射包 [59]。

众所周知，这些构造通常不是函子性的，而本文 [1] 旨在列举大量此类现象的实例。我们的研究思路源于这样一个观察：这些构造虽然通常不具函子性，但当限制在原范畴的适当子范畴上时，确实会产生函子，一个协变，另一个逆变。由此，我们引入极性这一基本概念：它是一个带有两个指定子范畴的范畴，即正荷和负荷，并满足一些自然要求。极性之间的函子 则是一对函子，一个为正函子，一个为负函子；每个函子都定义在具有给定符号的箭头上，并且可以是协变的，也可以是逆变的。函子之间的自然变换 也有显而易见的双极推广。经典的“范畴—函子—自然变换”三元组可以视为这一框架的一个特例，即所有箭头都具有相同的荷。基于这些基本概念，我们定义电压：带有指定自函子的极性。（作为比较，单子也是同类结构，它们由一个带有自函子和自然变换的范畴定义，并满足某些公理 [3, 第 10]章。）我们还将说明，极性可以视为以极性集合构成的幺半范畴为富集对象的范畴的一个特例（极性集合就是带有两个指定子集的集合，分别由正元素和负元素组成）。同样，极性之间的函子因具有正或负的性质，也可以视为以带符号集合 （配有二元划分的集合）为富集对象的范畴中的对象。

在此背景下，我们定义电容器的概念，它是范畴之间满足某些公理的遗忘函子。这些公理确保存在一个（部分定义的）左伴随，即与电容器相关的所需完备化函子 ，并将较粗范畴转化为电压。在这种情况下，我们称该遗忘函子生成包络。反射子范畴之间的包含函子可视为一种特殊情形，对应于左伴随“全局”存在的（罕见）情况。我们将证明，即使在这一更一般的背景下，总能得到一个反射函子，不过它同样只是部分定义的。

作为分析的结果，我们还阐明了刻画给定对象完备化的泛性质 。事实上，这类性质有两个，分别相对于正箭头和负箭头而言，一个是协变的，另一个是逆变的。这正是引入极性的根本原因。

最后，我们说明布尔代数的布尔代数完备化、偏序集的麦克尼尔完备化、（具有局部单位元的）环的乘子环，以及 C*-代数的乘子代数和冯·诺伊曼包络，都是由某些典范遗忘函子构造而成的。例如，对于偏序集的麦克尼尔完备化，只需考虑从完备格范畴到偏序集与单调映射范畴的遗忘函子

以及连续的单调映射。尚不清楚数学中是否存在一些已被研究的“包络”，不能视为本文所述一般构造的特例。例如，研究固定环上模的内射包络将会很有意思。

可以将这项工作与模型论和泛函分析中的 Fra¨ıss´e 理论进行比较。事实上，自从 Fra¨ıss´e 在模型论背景下的开创性工作以来 [42]——关于其在度量结构中的推广，另见 [62, 63] 和 [7–9, 21, 24, 36, 41, 43, 81, 82, 91, 91, 109] ——直至后来对其进行的范畴论重述与推广 [27, 44, 69, 73–76, 88–90, 98], , Fra¨ıss´e 理论的主要成果之一，便是提供了一个统一框架，用以识别和研究在给定类中产生“泛型”对象的构造。本着类似的精神，这项工作提供了一个统一框架，使得许多“完备化”“包络”和“包络”的构造都能被视为某种普遍现象的具体实例；按照本文的术语，它们都可以看作由某个 包络 所构造 而成，而这一构造由某些遗忘函子产生。这种类比十分贴切：任何 Fra¨ıss´e 理论框架的基础定理，都是关于 Fra¨ıss´e 极限（泛型对象）的存在唯一性定理；而对于完备化而言，基本结果则是关于完备化的存在唯一性定理。正如 Fra¨ıss´e 极限由其泛性（存在性断言）和超齐性（存在唯一性断言）刻画，完备化也由其泛性（同样是唯一性断言）和极大性（存在唯一性断言）唯一刻画。

我们考虑这一概念的最终动机，是将位、层和托普斯推广到极化语境中。这将是后续工作的主题，届时我们将证明，电压为层的极化版本提供了恰当的目标。关于完备化与包络的其他范畴论方法，见 [5, 12, 13, 26,51, 52, 74]。

本文其余部分分为 7 节。第 2 节介绍范畴论极化细化的基本概念：单极、极性和电压。第 3 节列举若干自然出现的电范畴与极性的实例。第 4 节介绍电容器，提炼出构造给定遗忘函子的部分定义左伴随所需的关键要素，从而得到所需的完备化函子及相应的电压。

最后几节旨在说明，数学中的基本完备化构造如何被视为这一一般框架的特例：布尔代数的布尔代数完备化（第 7 节）、有序集的麦克尼尔完备化（第 6 节）、局部单位环的乘子环（第 7 节）、C*-代数的乘子代数（第 8 节），以及 C*-代数的冯·诺伊曼包络（第 9 节）。其他实例和应用将留待后续工作探讨。

1.1. **致谢**。 我们感谢 Luigi Caputi、Eusebio Gardella、Matthew Kennedy、Fosco Loregian、GiuseppeMetere、Hannes Thiel 和 Marvin，感谢他们进行了许多有益的交流并提出了宝贵意见。

2. Polarities and voltages

本节将阐述一种可称为带极性范畴论的范畴论推广的基本概念。在这一语境下，箭头可以带有（正或负）符号，并且该符号在复合下保持不变。我们将说明，相应的极性 概念可以被视为在 $\{+,-\}$ 的子集半格上的富化范畴 的一个特例。

2.1. **单极体与极性**。 设 $\mathcal{C}$ 为一个范畴。回顾一下， $\mathcal{C}$ 的一个宽 子范畴是包含 $\mathcal{C}$ 的所有对象的子范畴。我们称 $\mathcal{C}$ 的一个细化是一个子范畴，它包含 $\mathcal{C}$ 的所有对象，以及 $\mathcal{C}$ 中所有为同构的箭头。

定义 2.1。我们定义：

- 正单极是一个范畴 $\mathcal{C}$，并配备了对正箭头的特定细化 $\mathcal{C}_+$；
- 负单极体是一个范畴，并配备了对负箭头的特定细化 $\mathcal{C}_-$；
- 极性是一个既为正单极又为负单极体的范畴。

下文中，除非另有说明，我们均假设单极为正。显然，正电范畴与负电范畴并无区别，但从术语上区分二者更为方便。

每个范畴都可以视为一种极性，其中每个箭头既是正的，也是负的。反过来，任意极性$\mathcal{C}$ 都会产生一个范畴 $\mathcal{C}$，该范畴是通过遗忘极化而得到的，也就是说，遗忘有关初等

子范畴 $\mathcal{C}_+$ 以及正箭头和负箭头的子范畴 $\mathcal{C}_-$ 的信息。在这种情况下，我们称 $\mathcal{C}$ 是范畴 $\mathcal{C}$的极化。显然，这建立了极性与范畴之间的伴随。

类似的考量和术语也适用于电范畴。因此，每个单极体 $\mathcal{C}$ 都有一个底层范畴 $\mathcal{C}$。于是我们称 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{C}$的一个正极化 。

定义 2.2。 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是单极体。若 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 具有相同的对象和箭头，且 $\mathcal{C}$ 中的每个正箭头在 $\mathcal{D}$中也是正箭头，则称 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{D}$ 的一个子单极体 。

Obvi显然，固定单极体 $\mathcal{C}$ 的子单极体全体构成一个完备格。

定义 2.3。 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是极性。若 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 具有相同的对象和箭头，且 $\mathcal{C}$ 中的每个正箭头（分别地，负箭头）在 $\mathcal{D}$中也是正箭头（分别地，负箭头），则称 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{D}$ 的一个子极性 ；

在极性中，我们可以定义范畴论中的通常概念，但只考虑正箭头和负箭头。例如:

定义 2.4。 设 $\mathcal{C}$ 为一个极性，且 f 是 $\mathcal{C}$中的一个箭头。那么，如果对于 $\mathcal{C}$中的所有负 箭头 p, q， $pf = qf$ 蕴含 $p = q$，则称 f 为负满态 。

如果 f 为负，则 f 是负满态，当且仅当 f 是范畴 $\mathcal{C}_-$中的满态射。然而，一般来说，不能以这种方式改写定义，因为 f 不是 $\mathcal{C}_-$中的箭头。另请注意，负满态的条件比在 $\mathcal{C}$中成为满态射更宽松。

2.2. **极性之间的函子**。 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 为两个极性。正（极性）函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 由函子 $F_+ \colon \mathcal{C}_+ \to \mathcal{D}_+$ 和 $F_- \colon \mathcal{C}_- \to \mathcal{D}_-$ 给出，它们在对象上相一致。负（极性）函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 由函子 $F_+ : \mathcal{C}_+^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}_+$ 和 $F_- \colon \mathcal{C}_- \to \mathcal{D}_-$ 给出，它们在对象上相一致。注意，这类函子可以按显然的方式复合，使得所得函子的符号遵循符号乘积规则。特别地，函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 通过限制给出一个正极性函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 。

如果 $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是正函子，那么自然变换 $\eta\colon F \Rightarrow G$ 由 $\mathcal{C}$ 中的箭头 $\eta_x\colon Fx \to Gx$ 给出，其中每个 $x \in \mathcal{C}$ 都定义了自然变换 $\eta_+ \colon F_+ \Rightarrow G_+$ 和 $\eta_- \colon F_- \Rightarrow G_-$。具体而言，这意味着:

(1) 对于 $\mathcal{C}_+$ 中任意箭头 $f\colon A \to B$ ，图表

$$\begin{array}{ccc} Fx & \overset{F_+f}{\to} & Fx \\ {\scriptstyle \eta_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_B} \\ Gx & \underset{G_+f}{\to} & Gx \end{array}$$

可交换，并且

(2) 对于 $\mathcal{C}_-$ 中任意箭头 $f\colon A \to B$ ，图表

$$\begin{array}{ccc} Fx & \overset{F_-f}{\to} & Fx \\ {\scriptstyle \eta_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_B} \\ Gx & \underset{G_-f}{\to} & Gx \end{array}$$

可交换。

如果 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个正函子，且 $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个负函子，那么自然变换 $\eta\colon F \Rightarrow G$由 $\mathcal{D}$ 中针对 $\mathcal{C}$ 的对象 x 的箭头 $\eta_x\colon Fx \to Gx$ 给出，满足:

(1) 对于图 $\mathcal{C}_+$ 中的任意箭头 $f\colon A \to B$

$$\begin{array}{ccc} Fx & \overset{F_+f}{\to} & Fx \\ {\scriptstyle \eta_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_B} \\ Gx & \underset{G_+f}{\leftarrow} & Gx \end{array}$$

可交换，且

（2）对于图表 $\mathcal{C}_-$ 中的任意箭头 $f\colon A \to B$

$$\begin{array}{ccc} Fx & \overset{F_-f}{\to} & Fx \\ {\scriptstyle \eta_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_B} \\ Gx & \underset{G_-f}{\to} & Gx \end{array}$$

可交换。

注意，同样地，符号相反的函子之间的自然变换可以按显而易见的方式复合，从而得到符号相同的函子之间的自然变换。

函子的概念　　单极体之间的函子及其自然变换，也可以用类似的方式定义。

2.3. **作为富化范畴的极性**。令 $\mathcal{L}$为由两个一元关系符号 R_+ 和 R_-组成的一阶语言。那么，这种语言中的一阶结构就是一个极性集合，即一个集合 A，配备两个子集 A_+ 和 A_-，分别对应于对 R_+ 和 R_-的解释。两个此类结构之间的态射 $A \to B$ 是一个将 A_+ 映射到 B_+、并将 A_- 映射到 B_-的函数。这定义了一个范畴 **集合**$_\pm$。在此范畴中，极性集合 A 和 B 的积 $A \times B$ 是笛卡尔积，且

$$(A \times B)_+ := A_+ \times B_+ \quad \text{and} \quad (A \times B)_- = A_- \times B_-.$$

该幺半群运算与终对象 $\{*\}$（其中 $*$ 既是正的也是负的）在 $\mathbf{Set}_\pm$ [70,Section 1.1] 上生成一个幺半结构。

因此，可以将每个局部小极性 $\mathcal{C}$ 视为一个 $\mathbf{Set}_\pm$-范畴，即一个以$\mathbf{Set}_\pm$ [70,Section 1.2] 为富集范畴的范畴。事实上，若 x, y是 $\mathcal{C}$ 中的对象，则 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ 是一个极性集合，其中 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)_+$ 由正箭头组成，而 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)_-$ 由负箭头组成。反过来，任意 $\mathbf{Set}_\pm$-范畴都可以视为一个极性。若 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是极性，则正函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 恰好是 $\mathbf{Set}_\pm$-函子 [70, Section 1.2]。

可以考虑范畴 **Polarity**，其对象是极性，箭头则是正函子或负函子。由于 **Polarity** 中的箭头非正即负，因此它构成了所谓的带符号范畴。在带符号范畴中，每个箭头恰有一种符号（正或负），而复合的符号是各符号的乘积 。这类带符号范畴可以看作以幺半范畴 $\pm\mathbf{Set}$ 中的带符号集合为富集对象的范畴。在代数和组合学中，人们曾在研究定向或有向的组合结构与代数结构时考虑过这类范畴，例如定向拟阵 [18, 20, 80]。

因此，带符号集合就是赋予了 $\{+, -\}$标记的划分 $\{+A, -A\}$的集合 A。态射仍然是保持该划分的函数。在这个范畴中，幺半群运算定义为令 $A \otimes B$ 为带有如下划分的笛卡尔积:

$$+(A \otimes B) := ((+A) \times (+B)) \cup ((-A) \times (-B))$$

幺半群单位元是集合 $\{+, -\}$ 及其显然的划分。

2.4. **遗传单极体**。现在我们考察电范畴的一种自然性质　　.

De定义 2.5。设 $\mathcal{C}$ 为一个单极体。如果对于 $\mathcal{C}$ 中的所有箭头 f，g，则称 $\mathcal{C}$ 为左遗传的:

$$gf \text{ positive } \Rightarrow g \text{ positive.}$$

设 $\mathcal{C}$ 为任意范畴。将一个箭头声明为正的，当且仅当它是满态射，就把 $\mathcal{C}$ 变成一个左遗传单极。

定义 2.6。设 $\mathcal{C}$ 为一个单极体。$\mathcal{C}$ 的左遗传核L（$\mathcal{C}$）是一个与 $\mathcal{C}$具有相同底层范畴的单极体，其中 $\mathcal{C}$ 的一个 f 箭头在 L（$\mathcal{C}$）中为正，当且仅当:

(1) f 在 $\mathcal{C}$中为正，并且 (2) 对于 $\mathcal{C}$的任意其他箭头 g，如果 gf 在 $\mathcal{C}$中有定义且为正，则 g 在 $\mathcal{C}$中为正。

容易验证，左遗传核确实是一个左遗传单极，事实上还是给定单极的最大左遗传子单极。

单极的本质核已经在文献中被隐含地考察过；例如参见 [1, 95]。事实上，按照 [1, 95], 的术语，若且唯若箭头 f 是 $\mathcal{C}_+$- 本质的，则它在 L($\mathcal{C}$) 中为正，其中 $\mathcal{C}_+$ 是 $\mathcal{C}$ 中正箭头的类。

2.5. **电压**。我们将电压定义为附带额外信息的极性。

定义 2.7. 一个电压定义如下：

- 一个极性 $\mathcal{C}$；
- 一个负函子 $E:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$；
- 一个自然变换
$$\eta : 1_{\underline{\mathcal{C}}} \Rightarrow E$$
使得
$$\eta_E : E \Rightarrow EE$$
是一个自然同构。

注意，在定义 2.7 中，$\mathcal{C}$ 是从 $\underline{\mathcal{C}}$ 遗忘极化后得到的范畴。它本身被视为一种极性，其中所有箭头既是正的，也是负的。将定义明确写出，一个电压由以下内容给出：

- 一个范畴 $\mathcal{C}_-$，以及初等子范畴 $\mathcal{C}_+$ 和 $\mathcal{C}_-$；
- 函子
$$E_+ : \mathcal{C}_+^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C} \quad \text{and} \quad E_- : \mathcal{C}_- \to \mathcal{C}$$
在对象上相一致；
- 箭头
$$\eta_A : A \to EA$$
对于 $\mathcal{C}$ 中的每个对象 A，其中
$$EA := E_+(A) = E_-(A);$$

满足：

(1) 对于 $\mathcal{C}$ 中的每个对象 A，$\eta_{EA} : EA \to EEA$ 是一个同构；( )

2 对于 $\mathcal{C}_+$ 中的每个箭头 $f: A \to B$，图表

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle \eta_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_B} \\ EA & \underset{E_+ f}{\longleftarrow} & EB \end{array}$$

是交换的；

(3) 对于 $\mathcal{C}_-$ 中的每个箭头 $f: A \to B$，图表

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle \eta_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_B} \\ EA & \underset{E_- f}{\longrightarrow} & EB \end{array}$$

交换。

注记 2.8. 回顾 [61, 第 2.3] 节中的伴随范畴 概念。带有伴随函子 $\dagger: f \mapsto f^\dagger$ 的伴随范畴可视为电压的一种特殊情形。在伴随情形中，所有箭头既是正的，也是负的。逆变函子 E_+ 是伴随函子，而函子 E_- 是恒等函子。对于任意对象 A，箭头 $\eta_A: A \to A$ 是恒等态射。

3. Monopoles in nature

3.1. **强态射**。设 $\mathcal{C}$ 是一个具有有限极限与余极限的范畴。用 $\mathcal{E}$ 表示 $\mathcal{C}$中的满态射类，用 $\mathcal{M}$ 表示 $\mathcal{C}$中的单态射类。设 a, b 是 $\mathcal{C}$中的箭头。回顾一下，若对于任意交换图，a 左正交于 b，且 b 右正交于 a，

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{a} & \bullet \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ \bullet & \xrightarrow{b} & \bullet \end{array}$$

存在唯一的箭头 t使得

$$at = g \quad \text{and} \quad bt = g.$$

给定一组箭头 $\mathcal{H}$，令 $\mathcal{H}^{\perp}$ 为所有与 $\mathcal{H}$ 中的箭头都右正交的箭头所组成的集合，并令 ${}^{\perp}\mathcal{H}$ 为所有与 $\mathcal{H}$ 中的箭头都左正交的箭头所组成的集合。

强满态射是 ${}^{\perp}\mathcal{M}$ 中的一个箭头，即一个左正交于所有单态射的箭头 [45, Definition 1.1]。对偶地，强单态射是 $\mathcal{E}^{\perp}$ 中的一个箭头，即右正交于所有满态射的箭头。

任何强满态射都是满态射。此外，同时为单态射的强满态射必为同构[45, Lemma 1.3]。对偶地，任何强单态射都是单态射，且它是同构当且仅当它同时也是满态射。

3.2. **正则态射**。我们继续假设 $\mathcal{C}$ 是一个具有有限极限与余极限的范畴。我们回顾 $\mathcal{C}$ 中正则态射的概念。给定一个箭头 $f\colon a \to b$，可以考虑以下拉回图

$$\begin{array}{ccc} a \times_f a & \to & a \\ \downarrow & & \downarrow f \\ a & \xrightarrow{f} & b \end{array}$$

这称为 f 的核对 Ker (*f*)。对偶地，可以考虑以下推出图

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & b \\ f\downarrow & & \downarrow \\ b & \to & b \sqcup_f a. \end{array}$$

这称为 f 的余核对Coker (*f*)。

定义如下：

- f 的像Im (*f*) 定义为其余核对的等化子

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Eq}(\operatorname{Coker}(f));$$

- f 的余像Coim (*f*) 定义为其核对的余等化子

$$\operatorname{CoIm}(f) = \operatorname{CoEq}(\operatorname{Ker}(f)).$$

根据这些对象的泛性质，可以得到一个典范分解

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & b \\ \downarrow & & \uparrow \\ \operatorname{CoIm}(f) & \xrightarrow{\rho(f)} & \operatorname{Im}(f) \end{array}. \tag{1}$$

我们将这个箭头称为

$$\rho(f) : \operatorname{CoIm}(f) \to \operatorname{Im}(f)$$

正则比较映射；参见 [103, 定义 1.1。1]（在加性范畴的语境下）。这样的箭头总是既是单态又是满态射 [103, 命题 1.1，5], 尽管它一般并非同构。

态射 f 是：

- 正则满态射 当且仅当 $f = \text{CoIm}(f)$，对偶地
- 一个正则单态射当且仅当 $f = \operatorname{Im}(f)$;

参见 [45, 定义 1.5]。

明确地说，态射 $f\colon x \to y$ 是正则单态射，当且仅当对于任意以 y 为目标的态射 g，若它使所有被 f 等化的箭头对（即 $pf = qf \Rightarrow pg = qg$）等化，则 g 必经由 f分解。对偶地，态射 $f\colon x \to y$ 是正则满态射，当每个以 x 为源的态射 h，只要它使所有被 f余等化的箭头对余等化（公式表示为：$fi = fj \Rightarrow hi = hj$），就必须经由 f 分解。注意，即使 $\mathcal{C}$ 没有有限极限与余极限，这些改写仍然有意义。

备注 3.1。正则单态射和满态射见于 [103]（在加性范畴的语境中），也见于 [5]，其中称为严格 单态射和满态射。这两处资料都将这一概念归功于 Grothendieck。

一个态射是正则满态射，当且仅当它是一对箭头的余等化子；参见 [45, 练习 1.9]。每个分裂满态射都是正则满态射，而每个正则满态射都是强满态射；参见 [45, 命题 1.8]。

更一般地，可以定义任意态射为正则态射的含义：

定义 3.2. 若典范比较映射 $\rho(f)$ 是同构，则称箭头 $f\colon a \to b$ 为正则。

注意，交换图 (1) 中的映射 Im $(f) \to b$ 始终是正则单态，特别地，它是强单态。因此，若 f 是满态射，则 Im $(f) \to b$ 也是满态射，因而是同构。这些观察表明，定义 3.2 确实与先前定义的正则满态射概念一致。注意，一般而言，正则态射的复合未必是正则的。

正则范畴的概念是用正则满态射的概念来定义的；参见 [45, 定义 1.10]。

定义 3.3. 设 $\mathcal{C}$ 为一个具有有限极限与余极限的范畴。那么，如果沿任意态射对正则满态射作拉回所得的仍是正则满态射，则称 $\mathcal{C}$ 为正则的。

在正则范畴中，箭头 f 的分解如下：

$$f = mq$$

其中 q 是正则满态射， m 是单态射，且该分解本质唯一 [45, 定理 1.11]。此外，这种分解具有拉回稳定性；这些性质刻画了有限完备范畴中的正则范畴 [45, 定理 1.14]。

3.3. **本质单态射**。

命题 3.4. 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有有限极限与余极限的范畴。

(1) 规定 $\mathcal{C}$ 中的箭头若为单态射，则称其为正箭头，由此定义出 $\mathcal{C}$的一个右遗传子单极 $\mu\mathcal{C}$ 。*(2)* 规定 $\mathcal{C}$ 中的箭头若为正则单态射，则称其为正箭头，由此定义出 $\mathcal{C}$的一个右遗传子单极。

证明。 (1)显然。(2)正则单态射的复合仍为正则单态射，这正是 [103, 命题 1.1.7] （在加性范畴的语境下）的内容。它们构成右遗传类，则是 [103,命题 1.1.8]的内容。（请注意， [103] 使用的是“严格”一词，而非“正则”。）□

令 $\mu\mathcal{C}$ 为命题 3.4 中的单极。按照定义 2.6，可以考虑它的左遗传核L $(\mu\mathcal{C})$。L $(\mu\mathcal{C})$中的箭头称为本质单态射。注意，根据定义，箭头 f 是本质单态射，当且仅当：

(1) 它是一个单态射；(2) 对于任意箭头 g ，若 gf 是单态射，则 f 也是单态射。

本质正则单态射 的概念以类似方式定义，其中单态射由正则 单态射取代。

3.4. **正规单态射**。 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有有限极限的范畴。那么，态射 $f\colon X \to Y$（必为单态射，见引理 3.2.2]）对于某个定义 3.2.1] 中的等价关系 $r\colon R \to Y \times Y$（定义在 Y [19, 上）是正规 的，当且仅当：

(1) $f \times f$ 经由 m 分解，从而得到一个拉回

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{\xi} & R \\ \downarrow & & \downarrow r \\ X \times X & \underset{f\times f}{\to} & Y \times Y \end{array}$$

(2) 该图式

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{\xi} & R \\ p_0 \downarrow & & \downarrow d_0 \\ X & \underset{f}{\to} & Y \end{array}$$

也构成一个拉回。

单态箭头 f 若相对于某个等价关系 R是正规的，则称其为正规单态射；当 $\mathcal{C}$ 是具有有限极限的原型模范畴时，由 f唯一确定该等价关系 [19, 定理 3.2.8]。两个正规单态射的复合仍是正规单态射，而且正规单态射类在沿任意箭头取拉回后保持闭性 [19, 命题 3.2.6(2)]。现在假设 $\mathcal{E}$ 有推出。若 s 是一个分裂单态射，其分裂为 p，则 s 是 核对 的正规单态射，该核对对应于p。因此，每个分裂单态射都是正规单态射。

可以将 $\mathcal{C}$ 转化为一个（左遗传）单极 $\nu\mathcal{C}$ ，其中正规单态作为正态射。当 $\mathcal{C}$ 是半阿贝尔范畴时， [66, 第 3 节中的正规单态类与核类相同 [19,命题 3.2.20]。

3.5. **伪补**。假设 $\mathcal{A}$ 是一个半阿贝尔范畴。给定 $\mathcal{A}$ 中的对象 A，将 A 的理想定义为与目标为 A的正规单态相对应的子对象。正规单态与等价关系之间的对应表明， A 的理想序集 Ideal (A) 实际上是一个有界格，并且与 A上的等价关系格同构。（回顾一下，半阿贝尔范畴特别是一个正则 Mal'cev 范畴。在任意正则 Mal'cev 范畴中， [19, 命题 5.1.2], 对象上的等价关系构成一个格 [19, 定义 2.9.1]。）

给定对象 A 的理想 I， J，若 $I \wedge J = 0$ in Ideal (A)，则定义 $I \perp J$。给定 I，满足 $I \perp J$ 的最大理想 J 称为 I 的伪补（如果它存在）。若半阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$具有理想的伪补，是指对于 $\mathcal{A}$ 中的每个对象 A，每个对象 A 的理想 I 都具有伪补，即 Ideal (A) 是一个伪补格。例如，C^*-代数或 ℓ-群的半阿贝尔范畴具有理想的伪补，而群和阿贝尔群的半阿贝尔范畴则不具有理想的伪补。

引理 3.5。设 $i\colon\ X \to Y$ 是 $\mathcal{A}$ 中具有伪补 $i^{\perp}$ 的正规单态射，其中 Y 的理想格中存在该伪补。定义 $p\colon = $余核 $\left(i^{\perp}\right)\colon\ Y \to Z$，以及 $\xi\colon = pi$。则 ξ 是正规本质单态射。

证明。由于 i 和 p 都是正规单态，因此 ξ也是正规单态。由于 $i^{\perp} \perp i$，根据余核的泛性质，我们有 Ker$(\xi) = 0$，且 ξ 是单态。现在假设 $m\colon\ W \to Z$ 是一个核，且 $m \perp \xi$。考虑通过拉回沿着 p 提升 m得到的提升 m'，然后再考虑通过拉回沿着 i 提升 m' 得到的提升 m''：

$$\begin{array}{ccccc} W'' & \longrightarrow & W' & \stackrel{p'}{\to} & W \\ m''\downarrow & & m'\downarrow & & m\downarrow \\ X & \stackrel{i}{\longrightarrow} & Y & \stackrel{p}{\to} & X \end{array}$$

那么，根据引理 5.8], m'' 就是沿着 ξ 对 w 的提升。由于 $m \perp \xi$，我们必有 $m'' = 0$。因此， $m' \perp i$。这表明 $m' \leq i^{\perp}$，即 m' 经由 $i^{\perp} =$ Ker (p)分解，特别是 $m'p = 0$。因此， $mp' = 0$。由于 p 是正则满态射，且正则范畴中的正则满态射类对拉回稳定，因此箭头 p' 也是正则满态射。因此， $m = 0$。证明至此完成。□

引理 3.6. 设 $m\colon\ I \to A$ 是一个核。以下断言等价：

(1) m 是本质单态；*(2)* 对于满足以下条件的任意 $f\colon\ A \to B$：若 fm 是正规单态射，则 f 是单态；*(3)* 若 $g\colon\ J \to A$ 是正规单态射且满足 $g \perp m$，则 $g = 0$。

证明。(1)⇒(2)由定义显然成立。

(2)⇒(3) 设 g 如 (3) 中所述。考虑 g 的余核 $p\colon\ A \to B$。定义 $f =$ Ker (pm)。由于 g 是正规单态射，根据命题 3.2.20], 它必定是 p [19, 的核。由于 $p(mf) = 0$，我们必有 mf经由g分解。由于 $m \perp g$，这就推出 $f = 0$。因此， pm 的核是平凡的，故它是单态。由于 p 和 m 是正规态射，同样的结论也适用于 pm。这说明 pm 是正规单态射。根据假设， p必定是单态。这意味着 $g =$ Ker $(p) = 0$。

(2)⇒(1) 假设 $f\colon\ A \to B$ 是一个箭头，且 fm 是正规单态射。我们需要证明 f 是单态射。设 $g\colon\ J \to A$ 是 f 的核。我们需要证明 $g = 0$。只需证明 $g \perp m$。考虑 m 和 g 的拉回：

$$\begin{array}{ccccc} S & \stackrel{a}{\longrightarrow} & J & & \\ b\downarrow & & \downarrow g & & \\ I & \stackrel{m}{\longrightarrow} & A & \stackrel{f}{\to} & B \end{array}$$

于是我们有

$$0 = fga = fmb$$

由于 fm 是单态射，这意味着 $b = 0$。由于 g 是单态射，且拉回保持单态射，根据第 [3, 章， 5], b 是单态射，并且 $S = 0$。这表明 f 是单态射。□

3.6. **簇中的理想**。设 $\mathcal{A}$ 是一个半阿贝尔代数簇。在这种情况下，我们可以将前面的定义改写如下：

- 在 $\mathcal{A}$ 中的一个 单态射 是一个单同态；
- 在 $\mathcal{A}$ 中的正规单态射是一个单同态，其像是一个理想；

- 在 $\mathcal{A}$ 中的正规本质单态射是一个单同态，其像是一个本质理想，即与任何非零理想都有非零交集的理想；

- 若 I 和 J 是 A的理想，则
$$I \perp J \Leftrightarrow I \cap J = 0;$$
- 若 J 是 A的理想，则 J 是本质的，当且仅当对于任意 A的理想 I，若 $I \perp J$，则 $I = 0$；
- 若 I 是 A的理想，则其伪补 $I^{\perp}$（若存在）是一个理想，且在与 I正交的理想中最大；

- 若对于任意属于 $\mathcal{A}$ 的代数 A及 A中的理想 I， I 都有一个伪补，则簇 $\mathcal{A}$ 具有理想的伪补。

4. Voltages from capacitors

本节将介绍单极中一个对象的广义包络 概念。我们还将定义单极上的电容器，并说明电容器如何在给定的单极上产生一个典范电压 。

4.1. 振幅极限。 我们考虑一种自然概念，它结合了余极限中的存在性与极限中的唯一性。与通常的极限和余极限一样，我们可以归结为空图的情形。

定义 4.1。 设 $\mathcal{D}$ 是一个范畴。若 $\mathcal{D}$ 中的对象 z 满足以下条件，则称其为振幅终端：

(1) 对于 $\mathcal{D}$ 中的任意对象 x，至少存在一个 $\mathcal{D}$中的箭头 $x \to z$；(

2) 对于 $\mathcal{D}$ 中的任意对象 y，至多存在一个 $\mathcal{D}$中的箭头 $z \to y$ 。对偶地，

若一个对象在 $\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$中是振幅终端的，则称其为振幅始端 。

在定义 4.1 中，(1) 等价于要求 z 是定义 3.2], 中的弱终端 [68, ；而 (2) 等价于要求 z 是第 1 节.4]中的准始端 [51, 。显然，若 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{D}'$的全子范畴，且 $\mathcal{D}$ 中的对象 z 在 $\mathcal{D}'$中是振幅始端的，那么它在 $\mathcal{D}$中也同样是振幅始端的。

显然，如果双终对象存在，那么它在本质上是唯一的，且没有非平凡自同态。反过来，每个没有非平凡自同态的弱终端对象都是双终对象。请注意，零对象，即既是始端又是终端的对象，也是既是振幅始端又是振幅终端的对象。

定义 4.2. 设 $F\colon J \to \mathcal{D}$ 是一个函子。那么， F 的双锥极限是锥范畴中关于 F的一个双终对象。

4.2. 完备化。 设 $\mathcal{C}$ 是一个单极。固定 $\mathcal{C}$中的一个对象 x 。我们将切片单极范畴 $\mathcal{C} \downarrow x$ 定义为这样一个单极：其对象是以 x为目标的正 箭头。 $\mathcal{C} \downarrow x$ 中的一个箭头 $f \to g$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个箭头 ξ，满足 $f = g\xi$。当且仅当该箭头作为 $\mathcal{C}$中的箭头是正的时，它才是正箭头。我们还通过对偶性定义余切片单极范畴 $x \downarrow \mathcal{C}$ 。

定义 4.3. 设 $\mathcal{C}$ 是一个单极，且 x 是 $\mathcal{C}$的一个对象。

- x 在 $\mathcal{C}$ 中的一个完备化 或包络 $\mathrm{h}_{\mathcal{C}}(x)$，是 $x \downarrow \mathcal{C}$（底层范畴）中的一个双终对象；
- $\mathcal{C}$ 中的对象 x 若其恒等箭头是 $\mathcal{C}$中 x 的一个完备化，则称其在 $\mathcal{C}$ 中完备 。

作为关于双锥极限的相应一般事实的一个特例，对象的完备化若存在，则本质唯一。

引理 4.4. 设 $\mathcal{C}$ 是一个单极。假设 $\eta_x\colon x \to Jx$ 是 $\mathcal{C}$中 x 的一个完备化。那么 η_x 在 $\mathcal{C}$中是单态。

证明。 假设 $g, h\colon Jx \to y$ 是 $\mathcal{C}$ 中的态射，且满足 $g\eta_x = h\eta_x$。那么 g, h 定义了从 η_x 到 $g\eta_x = h\eta_x$ 的两个 $x \downarrow \mathcal{C}$中的态射。由 η_x 作为 $x \downarrow \mathcal{C}$中的双终对象所具有的唯一性，我们必有 $g = h$。□

引理 4.5. 设 $\mathcal{C}$ 为一个单极。若 $\mu_x\colon$ $x \to y$ 是 x 在 $\mathcal{C}$中的完备化，则 y 在 $\mathcal{C}$中是闭的。

证明。 我们需要证明 $1_y\colon$ $y \to y$ 是 y的完备化。设 $f\colon$ $y \to a$ 是一个正箭头。那么 $f\mu_x\colon$ $x \to a$是一个正箭头。由于 μ_x 是 x的完备化，存在一个箭头 $g\colon$ $a \to y$，使得 $gf\mu_x = \mu_x$。由于 μ_x 是 x的完备化， $gf = 1_y$。这表明 1_y 在 $x \downarrow \mathcal{C}$中是弱终端的。显然，它是准始端。□

现在假设 $\mathcal{C}$ 是一个单极，$\mathcal{E}$ 是一个范畴，而 $U:\mathcal{E}\to\mathcal{C}$ 是一个函子。设 $x\downarrow_{\mathcal{C}} U$ 为这样一个范畴，其对象是形如 (b,f) 的有序对，其中 b是 $\mathcal{E}$中的一个对象，且 $f\colon a\to Ub$是 $\mathcal{C}$中的一个正箭头。在 $x\downarrow_{\mathcal{C}} U$中，从 (b,f) 到 (c,g) 的态射，是 $\mathcal{E}$ 中的一个态射 $\varphi\colon b\to c$，满足 $U\varphi\circ f=g$。注意，当 U 是 $\mathcal{C}$上的恒等函子时，这与 $x\downarrow\mathcal{C}$ 的底层范畴一致。

定义 4.6。设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{E}$ 为电范畴，$U:\mathcal{E}\to\mathcal{C}$ 为一个函子，x 为 $\mathcal{C}$中的一个对象。x 在 $\mathcal{C}$ 关于 U 的完备化或包络 $\mathrm{h}^U_{\mathcal{C}}(x)$，是 $x\downarrow_{\mathcal{C}} U$中的一个终对象 。

请注意，在定义 4.6 中，完备化必须是一个终对象，而不是一个双终对象。这一差异将在定理 4.14 中得到调和，该定理将说明，关于某个函子的完备化如何产生定义 4.3 中所述的“绝对”完备化。

定义 4.7。设 $\mathcal{C}$ 为一个单极，x 为 $\mathcal{C}$中的一个对象，$\mathcal{H}$ 为 $\mathcal{C}_+$的细化。令 $\mathcal{C}|_{\mathcal{H}}$ 为 $\mathcal{C}$ 的子单极，其正箭头恰好是 $\mathcal{H}$的箭头。x 在单极 $\mathcal{C}$ 相对于 $\mathcal{H}$的完备化 $\mathrm{h}_{\mathcal{C}}(x|\mathcal{H})$，是 x 在单极 $\mathcal{C}|_{\mathcal{H}}$中的完备化。我们也将余切片范畴 $x\downarrow(\mathcal{C}|_{\mathcal{H}})$记作 $x\downarrow_{\mathcal{H}}\mathcal{C}$。

同样，也可以定义 x in $\mathcal{C}$ 关于函子 U 相对于 $\mathcal{H}$ 的完备化。

注记 4.8. 数学的若干领域中自然出现了各种完备化 概念，也称为包络 、包络 或闭包。有时在其抽象定义中，会省略唯一性 要求所对应的刚性 ，而该要求恰好对应于双终对象的定义（定义 4.1）。这是因为一般而言，相对于整个范畴，这种刚性并不成立。不过，在大多数情况下，相对于一类合适的态射，这种刚性确实成立。

4.3. **内射性**。设 $\mathcal{C}$ 是一个极性，x 是 $\mathcal{C}$ 中的一个对象。我们通过相对于正箭头的延拓性质 来定义（正）单极中的内射对象。

定义 4.9. 设 $\mathcal{C}$ 是一个单极。

- 单极 $\mathcal{C}$ 中的对象 x 若满足以下条件，则称其在 $\mathcal{C}$ 中内射：对于每个正箭头 $g:a\to b$ 以及每个箭头 $f\colon a\to x$，都存在一个箭头 $h\colon b\to x$，使得 $hg=f$。
- 若对 $\mathcal{C}$ 中的每个对象 a，都存在 $\mathcal{C}$ 中的一个正箭头 $a\to x$，其 x 为内射，则单极 $\mathcal{C}$ 有充足的内射对象。

按照 [1, 定义 2.1], 的术语，定义 4.9 断言 x 在范畴 $\mathcal{C}$ 中是 $\mathcal{C}_+$-内射的。我们将更一般地考察极性中内射对象的概念。

定义 4.10。设 $\mathcal{C}$ 为一个极性。

- 若对每个正箭头 $g:a\to b$ 和每个负箭头$f\colon a\to x$，都存在一个箭头 $h\colon b\to x$ 使得 $hg=f$，则单极 $\mathcal{C}$ 中的对象 x 在 $\mathcal{C}$ 中是内射的。
- 若对 $\mathcal{C}$ 中的每个对象 a，都存在 $\mathcal{C}$ 中的一个正箭头 $a\to x$，其 x 为内射，则极性 $\mathcal{C}$ 有充足的内射对象。

定义 4.9 是定义 4.10 在正单极情形下的特例（将其视为所有箭头均为负箭头的极性）。

下面的引理基本上表明，在完备化存在的情况下，任何内射对象都是完备的。

引理 4.11. 设 $\mathcal{C}$ 为一个极性，$\mathcal{H}\subseteq\mathcal{C}_+$ 为一个细化。假设 x 是$\mathcal{C}$中的一个对象，并令 $\eta_x:\ x\to Ex$为 $\mathcal{C}$ 中 x 相对于 $\mathcal{H}$ 的一个完备化。那么，η_x 是一个同构，并且 x 是完备的。

证明。由内射性，存在一个箭头 $g\colon Ex\to x$，使得 $g\eta_x=1_x$。因此，我们有 $\eta_x g\eta_x=\eta_x$，并且由刚性可得 $\eta_x g=1$。这表明 η_x 是一个同构。□

4.4. **从完备化到电容器**。回顾 [84, 第三节1]中的从对象到函子的箭头 这一概念。若 $U\colon\mathcal{E}\to\mathcal{C}$ 是范畴之间的一个函子，那么从 $\mathcal{C}$ 中的对象 x 到 U 的箭头就是一个对 (η,a)，其中 a 是 $\mathcal{E}$ 中的一个对象，而 $\eta\colon x\to Ua$ 是 $\mathcal{C}$中的一个箭头。

定义 4.12。设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{E}$ 是范畴，$U\colon\mathcal{E}\to\mathcal{C}$ 是一个函子。对于 $\mathcal{C}$ 中的每个对象 x，令 (η_x,Jx) 为一个从 x 到 U 的箭头。这意味着 Jx是 $\mathcal{E}$中的一个对象，且 $\eta_x\colon x\to UJx$是一个态射。若满足以下条件，则称族 $(\eta_x,Jx)_{x\in\mathcal{C}}$ 相对于 U 是刚性的：

(1) 对于 $\mathcal{C}$ 中的每个箭头 $f\colon x\to y$，至多存在一个 $\mathcal{E}$ 中的箭头 $\psi\colon Jx\to Jy$，使得交换方块

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & y \\ \eta_x\downarrow & & \downarrow\eta_y \\ UJx & \underset{U\psi}{\to} & UJy \end{array}$$

可交换；

(2) 对于每个箭头 $f\colon UJx\to UJx$ 在 $\mathcal{C}$中，使得交换方块

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\mathrm{id}_x} & x \\ \eta_x\downarrow & & \downarrow\eta_x \\ UJx & \underset{f}{\to} & UJx \end{array}$$

可交换，我们有 $f=\mathrm{id}_{Jx}$。

假设 $\mathcal{C}$ 是一个单极，$\mathcal{E}$ 是一个范畴，而 $U\colon\mathcal{E}\to\mathcal{C}$ 是一个函子。再假设 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{C}_+$的细化。设 $\mathcal{C}$ 中的每个对象 x 都存在一个完备化 $\eta_x\colon x\to Jx$ 在 $\mathcal{C}$ 关于 U 相对于 $\mathcal{H}$。那么，完备化的泛性质（定义 4.6）给出一个函子

$$J_+:\mathcal{C}_+^{\mathrm{op}}\to\mathcal{E},\quad x\mapsto Jx,\quad f\mapsto J_+f.$$

对于 $\mathcal{C}_+$中的一个箭头 f，$\mathcal{E}$ 中的箭头 $J_+f\colon Jx\to Jy$ 由以下要求唯一确定：图表

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & y \\ \eta_x\downarrow & & \downarrow\eta_y \\ UJx & \underset{UJ_+f}{\leftarrow} & UJy \end{array}$$

可交换。根据定义，我们有一个自然变换 $\eta\colon\dagger_{\mathcal{C}_+}\Rightarrow UJ_+$，其中

$$\dagger_{\mathcal{C}_+}:\mathcal{C}_+^{\mathrm{op}}\to\mathcal{C}_+$$

is 是典范反箭头函子。我们将在下文中使用这些观察结果 :

定义 4.13。设 $\mathcal{C}$ 是一个（正）单极。$\mathcal{C}$ 的电容器 定义如下：

- $\mathcal{C}_+$的细化 $\mathcal{H}$；
- 一个范畴 $\mathcal{E}$；
- 一个忠实 函子 $U\colon\mathcal{E}\to\mathcal{C}$；_

使得：

(1) $\mathcal{C}$ 中的每个对象 x 都相对于 $\mathcal{H}$，关于 U 有一个位于 $\mathcal{C}_+$ 中的完备化 $\mu_x\colon x\to Jx$，从而得到一个函子

$$J_+:\mathcal{C}_+^{\mathrm{op}}\to\mathcal{E}$$

以及一个自然变换

$$\eta:\dagger_{\mathcal{C}_+}\Rightarrow J_+;$$

(2) 由此得到的族 $(x,Jx)_{x\in\mathcal{C}}$ 关于 U 是刚性的：$\mathcal{E}\to\mathcal{C}_\circ$

电容器和电压的概念应当与 2-范畴 [35, 86, 107, 112]上的 Kock–Z¨oberlein（KZ）教义和 Yoneda 结构进行比较。在 KZ 教义的语境中，对于每个对象 a 也有一个箭头$\sigma_a\colon a\to Sa$。在这种情况下，此类箭头的泛性质要求对于每个箭头 $f\colon a\to Sb$，都存在沿着 σ_a 对 f 的左 Kan 延拓，并满足某些自然要求 [35, 定义 2.1]。同样在这一语境中，还考虑了第二种“逆变”泛性质；该性质适用于所谓的可容许箭头 [35,定义 2.18]。从某些逆变结构（ 标准逆变构造 ）出发构造对合单子，是 [47] 的主题。

4.5. 从电容器到电压。回顾一下，如果 $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{C}$的一个全子范畴，那么当包含函子 $U:\ \mathcal{E}\to\mathcal{C}$ 具有左伴随 F [84, 第 IV 节.3]时，就称 $\mathcal{E}$ 是一个反射子范畴。可以将 $\mathcal{E}$ 看作由“完备”对象构成的范畴，而将 F 看作一个“完备化”函子。如果 η 是该伴随的单位，那么对于 $\mathcal{C}$中的每个对象 x， $\eta_x:\ x\to Fx$将 x映射到其“完备化” Fx。例如，可以将完备度量空间的范畴 $\mathcal{E}$视为任意度量空间及非扩张映射范畴 $\mathcal{C}$ 的全子范畴。在这种情况下，函子 F 将每个度量空间映射到其（柯西）完备化。

以下结果尤其可以看作是反射函子的推广，适用于这样一种情形：正如常见的情况那样，它们无法定义在最初所考虑的整个范畴上：

定理 4.14. 设 $\mathcal{C}$ 为（正）单极。另设 $(\mathcal{H}, U:\ \mathcal{E}\to\mathcal{C})$ 为 $\mathcal{C}$ 的电容器 。考虑 r:

- 相应的函子 $J_+:\ \mathcal{C}_{\text{对偶}_+}\to\mathcal{E}$，并且
- 相应的自然变换 $\eta_x:\ \dagger_{\mathcal{C}_+}\Rightarrow J_+$

如定义 *4.13* 中所述。定义 $\mathcal{C}_-$ 为箭头 $f:x\to y$ 的集合，其中存在一个（必然唯一的）箭头

$$J_-f:Jx\to Jy$$

在 $\mathcal{E}$ 中使该图表

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & y \\ \eta_x\downarrow & & \downarrow\eta_y \\ UJx & \underset{UJ_-f}{\to} & UJy \end{array}$$

可交换。定义 $E_+:=UJ_+$、 $E_-=EJ_-$和 $Ex:=UJx$。于是：

(1) $\mathcal{C}_-$ 是 $\mathcal{C}$的细化，将 $\mathcal{C}$ 转化为一个极性，其负箭头集为 $\mathcal{C}_-$ ；*(2)* $J_-:\mathcal{C}_-\to\mathcal{E}$ 是一个函子；*(3)* E_+ 和 E_- 定义了极性 $\mathcal{C}$的一个负自函子 E ；*(4)* $\mu:\ 1_{\mathcal{C}}\Rightarrow E$ 是一个自然变换；*(5)* E 和 μ赋予 $\mathcal{C}$ 电压结构；*(6)* 对于 $\mathcal{C}$中的每个对象 x， $\mu_x:\ x\to Ex$ 是 x 在 $\mathcal{C}$ 中相对于 $\mathcal{H}$的完备化；*(7)* η 的分量是单态且负满态的；*(8)* E_- 是一个全忠实函子 $\mathcal{C}_-\to\mathcal{C}_-$；*(9)* 对于 $\mathcal{C}_-$中的每个箭头 $f:\ x\to y$，

$$E_-f:Ex\to Ey$$

是 $\mathcal{C}_-$ 中唯一使图

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & y \\ \eta_x\downarrow & & \downarrow\eta_y \\ Ex & \underset{E_-f}{\to} & Ey \end{array}$$

可交换的；

(10) μ 是函子 $J_-:\ \mathcal{C}_-\to\mathcal{E}$ 与 $U:\ \mathcal{E}\to\mathcal{C}_-$ 之间伴随的单位；*(11)* U 在 $\mathcal{E}$ 与 $\mathcal{C}_-$ 的一个反射全子范畴之间建立了等价；*(12)* 对于极性 $\mathcal{C}$ ，对象 x 是内射的，当且仅当它相对于 $\mathcal{H}$ 是完备的。

证明。 (1)–(5) 的证明是直接的。 $\eta_{Ex}:\ Ex\to EEx$ 是同构这一事实由 (6) 得出；(6) 尤其蕴含 Ex 在 $\mathcal{C}_+$ 中相对于 $\mathcal{H}$ 是闭的。

(6) 根据假设， $\eta_x:x\to Ex$ 是相对于 $\mathcal{H}$、关于 U 在 $\mathcal{C}_+$ 中对 x 的完备化。因此， η_x 是范畴 $x\downarrow_{\mathcal{H}}U$ 中的终对象。回顾一下， $x\downarrow_{\mathcal{H}}U$ 的对象是形如 $(\xi,\ a)$ 的有序对，其中 a 是 $\mathcal{E}$ 中的一个对象，且 $\xi:\ x\to Ua$ 是 $\mathcal{H}$ 中的一个箭头。设 $f:\ x\to y$ 是 $\mathcal{H}$ 中的一个箭头。考虑 $x\downarrow_{\mathcal{H}}U$ 中的对象 $(Jy,\ \eta_y\circ f)$。于是根据 μ_x 的泛性质，存在一个箭头 $\psi:\ Jy\to Jx$ ，使下图

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & y \\ \eta_x\downarrow & & \downarrow\eta_y \\ Ex & \underset{U\psi}{\leftarrow} & Ey \end{array}$$

交换。这表明 η_x 是 $x \downarrow_{\mathcal{H}} \mathcal{C}$ 中的弱终端对象。假设 f 是 $\mathcal{C}$ 中 Ex 的一个自同态，使得下图

$$\begin{array}{ccc} x & \overset{\mathrm{id}_x}{\to} & x \\ \eta_x \downarrow & & \downarrow \eta_y \\ Ex & \underset{f}{\to} & Ey \end{array}$$

交换。于是，根据电容器定义——定义 4.13(2) 中的刚性假设——我们必有 $f = J_-(\mathrm{id}_x) = \mathrm{id}_{Jx}$。这表明 η_x 在 $x \downarrow_{\mathcal{H}} \mathcal{C}$ 中是刚性的。至此，我们证明了 η_x 是 x 关于 $\mathcal{H}$ 的完备化；

(7) 由 (6) 和引理 4.4 可知，箭头 η_x 在 $\mathcal{C}$ 中是单态。现在我们证明，$\eta_x \colon x \to Jx$ 在 $\mathcal{C}$ 中是 负满态；参见定义 2.4。设 $g, h \colon Jx \to y$ 是 $\mathcal{C}_-$ 中满足 $g\eta_x = h\eta_x$ 的箭头。根据 $\mathcal{C}_-$ 和 J_- 的定义，我们有：$J_-g \colon Jx \to Jy$ 是 $\mathcal{E}$ 中使图表交换的唯一态射

$$\begin{array}{ccc} Jx & \overset{g}{\to} & y \\ 1_{Jx} \downarrow & & \downarrow \eta_y \\ Jx & \underset{E_-g}{\to} & Jy \end{array}$$

交换，即满足 $E_-g = \eta_y g$。同理，$J_-h \colon Jx \to Jy$ 是 $\mathcal{E}$ 中使图表交换的唯一态射

$$\begin{array}{ccc} x & \overset{g}{\to} & Jy \\ \eta_x \downarrow & & \downarrow 1_{Jy} \\ Jx & \underset{E_-h}{\to} & Jy \end{array}$$

交换，即满足 $E_-h = \eta_y h$。考虑交换图

$$\begin{array}{ccc} x & \overset{g\eta_x}{\to} & y \\ \eta_x \downarrow & & \downarrow \eta_y \\ Jy & \underset{\eta_y g}{\to} & Jy \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{ccc} x & \overset{h\eta_x}{\to} & y \\ \eta_x \downarrow & & \downarrow \eta_y \\ Jy & \underset{\eta_y h}{\to} & Jy \end{array}$$

我们得出

$$(E_-h)\,\eta_x = (\eta_y h)\,\eta_x = \eta_y\,(h\eta_x) = \eta_y\,(g\eta_x) = (\eta_y g)\,\eta_x = (E_-g)\,\eta_x.$$

根据 η 的刚性，我们得出

$$J_-h = J_-g$$

因此

$$\eta_y h = E_-h = E_-g = \eta_y g.$$

由于 η_y 在 $\mathcal{C}$ 中是单态，我们得出 $g = h$。

(8) 设 $f \colon x \to y$ 是一个箭头。则 $J_-f \colon Jx \to Jy$ 证明了 $E_-f \colon Ex \to Ey$ 属于 $\mathcal{C}_-$，其中考虑了同构 $\eta_{Jx} \cong 1_{Jx}$ 和 $\eta_{Jy} \cong 1_{Jy}$。根据定义 4.13 中 U 忠实的假设，以及 (5) 中确立的箭头 η_x 是单态这一事实，可知 E_- 是忠实的。最后，根据 $\mathcal{C}_-$的定义，E_- 的满性显而易见。

(9) 假设 $f \colon x \to y$ 是 $\mathcal{C}_-$中的一个箭头。令 $g \colon Ex \to Ey$ 为一个箭头，使得

$$\begin{array}{ccc} x & \overset{f}{\to} & y \\ \eta_x \downarrow & & \downarrow \eta_y \\ Ex & \underset{g}{\to} & Ey \end{array}$$

交换。我们需要证明 $g = E_-f$。由 (8) 可知，对于某个箭头 $h \colon x \to y$，有 $g = E_-h$。将定义 4.12(1) 中的唯一性 要求应用于 $\mathcal{E}$ 中的箭头 J_-f 和 J_-h，可得 $J_-f = J_-h$，从而得到 $f = E_-f = E_-h = g$。

(10) 这由 $\mathcal{C}_-$的定义、η_J 是自然同构这一事实，以及假设中箭头 J_-f 的唯一性直接得出。

（11）根据假设，函子 $U \colon \mathcal{E} \to \mathcal{C}_-$ 忠实；根据（8），它是满的。因此结论由（10）得出。

（12）我们先证明每个完备对象都是内射的。假设 x 是完备的。令 $g\colon a\to b$ 为一个正箭头，且 $f\colon a\to b$ 是一个负箭头。则 $E_-f\colon Ea\to Ex\cong x$ 是一个满足 $E_-f\circ\mu_a=f$ 的箭头。于是存在 $E_+g\colon b\to Ea$，使得 $E_+g\circ g=\mu_a$。因此我们有 $E_-f\circ E_+f\colon b\to x$ 满足

$$E_-f\circ E_+g\circ g=E_-f\circ\mu_a=f.$$

至此，x 是内射对象的证明就完成了。

反过来，根据引理 4.11 和 (6)，若一个对象是内射对象，则它是完备的。 □

推论 4.15. 在定理 *4.14* 的假设下，以下断言等价：

(1) 正单极 $\mathcal{C}$ 有充足的内射对象；*(2)* 关于 $\mathcal{H}$ 的 $\mathcal{C}$ 中每个完备对象，都是正单极 $\mathcal{C}$中的内射对象；

(3) 正单极 $\mathcal{C}$ 的内射对象恰好是关于

$\mathcal{C}$完备的对象。

证明。(1)⇒(2) 设 a 是一个完备对象。设 $g\colon a\to z$ 是一个目标为 z 的正箭头。由于 a 是完备的，我们有 $E_+g\colon z\to Ea\cong a$ 是一个满足 $E_+g\circ g=1_a$ 的箭头。现在假设 $\varphi\colon x\to y$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个正箭头，且 $f\colon x\to a$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个箭头。将 z 的内射性假设应用于 φ 和 $g\circ f\colon x\to z$，我们得到一个满足 $f'\circ\varphi=g\circ f$ 的箭头 $f'\colon y\to z$。因此，$E_+g\circ f'\circ\varphi=E_+g\circ g\circ f=f$。这表明 a 是内射的。

(2)⇒(3) 根据假设，$\mathcal{C}$ 中相对于 $\mathcal{H}$ 的每个完备对象都是内射的。由引理 4.11，反之亦然。

(3)⇒(1) 箭头 η_x for x in $\mathcal{C}$ witness that 正单极 $\mathcal{C}$ 具有充足的内射对象 . □

定理 4.14 的结论证明了以下内容是合理的：

定义 4.16。设 $\mathcal{C}$ 是一个单极，且 $(\mathcal{H},U\colon\mathcal{E}\to\mathcal{C})$ 是 $\mathcal{C}$的一个电容器。则函子 U 构造 $\mathcal{C}$ 中关于 $\mathcal{H}$的完备化。

5. Boolean algebras and their completions

本节介绍上述框架在布尔代数中的一些应用。具体而言，我们证明，从完备布尔代数及其完备同态范畴到布尔代数范畴的典范遗忘函子，会在布尔代数范畴中构造包络。布尔代数的包络恰好就是它的完备化。关于布尔代数的参考资料，可参阅专著 [71, 106]。

5.1. **布尔代数范畴**。在本节中，我们令 $\mathcal{C}$ 为第 [71, 5.1]节中的布尔代数范畴。回忆一下，偏序集 P 是：

- 若任意两个元素 x，y 均属于 P 且具有上确界 $x\vee y$（或并）和下确界 $x\wedge y$（或交），则称其为一个格 ；
- 若 P 的任意子集都有上确界和下确界，则称其为完备格；
- 若其为具有最大元素 1 和最小元素 0 的格，则称其为有界格；
- 若 $\wedge$ 关于 $\vee$ 具有分配性（因此根据引理 1.17]反之亦然），则称其为分配格；

参见 [104, 定义 8.1]。

对于有界格中的元素 x、y，若 $x\wedge y=0$，则令 $x\perp y$。若元素 y属于 L，则称其为 x 的补元，当且仅当 $x\perp y$ 且$x\vee y=1$ [71, 定义 1.19]。若这样的补元存在，则它是唯一的 [71, 引理 1.20]。若有界格中的每个元素都有补元，则称该有界格为有补的。布尔代数 是有补的有界分配格 [71, 第 1 节5]。

$\mathcal{C}$ 中的态射是布尔代数同态。显然，布尔代数之间的函数只要保持交和补，或者对偶地保持并和补，就是同态。

容易看出，$\mathcal{C}$ 中的单态恰好是单同态，也称为嵌入 [71,定义 2.5]。布尔代数之间的嵌入必然是到其像上的同构，由此很容易推出，$\mathcal{C}$ 中的任意单态都是正则的。正如 [4] 所指出的，$\mathcal{C}$ 中的满态射是满射 同态；另见 [5,引理 4]。

设 B 是一个布尔代数，$A\subseteq B$ 是一个子代数。那么，当 A 中的每个元素都是 A [71, 中若干元素的上确界时，A 在 B 中是稠密的，定义 4.8]；另见定义 4.9]。这等价于断言：A 与每个非平凡理想 [71, 都有非平凡交，定义 5.4]。B 的每个稠密子代数 A 都是

特别地， [71, 是正则的，命题 4.17]。这意味着包含映射 $A \to B$ 保持任意上确界和下确界（当它们在 A 中存在时）。

$\mathcal{C}$ 中的态射是本质单态，当且仅当它是一个具有稠密像的嵌入；此时我们称其为本质嵌入；参见 [5, 引理 5]。（回想一下，一般而言，本质单态是一个箭头 f ，满足：对于任意箭头 g，若 gf 是单态，则 g 也是单态。）

5.2. **完备化**。每个布尔代数 A 都可以实现为某个完备布尔代数[71, 的稠密子代数，见定理 4.19]。这样的完备布尔代数本质唯一，记作 $M（A）$。我们将典范嵌入记为 $\eta_A : A \to M（A）$。

设 $f : A \to B$ 是布尔代数之间的一个嵌入。根据西科尔斯基延拓定理 [71, 定理 5.9]，存在一个同态 $g : B \to M（A）$ ，使得 $gf = \eta_A$。同态 g 是嵌入，当且仅当 f 是本质嵌入。由此可知，布尔代数范畴 $\mathcal{C}$ 中的内射对象恰好是完备布尔代数 [71, ，见定理 5.13]；另见 [53,定理 1]和 [5,命题 3]。

5.3. **连续同态**。设 A, B 为布尔代数。若同态 $f : A \to B$满足对于 A的任意子集 X ，

$$\bigwedge X = 0 \Rightarrow \bigwedge f(X) = 0;$$

见 [71, 定义 5.1]。注意，任何本质嵌入都是连续的。以下引理的证明是显然的。

引理 5.1。设 A 和 B 为布尔代数，且 $f : A \to B$ 为同态。以下断言等价：

(1) f 连续；*(2)* f 可延拓为连续同态 $M(A) \to M(B)$。

此外，在这种情况下，存在唯一的连续同态 $M(A) \to M(B)$ ，它延拓了 f。

5.4. **作为包络的完备化**。此外，设 $\mathcal{E}$ 为完备布尔代数构成的范畴。我们将 $\mathcal{E}$ 中的态射定义为连续同态。存在典范遗忘函子 $U : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$。也可以将 $\mathcal{E}$ 中的对象视为赋有序拓扑的拓扑布尔代数。布尔代数的完备性对应于每个单调网都有极限这一断言，而同态的完备性对应于连续性。

以下结果是上述评论的推论。特别是，它将布尔代数的内射包实现为一个包络。此外，它证明了这种内射包是由遗忘函子生成的U ，其含义见定义 4.16。

命题 5.2。设：

- $\mathcal{C}$ 为布尔代数的单极，其中态射为布尔代数同态，正态射为嵌入；
- $\mathcal{H}$ 为 $\mathcal{C}$ 的细化，其中包含本质嵌入；
- $\mathcal{E}$ 为完备布尔代数范畴，其态射为连续同态；
- $U : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ 为遗忘函子。

那么：

(1) $(\mathcal{H}, U : \mathcal{E} \to \mathcal{C})$ 是 $\mathcal{C}$的电容器；*(2)* $\mathcal{C}$ 中对应的负箭头是连续同态；*(3)* 函子 U 在布尔代数的正单极中，相对于本质嵌入的细化，构造布尔代数的包络；*(4)* 对于布尔代数 A，对应的包络是将 A 包含到其完备化中的典范包含。

6. Ordered spaces and their MacNeille completion

本节中，我们讨论了有序集（偏序集），并将有序集的麦克尼尔完备化视为由适当的遗忘函子构造出的包络。关于有序集的一般参考资料，可参阅 [60, 100, 104]。

6.1. 偏序集范畴。 本节中，我们令 $\mathcal{C}$ 为有序集（偏序集）的范畴 [5]。$\mathcal{C}$ 中的态射是单调映射（即保序映射）。

在偏序集范畴中，单态射是单射单调映射，而满态射是满射单调映射 [5, 引理 1]。偏序集之间的嵌入是到其像上的序同构。这些恰好是 $\mathcal{C}$ [5, 引理 1]中的正则单态射。与布尔代数的情形不同，在偏序集范畴中，并非每个单态射都是正则的。

设 B 是一个偏序集，且 $A \subseteq B$。那么 A 是：

- 若 B 中的每个元素都是 $\{a \in A$ 的上确界：$a \leq b\}$，则称其为并稠密；
- 若 B 中的每个元素都是 $\{a \in A$ 的下确界：$b \leq a\}$，则称其为交稠密；
- 若同时交稠密且并稠密，则称其为稠密。

考虑嵌入的像，同样的定义也适用于嵌入。

回忆一下，本质正则单态射 是一个正则单态射 f，满足：对于任意其他箭头 g，若 gf 是正则单态射，则 g 也是正则单态射。在偏序集范畴中，本质正则单态射恰好是稠密嵌入 [5,引理 3]。

6.2. 完备化。 偏序集的麦克尼尔完备化 ——也称为正规完备化 或 Dedekind–MacNeille完备化——推广了戴德金从有理数构造实数的方法 [85]；另见 [33, 第7], [104, 章第 8.3], 节和 [60, 第 1.10]节。

设 P 是一个偏序集。给定 P 的一个子集 A，定义 $\uparrow A$ 为 A的上界集，并定义 $\downarrow A$ 为 A [104,的下界集（定义 3.22]）。P 的麦克尼尔完备化是集合

$$M(P) := \{A \subseteq P : A = \downarrow\uparrow A\}.$$

注意，

$$\uparrow\downarrow A = \uparrow\left(\bigvee A\right)$$

根据 [104, 引理 3.23]。那么 $M(P)$ 是一个完备格，依据 [104, 定义 8.21]。可以将 $p \in P$ 与元素 $\downarrow p \in M(P)$ 等同。这便得到一个稠密嵌入 $P \to M(P)$，依据 [104, 定理 8.23]。我们将 P 与它在 $M(P)$ 中的像等同。若将 A 视为序集的布尔代数，则其布尔代数完备化与其麦克尼尔完备化同构，见 [5, 第 5]节；另见 [17, 定理 6.13]。

以下结论直接由 [60, 定理 1.10] 得出——另见 [5, 命题 2]——该定理断言麦克尼尔完备化在本质上是唯一的：

引理 6.1。 设 $f : P \to Q$ 是偏序集之间的稠密单调嵌入。那么存在一个单调映射$g : Q \to M(P)$，使得 $gf : P \to M(P)$ 是典范包含。

6.3. **连续映射。** 设 $f : P \to Q$ 是有序集之间的单调映射。称 f 为连续的 s 如果对每个子集 A 都满足 P 且 $a \in P$,

$$\bigwedge A = a \Rightarrow \bigwedge f(A) = f(a)$$

and

$$\bigvee A = a \Rightarrow \bigvee f(A) = f(a).$$

与布尔代数的情形一样，连续映射可以用以下方式刻画。

引理 6.2. 设 P, Q 为偏序集，且 $f : P \to Q$ 是单调映射。以下断言等价：

(1) f 是连续的；*(2)* f 可延拓为一个连续单调映射 $M(P) \to M(Q)$。此外，在这种情况下，f 延拓为连续单调映射 $M(P) \to M(Q)$ 的方式是唯一的。

6.4. 作为包络的麦克尼尔完备化。我们令 $\mathcal{E}$ 为以连续单调映射为态射的完备格范畴。与布尔代数的情形一样，我们有一个典范遗忘函子 $U : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$。根据上述说明，我们可以将偏序集的麦克尼尔完备化识别为一个包络。

命题 6.3。设：

- $\mathcal{C}$ 是以单调映射为态射、以嵌入为正态射的偏序集单极；
- $\mathcal{H}$ 是由本质嵌入构成的 $\mathcal{C}$ 细化；

- $\mathcal{E}$ 是完备格范畴，其态射为连续单调映射；
- $U:\ \mathcal{E}\to_{\geq}\mathcal{C}$ 是遗忘函子。

那么：

(1) $(\mathcal{H},U:\ \mathcal{E}\to_{\geq}\mathcal{C})$ 是 $\mathcal{C}$的一个电容器；*(2)* $\mathcal{C}$ 中相应的负箭头是连续单调映射；*(3)* 函子 U 相对于本质嵌入的细化，在偏序集的单极中生成偏序集的包络；*(4)* 对于偏序集 P，相应的包络是将 P 典范包含到其麦克尼尔完备化中。

7. Rings and their multiplier rings

本节我们考察环的乘子环，并指出它们是由遗忘函子生成的包络的又一例。

7.1. 乘子环。 令 $\mathcal{R}$ 为环的簇，它是一个代数的半阿贝尔范畴 [66, 例 2.6]；另见 [67]。对于一个环 R，定义其湮灭子

$$a_R(R):=\{x\in R: xR=Rx=0\}.$$

若环 R 满足 $a_R(R)$ 是平凡的 [111]，则称其为非退化。对于这样的环，R 的（含幺）乘子环 $M(R)$ 的元素是满足以下条件的自同态对 (λ,ρ)：

$$\lambda(a)b=a\rho(b)$$

其中 λ 是左 R-模同态，ρ 是右 R-模同态。加法由自同态的加法诱导，乘法则由复合给出。R 的一个元素 ξ 在 $M(R)$ 中给出一个元素 (λ_ξ,ρ_ξ)，其定义为

$$\lambda_\xi: a\mapsto a\xi \text{ and } \rho_\xi: a\mapsto \xi a.$$

当 R 是非退化 环时，赋值 $\xi\mapsto(\lambda_\xi,\rho_\xi)$ 定义了一个单同态。通过识别 g
R 其像包含于 M 中 （R），我们可以将 R 视为 $M(R)$ 的一个子环，事实上还是一个本质理想。
我们将 $M(R)$ 的一个元素（λ，ρ）记作 m，并且对于 a，$b\in R$，写作

$$\lambda(a)=ma \text{ and } \rho(b)=mb;$$

见 [111, 记号 1.3]。$M(R)$ 上的严格拓扑是使求值映射成为最弱的拓扑 s

$$M(R)\to R,\ (\lambda,\rho)\mapsto\lambda(a) \quad\text{and}\quad (\lambda,\rho)\mapsto\rho(a)$$

对每个 $a\in R$ 都连续，其中 R 赋予离散拓扑；见 [111, 定义 2.7]。

当 R 是域 k上的代数时，$M(R)$ 相对于由以下恒等式定义的标量乘法，也是一个 k-代数

$$a(\lambda m)=\lambda(am) \quad\text{and}\quad (\lambda m)b=\lambda(mb)$$

对于 $m\in M(R)$ 和 a，$b\in R$ 以及 $\lambda\in k$。

7.2. 局部单位元。 对于环 C 的子环 A，B，定义 AB 为由满足 $a\in A$ 和$b\in B$ 的 ab 生成的 C 的子模。环 A：

若 A 等于 AA，则称 $\bullet$ 是幂等的；
若乘法诱导出一个同构 $A\otimes_A A\to A$，则称 $\bullet$ 是坚实的；
若对于任意 $a\in A$，都存在 e，$f\in A$ 使得 $ae=fa=a$ [111,，则称 $\bullet$ 具有局部单位元。定义 2.1]，这意味着 A 是非退化、幂等且坚实的 [111, 引理 2.4]。

显然，任何含幺环都有局部单位元。如果 A 是一个具有局部单位元的环，那么对于 A 的每个有限子集 F，都存在 $e\in A$，使得对于每个 $a\in F$ [111, 都有 $ea=ae=a$ 定义 2.1]。此外，在赋予严格拓扑 [111, 后，A 在 $M(A)$ 中稠密命题 2.9]。特别地，存在一个网 (a_i) 属于 A，我们称之为 A的近似单位，它在 $M(A)$ 中严格收敛于 $\mathbf{1}$。

7.3. **霍普夫代数**。 乘子*Hopf*代数 在 [110]中被引入，作为局部紧量子群的一种代数模型；另见 [108, 第 2]章。在含幺 情形下，这就还原为通常的霍普夫代数概念，可将其视为紧 量子群的一种代数模型；见 [108, 第 1]章。

如 [111, 命题 3.3], 所示，任意乘子 Hopf 代数 A 都是一个具有局部单位元的环。特别地，它是非退化的、幂等的、坚实的，并且严格稠密嵌入其乘子代数 $M(A)$ 中，而后者是一个 Hopf 代数。

7.4. **非退化同态**。环同态 $f\colon\ A\to B$ 在具有局部单位元的环之间，如果 $f(A)B=Bf(A)=B$ [111, 定义 1.12]，则称其为非退化的。

引理 7.1。设 A、B 为具有局部单位元的环，且 $f\colon\ A\to B$ 为一个环同态。以下断言等价：

(1) f 是非退化的；*(2)* f 可扩展为严格连续的含幺环同态 $\varphi\colon\ M(A)\to M(B)$。此外，在此情况下，存在唯一的环同态 $M(A)\to M(B)$，其扩展了 f。

证明。 (1)⇒(2) 含幺环同态 φ在 [111, 定义 1.12]中通过如下方式定义

$$\varphi(m)b=\sum_i f(ma_i)b_i\quad\text{and}\quad b\varphi(m)=\sum_j b'_j f(a'_j m)$$

for

$$b=\sum_i f(a_i)b_i=\sum_j b'_j f(a'_j)$$

其中 $a_i,\ a'_j\in A$ 且 $b_i,\ b'_j\in B$。正如那里所观察到的，φ 是唯一一个扩张 f的环同态。从其定义显然可知，φ 是严格连续的。

(2)⇒(1) 设 (a_i) 是 A的一个近似单位。那么对于 $b\in B$，我们有

$$b=b1=b\varphi(1)=b\varphi(\lim_i a_i)=b\lim_i f(a_i)=\lim_i bf(a_i)$$

这表明 $b\in Bf(A)$。同样的证明表明 $b\in f(A)B$。 □

7.5. **具有局部单位元的环的电容器**。 令 $\mathcal{C}$ 为具有局部单位元的环及环同态所构成的范畴。我们将 $\mathcal{C}$ 视为一个极性，其中正箭头是以某个理想为像的内射环同态（正规单态射），而 $\mathcal{C}_-$ 由非退化环同态构成。正规本质单态射是指像为本质理想的箭头。（若一个理想与任意非零理想的交都非零，则称其为本质的 。）

定义 $\mathcal{E}$ 为一个范畴，其对象为含幺拓扑环，态射为连续含幺环同态。定义 $U:\mathcal{E}\to\mathcal{A}$ 为遗忘拓扑的遗忘函子。对于局部单位环A，定义 $M(A)$ 为赋予严格拓扑的乘子环，并令 $\mu_A\colon\ A\to UM(A)$ 为典范包含。于是，$E(A)=UM(A)$ 是将 A 视为无拓扑的环时的乘子环。

引理 7.2. 设 A,B 是具有局部单位元的环，且 $f\colon\ A\to B$ 是一个单同态，其像是 B的一个理想。那么：

(1) 存在唯一的含幺同态 $\psi\colon\ M(A)\to M(A)$，使得 $\psi\mu_B f=\mu_A$；*(2) (1)* 中的含幺同态 ψ 严格连续；*(3) (1)* 中的含幺同态 ψ 是单射，当且仅当 f 的像是 B的本质理想。

证明。 这在 [111, 命题 1.7] 中得到了证明。显然，对于 $m\in M(B)$ 和 $a\in A$，必有

$$a\cdot\psi(m)=f(a)\cdot m\text{ and }\psi(m)\cdot a=m\cdot f(a).$$

这一观察既说明了 ψ 的唯一性，也说明了它的严格连续性。 □

命题 7.3. 设：

- $\mathcal{C}$ 是具有局部单位元的环构成的单极，其中环同态为态射，像为理想的单态同态为正态射；
- $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{C}_+$ 对像为 本质 理想的单同态的细化；
- $\mathcal{E}$ 为拓扑含幺环范畴，其态射为连续环同态；

- $U:\ \mathcal{E}\to\underline{\mathcal{C}}$ 为遗忘函子。

于是:

(1) $(\mathcal{H},U:\ \mathcal{E}\to\underline{\mathcal{C}})$ 是 $\mathcal{C}$的一个电容器; *(2)* $\mathcal{C}$ 中的相应负箭头是非退化环同态; *(3)* 函子 U 在具有局部单位元的环的正单极中，关于以本质理想为像的单同态，构造具有局部单位元的环的包络; *(4)* 对于具有局部单位元的环 A，相应的包络是 A 到其乘子环的典范包含映射。

8. C*-algebras and their multiplier algebras

本节回顾 C*-代数理论中的一些结果，相关内容可参见专著[15, 16, 78]。随后，我们将证明 C*-代数的乘子代数是由某个函子构造的完备化。

8.1. C*-代数。 令 $\mathcal{A}$ 为 C*-代数及 *同态 [15, 的范畴，见第 II 章]。则 $\mathcal{A}$ 是一个半阿贝尔范畴 [46, ，见例 2.4]。若 A 是一个 C*-代数，则闭理想 $I\subseteq A$ 若与任意非零理想都有非零交 [15, ，便称为本质的，见 II.5.4.7]。$\mathcal{A}$ 中的正规单态射 是指像为理想的单射*同态; 该理想必然是闭的 且自伴的。 $\mathcal{A}$ 中的正规本质单态射 是指像为本质理想的单射*同态。C*-代数之间的 *同态 φ: $A\to B$ 若满足 $\varphi(A)B$在 B [15, 中稠密，则称为非退化的，见 II.7.3.9], ; 此时事实上 $\varphi(A)B=B$ [15, ，见 II.5.3.7]，这是由 Cohen因子分解定理 [16, 推得的，见 A.6.1]。因此，这一概念与代数背景下的非退化环同态概念一致。

8.2. 乘子代数。 设 A 是一个 C*-代数， $M(A)$ 是它的乘子代数。 A 上的对合通过以下公式在 $M(A)$ 上诱导出一个对合

$$am^*:=(ma^*)^*\quad\text{and}\quad m^*b:=(b^*m)^*.$$

此外，对于 $m\in M(A)$，线性算子

$$A\to A,\ a\mapsto ma\quad\text{and}\quad a\mapsto am$$

是有界的，且范数相同; 按定义，这就是 m 的范数。因此， $M(A)$ 成为一个 C*-代数，并且包含映射 $\mu_A:\ A\to M(A)$ 是一个非退化*同态; 参见 [15, II.7.3]。

$M(A)$ 上的严格拓扑 是 $M(A)$ 上使函数 $M(A)\to A$、 $m\mapsto am$ 和 $m\mapsto ma$ 连续的最弱拓扑，其中连续性是相对于范数拓扑而言的，参见 A [15, II.7.3.11]。由此，C*-代数运算在 $M(A)$ 上限制在单位球上时是连续的; 单位球是 $M(A)$ 中范数不超过 1 的元素所构成的子集。

可以用希尔伯特 C*-模理论 [78, 第 1]章来描述 $M(A)$。因此， A 可以看作其自身上的希尔伯特 C*-模。 A 上伴随算子的 C*-代数 $\mathcal{L}(A)$同构于 $M(A)$; 该同构将紧算子代数 $\mathcal{K}(A)$映到 A [15, 推论 II.7.3.10]。

下面对非退化 *同态的刻画，是 [78, 命题 2.5] 在希尔伯特 B-模 $\mathcal{E}$ 等于 B时的特例; 在这种情况下， $\mathcal{L}(\mathcal{E})$与 $M(B)$重合。

引理 8.1。 设 A、B 为 C*-代数，且 $f:\ A\to B$ 为一个 *同态。以下断言等价:

(1) f 是非退化的; *(2)* f 可延拓为一个幺 *-同态 $M(A)\to M(B)$，且该同态在单位球上严格连续。

此外，在此情况下，存在唯一的 *同态 $M(A)\to M(B)$ 延拓 f。

证明。 (1) 与 (2) 的等价性已在 [78, 命题 2.5]中确立。唯一性断言的证明与具有局部单位元的环的代数情形相同。□

8.3. **一个电容器　　适用于 C*-代数。** 以下是引理 7.2 在 C*-代数情形下的对应结果　　s.

引理 8.2。 设 A、B 是 C*-代数，且 $f:\ A\to B$ 是一个单同态，其像是 B的一个理想。那么:

(1) 存在唯一的幺 *-同态 $\psi:\ M(A)\to M(A)$ 使得 $\psi\mu_B f=\mu_A$; *(2) (1)* 中的含幺同态 ψ 在 $M(B)$的单位球上严格连续;

(3) (1) 中的含幺同态 ψ 是内射的，当且仅当 f 的像是 B的本质理想。

证明。 这是 [15, 定理 II.7.3.9] 的一个特例，适用于希尔伯特 B-模 $\mathcal{E}$ 就是其自身的情形。与具有局部单位元的环的代数情形一样，对于 $m \in M(B)$和 $a \in A$，我们必须有

$$a \cdot \psi(m) = f(a) \cdot m \quad \text{and} \quad \psi(m) \cdot a = m \cdot f(a).$$

这表明 ψ 在 $M(B)$的单位球上严格连续。 □

令 $\mathcal{E}$ 为一个范畴，其对象是严格幺 C*-代数，即赋予了某种拓扑（严格拓扑）的幺 C*-代数；这种拓扑通常不同于范数拓扑，并使 C*-代数运算在限制于单位球时连续。那么对于任意 C*-代数 A ，我们都可以将 $M(A)$视为 $\mathcal{E}$ 中的一个对象。 $\mathcal{E}$ 中的对象之间的态射是一个幺 *同态，且该同态是严格的，也就是说，限制于单位球时，它关于严格拓扑连续。我们有一个典范遗忘函子 $U : \mathcal{E} \to \mathcal{A}$ ，它会忘掉给定严格幺 C*-代数上的拓扑。

结合引理 8.1 和引理 8.2，可得到以下结论：

命题 8.3。设：

- $\mathcal{C}$ 为以 *-同态为态射、以像为理想的单射*-同态为正态射的 C*-代数单极；
- $\mathcal{H}$ 为 $\mathcal{C}$ 的细化，其中包含像为本质理想的单射*-同态；
- $\mathcal{E}$ 为幺元严格 C*-代数及幺元严格 *-同态所构成的范畴；
- U ： $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ 为遗忘函子。

那么：

(1) $(\mathcal{H}, U$ ： $\mathcal{E} \to \mathcal{C})$ 是 $\mathcal{C}$的一个电容器；*(2)* $\mathcal{C}$ 中相应的负箭头是非退化 *-同态；*(3)* 函子 U 在 C*-代数的正单极中，关于以本质理想为像的本质内射 *-同态，构造包络；*(4)* 对于 C*-代数 A，相应的包络是将 A 典范包含到其乘子代数中的包含映射。

9. The enveloping von Neumann algebra of a C*-algebra

本节最后，我们来考察 C*-代数的冯·诺伊曼包络，它由从冯·诺伊曼代数到 C*-代数的典范遗忘函子所诱导。

9.1. 冯·诺伊曼代数。 C*-代数可以具体地定义为希尔伯特空间上有界线性算子代数$B(H)$的范数闭 *-子代数。同样，冯·诺伊曼代数是$B(H)$的 *-子代数，并且在强算子拓扑（或等价地，弱算子拓扑） [94,下是闭的，见第 2.2 节6]。

正规非退化*同态为冯·诺伊曼代数之间提供了自然的态射概念。它们恰好是保持自伴元有界递增网的极限的 *-同态 [94, 第 2.5 节1]。设 M 是一个冯·诺伊曼代数。定义 M_* 为 M上正规线性泛函构成的巴拿赫空间。于是，求值映射建立了 M 与 M_* [94,的对偶空间之间的同构5], 第 3.6 节5], ，这刻画了 C*-代数中哪些是冯·诺伊曼代数。在此同构下，由 M_* 的对偶空间上的 w*拓扑在 M 上诱导的拓扑称为 σ-弱拓扑。冯·诺伊曼代数之间的 *-同态是正规映射，当且仅当它是 σ-弱连续的。

9.2. 冯·诺伊曼包络。设 A 是一个 C*-代数。 A 的一个表示是一个 *-同态 $\pi : A \to B(H)$，其中 H是某个希尔伯特空间。若该表示作为 *-同态是非退化的$A \to B(H)$，则称其为非退化表示。根据双交换子定理 [15, I.9.1.1], ，这等价于断言： $\pi(A)$在 $B(H)$ 中关于弱算子拓扑的闭包等于双交换子 $\pi(A)''$。

每个 C*-代数都有一个所谓的泛表示 ω_A ： $A \to B(H_A)$ [15, III.5.2.1]。根据定义，它是所有不可约表示的直和。 A 的冯·诺伊曼包络或包络冯·诺伊曼代数vN(A)，是 A 在泛表示下的像[15, III.5.2.5]在 $B(H_A)$中的弱闭包 $\omega_A(A)''$。

映射 $\mathrm{vN}(A)_* \to A^*$, $\phi \mapsto \phi \circ \omega_A$ 在 A 的冯·诺伊曼包络的预对偶与 A [15, III.5.2.6]的对偶 A^* 之间定义了一个等距同构。因此，相应的对偶映射也是一个等距同构

$A^{**} \to$ vN (A)。因此，vN (A)可以作为巴拿赫空间与 A的二重对偶相识别。此外，在此识别下，vN(A)上的 σ-弱拓扑与 A^{**}上的 w*拓扑相对应。因此， A 的冯·诺伊曼包络有时也称为 A 的二重对偶，并记作 A^{**}。此外，C*-代数 A 与其在 $A^{**} \cong$ vN (A)中的典范像相识别。

任意 *同态 $\phi\colon A \to B$ 都存在唯一的延拓 $\phi^{**}\colon A^{**} \to B^{**}$，使其成为它们的冯·诺伊曼包络之间的正规 *同态。

当 M 是冯·诺伊曼代数时， M 存在一个泛正规 表示 $\nu_M\colon M \to B(H_M)$。这是一个忠实正规表示，也是泛表示的一个直和项 。映射 ν_M 可延拓为正规 *同态 $M^{**} \to \nu_M(M)$，且该同态在 $\nu_M(M)$ 上为恒等映射（条件期望）。

9.3. **泛性质**。 冯·诺伊曼包络满足以下泛性质：每当 π 是 A 在希尔伯特空间 A 上的非退化表示时，都存在唯一的正规 *同态$\pi^{**}\colon A^{**} \to \pi(A)''$，使得 $\pi^{**}|_A = \pi$ [94, 第 2.5 节.1]。根据上述说明，这也可等价地表述如下：给定任意非退化 *同态 $\psi\colon A \to M$，它从 A 映到冯·诺伊曼代数M，且 $\psi(A)$ 在 M 中是 σ-弱稠密的，则存在唯一的正规 *同态 $\psi^{**}\colon A^{**} \to M$，使得 $\psi^{**}|_A = A$。

回顾一下，在 C*-代数范畴中，正规单态射是一个以理想为像的单射*同态。此外，它是正规本质单态射，当且仅当它是一个像为本质理想的单射*同态。

定义 9.1. 设 $\phi\colon A \to B$ 是 C*-代数之间的一个 *同态。若 $\phi^{**}\colon A^{**} \to B^{**}$的像在 σ-弱拓扑下稠密，则称 ϕ 为 vN-稠密。

引理 9.2. 设 $\phi\colon A \to M$ 是 *C**-代数之间的一个 *同态。假设 M 是冯·诺伊曼代数。以下断言等价：

(1) ϕ是 *vN*-稠密；*(2)* ϕ的像在 σ-弱拓扑下稠密。

证明. (1)⇒(2) 根据假设， $\phi\colon A^{**} \to M^{**}$ 的像在 σ-弱拓扑下稠密。将 M 视为其在泛正规表示下的像，并考虑正规条件期望 $E_M\colon M^{**} \to M$。那么 $E_M \circ \phi^{**}$的像在 σ-弱拓扑下稠密。由于 $(E_M \circ \phi^{**})|_A = \phi$，对于 ϕ也同样成立；

(2) 根据假设， $\phi(A)$ 在 M 中 σ-弱稠密，而 M 在 M^{**} 中 σ-弱稠密。因此， $\phi(A) \subseteq \phi^{**}(A^{**})$ 在 M^{**} 中 σ-弱稠密。□

鉴于以上说明，我们可以将 C*-代数的冯·诺伊曼包络视为一个包络，它由 U 从冯·诺伊曼代数到 C*-代数的遗忘函子关于 冯·诺伊曼稠密单射 *-同态的细化 而生成。

命题 9.3。设：

- $\mathcal{C}$ 是 *C**-代数的单极，其中 *-同态为态射，单射*同态为正态射；
- $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{C}$ 的细化，由冯·诺伊曼稠密单射 *-同态构成；
- $\mathcal{E}$ 是冯·诺伊曼代数的范畴，其中以 σ-弱连续 *-同态为态射；
- $U\colon \mathcal{E} \to_{\geq} \mathcal{C}$ 是遗忘函子。

那么：

(1) $(\mathcal{H}, U\colon \mathcal{E} \to_{\geq} \mathcal{C})$ 是 $\mathcal{C}$的电容器；*(2)* $\mathcal{C}$ 中相应的负箭头全都是*-同态；*(3)* 函子 U 在 *C**-代数的正单极中，关于 *vN*-稠密的 *-同态生成包络；*(4)* 对于 *C**-代数 A，相应的包络是将 A 包含到其双对偶中的典范包含。

References

1. Jiˇrí Ad´amek、Horst Herrlich、Jiˇrí Rosick´y 和 Walter Tholen，《单射包络并非自然的》，Algebra Univer- salis**48年**（2002），第4期，379–388。

2. Marlow Anderson, 《C(X) 的本质闭包》, 《美国数学会会刊》76（1979）, 第1期, 8–10。3. Steve Awodey, 《范畴论》, 《牛津逻辑指南丛书》第49卷, 克拉伦登出版社、牛津大学出版社, 纽约, 2006年。4. Bernhard Banaschewski, 《布尔代数的强 amalgamation》, Algebra Universalis 63（2010）, 第2期, 235–238。5. Bernhard Banaschewski 和 G¨unter W. Bruns, 《麦克尼尔完备化的范畴刻画》, 《数学档案》18（1967）, 369–377。6. Bernhard Banaschewski 和 Ale˘s Pultr, 《布尔化》, Cahiers de Topologie et G´eom´etrie Diff´erentielle Cat´egoriques 37（1996）, 第1期, 41–60。7. Dana Barto˘sov´a、Jordi Lopez-Abad、Martino Lupini 和 Brice Mbombo, 《巴拿赫空间和肖凯单纯形的 Ramsey性质及其应用》, Comptes Rendus Math´ematique. Acad´emie des Sciences. Paris 355（2017）, 第12期, 1242–1246。8. Ita¨ı Ben Yaacov, 《Gurarij 空间的线性等距群是普适的》, 《美国数学会会刊》142（2014）, 第7期, 2459–2467。9. , 《度量结构的 Fra¨ıss´e 极限》, 《符号逻辑杂志》80（2015）, 第1期, 100–115。10. Simon J. Bernau, 《阿基米德格群和正规阿基米德格环的唯一表示》, 《伦敦数学会会刊·第三辑》15（1965）, 599–631。11. , 《任意格群的侧完备化》, 《澳大利亚数学会杂志》19（1975）, 263–289。12. Guram Bezhanishvili、Patrick J. Morandi 和 Bruce Olberding, 《有界阿基米德ℓ-代数的戴德金完备化》, 《代数及其应用杂志》12（2013）, 第1期, 1250139, 16页。13. , 《戴德金完备化以及向量格和由正规函数表示的 ℓ-代数的函子方法》, 《范畴理论与应用》31（2016）, 第37号论文, 1095–1133。14. Papiya Bhattacharjee 和 Ricardo E. Carrera, 《紧正则框架中的包类》, Algebra Universalis 85 （ 2024 ）, 第 2 期, 第 17 号论文, 21页。15. Bruce Blackadar, 《算子代数》, 《数学科学百科全书》第122卷, 施普林格出版社, 柏林, 2006年。16. David P. Blecher 和 Christian Le Merdy, 《算子代数及其模——算子空间方法》, 《伦敦数学会专著·新辑》第30卷, 克拉伦登出版社、牛津大学出版社, 牛津, 2004年。17. Thomas S. Blyth, 《格与有序代数结构》, Universitext 丛书, 施普林格出版社伦敦有限公司, 伦敦, 2005年。18. B´ela Bollob´as 和 Imre Leader, 《带符号集合的 Erd˝os-Ko-Rado 定理》, 《计算机与应用数学》国际期刊, 第34卷, 1997年, 期刊缩写: Comput. Math. Appl., 第9–13页。19. Francis Borceux 和 Dominique Bourn, 《Malcev、原型模的、同调和半阿贝尔范畴》, 《数学及其应用》第566卷, 克吕维尔学术出版社, 多德雷赫特, 2004年。20. Andrea Brini, 《组合学、超代数、不变量理论与表示论》, 《洛塔林组合学研讨会》55（2005）。21. David Bryant、Andr´e Nies 和 Paul Tupper, 《关系度量结构的 Fra¨ıss´e 极限》, 《符号逻辑杂志》86（2021）, 第3期, 913–934。22. Rasmus Sylverster Bryder, 《边界、内射包络与约化交叉积》, 博士论文, 哥本哈根大学, 哥本哈根, 丹麦, 2017年。23. Robert C. Busby, 《C*-代数的双中心化子与扩张》, 《美国数学会汇刊》132（1968）, 79–99。24. Laurent Cantier 和 Eduard Vilalta, 《Cuntz 半群的 Fra¨ıss´e 理论》, 《代数杂志》658（2024）, 319–364。25. Ricardo E. Carrera 和 Anthony W. Hager, 《关于 ℓ-群的包类和空间的覆盖类》, 《斯洛伐克数学》61（2011）, 第3期, 411–428。26. Arianna Cecco, 《内射包的范畴论方法》, 《泛函分析年刊》15（2024）, 第3期, 第49号论文, 28页。27. Ruiyuan Chen, 《可 amalgam 图表形状》, 《符号逻辑杂志》84（2019）, 第1期, 88–101。

28. Man-Duen Choi 和 Edward G. Effros，内射性与算子空间，《泛函分析杂志》24 (1977年)，第 2 期，156–209。29. Henry B. Cohen，巴拿赫空间的内射包，《美国数学会通报》70 (1964年)，第 5 期，723–726。30. Paul Conrad，格序群的侧完备化，《伦敦数学会会刊》第三辑 19 (1969年)，444–480。31. ，阿基米德格序群的本质闭包，《杜克数学杂志》38 (1971年)，151–160。32. John Dauns，乘子环与本原理想，《美国数学会汇刊》145 (1969年)，125–158，出版者：美国数学会。33. Brian A. Davey 和 Hilary A. Priestley，《格与序导论》，剑桥数学教材，剑桥大学出版社，剑桥，1990年。34. Alan Day，代数等式类中的内射性，《加拿大数学杂志》24 (1972年)，第 2 期，209–220。35. Ivan Di Liberti 和 Fosco Loregian，2-范畴中的可达性与可表示性，《纯粹与应用代数杂志》227 (2023年)，第 1 期，107155。36. Christopher J. Eagle、Ilijas Farah、Bradd Hart、Boris Kadets、Vladyslav Kalashnyk 和 Martino Lupini，C*-代数的 Fra¨ıss´e 极限，《符号逻辑杂志》81 (2016年)，第 2 期，755–773。37. Samuel Eilenberg 和 Saunders MacLane，群扩张与同调，《数学年刊》第二辑 43 (1942年)，757–831。38. ，自然等价的一般理论，《美国数学会汇刊》58 (1945年)，231–294。39. Ioannis Emmanouil 和 Olympia Talelli，关于内射模的平坦长度，《伦敦数学会杂志》84 (2011年)，第 2 期。40. Alberto Facchini，广义戴德金整环及其内射模，《纯粹与应用代数杂志》94 (1994年)，第 2 期，159–173。41. Valentin Ferenczi、Jordi Lopez-Abad、Brice Mbombo 和 Stevo Todorcevic，空间的 amalgamation 与 Ramsey 性质，《数学进展》 369 (2020 年)，107190，76。´42. Roland Fra¨ıss´e，关于将序的若干性质推广到关系，《高等师范学校科学年刊》第三辑 71 (1954年)，363–388。43. Saeed Ghasemi，强自吸收C*-代数与 Fra¨ıss´e 极限，《伦敦数学会通报》53 (2021年)，第 3 期，937–955。44. Saeed Ghasemi 和 Wies-law Kubi´s，泛AF代数，《泛函分析杂志》279 (2020年)，第 5 期，108590，32。45. Marino Gran，正则范畴导论，《代数、拓扑与范畴的新视角》，科英布拉数学丛书，第 1 卷，施普林格，Cham，2021年，第 113–145 页。46. Marino Gran 和 Ji˘r´ı Rosick´y，半阿贝尔单子范畴，《范畴理论与应用》13 (2004年)，第 6 期，106–113。47. Ren´e Guitart，Monades involutives compl´ement´ees，《拓扑与微分几何札记》16 (1975年)，第 1 期，17–101。48. Shufeng Guo，环扩张上的相对内射包与相对投射覆盖，《代数通讯》52 (2024年)，第 7 期，2868–2883，电子预印本：https://doi.org/10.1080/00927872.2024.2309525。49. Don Hadwin 和 Vern I. Paulsen，分析与拓扑中的内射性和射影性，《中国科学：数学》54 (2011年)，第 11 期，2347–2359。50. Anthony W. Hager 和 Jorge Martinez，阿基米德格序群中各种完备性的包络，《序》16 (1999年)，第 1 期，89–103 (2000)。51. Anthony W. Hager 和 Jorge Mart´ınez，H¨older 范畴，《斯洛伐克数学》64 (2014年)，第 3 期，607–642。52. Anthony W. Hager 和 Brian Wynne，关于范畴中的最小真本质扩张，《数学问题》，《南非数学会杂志》46 (2023年)，第 3 期，495–512。53. Paul R. Halmos，内射布尔代数与投射布尔代数，《纯数学专题讨论会论文集》第 II 卷，美国数学会

·, 普罗维登斯 , RI, 1961, pp. 114–122 .

54. Masamichi Hamana，巴拿赫模的内射包，《东北数学杂志》30 (1978)，第 3 期，439–453。55. ，C*-代数的内射包，《日本数学会杂志》31 (1979)，第 1 期，181–197。56. ，算子系统的内射包，《数理科学研究所出版物》15 (1979)，第 3 期，773–785。57. ，C*-动力系统的内射包，《东北数学杂志》37 (1985)，第 4 期，463–487。58. ，动力系统的内射包，《算子代数与算子理论》，皮特曼数学研究札记丛书，第 271 卷，Longman Sci. Tech.，Harlow，1992。59. ，动力系统的内射包，《富山数学杂志》34 (2011)，23–86。60. Egbert Harzheim，有序集，《数学进展》（施普林格），第 7 卷，施普林格，纽约，2005。61. Chris Heunen 和 Jamie Vicary，《量子理论范畴》，牛津数学研究生教材，第 28 卷，牛津大学出版社，牛津，2019。62. Wilfrid Hodges，《通过博弈构造模型》，伦敦数学学会学生教材，第 2 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1985。63. ，《模型论》，《数学及其应用百科全书》，第 42 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1993。64. John R. Isbell，巴拿赫空间的内射包具有刚性附着性，《美国数学会通报》70 (1964)，第 5 期，727–729。65. ，关于巴拿赫空间内射包的三点说明，《数学分析与应用杂志》27 (1969)，第 3 期，516–518。66. George Janelidze、L´aszl´o M´arki 和 Walter Tholen，《半阿贝尔范畴》，《纯粹与应用代数杂志》168 (2002)，第 2 期，367–386。67. George Janelidze、L´aszl´o M´arki 和 Aldo Ursini，《泛代数与半阿贝尔范畴中的理想与团块》，《代数杂志》307 (2007)，第 1 期，191–208。68. Paul C. Kainen，《弱伴随函子》，《数学杂志》122 (1971)，1–9（und）。69. Jerzy K.akol、Wies-law Kubi´s 和 Albert Kubzdela，关于非阿基米德古拉里空间，《数学分析与应用杂志》450 (2017)，第 2 期，969–981。70. Gregory M. Kelly，《富化范畴论基本概念》，《范畴论及其应用理论重印本》（2005），第 10 期，vi+137。71. Sabine Koppelberg，《布尔代数手册》第 1 卷，North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹，1989。72. Ralf Kr¨omer，《工具与对象》，科学网络：历史研究，第 32 卷，Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，2007。73. Wies-law Kubi´s，《Fra¨ıss´e 序列：泛齐性结构的范畴论方法》，《纯粹与应用逻辑年刊》165 (2014)，第 11 期，1755–1811。74. ，弗雷斯极限的内射对象与收缩，《数学论坛》27 (2015)，第 2 期，807–842。75. ，古拉里空间的博弈论刻画，《数学档案》110 (2018)，第 1 期，53–59。76. Wies-law Kubi´s 和 Aleksandra Kwiatkowska，《莱莱克扇与波尔森单形作为 Fra¨ıss´e 极限》，《西班牙皇家精确、物理与自然科学学院杂志 A 辑：数学》111 (2017)，第 4 期，967–981。77. H. Elton Lacey 和 H. B. Cohen，关于巴拿赫空间的内射包，《泛函分析杂志》4 (1969)，11–30。78. E. Christopher Lance，《希尔伯特 C*-模》，伦敦数学学会讲义丛书，第 210 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1995。79. Urs Lang，某些离散度量空间与群的内射包络，《拓扑与分析杂志》5 (2013)，第 3 期，297–331。80. Michel Las Vergnas，定向拟阵中的凸性，《组合论杂志》B 辑 29 (1980)，第 2 期，231–243。81. Martino Lupini，算子空间与算子系统中 Kirchberg 核嵌入定理的类比，《数学分析与应用杂志》431 (2015)，第 1 期，47–56。82. ，泛函分析中的 Fra¨ıss´e 极限，《数学进展》338 (2018)，93–174。

83. Jacob Lurie，《高阶拓扑斯理论》，数学研究年刊，第170卷，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2009年。84. Saunders Mac Lane，《工作数学家的范畴论》，第二版，数学研究生教材，第5卷，施普林格出版社，纽约，1998年。85. Holbrook M. MacNeille，《偏序集》，《美国数学会汇刊》42（1937年），第3期，416–460。86. F. Marmolejo 和 R. J. Wood，《Kan延拓与松弛幂等伪单子》，《范畴理论与应用》26（2012年），第1期，1–29。87. Jorge Mart´ınez，《带单位元的阿基米德格序群的包类：综述》，《有序代数结构》，发展数学，第7卷，Kluwer学术出版社，多德雷赫特，2002年，第89–121页。88. Dragan Masulovi´c，《置换的对偶Ramsey定理》，《组合学电子期刊》24（2017年），第3期，论文编号3.39，共12页。89.，《前伴随与Ramsey性质》，《欧洲组合学杂志》70（2018年），268–283。90. Dragan Masulovi´c 和 Lynn Scow，《原始代数有限幂的范畴等价与Ramsey性质》，Algebra Universalis 78（2017年），第2期，159–179。91. Shuhei Masumoto，《Jiang-Su代数作为Fra¨ıss´e极限》，《符号逻辑杂志》82（2017年），第4期，1541–1559。92. Eben Matlis，《Pr¨ufer环上的内射模》，名古屋数学杂志15（1959年），57–69。93. Timur Oikhberg，《p-多范数空间中的内射性与射影性》，《正性》22（2018年），第4期，1023–1037。94. Gert K. Pedersen，《C*-代数及其自同构群》，伦敦数学会专著，第14卷，Academic Press Inc.，伦敦，1979年。95. Hans-Eberhard Porst，《内射包的刻画》，《拓扑与微分几何笔记》22（1981年），第4期，399–406。96. Robert Raphael 和 R. Grant Woods，《关于C(X)的本质环嵌入与满射包》，《范畴理论与应用》14（2005年），第2期，46–52。97. Robert M. Raphael 和 R. Grant Woods，《C(X)的满射包》，《拓扑及其应用》105（2000年），第1期，65–88。98. Ji˘r´ı Rosick´y，《关于胞腔内射对象的唯一性》，《剑桥哲学学会数学会刊》167（2019年），第3期，489–504。99. Zhong-Jin Ruan，《算子空间的内射性》，《美国数学会汇刊》315（1989年），第1期，89–104。100. Sergiu Rudeanu，《集合与有序结构》，Bentham Science Publishers, Ltd.，伊利诺伊州奥克帕克，2012年。101. Wolfgang Rump 和 Yi Chuan Yang，《概形空间的本质覆盖与绝对覆盖》，Colloquium Mathematicum 114（2009年），第1期，53–75。102.，《阿基米德l群的侧完备化与结构层》，《纯粹与应用代数杂志》213（2009年），第1期，136–143。103. Jean-Pierre Schneiders，《拟阿贝尔范畴与层》，法国数学会回忆录，新系列（1999年），第76期，vi+134。104. Bernd Schr¨oder，《有序集》，第二版，Birkh¨auser/施普林格，2016年。105. David W. Sharpe 和 Peter V´amos，《内射模》，剑桥数学与数学物理论丛，第62号，剑桥大学出版社，伦敦—纽约，1972年。106. Roman Sikorski，《布尔代数》，第三版，数学及其边缘领域成果，第25卷，施普林格出版社纽约公司，纽约，1969年。107. Ross Street 和 Robert Walters，《2-范畴上的Yoneda结构》，《代数杂志》50（1978年），第2期，350–379。108. Thomas Timmermann，《量子群与对偶性导论》，欧洲数学会数学教材，欧洲数学会，2008年。109. Mary Angelica Tursi，《一个可分普适齐次Banach格》，《国际数学研究通知》（2023年），第7期，5438–5472。110. Alfons Van Daele，《乘子Hopf代数》，《美国数学会汇刊》342（1994年），第2期，917–932。111. Alfons Van Daele 和 Joost Vercruysse，《乘子代数与局部单位元》，2025年7月，arXiv:2507.08769。

112. Charles Walker，*Yoneda* 结构与 *KZ* 教义，《纯粹与应用代数杂志》**222** （2018年），第6期，1375–1387。

Department of Philosophy, Linguistics and Theory of Science, University of Gothenburg, Gothenburg, Sweden.
Email address: diliberti.math@gmail.com*URL*: http://www.lupini.org/

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Piazza di Porta S. Donato, 5, 40126 Bologna, Italy
Email address: martino.lupini@unibo.it*URL*: http://www.lupini.org/