arXiv:2603.13586v1 [math.SP] 13 Mar 2026

规范哈密顿系统的谱分析问题

N. MAKAROV、A. POLTORATSKI 和 A. ZHANG

To Barry Simon, our colleague and teacher, on the occasion of his 80's birthday.

Abstract. 本文聚焦于近期通过我们先前论文中提出的方法，针对典范微分方程系统谱分析所取得的成果 [16, 17, 18, 19, 32, 40]。我们的许多研究成果都受到 Barry Simon 及其合作者开创性研究的启发；例如，参见正文中引用的论文。我们讨论典范哈密顿系统的逆谱问题（ISP）以及薛定谔算子的混合谱问题¨。我们的目标之一是展示逆谱问题与经典分析工具之间的联系，例如希尔伯特变换、正交多项式、间隙问题以及黎曼-希尔伯特问题的解。我们通过实例说明研究结果，并探讨进一步的问题。

1. Introduction

本文聚焦于半直线上二阶微分算子谱问题的各个方面。

正规半直线典范（哈密顿）系统是如下方程

$$\Omega \dot{X} = z\mathcal{H}X \qquad \text{on} \quad [0,\infty). \tag{1.1}$$

这里，哈密顿量 $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t)$ 是给定的 2×2 矩阵函数，满足

$$\mathcal{H} \in L^1_{\mathrm{loc}}[0,\infty), \quad \mathcal{H} \neq 0 \quad \text{a.e.}, \quad \mathcal{H} \geq 0 \quad \text{a.e.}$$

第一个关系表示， $\mathcal{H}$ 的各项在每个有限区间上均可积。满足这一条件的系统称为正则。（1.1）中的矩阵 Ω 是辛矩阵

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

并且 $z \in \mathbb{C}$ 是“谱参数”。未知函数 $X = X(t,\ z)$ 是 $[0,\infty)$ 上的二维向量函数。

第二作者获得了美国国家科学基金会资助项目 DMS-2244801的部分资助。

Krein-de Branges理论以复分析的语言表述典范系统的谱问题。它可应用于数理物理中的广泛问题，包括薛¨定谔算子、狄拉克系统和弦方程。有关该理论的最新介绍，请参阅[34]。

经典谱问题分为两大类：正问题和逆问题。在正问题中，需要根据算子的哈密顿量 $\mathcal{H}$ （或势 q）求出其谱或谱测度；而在逆问题中，则旨在根据谱信息恢复 $\mathcal{H}$ （或 q）。马尔琴科的一项著名结果 [21, 22] 表明， q 可以由谱测度唯一恢复。另一个经典结果是博格双谱定理， [6], 该定理表明， q 可以由两个谱恢复，这两个谱分别对应于不同的边界条件对，详见第6.2 节的进一步讨论。

在本文的第一部分（第2-5节）中，我们重点研究半直线上的典范哈密顿系统的谱问题，尤其关注逆问题。我们将马尔琴科、Gelfand-Levitan 和 Krein 的经典结果推广到更广泛的典范系统类，给出显式的求解算法、收敛结果和公式，以及具体的实例。这一框架还使我们能够研究逆谱问题与经典分析工具之间的联系，包括希尔伯特变换、正交多项式、黎曼–希尔伯特问题的解以及贝塞尔函数。在整个分析过程中，我们强调计算方面，并给出哈密顿量恢复的显式公式。

一种相对较新的谱问题类型，即所谓的混合谱问题，旨在根据势和谱的部分信息恢复算子。Hochstadt 和 Lieberman 提出的著名定理 1978 [12] 指出，对于 $(0,\pi)$ 上的薛定谔方程，若已知区间 $(0,\pi/2)$ 上一半区间内的势以及其中一个谱，就可以唯一地恢复算子。该结果是精确的，因为仅知道去掉一个点后的谱，或仅知道 $(0,\pi/2-\varepsilon)$ 上的势，都不足以完成恢复。del Rio、Gesztesy、Horvath、Simon 等人沿此方向取得的进一步成果[36, 10, 8, 13, 16] 使人们能够结合谱信息和直接信息的不同部分来恢复算子。

受 Simon 和 Gesztesy 在 [11], 论文第二部分（第6–8节）中的反例启发，本文结合了微分算子混合谱问题理论中的思想与调和分析中不确定性原理（UP）的最新进展。借助 UP 的间隙

与型问题的新结果，我们给出 Borg 双谱定理的一个版本，适用于特征值位置存在不确定性的 Schr¨odinger 算子。我们还给出了精确“不确定性大小”的显式公式，该大小以特征值允许落入的区间长度表示。除此之外，我们还描述了混合谱问题三区间情形中出现的成对不定算子。

本文结构安排如下：

第2 节概述 Krein-de Branges 理论的基础，以及谱问题中用到的必要结果和公式。第3 节聚焦于求解 Paley-Wiener 系统的逆谱问题。第4 节给出周期谱测度的显式算法，以及非周期测度的收敛结果。第5节研究具有齐次和准齐次谱测度的典范系统。第6节介绍混合谱问题的其他背景材料。第7节讨论间隙与型问题，以及薛定谔¨算子的混合谱问题与 Beurling–Malliavin 指数系完备性问题之间的联系。第8 节介绍一个带有不确定性的双谱定理版本，并讨论三区间情形。第9 节以多种示例作结，阐释我们的方法和公式，并提出若干未解决问题。

通篇文章中，我们着重强调思想和结构性结果；在大多数地方，我们省略详细计算和完备证明，并请读者参阅所引用的文献以获取完整论证。

2. Preliminaries to spectral problems

2.1. **典范系统与 de Branges 空间**。除了引言中讨论的二维向量函数 X 之外，还可以寻找一个 2×2 矩阵值解 $M = M(t,z)$，满足（1.1）。满足初始条件 $M(0,z) = I$ 的这种矩阵值函数称为该系统的传递矩阵 或矩阵解。传递矩阵的各列 M 是系统（1.1）在 0 处满足初始条件 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ （诺伊曼）和 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ （狄利克雷）的解。一般而言，我们记

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

整函数 $F(z)$ 属于 Hermite-Biehler（HB）类，当且仅当

$$|F(z)| > |F(\overline{z})| \text{ for all } z \in \mathbb{C}_+.$$

如果整函数在 $\mathbb{R}$ 上取实值，我们就称其为实函数。

对于每个固定的 t，系统（ M 1.1 的传递矩阵中的各元素A（z） $= A$（t， z） $\equiv A_t$（z）、 B（z） C（z）和 D（z）都是实整函数。这些函数

$$E := A - iC, \qquad \tilde{E} := B - iD$$

属于上文定义的 Hermite-Biehler 类；例如参见 [34]。

对于整函数 G ，我们将其关于 $\mathbb{R}$ 的施瓦茨反射记为 $G^{\#}$ $G^{\#}$（z） $= G$（z）。我们将上半平面中的标准哈代空间记为 H^2 。

对于每个 Hermite-Biehler（HB）函数 F ，都可以考虑 de Branges（dB）空间 $\mathcal{B}$（F），这是一个由下式定义的整函数希尔伯特空间：

$$\mathcal{B}(F) = \left\{ G \,|G \text{ is entire}, \frac{G}{F}, \ \frac{G^{\#}}{F} \in H^2 \right\}.$$

$\mathcal{B}$（F）中的希尔伯特空间结构继承自 H^2:

$$< G, H >_{\mathcal{B}(F)} = \left\langle \frac{G}{F}, \frac{H}{F} \right\rangle_{H^2} = \int_{-\infty}^{\infty} G(t)\overline{H}(t) \frac{dt}{|F(t)|^2}.$$

空间 $\mathcal{B}$(E)是一个再生核希尔伯特空间，也就是说，对于每个 $\lambda \in \mathbb{C}$，都存在 K(λ， ·) $\in \mathcal{B}$(E)，使得对任意 $F \in \mathcal{B}$(E)，

$$F(\lambda) =< F, K(\lambda, \cdot) >_{\mathcal{B}(E)} .$$

函数 K(λ， z)称为点 λ处的再生核（reprokernel）。对于 dB 空间 $\mathcal{B}$(E)， K(λ， z)的公式为

$$K(\lambda, z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{E(z)E^{\#}(\overline{\lambda}) - E^{\#}(z)E(\overline{\lambda})}{\overline{\lambda} - z} = \frac{1}{\pi} \frac{A(z)C(\overline{\lambda}) - C(z)A(\overline{\lambda}))}{\overline{\lambda} - z},$$

其中 $A = (E + E^{\#})/2$ 和 $C = (E^{\#} - E)/2i$ 是实整函数，且满足 $E = A - iC$。

˜与典范系统（1.1）相对应的函数 E， E 生成了如下 de Branges 空间族

$$\mathcal{B}_t = \mathcal{B}(E(t, \cdot)), \qquad \tilde{\mathcal{B}}_t = \mathcal{B}(\tilde{E}(t, \cdot)).$$

若值 t 不属于某个开区间，且在该区间上$\mathcal{H}$ 是一个秩一常矩阵，则称其为 $\mathcal{H}$-正则。空间 $\mathcal{B}_t$， $\mathcal{B}_t$ 构成链，也就是说，对于 $s < t$ ， $\mathcal{B}_s \subsetneq \mathcal{B}_t$ ，且当 t 和 s为正则时，该包含关系是等距的。

若 E 是一个在 $\mathbb{R}$上不为零的 HB 函数，则可以为 E定义一个连续的辐角分支。函数 ϕ_E(x) $=$ −arg E(x)称为空间 $\mathcal{B}$(E)的相位函数。不难证明，ϕ_E 是一个递增的实解析函数， $\phi' > 0$ 在 $\mathbb{R}$上。

在我们的公式中，位于 0 处的核起着特殊作用： $K_t(z,\ 0)$和$\tilde{}K_t(z,\ 0)$。我们记 $k_t(z) = K_t(z,\ 0)$。

2.2. 谱测度。 引入典范系统的谱测度有几种方法。为简化起见，我们假设系统没有“跳跃区间”，即哈密顿量为秩一常数的区间。在这种情况下，所有 $t \in [0, \infty)$ 都是 $\mathcal{H}$-正则的，并且所有$\tilde{}$ $\tilde{}$包含 $\mathcal{B}_s \subset \mathcal{B}_t, \mathcal{B}_s \subset \mathcal{B}_t$ 都是等距的。我们可以作此假设，因为我们主要关注 $\det \mathcal{H} \neq 0$ 几乎处处成立的情形。

若测度 μ在 $\mathbb{R}$ 上满足下式，则称其为泊松有限（Π-有限）：

$$\int \frac{d|\mu|(x)}{1+x^2} < \infty.$$

ˆ若测度 $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 满足 Π-有限，则它可表示为 $\mathbb{R}$ 上的一个 Π-有限测度与无穷远处的一个有限点质量之和。

对于 dB空间 $\mathcal{B}$（E），存在一族标准的单参数离散测度，定义在 $\mathbb{R}$ 上，使得 $\mathcal{B}$（E）$\overset{\text{iso}}{=} L^2$（$\mu$）。令 $\alpha \in \mathbb{C},\ |\alpha| = 1$，并用 t_n 表示 $\mathbb{R}$ 上的点序列，使得

$$\frac{E^{\#}(t_n)}{E(t_n)} = \alpha.$$

用相位函数表示，$\phi(t_n) = \arg \alpha$（模 π）。考虑测度

$$\mu_\alpha = \sum_n \frac{\pi}{\phi'(t_n)|E(t_n)|^2} \delta_{t_n}. \tag{2.2}$$

那么 $\mathcal{B}$（E）$_{\text{iso}} = L^2$（μ_α），对于 α 的所有取值，至多一个例外，参见例如 [7]。

根据定义，μ 上的正测度 $\mathbb{R}$ 是具有初始条件 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$、在 $t = 0$ 处的规范系统（1.1）的谱测度，当且仅当

$$\forall t, \qquad \mathcal{B}_t \overset{\text{iso}}{\subset} L^2(\mu).$$

（对于哈密顿量存在跳跃区间的情形，定义会稍微复杂一些，而本文不考虑这种情形。）众所周知，正则规范系统的谱测度是 Π-有限的；参见例如 [34]。以˜类似的方式，利用 B_t，可以定义初始条件 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$所对应的谱测度 $\tilde{\mu}$。

反过来，Krein-de Branges理论的一个主要结果表明，每个正的 Π-有限测度都是某个正则规范系统的谱测度。注意，一般而言，相应的系统可能不满足 $\det \mathcal{H} \neq 0$

几乎处处成立，这是本文第一部分所假设的限制。此外，本文所考虑系统对应的 HB 函数在实轴上没有零点。在对 de Branges 空间进行一般讨论时，我们将假设这一限制。（如果 E 在 $\mathbb{R}$ 的某点取值为零，那么根据定义，$\mathcal{B}(E)$ 中的所有函数都必须在同一点取值为零。本文讨论的 Paley–Wiener 型空间显然不具有这一性质。）

每个正则典则系统都有一个谱测度；事实上，对于 μ我们可以取测度族 $|E_t|^{-2}$ 的任意极限点 $t \to \infty$， [7]。谱测度可能是唯一的，也可能不是。它是唯一的，当且仅当

$$\int \operatorname{trace} \mathcal{H}(t)dt = \infty.$$

谱测度唯一的情形称为极限点情形，而谱测度不唯一的情形称为极限圆情形。

最后，我们提到，谱测度对于“时间”参数化是不变的，即在初始系统 t（1.1）中通过递增同胚 $t \mapsto s$（t）进行变量替换不会改变谱测度。

2.3. **Paley–Wiener 空间**。 我们将在 $L^2(\mathbb{R})$ 中采用以下傅里叶变换的定义：

$$(\mathcal{F}f)(\xi) \equiv \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\xi x} f(x)dx,$$

首先在测试函数上定义，然后通过帕塞瓦尔定理将其扩展为酉算子$\mathcal{F}L^2(\mathbb{R})$ $\to$ $L^2(\mathbb{R})$。由整函数构成的 Paley–Wiener 空间 PW_t定义为其像

$$\mathrm{PW}_t = \mathcal{F}L^2[-t, t].$$

根据 Paley-Wiener 定理，PW_t 也可等价地定义为指数型不超过 t 且属于 $L^2(\mathbb{R})$ 的整函数空间。PW_t 中的希尔伯特结构继承自 $L^2(\mathbb{R})$。

Paley-Wiener 空间是自由系统$\mathcal{H} = I$的 de Branges 链 $\mathcal{B}_t$。

2.4. **亚历山德罗夫–克拉克测度与对偶测度**。令 φ 为 $H^\infty(\mathbb{C}_+)$单位球中的一个函数（此类函数通常称为舒尔函数）。每个这样的 φ都对应一族 Π有限正测度$\{\sigma_\alpha^\varphi\}_{\alpha\in\mathbb{T}}$，定义在 $\hat{}\mathbb{R}$上，其定义公式如下：

$$\Re\frac{\alpha + \varphi(z)}{\alpha - \varphi(z)} = py + \frac{1}{\pi}\int \frac{yd\sigma_\alpha^\varphi(t)}{(x-t)^2 + y^2}, \qquad z = x + iy, \tag{2.3}$$

其中，数值 πp 可解释为 σ_α^φ 在 ∞处的点质量。这类测度 σ_a^φ 称为 φ的亚历山德罗夫–克拉克（AC）测度。AC 测度族见于复函数论及其在扰动理论和谱问题中的应用，例如参见 [31]。

这些测度 $\{\sigma_\alpha^\varphi\}_{\alpha\in\mathbb{T}}$ 中至多有一个在无穷远处具有点质量：

$$\sigma_\alpha(\infty)\neq 0 \text{ iff } \varphi(\infty)=\alpha,$$

按照非切向极限的意义，且 $\varphi-\alpha\in L^2(\mathbb{R})$。

由定义可知，所有测度 σ_α^φ 都是奇异的，当且仅当其中一个是奇异的，当且仅当 φ 是内函数。所有测度都是离散的，当且仅当其中一个是离散的，当且仅当 φ是亚纯内函数（MIF），即可以亚纯延拓到整个平面的内函数。

如果 $\varphi=\theta$ 是亚纯内函数（MIF），
那么

$$\sigma_\alpha\cdot 1_{\mathbb{R}}=2\pi\sum_{\theta(\xi)=\alpha}\frac{\delta_\xi}{|\theta'(\xi)|}, \tag{2.4}$$

这可由定义推得。

每个 HB 函数 $E(z)$ 都会产生一个 MIF，$\theta_E=E^\#/E$。在这种情况下，最后一个公式与（2.2）密切相关，且这两个公式中涉及的测度满足

$$\sigma_a=|E|^2\mu_\alpha.$$

我们将称两个 II-有限正测度 μ 和 $\tilde{\mu}$ 在 $\mathbb{R}$ （AC）对偶，若存在一个舒尔函数 φ 使得 $\mu=\sigma_{-1}^\varphi$ 且 $\tilde{\mu}=\sigma_1^\varphi$，详见第4节和 [18]，其中有进一步的详细讨论。

上述测度对偶性与谱问题之间的联系，体现在如下性质中：若 μ是某个典范系统在 0 处满足诺伊曼初始条件时的谱测度，那么同一系统在满足狄利克雷初始条件时的谱测度 $\tilde{\mu}$ 与 μ对偶。类似地，满足（2.3）的其他测度 α 对应于同一系统的其他初始条件。另请注意，来自同一 AC 族的任意两个测度 σ_α 和 σ_β，$\alpha\neq\beta$在相差常数倍的意义下互为对偶，即存在C_1，$C_2>0$ 使得 $C_1\sigma_\alpha$ 和 $C_2\sigma_\beta$ 互为对偶。

2.5. **PW 系统与 PW 测度**。设 $\mathcal{H}$ 是典范系统（1.1）的哈密顿量。我们称 $\mathcal{H}$ 具有 PW 型（$\mathcal{H}\in$PW），如果对于任意 $t>0$，都存在 $s=s(t)>0$ 使得 $s(t)\to\infty$ 当 $t\to\infty$ 时成立，并且空间$\mathcal{B}_t(\mathcal{H})$ 与 PW$_s$ 作为集合相等（范数可以不同），

$$\mathcal{B}_t(\mathcal{H})\doteq \mathrm{PW}_s. \tag{2.5}$$

我们称相应的系统为 PW 型系统。

由 [18]中的引理 3.1 以及 [14]的结果可知，所有正则狄拉克系统（具有局部可积势的系统）均为 PW 型；另见 [5]。所有 PW 型系统构成的类远比经典 Gelfand-Levitan 理论中所考虑的类广泛；进一步讨论见 [18] 。

根据定义，若正测度 μ on $\mathbb{R}$ 是 PW 采样（$\mu \in \mathrm{PW}$），即它是所有 Paley–Wiener 空间 PW_t的采样测度：

$$\forall t \quad \exists C > 0, \qquad \forall f \in \mathrm{PW}_t, \qquad C^{-1}\|f\| \le \|f\|_{L^2(\mu)} \le C\|f\|.$$

给定 μ and $\delta > 0$，若区间 $l \subset \mathbb{R}$ 相对于 μ 是 δ-大质量的，则

$$\mu(l) \ge \delta \text{ and } |l| \ge \delta.$$

区间 $I \subset \mathbb{R}$ 相对于 μ的 δ-容量 记为 $C_\delta(I)$，定义为与 I相交的互不相交的 δ-大质量区间的最大数量。

所有 PW 采样测度的集合有如下初等描述

定理 2.1 ([18])。 μ 是 *PW* 采样测度，当且仅当

(i) 对任意 $x \in \mathbb{R}$, $\mu\,(x, x+1) \le \mathrm{const}$；*(ii)* 对任意 $t > 0$，存在 L 和 δ，使得对于所有 I, $|I| \ge L$,

$$C_\delta(I) \ge t|I|.$$

最基本的例子是，任何形如 $\rho(x)m(x)$ 的测度，其中 $0 < c < \rho(x) < C < \infty$，都是 PW 采样测度。更多例子请参见 [18]。

我们称测度 μ 具有局部无限支撑，如果对于某个 $C > 0$, supp $\mu \cap [-C, C]$是一个无限集；等价地，如果 supp μ 具有有限聚点。对于周期测度，可以很容易地推出以下结论

推论 2.2 （[18]）。 正的局部有限周期测度是 *Paley-Wiener* 测度，当且仅当它具有局部无限支撑。

PW 系统与 PW 采样测度通过以下陈述相关联。对于 $\mu \in$PW，我们用 $\mathrm{PW}_t(\mu)$ 表示赋予了来自 $L^2(\mu)$ 的等价范数的 Paley–Wiener 空间 PW_t。

命题 2.3 ([18])。 设 $\det(\mathcal{H}) = 1$ 几乎处处成立，并设 μ 为相应典范系统 (1.1) 的（唯一）谱测度。则

$$\mu \in (\mathrm{PW}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathcal{H} \in (\mathrm{PW}).$$

此外，如果其中任一条件成立，则

$$\forall t, \quad \mathcal{B}_t(\mathcal{H}) \doteq \mathrm{PW}_t(\mu).$$

2.6. **行列式归一化。** 我们有如下

定理 2.4 ([18])。 如果 $\mathcal{H}$ 是 PW 型，则

$$\det \mathcal{H} \neq 0 \quad \text{a.e.}, \qquad \int_0^\infty \sqrt{\det \mathcal{H}(t)}dt = \infty. \tag{2.6}$$

上述定理中的时间变量 $t \mapsto s = s(t)$ 的变换使我们能够将任意 PW 型系统，或更一般地，将任何满足 (2.6) 的典范系统变换为一个具有

$$\det \mathcal{H} = 1 \quad \text{a.e.}$$

关于此变量替换的详细说明见 [18]。我们将此类系统称为 行列式归一化的。正则（局部可积）的哈密顿量在行列式归一化后仍保持正则。

从这里直到第5节结束，所讨论的所有系统均假定为行列式归一化的；第6-8 节中关于薛定谔方程的结果不一定满足这一假设。

注 2.5。

- 正则狄拉克系统均为 PW 型，这可由 [18, 14, 5]的结果得出。
- 如 [18]，所述，即使在对角情形下，PW 哈密顿量的刻画也是一个困难的问题。目前我们知道

$$\det \mathcal{H} \neq 0 \qquad \not\Rightarrow \qquad PW$$

but

$$\det \mathcal{H} \neq 0, \quad \mathcal{H} \in W^{1,1}_{\text{loc}} \qquad \Rightarrow \qquad PW,$$

这可由以下性质得出：正则狄拉克系统对应于具有 $W^{1,\,1\,\text{loc}}$ 的典范系统哈密顿量。

- [18]中的一个例子表明

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} \in \text{PW} \not\Rightarrow \begin{pmatrix} h_{22} & -h_{12} \\ -h_{12} & h_{11} \end{pmatrix} \in \text{PW}.$$

第二个哈密顿量对应于狄利克雷初始条件与诺伊曼初始条件之间的切换。

3. Inverse spectral problem

3.1. **逆问题：恢复 $h_{11} = h^\mu$。** 对于谱测度为 μ 的 PW 系统，哈密顿量 $h_{11} = h^\mu$ 的首项可以由第 $k_t = K_t(z,0) \in \text{PW}_t(\mu)$ 节中定义的再生核恢复：2.1：

定理 3.1 ([18])。 设 $\mu \in$ PW是系统(1.1) 的谱测度，其哈密顿量为 $\mathcal{H}$。那么 $t \mapsto k_t(0)$ 是绝对连续函数，并且

$$h^\mu(t) := \pi \frac{d}{dt} k_t(0). \tag{3.1}$$

具有偶谱测度的系统具有对角哈密顿量 [18]。此外，若系统经过行列式归一化，则 $h_{22} = 1/h^\mu$ 并且逆谱问题通过恢复 h^μ得到解决。对于非对角情形，还需进一步分析，见下文。

3.2. **广义希尔伯特变换**。 对于一个 Π-有限测度 μ和 $f \in L^2(|\mu|)$，我们采用以下记号

$$K(f\mu)(z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{f(s)\, d\mu(s)}{s - z},$$

and

$$\mathcal{K}\mu(z) = \frac{1}{\pi} \int \left[\frac{1}{s - z} - \frac{s}{1 + s^2} \right] d\mu(s),$$

其中 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$。若 $f \in \tilde{L}(\mu)$ 是整函数，则定义

$$H^\mu f = K(f\mu) - f\mathcal{K}\mu.$$

显然， $H^\mu f$ 可延拓为整函数:

$$(H^\mu f)(z) = \frac{1}{\pi} \int \left[\frac{f(s) - f(z)}{s - z} + \frac{sf(z)}{1 + s^2} \right] d\mu(s).$$

正如文献 [18]所示， H^μ 在恢复哈密顿量的非对角元素时发挥着重要作用。

3.3. **逆问题：恢复** $h_{12} = h_{21}$ (g^μ)。为了恢复非对角项，我们使用

定理 3.2 ([18])。 设 $\mu \in$ PW。考虑在$\tilde{0}$, $k_t \in \mathrm{PW}_t(\mu)$处的再生核。定义 $l_t = H^\mu k_t$。则 μ 是哈密顿量的谱测度

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} h^\mu & g^\mu \\ g^\mu & \frac{1+g_\mu^2}{h^\mu} \end{pmatrix},$$

其中

$$g^\mu(t) := \pi \frac{d}{dt} \tilde{l}_t(0).$$

3.4. **的傅里叶变换方程。** k_t。 如何根据定理3.2 计算函数 h^μ 和 g^μ？ 记3.2为 k_t, k_t 对于再生核K_0, K_0 在 $\mathcal{B}_t$ 和 PW 中$_t$ 分别表示。有时，处理函数

$$\psi_t := \hat{k}_t,$$

因此

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \psi_t = k_t(0).$$

若 $f \in$PW$_t$，则

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{t} \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

同时

$$f(0) = (f, \mathring{k}_t)_{PW_t} = \left(\hat{f}, \mathcal{F}(\mathring{k}_t)\right)_{L^2(-t,t)}.$$

由此得到著名的 sinc 函数傅里叶变换公式:

$$\mathcal{F}\mathring{k}_t = \mathcal{F}\left(\frac{\sin tz}{\pi z}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, 1_{(-t,t)}.$$

reprokernel k_t 的傅里叶变换 ψ_t 可由以下命题求得。

定理 3.3 ([18])。 $\psi = \psi_t$ 满足

$$\psi * \hat{\mu} = 1 \quad \text{on} \quad (-t, t) \tag{3.2}$$

and

$$\psi = 0 \quad \text{on} \quad \mathbb{R} \setminus [-t, t].$$

一般而言，本文其余部分中的所有傅里叶变换和卷积均理解为在分布意义下进行。

4. Periodic spectral measures and periodic approximations

4.1. 由 $M^+(\mathbb{T})$得到的测度。 令 $M^+(\mathbb{T})$ 表示单位圆 $\mathbb{T} \sim [0, 2\pi]$ 上所有具有无限支撑的有限正测度的集合。我们将圆上的测度与 2π-周期测度 $\mathbb{R}$、 $M^+(\mathbb{T}) \subset M^+(\mathbb{R})$ 视为等同，并将 $M^+_{\text{even}}(\mathbb{T}) \subset M^+(\mathbb{R})$ 定义为偶周期测度的子集。

注意， $M^+(\mathbb{T})$ 中的所有测度都是 Π-有限的。此外，正如前文所述，由定理2.1（或推论2.2）可知

$$M^+(\mathbb{T}) \subset \text{PW}.$$

下面列出与我们的问题相关的 $M^+(\mathbb{T})$ 的另外两个重要性质。

命题 4.1 ([18])。 若 $\mu \in M^+(\mathbb{T})$，则所有对偶测度都属于$M^+(\mathbb{T})$。

命题 4.2 ([18])。 如果 $\mu \in M^+_{\text{even}}(\mathbb{T})$，那么存在唯一的 $\tilde{\mu} \in M^+_{\text{even}}(\mathbb{T})$ 使得 μ 与 $\tilde{\mu}$ 互为对偶： $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_b$, $b = -\Re\mathcal{K}\mu(0)$。

注意，对于唯一的偶对偶测度 $\tilde{\mu}$ ，我们有

$$\mathcal{K}\tilde{\mu} = -\frac{1}{\mathcal{K}\mu}, \ \mathcal{P}\tilde{\mu} = -\Re\frac{1}{\mathcal{K}\mu}. \tag{4.1}$$

4.2. 矩。 如果 $\mu \in M^+(\mathbb{T})$，我们可以考虑傅里叶级数

$$\mu \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikx},$$

其中

$$\gamma_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikx}\ d\mu(x) = \alpha_k + i\beta_k$$

是 μ 的“三角矩”。显然，

$$\gamma_{-k} = \overline{\gamma_k},$$

so

$$\mu \sim \gamma_0 + 2\sum_{1}^{\infty}(\alpha_k \cos kx - \beta_k \sin kx),$$

且 μ 为偶函数当且仅当所有矩都是实数，即所有 $\beta_k = 0$。

这些矩可以排列成托普利兹矩阵

$$\Gamma(\mu) = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots \\ \gamma_{-1} & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots \\ \gamma_{-2} & \gamma_{-1} & \gamma_0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

我们将 Γ左上角的 $n \times n$ 矩阵记为 $\Gamma_n(\mu)$。请注意，我们的矩阵索引从 0 开始，而不是从 1 开始。著名的卡拉泰奥多里定理指出，序列 $\{\gamma_k\}$ 是某个 $\mu \in M^+(\mathbb{T})$ 的矩序列，当且仅当

$$\forall n, \qquad \det\Gamma_n > 0.$$

最后，我们回顾周期测度的矩与其傅里叶变换之间的关系：若 $\mu \sim \sum \gamma_k e^{ikx}$，则

$$\hat{\mu} = \sqrt{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_k \delta_k.$$

4.3. 计算 $h^\mu(t)$。回顾一下，若 $\mu \in$PW，则

$$h^\mu(t) := \pi \frac{d}{dt}\left[L_{\mu,t}^{-1} \overset{\circ}{k}_t(0)\right]$$

如果 $A = (a_{jk})$ 是矩阵，我们用 $\mathcal{S}[A]$ 表示 A 的元素之和：

$$\mathcal{S}[A] = \sum_{j,k} a_{jk}.$$

定理 4.3 ([18])。 如果 $\mu \in M^+(\mathbb{T})$，那么函数 $h^\mu(t)$ 在 $\mathbb{R}_+ \setminus \frac{1}{2}\mathbb{N}$ 上是局部常数，即

$$h^\mu(t) = h_0,\ h_1,\ h_2,\ \ldots \quad \text{on} \quad \left[0, \frac{1}{2}\right),\ \left[\frac{1}{2}, 1\right),\ \left[1, \frac{3}{2}\right),\ \ldots,$$

and

$$h_n = \mathcal{S}\left[\Gamma_n(\mu)^{-1}\right] - \mathcal{S}\left[\Gamma_{n-1}(\mu)^{-1}\right], \quad n \geq 1, \quad h_0 = \mathcal{S}[\Gamma_0^{-1}] = \gamma_0^{-1}.$$

通过变量替换，该结果对于 $2T-$周期测度也成立，其中$h^\mu(t)$ 在 $\mathbb{R}_+ \setminus \frac{\pi}{2T}\mathbb{N}$ 上是局部常数。

这个显式逆算法可以反向执行，以求解正谱问题。此外，我们还有一种有限维算法。

定理 4.4 ([40])。 设 $\mathcal{H}$ 是一个在 $\mathbb{R}_+ \setminus \frac{1}{2}\mathbb{N}$ 上局部常数的对角哈密顿量，即

$$h^\mu(t) = h_0,\ h_1,\ h_2,\ \ldots \quad \text{on} \quad \left[0, \frac{1}{2}\right),\ \left[\frac{1}{2}, 1\right),\ \left[1, \frac{3}{2}\right),\ \ldots,$$

其中所有 h_n 都是正实数。于是，谱测度 μ 是一个$2\pi-$周期测度，其矩为

$$\gamma_0 = \frac{1}{h_0}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{h_0} \cdot \frac{1 - h_1}{1 + h_1},$$
$$\gamma_n = \frac{1}{h_{11}^0} \cdot \frac{(1 + D_n/\Delta_n)\left(1 - \mathbb{1}\Gamma_{n-1}^{-1}\mathbf{u}_n\right)^2 - (\Delta_n - D_n)h_{n+1}}{h_{n+1}\Delta_n + \left(1 - \mathbb{1}\Gamma_{n-1}^{-1}\mathbf{u}_n\right)^2/\Delta_n},$$

其中 $\mathbf{u}_n = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$，$\mathbf{v}_n = (c_n, c_{n-1}, \ldots, c_1)^T$，$\mathbb{1} = (1, 1, \ldots, 1)$，$\Delta_n = 1 - \mathbf{u}_n^T\Gamma_{n-1}^{-1}\mathbf{u}_n$ 和 $D_n = \mathbf{u}_n^T\Gamma_{n-1}^{-1}\mathbf{v}_n$。

注 4.5。 当 $\gamma_0 = 1$ 时，算法会大大简化，因为谱测度 μ 的 *Verblunsky* 系数 α_n 此时是定义良好的。 μ 的 *Verblunsky* 系数可通过以下方式获得

$$\alpha_n = \frac{1 - h_{n+1}/h_n}{1 + h_{n+1}/h_n}.$$

另请注意，对序列 $\{h_n\}$的增长率或衰减率没有任何限制。第 9 节中，我们给出 $h_n = a^n$、$a > 0$的显式解。

4.4. 计算 $g^\mu(t)$。 设 $\mu \in M^+(\mathbb{T})$，并设

$$\Delta(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \dots \\ -\gamma_{-1} & 0 & \gamma_1 & \dots \\ -\gamma_{-2} & -\gamma_{-1} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

其中，与前文一样，γ_k 是 μ的三角矩。我们用 Δ_n 表示 Δ左上角的$n \times n$ 矩阵。

定理 4.6 ([18])。 若 $\mu \in M^+(\mathbb{T})$，则函数 $g^\mu(t)$ 在 $\mathbb{R}_+ \setminus \frac{1}{2}\mathbb{N}$上局部恒定，即

$$g^\mu(t) = g_0,\ g_1,\ g_2,\ \dots \quad \text{on} \quad \left[0, \frac{1}{2}\right),\ \left[\frac{1}{2}, 1\right),\ \left[1, \frac{3}{2}\right),\ \dots$$

and

$$g_n = \mathcal{S}\left[\Delta_n \Gamma_n^{-1}\right] - \mathcal{S}\left[\Delta_{n-1}\Gamma_{n-1}^{-1}\right], \quad n \geq 1, \quad g_0 = 0.$$

4.5.**典范系统与单位圆上的正交多项式。** 本节考察具有周期谱测度的典范系统逆谱问题与单位圆上的正交多项式之间的联系。我们证明，定理 h_n 4.3 中的公式 以及定理 g_n 4.6 中的公式都可以解释为这类多项式在某些点处的取值。

对于 $\mu \in M_+(\mathbb{T})$，我们用 ONP(μ) 表示单位圆上关于 $L^2(\mu)$正交归一的 z多项式族。用 $\phi_n \in$ONP(μ)表示 n 次多项式。

定理 4.7 ([18])。 设 $\mu \in M^+(\mathbb{T})$ 且设 $\{\phi_n\}$ 是 正交归一多项式(μ)。有

$$h_n^\mu = |\phi_n(1)|^2.$$

定理4.7 使我们能够描述周期谱测度平移所对应的 h_n 的变化。对于 $\eta \in \mathbb{T}$ 我们定义 $\mu^{(\eta)}(\zeta) = \mu(\eta\zeta)$。

推论4.8([18])。

$$h_n^{(\eta)} = |\phi_n(\eta)|^2.$$

对于非对角项g_n^μ，我们有一个类似的结果。回顾第 2.4 节， $\tilde{\mu}$ 与 μ 绝对连续对偶，当且仅当存在函数 $\phi \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$，$\|\phi\|_\infty \leq 1$，使得

$$\mu = \sigma_{-1}^\phi, \qquad \tilde{\mu} = \sigma_1^\phi,$$

也就是说，

$$\mathcal{P}\mu = \Re\frac{1-\phi}{1+\phi}, \qquad \mathcal{P}\tilde{\mu} = \Re\frac{1+\phi}{1-\phi}. \tag{4.2}$$

定义绝对连续对偶的另一种方法是通过 μ的 Verblunsky 系数：令 $\{\alpha_n\}$为测度$\mu \in M^+(\mathbb{T})$的 Verblunsky 系数，绝对连续对偶 $\tilde{\mu}$是 $M^+(\mathbb{T})$中满足以下条件的测度

$$\alpha_n(\tilde{\mu}) = -\alpha_n.$$

这两个定义等价性的证明，例如可见于[37]。

定理 4.9 ([41])。 令 $\mu \in M^+(\mathbb{T})$，并用 $\tilde{\mu}$ 表示 μ的 *Clark* 对偶。˜令 $\{\phi_n\}$为正交归一多项式(μ)，$\{\phi_n\}$ 为正交归一多项式$(\tilde{\mu})$。我们有

$$g_n^{\mu} = -\frac{\Im\left(\tilde{\phi}_n(1)/\phi_n(1)\right)}{\Re\left(\tilde{\phi}_n(1)/\phi_n(1)\right)}.$$

4.6. 周期近似。 直到最近，文献中关于典范系统逆谱问题解的示例还很少。尽管随着新方法的发展，可用示例的数量有所增加，但大多数新示例都涉及周期谱测度。即使对于简单的谱测度，非周期示例仍然难以显式计算。本节的结果使我们能够在运用上一节的定理求出谱测度周期化对应的哈密顿量后，以数值方式找到此类示例。

设 μ 是 $\mathbb{R}$上的一个测度。我们将其 $2T$–周期化记为 μ_T，定义为 $\mu_T(S) = \mu(S)$，其中 $S \subset [-T, T)$，并将其周期延拓到 $\mathbb{R}$的其余部分。

根据推论2.2，局部有限周期测度是 PW 测度，当且仅当它在其周期上具有无限支撑。如果局部有限的 μ在某个区间 $[-C, C]$ 上具有无限支撑，其中 $C > 0$，那么 μ_T 对于 $T > C$是 PW 测度。因此，我们可以利用定理μ_T 4.3 或 4.7，求出与 h_T^{μ} 对应的哈密顿量的左上角元素 μ_T。

对于各种类的谱测度 μ（包括一些不属于 PW 类的谱测度），我们可以证明，当 $T \to \infty$ 时，h_T^{μ} 收敛到 h^{μ} 。

回想一下， K_0^t 是 de Branges 空间$B_t(\mu)$中的再生核。记 $K^{t,}{}_0{}^T$ 为 de Branges 空间$B_t(\mu_T)$中的再生核。我们先介绍以下关于h_T^{μ} 收敛到 h^{μ}的引理。

引理 4.10 ([32])。 若$\lim_{T\to\infty} K^{t,\ {}_0T}(0) = K_0^t(0)$ 对几乎处处的 t成立，则对任意区间$(a,b) \subset \mathbb{R}_+$,

$$\int_a^b h_T^\mu(t)dt \to \int_a^b h^\mu(t)dt$$

如 $T \to \infty$。

由于哈密顿矩阵 $\mathcal{H}(t) \geq 0$ 几乎处处成立， $h^\mu \geq 0$ 几乎处处成立。对于非负函数，像上一个引理中那样，在区间上的积分收敛等价于在连续紧支撑函数上的收敛

推论 4.11 ([32])。 若$\lim_{T\to\infty} K^{t,\ {}_0T}(0) = K_0^t(0)$ 对几乎处处的 t成立，则

$$\int_0^\infty h_T^\mu(t)\phi(t)dt \to \int_0^\infty h^\mu(t)\phi(t)dt$$

如 $T \to \infty$，对于 $\mathbb{R}_+$ 上的每个连续紧支撑函数 ϕ 。

设 f_T， $T > 0$ 和 f 是 $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$-函数。若 f_T， $T > 0$ 和 f 满足上一个引理和推论的结论（以 h_T^μ 和 h^μ 代替），则记作 $f_T \xrightarrow{*} f$ 如 $T \to \infty$。使用这一记号，$\lim_{T\to\infty} K^{t,\ {}_0T}(0) = K_0^t(0)$ 对几乎处处的 t 成立，意味着 $h_T^\mu \xrightarrow{*} h^\mu$ 如 $T \to \infty$。

首先，我们研究谱测度属于 PW 类的典范系统中周期化的收敛性。正如前文所述，该类扩展了经典文献中所研究的正则系统类，并且近期在 [5, 4, 18]中得到了研究。

对于 PW 系统，我们证明以下收敛结果，该结果表明，可以通过 PW 系统的周期化系统的哈密顿量恢复 PW 系统的哈密顿量。

定理4.12 ([32])。 设 μ 是一个具有局部无限支撑的偶 *PW*测度。那么

$$h_T^\mu \xrightarrow{*} h^\mu \ as\ T \to \infty.$$

受 9.7 中的例子 [18], 启发，我们推广这一结果，证明周期化方法在某些情况下也可应用于 PW 类之外。

由定理 2.1 可知，任何在无穷远处衰减至 0 的测度都不是 PW测度。尽管如此，我们仍有如下结论，它表明周期化的哈密顿量可用于求解具有衰减谱测度的反问题。

定理 4.13 ([32])。 设 μ是$\mathbb{R}$上的正偶泊松有限测度。假设存在 $C, c > 0$，使得 μ 在$[-C, C]$上具有无限支撑，且 $\mu(x, x + c)$ 在 $\mathbb{R}_+$上递减。那么，对于 $T_n = nc$,

$$h^{\mu}_{T_n} \xrightarrow{*} h^{\mu} \ as \ n \to \infty, \ n \in \mathbb{N}.$$

以下特例可以用类似的方法证明，也可以由最后一个陈述推得。

推论 4.14 ([32])。 设 μ 为一个正的偶绝对连续局部有限测度，其密度在 $\mathbb{R}_+$ 上递减。则

$$h^{\mu}_{T} \xrightarrow{*} h^{\mu} \ as \ T \to \infty.$$

下面的定理使得适用周期化方法的测度类得以进一步扩大。

定理 4.15 ([32])。 设 μ 为一个偶泊松有限测度，满足$d\mu = h(x)d\nu$，其中 ν 满足定理 *4.13*的条件，且 $h(0) \neq 0$是一个在 $\mathbb{R}_+$ 上递增的偶正函数，并满足 $h(x) = O(|x|^q)$当 $|x| \to \infty$ 时，对于某个 $q > 0$。那么，对于 $T_n = nc$,

$$h^{\mu}_{T_n} \xrightarrow{*} h^{\mu} \ as \ n \to \infty, \ n \in \mathbb{N}.$$

以下特例可以用类似的方法证明，也可以由最后一个陈述推得。

推论 4.16 ([32])。 设 μ 是一个正的偶绝对连续局部有限测度，其密度是以下两者的乘积： $h(x)$，一个在 $\mathbb{R}_+$上递增的偶正函数，满足 $h(x) = O(|x|^q)$ 当 $|x| \to \infty$ 时，其中某个 $q > 0$，以及 $f(x)$，一个在 $\mathbb{R}_+$上递减的偶非负函数。那么

$$h^{\mu}_{T} \xrightarrow{*} h^{\mu} \ as \ T \to \infty.$$

4.7. **阶梯函数逼近**。 定理4.3 表明，如果一个对角 $\mathcal{H}$ 是具有统一步长的阶梯函数，那么相应的谱测度 μ 就是偶周期 PW 测度。此外，我们可以用定理4.4求解这个正谱问题。

如果 $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & 0 \\ 0 & h_{22} \end{pmatrix}$ 不是阶梯函数，我们可以通过如下方式定义阶梯函数哈密顿量 $\mathcal{H}^T$，从而将哈密顿量「周期化」：

$$\begin{aligned} h_{11}^{T,n} &= h_{11}^{T}\big|_{[nT,(n+1)T)]} = \frac{1}{T}\int_{nT}^{(n+1)T} h_{11}(s)ds, \\ h_{22}^{T,n} &= h_{22}^{T}\big|_{[nT,(n+1)T)]} = \frac{1}{h_{11}^{T,n}}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

哈密顿量为 $\mathcal{H}^T$ 的典范系统所对应的谱测度记为 μ_T。

鉴于所有 μ_T都是 PW 测度，我们着重于将这一方法应用于 PW 系统，因为它们的所有 de Branges 空间 $B(E_t^T)$作为集合都与 PW_t 相同。遗憾的是，如第2节前文所述，仅通过哈密顿量来刻画 PW 系统颇具挑战性。描述非阶梯函数的 PW 哈密顿量，即使在对角情形下，也本质上很困难。已知并非所有行列式非零的哈密顿量都是 PW 哈密顿量。然而，PW 哈密顿量包括源自实 Dirac 系统的那些情形，若干结果已在[18, 5]中给出。

半直线上的实 Dirac 系统 $\mathbb{R}_+$ 具有如下形式

$$\Omega \dot{X}(t) = zX(t) + Q(t)X(t), \quad t \in (0, \infty), \tag{4.4}$$

这里，$z \in \mathbb{C}$ 是谱参数，$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 是与典范系统中相同的辛矩阵，而 $Q(t) = \begin{pmatrix} 0 & f(t) \\ f(t) & 0 \end{pmatrix}$ ( ) 是势矩阵，其中 $f(t)$ 是实值局部可积函数。这些系统改写为典范系统后，具有行列式归一化的对角哈密顿量，其中

$$h_{11}(t) = \exp\left(\int_0^t f(s)ds\right),$$

其中，f 是 $Q(t)$中的局部可积函数。关于如何将此类系统改写为典范系统，详情可参见 [20, 35, 39]。

对实Dirac系统的哈密顿量采用周期化方法时，$\mathcal{H}^T$仍具有如下形式：

$$\begin{pmatrix} \exp\left(\int_0^t f^T(s)ds\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\int_0^t f^T(s)ds\right) \end{pmatrix},$$

但其中 f^T 是支撑在一个等差数列上的离散测度。

定理4.17 ([40])。 设 $\mathcal{H}$ 是一个实*Dirac*系统的哈密顿量，并设 H^T是式 (4.3)中定义的阶梯函数近似。记为该实*Dirac*系统的谱测度，为哈密顿量为的典范系统的谱测度。那么，对于、，有$(\mu_T) \to \|\phi\|_{L^2(\mu)}$ 当 $T \to 0$时成立。

如本节开头所述，这里的结果与第 3 节的结果结合起来，可用于构造谱问题的显式例子

。我们在论文末尾的第 9 节中给出了各种此类例子。

5. Homogeneous measures and spaces

5.1. 齐次谱测度。 对于实数集上的测度 $\mu(x)$，记 $\mu_t(x) = \frac{1}{t}\mu(tx)$ 为满足以下条件的测度：对于任意博雷尔$B \subset \mathbb{R}$,

$$\mu_t(B) = \frac{1}{t}\mu(tB).$$

测度 μ 是齐次的，当且仅当

$$\forall t > 0, \qquad \mu_t(x) = \mu(x).$$

容易证明，齐次测度必定绝对连续， $d\mu(x) = \rho(x)dx$，其中 $\rho(x)$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上以及在 $\mathbb{R}_-$ 上为常数。我们假设这些常数严格为正，因此 $\mu \in$PW。

这类测度的所有例子均由下式给出

$$\mu = c_1 m + c_2 \sigma, \tag{5.1}$$

其中 $\sigma(x)$ = 符号(x)，且 $c_1 > |c_2|$, c_1， $c_2 \in \mathbb{R}$。

此外，由于哈密顿量和谱测度众所周知的缩放性质，可知 $h^\mu(t)$ 和 $g^\mu(t)$ 都是常函数。常数 $h^\mu(t)$ 可通过直接计算求得 [19], , 计算过程的概要见第9.6节。

为了求出 $g^\mu(t)$，我们需要以下结果。与前面一样，我们用 $k_t(z)$ 表示 dB 空间 $\mathrm{PW}_t(\mu)$ 在零点处的再生核。

定理 5.1 ([19])。 若 $\mu \in \mathrm{PW}$ 是齐次的，则有恒等式

$$k_t(z) = tk_1(tz).$$

例 5.2。若 $d\mu = dx$，则

$$k_t(z) \equiv k_t^0(z) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin tz}{z},$$

and

$$k_t^0(z) = tk_1^0(tz).$$

按照 [7], 的说法，如果对于所有$t \in (0,\ 1)$，dB 空间 $\mathcal{B} = \mathcal{B}(E)$ 都是齐次的

$$F \in \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad t^{1/2}F(tz) \in \mathcal{B}$$

且两个函数在 $\mathcal{B}$ 中具有相同的范数。

定理 5.3 ([19])**.** $\mu \in$PW 齐次当且仅当其所有 *dB* 空间都齐次。

推论 5.4 ([19])。 设 $d\mu = \rho(x)dx$。以下三个条件等价:

(i) $\rho(x) = \rho(tx)$ 对所有 $t \in (0,1)$均成立;
(ii) 对所有 $t > 0$, $\mathcal{B}_t$ 都是齐次的; *(iii)* $k_t(z) = tk_1(tz)$ 对所有 $t \in (0,1)$ 均成立。

5.2. **准齐次谱测度**。 根据定义，测度$\mu(x)$是 ν 阶准齐次的，当且仅当对所有 $t > 0$,

$$t^{1+2\nu}\mu(x) = \mu_t(x).$$

再次说明，证明这类测度绝对连续并不困难。其密度 ρ 必须满足

$$\forall t > 0, \quad t^{1+2\nu}\rho(x/t) = \rho(x),$$

或者等价地

$$\forall t > 0, \quad t^{1+2\nu}\rho(y) = \rho(ty).$$

可以证明，准齐次测度构成一个二参数族:

$$\rho(x) = \begin{cases} x^{1+2\nu}\rho(1), & x > 0 \\ |x|^{1+2\nu}\rho(-1), & x < 0 \end{cases},$$

其中 $\rho(\pm 1)$ 为任意正数。与通常情况一样，在典范系统的谱测度中，有一类特殊情况是偶测度，它们对应于 $\rho(1) = \rho(-1)$ 的情形。

除非 $\nu = -\frac{1}{2}$，否则这些测度不是 Paley-Wiener 测度。准齐次测度在 $\mathbb{R}$ 上局部有限，当且仅当 $\nu > -1$; 泊松有限，当且仅当 $\nu < 0$。因此，我们将只考虑以下情形

$$-1 < \nu < 0.$$

$\nu = -1/2$ 的取值对应于上一小节讨论的齐次情形。

本节的结果可用于求出 PW 情形下齐次系统的逆谱问题的显式解，并将谱问题与贝塞尔函数联系起来。这些应用将在[19]中详细讨论。本文末尾第9节对这些思想作了简要介绍，其中第9.6节讨论齐次系统的逆谱问题，第9.7节讨论与贝塞尔函数的联系。

现在我们稍微转换一下方向，讨论混合谱问题。这类问题起源于 Hochstadt 和 Lieberman 的研究 [12] ，并由

del Rio、Gesztesy 和 Simon [8]进一步发展。在此之前，我们先简要介绍讨论这一主题所需的一些补充背景知识。

6. Holomorphic functions in spectral problems

6.1. 薛定谔¨算子及其谱。我们考虑典范系统的一个特殊情形，即薛定谔¨方程

$$Lu = -u'' + qu = z^2 u \tag{6.1}$$

在区间 $[0, \pi]$ 上。为避免不必要的技术细节，我们作如下假设。

尽管我们的某些结果可以推广到情形 $q \in L^p$，但我们主要限于平方可和势 $q \in L^2$，这样可以大大缩短部分论述。出于同样的原因，我们只考虑端点处的狄利克雷（$u = 0$）或诺伊曼（$u' = 0$）边界条件。

算子

$$L : u \mapsto -u'' + qu$$

是 $L^2([0, \pi])$ 中的一个自伴算子，其定义域由满足边界条件和条件 $-u'' + qu \in L^2([0, \pi])$、且具有绝对连续导数的函数$u$ 组成。在 $q \in L^2([0, \pi])$ 的情况下，定义域由索伯列夫空间 $W^{2,2}$ 中的满足边界条件的函数组成。具有 $q \in L^1$ 且在端点满足任意自伴边界条件的算子的谱有下界。我们将假设带有狄利克雷-诺伊曼边界条件的 L 的谱 Σ_{ND} 为正。这个假设并不过于严格，因为给任意算子 q 加上一个正的常数即可使其变为正算子：此时谱也会向右平移相同的常数。

我们将满足上述条件的算子集合记为 $\mathcal{S}^2$。有时我们也将使用记号 $\mathcal{S}^1$，表示具有可和势的算子。

如该领域通常所采用的方法，为便于应用标准的傅里叶分析工具，我们将对与算子相关的谱和解析函数应用平方根变换。特别地，我们将 L 经过平方根变换后的谱分别记为 σ_{DD} 和 σ_{ND}：

$$\sigma_{DD} = \{\lambda_n | \lambda_n^2 \in \Sigma_{DD}\} \cup \{0\}, \quad \sigma_{ND} = \{\lambda_n | \lambda_n^2 \in \Sigma_{ND}\}.$$

请注意，在我们的正性假设下，两个谱都是实数。

如果一个复数序列没有有限聚点，我们就称它为离散序列。两个谱 σ_{DD} 和 σ_{ND} 都是实离散序列。此外，众所周知，

$$\sigma_{DD} = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}},\ \lambda_0 = 0,\ \lambda_{\pm n} = \pm\pi\left(n + \frac{C}{n} + \frac{a_n}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}, \tag{6.2}$$

and

$$\sigma_{ND} = \{\eta_n\}_{n\in\pm\mathbb{N}},\ \eta_{\pm n} = \pm\pi\left(n - \frac{1}{2} + \frac{C}{n} + \frac{b_n}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}, \tag{6.3}$$

其中 C 是实常数，且 $\{a_n\}$， $\{b_n\} \in l^2$。反过来，两列交错序列等于某个薛定谔算子的谱 σ_{DD}， σ_{ND} 其中¨定义在$[0,\pi]$ 上，且具有 L^2势，当且仅当这些序列满足上述渐近关系，其中某个 a_n， $b_n \in l^2$。这些渐近关系可由马尔琴科给出的更一般公式推出 [22],另见 [33]或 [1]。

6.2. 谱测度的解析积分。我们用 L^1_Π 表示 $\mathbb{R}$上泊松可求和函数构成的空间。若 $u \in L^1_\Pi$，则将其 Herglotz积分定义为

$$Hu(z) = \frac{1}{\pi}\int\left[\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2}\right]u(t)dt.$$

若 μ 是 $\mathbb{R}$上的泊松有限测度，则

$$H\mu(z) = \frac{1}{\pi}\int\left[\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2}\right]d\mu(t).$$

记 $u(t,\ z)$为满足边界条件6.1的方程($u(0,\ z)$ =0， $u'(0,\ z)$ = 1的解，其中导数取在 t上。韦伊函数 m_+定义为

$$m_+(z) = -\frac{u'(\pi,z)}{zu(\pi,z)}.$$

众所周知， m_+ 是一个支撑在 $\sigma_{DD} = \{\lambda_n\}$上的正测度的Herglotz积分:

$$\begin{aligned} m_+(z) &= H\mu_+(z),\\ \mu_+ &= \alpha_0\delta_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}}\alpha_n(\delta_{\lambda_n} + \delta_{\lambda_{-n}}),\\ \alpha_n &= 1 + \frac{c_n}{n+1},\ c_n \in l^2. \end{aligned} \tag{6.4}$$

类似地，若 $v(t,z)$是方程(6.1)在边界条件$v(\pi,z) = 0,\ v'(\pi,z) = 1$下的解，则定义

$$m_- = \frac{v'(0,z)}{zv(0,z)}.$$

那么 μ_- 通过以下方式定义

$$m_-(z) = H\mu_-(z),$$

$$\mu_- = \beta_0\delta_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n(\delta_{\lambda_n} + \delta_{\lambda_{-n}}),$$
$$\beta_n = 1 + \frac{d_n}{n+1},\ d_n \in l^2. \tag{6.5}$$

点质量 α_n、β_n 的渐近关系可以根据上一节讨论的 σ_{DD} 和 σ_{ND} 的谱渐近关系推导出来。此外，$\lambda_n \in \sigma_{DD}$ ($\eta_n \in \sigma_{ND}$)与 α_n (β_n)的渐近关系共同给出了一个充要条件，用以判定某个正测度是否为来自 $\mathcal{S}^2$的薛定谔算子 μ_+(μ_-)的谱测度。马尔琴科[21] 的著名定理指出，一个正则（$q \in L^1$）薛定谔算子可以由其谱测度 μ_+ （或 μ_-）唯一确定。另一个经典结果是博格提出的以下双谱定理。本文中，如果同一类中的任何其他算子，只要具有相同的（混合）谱数据，就必然具有几乎处处相同的势 q （在 $[0,\pi]$上），那么我们就称该薛定谔算子由其（混合）谱数据唯一确定。

定理 6.1 ([6])。 薛定谔算子 $L \in \mathcal{S}^1$ 由其谱 σ_{DD} 和 σ_{ND}唯一确定。$\sigma_{DD} \cup \sigma_{ND}$ 的任何真子集都不具有这一性质。

如引言中所述，我们将在第8节给出该定理的一个“不确定性”版本。

对于a, b) ($0, \pi$) 的一个子区间，回顾第 2.1 节， $M = M_{(a,b)}$是传递矩阵。注意，由朗斯基恒等式，$\det M \equiv 1$ 且$M(w_z(a)\ w_z'(a))^T = (w_z(b)\ w_z'(b))^T$对任意解 w_z （6.1）均成立。

6.3. **偶算子**。 如果算子 L的势满足 $q(x) = q(\pi - x)$，对所有$x \in (0, \pi/2)$均成立，则称该算子为偶算子（关于区间中点对称）。这种算子由其一个谱唯一确定，例如σ_{DD}，参见 [33]。若 $\Lambda = \{\lambda_n\}$ 是满足（6.2）的序列，我们用 $\Gamma(\Lambda) = \{\gamma_n\}$ 表示对应于具有$\mu_+ = \sum \gamma_n\delta_{\lambda_n}$ 的唯一偶算子的谱测度的点质量序列 $\sigma_{DD} = \{\lambda_n\}$。注意，在偶情形下 $\mu_+ = \mu_-$。

引理 6.2 ([17])。 对于任意薛¨丁格算子 $L \in \mathcal{S}^1$ 其点质量 $\mu_\pm$ 满足

$$\alpha_n\beta_n = \gamma_n^2.$$

注 6.3。 常数 γ_n，即偶算子的谱测度中的点质量，在其他分析问题中也有不同的名称。举例来说，我们指出它与加权空间中多项式完备性的经典问题之间的如下联系。

我们假设所有离散实数序列均按自然递增顺序排列。

我们称序列 $\Lambda = \{\lambda_n\}$ 具有（双侧）上密度 d，如果

$$\limsup_{A\to\infty} \frac{\#[\Lambda \cap (-A, A)]}{2A} = d.$$

如果 $d = 0$，则称该序列具有零密度。离散序列$\Lambda = \{\lambda_n\}$ 称为平衡的，如果极限

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{|n|<N} \frac{\lambda_n}{1+\lambda_n^2} \tag{6.6}$$

存在。

设 $\Lambda = \{\lambda_n\}$ 是一个上密度有限的平衡序列。对每个n， $\lambda_n \in \Lambda$，令

$$p_n = \frac{1}{2}\left[\log(1+\lambda_n^2) + \sum_{n\neq k,\ \lambda_k\in\Lambda} \log\frac{1+\lambda_k^2}{(\lambda_k-\lambda_n)^2}\right],$$

其中求和按主值的意义理解，即

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{0<|n-k|<N} \log\frac{1+\lambda_k^2}{(\lambda_k-\lambda_n)^2}.$$

我们将这类数的序列 $P(\Lambda) = \{p_n\}$ 称为 Λ的特征序列。

下面给出一个以特征序列表述多项式完备性的命题示例。

定理 6.4。 [24, 30] 设 μ 是一个支撑于 $\mathbb{R}$ 且满足 $L^1(\mu)$ 包含多项式。

当且仅当存在一个平衡零密度子序列 $\Lambda = \{\lambda_n\} \subset$ 支撑μ，使得其特征序列$P(\Lambda) = \{p_n\}$ 满足时，多项式在 $L^1(\mu)$ 中不稠密

$$\exp p_n = O(\mu(\{\lambda_n\}))$$

当 $|n| \to \infty$ 时。

将指数函数族替代多项式，也可以表述类似的结论。在这类结论中，零密度序列被正密度序列取代，因此它们与本文所讨论的正则谱问题关系更为密切。关于这类结果，以及 L^p, $p \neq 1$, 或 Bernstein 空间的情形，参见例如 [24, 30]。一般测度的情形可以归约为离散

情形，这可以借助完备性问题中的一些标准工具来实现。关于更多参考文献和历史评述，另请参见 [15, 23]。

正如读者可能已经猜到的，特征序列 p_n 实际上就是偶算子 γ_n 的点质量序列，其中 Λ 是谱序列，即 $P(\Lambda) = \Gamma(\Lambda)$。由于任意离散序列都是某个适当选取的 Krein 典范系统的谱序列，因此可以用偶算子的点质量来代替特征序列表述上一个结论。

定义常数 γ_n 的另一种方式是

$$\gamma_n = 1/|F'(\lambda_n)|,$$

其中

$$F(z) = \prod \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right).$$

6.4. **Schr¨odinger 算子的 Hermite-Biehler 函数。并非每个 Hermite-Biehler 函数都能通过上一节所述的方式由 Schr**¨odinger 方程得到。对这类函数进行刻画对于应用十分重要，正如我们将在第7.3节中说明的那样。最近， [1]给出了这类刻画。在这里，我们介绍同一结果的一个版本，它将更适合我们的目的。

考虑定义在 PW_a 上的“后移算子” S^* $S^* f = f - f(0)\, z$。这是一个有界算子，且其像稠密。我们将 S^* 的像记为 PW_a'。与薛定谔算子相关时，来自 PW_a' 的函数会自然出现。

定理 6.5 ([17])。 与薛定谔方程相对应的 *Hermite-Biehler* 类整函数 $E = A + iB$ （该方程来自 $\mathcal{S}^2$ ）满足

$$A = \sin z + f \ \textit{and}\ B = \cos z + g, \tag{6.7}$$

其中， f 是来自 PW_1' 的奇函数， g 是来自 PW_1' 的偶函数，且对于某些 F, $f = S^*F$、 $g = S^*G$ 满足 $G \in PW_1$ $F(0) = G(0)$。

此外，对于任意满足 $F(0) = G(0)$ 的此类 f、 $g \in PW_1'$，存在 $\varepsilon > 0$，使得对于任意 $c_1 \in \mathbb{R}$、 $|c_1| < \varepsilon$ 以及 $c_2 \in \mathbb{R}$、 $|c_2| < \varepsilon$ ，函数 $E = A + iB$ 满足

$$A = \sin z + c_1 f \ \textit{and}\ B = \cos z + c_2 g \tag{6.8}$$

是与文献 $\mathcal{S}^2$ 中的 *Schr¨odinger* 方程相对应的 *Hermite-Biehler* 函数。

注 6.6。 请注意，根据 [17]，中的证明，常数 ε 总可以取为 $1/\max(||f||_2, ||g||_2)$。

该定理的陈述蕴含了谱的渐近关系（6.2）、（6.3）以及谱测度点质量的渐近关系（6.4）、（6.5），事实上，通过帕塞瓦尔定理以及相应的 de Branges 链与 PW 链的等价性，该定理的陈述与这些渐近关系等价。

7. Completeness, Gap and Type Problems

7.1. Beurling-Malliavin 密度与完备半径。若 $\{I_n\}$ 是实数集 $\mathbb{R}$ 上一列互不相交的区间，则称其为短序列，如果

$$\sum \frac{|I_n|^2}{1+\operatorname{dist}^2(0,I_n)} < \infty$$

否则称其为长序列。

若 Λ 是一列实点，则定义其外部 Beurling-Malliavin（BM）密度（有效 BM 密度）为

$$D^*(\Lambda) = \sup\{d \mid \exists \text{ long } \{I_n\} \text{ such that } \#(\Lambda \cap I_n) \geq d|I_n|\},\ \forall n\}.$$

对于非实序列，其密度可定义为 $D^*(\Lambda) = D^*(\Lambda')$，其中 Λ' 是实序列 $\lambda'_n = \frac{1}{\Re \lambda_n}$，若 Λ 没有虚点；否则，定义为 $D^*(\Lambda) = D^*((\Lambda + c)')$，其中取适当的实常数 c。

引入内部 BM 密度时，采用对偶定义：

$$D_*(\Lambda) = \inf\{d \mid \exists \text{ long } \{I_n\} \text{ such that } \#(\Lambda \cap I_n) \leq d|I_n|\},\ \forall n\}.$$

这两种密度都在调和分析中发挥着重要作用，并出现在许多基本结果中。最近，通过本文所讨论的方法，它们的应用扩展到了微分算子的谱问题领域。作为一个例子，让我们回顾一下 D^* 最初如何出现在 Beurling 和 Malliavin 对一个完备性问题的解答中。

对于任意复数序列 Λ，其完备半径定义为

$$R(\Lambda) = \sup\{a \mid \mathcal{E}_\Lambda = \{e^{i\lambda z}\}_{\lambda\in\Lambda} \text{ is complete in } L^2(0,a)\}.$$

调和分析的基本结果之一是以下定理（参见 [30]，了解历史及更多参考文献）。

定理 7.1（Beurling 和 Malliavin，约在 1961，[2, 3]。设 Λ 为一个离散序列。则

$$R(\Lambda) = 2\pi D^*(\Lambda).$$

我们将在第 7.3 节讨论 Horvath 定理时，再回到这一结果和外部密度。另一种密度 $D_*(\Lambda)$，近来又在间隙与型问题领域中崭露头角（见 [24, 28, 29, 30]），将在下文的陈述中用到。请注意，对于接近等差数列的序列的子序列，这两种密度之间的关系相当简单。特别是，对于满足（6.4）或（6.5）的序列 Λ，对任意 $\Phi \subset \Lambda$,

$$D^*(\Phi) + D_*(\Lambda \setminus \Phi) = D^*(\Lambda) = D_*(\Lambda) = 1.$$

7.2. 谱隙、型与符号变化。我们将下半连续函数 $W : \mathbb{R} \to [1, \infty]$ 称为 $\mathbb{R}$ 上的权。若测度 μ 在 $\mathbb{R}$ 上满足

$$\|\mu\|_W = \int W d|\mu| < \infty.$$

注意， W-有限测度必然支撑于 $\mathbb{R}$ 中 W 有限的子集上。

若 W 是一个权，我们将其型 T_W 定义为

$T_W =$ 上满足 $\sup\{a| \exists\, W$ 有限且非零、并具有谱隙 $[-a, a]\}$. 的测度 μ

这是 T_W的若干等价定义之一，参见 [30]。在诸如W 上指数系完备性问题以及 L^p Bernstein 空间等应用中，会用到其型。

若 ν 是 $\mathbb{R}$ 上的实测度，我们用 $\nu^{\pm}$ 表示它的正部和负部。若 ν 对所有 $f \in PW_a \cap L^1(|\nu|)$ 都满足 $\int f d\nu = 0$，则称其具有谱隙（$-a$， a）。注意，对于有限测度，这一性质等价于在（$-a$， a）上的 $\hat{\nu} = 0$。

若 A 和 B 是 $\mathbb{R}$ 的两个闭子集，令 $\mathcal{M}_a^W(A, B)$ 表示所有非零的 W-有限实测度 σ 所成的类，这些测度具有谱隙 $[-a, a]$，且 $\operatorname{supp}\sigma^+ \subset A$ 和 $\operatorname{supp}\ \sigma^- \subset B$。

以下陈述综合了 [25] 中的引理 13 和 16。

引理 7.2. 若 $\mathcal{M}_a^W(A, B)$ 非空，则其中包含一个离散测度 ν，其正部和负部具有交错支撑。

以下这个型定理的版本是 [30] 中的定理 36

定理 7.3。

$$T_W = \pi \sup\left\{d \ : \sum \frac{\log W(\lambda_n)}{1+\lambda_n^2} < \infty \ \textit{for some d-uniform sequence}\ \Lambda\right\},$$

若该集合非空，则为 0 。

关于 d-一致序列的概念最早出现在 [28]。对于我们的结果，无需完整定义 d-一致序列，因为我们关注的序列都是分离的。对于分离序列 Λ，即满足以下条件的离散序列：$|\lambda_n - \lambda_{n-1}| > c > 0$ 对所有 n，Λ 是 d-一致的当且仅当$D_*(\Lambda) = d$，例如参见 [30]第 27 页的例 1。这意味着

推论 7.4([17])。

$$T_W \geq \pi \sup\left\{ d \ : \sum \frac{\log W(\lambda_n)}{1+\lambda_n^2} < \infty \ \textit{for some separated } \Lambda,\ D_*(\Lambda) = d \right\}.$$

由 [25]的一项结果（或 [30]中的定理 17、第 4 章）可推得

推论 7.5 ([17])。 若 W 是一个权， A 是一个分离序列，而 B 是任意闭集，则

$$\sup\{a|\ \mathcal{M}_a^W(A,B) \neq \emptyset\} \leq 2\pi D_*(A).$$

我们记 $\log_- x = \max(0, -\log\ x)$。 我们还需要以下

推论 7.6 ([17])。 设 $X = \{x_n\}$ 是实数的一个分离序列。设 $\tau = \sum c_n \delta_{x_n}$ 是一个具有谱隙$(-a, a)$的离散测度。那么，对任意 $d < a$ ，存在 $\Phi \subset X$, $\pi D_*(\Phi) > d$，使得

$$\sum_{x_n \in \Phi} \frac{\log_- c_n}{1+n^2} < \infty.$$

7.3. **Horvath 定理**。 下面的定理是 [13]的主要结果之一。这里我们使用平方根变换后的m-函数版本，以等价形式表述该定理。

定理 7.7 ([13])。 设 $\Lambda = \{\lambda_n\}$ 是由互不相同的非零复数组成的序列， $0 \leq a \leq 1$。以下陈述等价：

(1) 对任意 *Schr ¨inger* 算子 $L \in \mathcal{S}^2$，若 $\tilde{L} \in \mathcal{S}^2$ 满足 $q = \tilde{q}$~在$(0, a\pi)$上成立，且 $m_- = \tilde{m}_-$ 在 Λ上成立，则 L 与 L 恒等。 *(2)* 指数函数系 $\left\{e^{i\gamma z} | \gamma \in \Lambda \cup \{*, *\}\right\}$ 在$L^2(0,(2-2a)\pi)$中完备。

记号 $\{*, *\}$ 在该命题中表示 $\mathbb{C} \setminus \Lambda$中的任意两点。上述定理的一个版本在 [13] 对所有 $1 \leq p \leq \infty$的情形下得到了证明。这里我们只讨论 $p = 2$的情形，尽管类似的论证也可应用于其他 p。“未混合”情形 $a = 0$ 的一个简单证明见 [1]。或者，也可以从定理6.5 和引理8.2推出该定理，详情见 [17]。

Horvath 定理建立了混合谱问题与 Schr¨odinger 算子之间的等价关系，以及 Beurling-Malliavin 问题与 L^2 空间中指数函数完备性之间的等价关系；这些空间在第 7.1节中讨论。结合定理7.7和 7.1 ，我们得到以下命题，它是以定义序列 Λ的密度表述的最精确结果。

推论 7.8 （[17]）。设 $\Lambda = \{\lambda_n\}$ 是一个由互不相同的非零复数组成的序列，$0 \le a \le 1$。以下陈述等价：

(1) 任意两个薛定谔算子 L 和 $\tilde{L}$，若 $q = \tilde{q}$ 在 $(0, d\pi)$ 上对某个 $d > a$ 成立，且 $m_- = \tilde{m}_-$ 在 Λ上成立，则二者恒等地重合。*(2)* $D^*(\Lambda) \ge 1 - a$。

8. Applications to mixed spectral problems

我们还希望在此纳入所谓混合谱问题的三区间情形中反例（不定算子）的一种“参数化”。Hochstadt 和 Lieberman[12] 的定理表明，已知区间 $(0, \pi/2)$ 一半上的势以及其中一个谱，就可以唯一确定该算子。该结果的精确性体现在：缺少谱中的一个点，或只知道 $(0, \pi/2 - \varepsilon)$ 上的势，都是不充分的。del Rio、Gesztesy、Simon 和 Horvath 的进一步结果聚焦于两个区间的情形，即势在 $(0, a)$ $0 < a < \pi$上已知，而在 (a, π) 上未知的情形。逻辑上的问题是，尝试用 $(0, a)$ 的其他子集来替代它，首先考虑自然的下一步，即两个区间 $(0, a) \cup (b, \pi)$ $0 < a < b < \pi$。然而，这类尝试立即会遇到 Gesztezy 和 Simon 在 [11] 中给出的以下优美反例。

反例 *8.1* （[11]）。设薛定谔算子的势 q 满足 $q(x) = q(\pi - x)$，对所有 $x \in (0, \frac{\pi}{2} - \varepsilon)$ 均成立。设 L 为具有反射势 $\tilde{q}(x) = q(\pi - x)$ 的算子，对所有 x 均成立。众所周知，这两个算子在端点处施加任意一对对称边界条件时，其谱将重合。然而，除非 $q(x) = q(\pi - x)$ 对 $x \in (\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2})$ 成立，否则这两个算子并不相同。因此，即使拥有几乎完备的直接信息（知道总长度为 $\pi - 2\varepsilon$ 的两个区间上的势）以及一个谱，也不足以恢复该算子。

这个反例表明，双区间问题与三区间情形有着实质性的不同。直到最近，文献中关于三区间问题的这个反例还是唯一的，这促使一些专家提出疑问：从某种意义上说，它是否是这类反例中唯一的一个。第8.10 节8.3 中的定理用算子的谱测度描述了三区间问题所有可能的反例。

由算子的谱测度可知，我们的“参数化”表明，具有“近乎对称”势的算子对只是所有不定算子对中的一个子流形。然而，就谱测度的渐近关系而言，所有其他这类算子对也必须接近对称，见第8.3节。另一方面，我们证明，存在一大类算子，它们由两个区间上的势和谱的一部分唯一确定。这引出了一个自然的问题：如何描述具有此类唯一性性质的算子？相关讨论见第9.9节。

8.1. **傅里叶间隙与薛定谔算子**。我们将本节的结果表述为适用于一类稍广的 $\mathcal{S}^1$ 可和势薛定谔算子。

引理 *8.2*（[17]）。设 $L, \tilde{L} \in \mathcal{S}^1$。那么， $q = \tilde{q}$ 在 $(0, a\pi)$ 上成立，当且仅当 $\mu_- - \tilde{\mu}_-$ 具有谱隙（$-2a, 2a$）。类似地， $q = \tilde{q}$ 在 $(b\pi, \pi)$ 上成立，当且仅当 $\mu_+ - \tilde{\mu}_+$ 具有谱隙（$-2(1-b), 2(1-b)$）。

注 8.3。间隙问题领域中有一条众所周知的结论：实测度 μ 具有谱隙（$-a$, a），当且仅当 $H\mu(iy) = O(e^{-ay})$，其中 $y \to \infty$，例如参见 [24]中的引理 4.5。在此结论中，$O(e^{-ay})$可以替换为 $o(e^{-y(1-\varepsilon)a})$，并将正虚半轴替换为负虚半轴。

引理 8.4 ([17])。设 L、$\tilde{L} \in \mathcal{S}^1$，并令 k、$\tilde{k}$ 为相应的 *Krein*˜函数。那么，$(0, a\pi)$ 上的 $q = \tilde{q}$ 成立，当且仅当测度 $(k - k)dx$ 存在谱隙 $(-2a, 2a)$。

如上所述，谱隙的存在也可以等价地用沿着 $i\mathbb{R}$的衰减来表述：

推论 8.5 ([17])。考虑来自 $\mathcal{S}^2$ 的两个算子 L 和 $\tilde{L}$，并令 k、$\tilde{k}$为它们的克莱因函数。那么，势 q 和 $\tilde{q}$ 在$(0, a\pi)$ 上相等，当且仅当

$$H(k - \tilde{k})(iy) = O(e^{-2ay}) \ as \ y \to \infty$$

iff

$$H(k - \tilde{k})(iy) = o(e^{-2(1-\varepsilon)ay}) \ as \ y \to \infty$$

对任意 $\varepsilon > 0$。

注 8.6。由引理的证明 8.2 可知， $q = \tilde{q}$ 在 $(0, a\pi)$ 上成立，当且仅当 $\nu_- - \tilde{\nu}_-$ 存在谱隙 $(-2a, 2a)$，其中 ν_- 是对应于 0 处诺伊曼边界条件的谱测度。同样的结论˜可由引理 8.4 推出，因为 $\pi - k$和 $\pi - k$是 ν_-和 $\tilde{\nu}_-$的 Krein 函数。

更一般地，在这一结论中，0 或 π 处的任何自伴边界条件都可以使用，证明相同。

结合上述结果，可得以下结论，这是 [36] 的主要结果之一。它在 [36] 中以等价形式表述，使用了不同的 m- 函数（在平方根变换之前）。

推论 8.7 （[17]）**：** 势 q 和 $\tilde{q}$ 在（0，$a\pi$） 上重合，当且仅当 m函数满足

$$m_+(iy) - \tilde{m}_+(iy) = O(e^{-2ay}) \ as \ y \to \infty.$$

8.2. **不确定性大小**。回顾一下，对于算子 L，我们用$\sigma_{DD} = \{\lambda_n\}$ 和 $\sigma_{ND} = \{\eta_n\}$ 表示其经过平方根变换后的谱。我们按照第 6.1节中的描述对这些序列进行编号。

设 $I = \{I_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是实数集 $\mathbb{R}$上的区间序列。考虑集合 $\mathcal{S}_I$，其中包含满足以下条件的算子 $L \in \mathcal{S}^2$： σ_{DD} 和 σ_{ND} 包含于 I_n的并集中。按照我们在引言中的讨论，可以提出这样的问题：通过这一包含条件，我们获得了多少必要谱信息？我们将区间序列 $I = \{I_n\}$ 的不确定性大小定义为数 U（I），它等于满足以下条件的 a 的下确界：已知算子 $L \in \mathcal{S}_I$ 在 (0，$a\pi$）上的势，便可以唯一恢复 L。下面的定理 8.8给出了不确定性大小的以下公式：

$$U(I) = \pi \sup \left\{ D_*(\Phi) \ : \ \sum_{n\in\Phi} \frac{\log_- |I_n|}{1+n^2} < \infty \right\}.$$

现在让我们把这些论述表述得更精确一些。

定理 8.8 ([17])。 设 $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为正数， $a \in [0, 1)$。以下陈述等价：

˜(1) 任意两个满足下列条件的薛定谔算子 L和 L

$$|\lambda_n - \tilde{\lambda_n}| < \varepsilon_{2n}, \ |\eta_n - \tilde{\eta}_n| < \varepsilon_{2n+1}, \ n \in \mathbb{N}, \tag{8.1}$$

并且 $q(x) = \tilde{q}(x)$ 在 $(0, d\pi)$ $d > a$ 上必处处相同，即$q = \tilde{q}$ 在 $(0, \pi)$上几乎处处相同。

(2) 任意一个互异整数序列 $\Phi \subset \mathbb{Z}$，只要满足

$$\sum_{n\in\Phi\cap\mathbb{N}} \frac{\log_- \varepsilon_n}{1+n^2} < \infty, \tag{8.2}$$

满足 $D_*(\Phi) \le a$。

特别地，我们得到了博格定理的以下“非确定性”版本

推论 8.9 ([17]). 设 $\{I_n\}$ 是 $\mathbb{R}$、 $U = \cup I_n$ 上的一个区间序列。以下陈述等价：

(1) 条件

$$\sigma_{DD} \cup \sigma_{ND} \subset U \tag{8.3}$$

再加上势 q 在$(0, \varepsilon)$ 上的取值，对于任意 $\varepsilon > 0$，都能唯一确定一个算子 $L \in \mathcal{S}^2$ 。

(2) 对于每个满足以下条件的 $\Phi \subset \mathbb{N}$

$$\sum_{n \in \Phi} \frac{\log_- |I_n|}{1 + n^2} < \infty,$$

存在一个由区间 $\{J_n\}$ 构成的长区间序列，位于 $\mathbb{R}_+$ 中，使得

$$\frac{\#(\Phi \cap J_n)}{|J_n|} \to 0$$

当 $n \to \infty$ 时。

第一条陈述也可以等价地表述如下：如果 L， $\tilde{L} \in \mathcal{S}^{2\tilde{}}$满足 (8.3) 且 $q = \tilde{q}$ 在 (0， ε) 上，且存在某个 $\varepsilon > 0$ ，那么 $L \equiv L$。回顾一下，长区间序列（按 Beurling 和 Malliavin 的意义）的定义见第7.1节。

8.3. 三**分区间命题**。 本节旨在描述三分区间问题中所有可能的反例。为了表述下面的定理 8.10 ，我们需要做一些准备。

设 μ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的正测度，满足 $PW_a \subset L^2(\mu)$ 对所有 a >0 均成立。众所周知，例如参见 [26], ，任何来自 ¨的薛定谔算子 $\mathcal{S}^2$ 的谱测度都满足这一条件。我们将μ 的型定义为

$$T_\mu = \inf\{a|\ PW_a \text{ is dense in } L^2(\mu)\}.$$

现在设 Λ 是满足渐近关系 (6.2) 的一个序列。记 η为 Λ的计数测度。根据 [29, 30],的型定理，事实上根据更早的型问题研究结果，可以得到 $T_\eta = 1$。此外，例如由 [26]的结果可知， $L^2(\eta) = PW_1$ (作为集合)。

现在设 $0 < c, \ d < 1$ 为实常数。在下一个命题中，我们需要两个偶函数 f， g，

$$f \in L^2(\eta) \ominus PW_c, \quad g \in L^2(\eta) \ominus PW_d$$

满足某些渐近关系，参见（8.4）。正如我们将在陈述之后讨论的，这类函数在相应的无限维子空间中构成稠密子集 $L^2(\eta)$ 。回想一下，我们用 $\Gamma(\Lambda)$ 表示 Λ 的特征序列，或者等价地，偶算子的点质量序列，参见第 6.3 节。

定理 8.10 ([17])。 设 Λ 是满足渐近关系 (6.2) 的序列，$\Gamma(\Lambda) = \{\gamma_n\}$。记 η 为 Λ 的计数测度。设 a， $b \in [0, 1/2)$ 为任意常数

1) 对任意两个实偶函数 f, g,

$$f \in L^2(\eta) \ominus PW_{2a}, \quad g \in L^2(\eta) \ominus PW_{2b}$$

满足

$$|n|f(\lambda_n) = a_n, \ |n|g(\lambda_n) = a_n \left(1 + \frac{b_n}{|n|+1}\right), \tag{8.4}$$

对于某些 $a_n, b_n \in l^2$, $b_n \geq -|n| - 1$，测度 $\mu = \sum \alpha_n \delta_{\lambda_n}$ *and* $\tilde{\mu} = \sum \tilde{\alpha}_n \delta_{\lambda_n}$, 其中

$$\alpha_n = \frac{f(\lambda_n)}{2} + \sqrt{\frac{f^2(\lambda_n)}{4} + \gamma_n^2 \frac{g(\lambda_n)}{f(\lambda_n)}},$$

$$\tilde{\alpha}_n = -\frac{f(\lambda_n)}{2} + \sqrt{\frac{f^2(\lambda_n)}{4} + \gamma_n^2 \frac{g(\lambda_n)}{f(\lambda_n)}} \tag{8.5}$$

当 $a_n \neq 0$ *and* $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n = 1 + c_n/n$ 对于某个 $c_n \in l^2$ 且 $a_n = 0$时，它们是两个薛定谔算子 $L, \tilde{L} \in \mathcal{S}^2$ 的谱测度，使得

$$\sigma_{DD} = \tilde{\sigma}_{DD} = \Lambda, \ q = \tilde{q} \ on \ [0, a\pi] \cup [(1-b)\pi, \pi].$$

˜*2)* 对于定义在 $[0, \pi]$ 上的两个薛定谔算子 L, L 的任意两个谱测度，使得

$$\sigma_{DD} = \tilde{\sigma}_{DD} = \Lambda, \ q = \tilde{q} \ on \ [0, a\pi] \cup [(1-b)\pi, \pi],$$

它们的点质量必须满足

$$\alpha_n - \tilde{\alpha}_n = f(\lambda_n), \ \tilde{\alpha}_n^{-1} - \alpha_n^{-1} = \gamma_n^{-2} g(\lambda_n),$$

对于某些偶函数

$$f \in L^2(\eta) \ominus PW_{2a}, \ g \in L^2(\eta) \ominus PW_{2b},$$

满足 (8.4) 其中有 a_n， $b_n \in l^2$， $b_n \geq -|n| - 1$。

注记 8.11. 关于陈述中的函数 f 和 g，注意，由于 $2a$， $2b < 1$ 且 $L^2(\eta) = PW_1$， PW_{2a} 和 PW_{2b} 在 $L^2(\eta)$ 中的正交补是很大的无限维子空间。

如果函数 h 属于 $L^2(\eta) \ominus PW_{2a}$，那么 $p(z) = \mathrm{Re}\ h(z) - \mathrm{Re}\ h(-z)$ 是同一子空间中的一个实奇函数。函数 $f(z) = p(z)/z$将满足 f 的条件。此外，这类函数在 $L^2(\eta) \ominus PW_{2a}$ 中所有偶函数构成的空间里稠密。

为选择 g，例如假设 $a \geq b$。再选择两个实值奇函数 p_1， p_2，它们属于 $L^2(\eta) \ominus PW_{2a}$，如上所述。于是，函数$r(z) = p_1(z)p_2(0) - p_1(0)p_2(z)$将在 0 处有一个二重零点。函数

$g = f + r/z^2$ 将满足关于 g 的条件。如果 $a < b$，也可以反向进行：先选择 g，再选择 f。

定理 8.10 描述了三区间问题的所有可能反例。我们可以看到，这个集合比以往认为的更加丰富，其中包括 [11]在引言中讨论的原始反例，对应于 $f = g$，即 $b_n \equiv 0$ 按定理陈述中的记号表示的情形。另一方面，所有反例都必须与原始反例接近，具体而言， f 与 g 之间的差，其衰减阶数高于任一函数本身。

8.4. 偶算子附近三区间问题的唯一性。本节将从略有不同的角度考察三区间问题。我们将探讨是否存在由“三区间”信息唯一确定的算子 L。这里的结果可视为下一节所讨论的此类算子描述问题的准备工作。

令 $\mu = \mu_- = \sum \alpha_n \delta_{\lambda_n}$ 表示算子 L 从$\mathcal{S}^2$ 出发的谱测度，定义见第6.2节。对于 $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ 记作

$$D'_*(\Lambda) = \max\{D_*(\Phi) |\ \Phi \subset \Lambda, \{n, n+1\} \not\subset \Phi, \forall n \in \mathbb{Z}\}.$$

再次，对于离散序列 $\Lambda \subset \mathbb{R}$，我们用 $\Gamma(\Lambda)$表示其特征序列，见第6.3节。

定理 8.12。设 $0 \le a < 1/2$，且 $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是正数列，使得对于 $\Phi \subset \mathbb{N}$，不等式

$$\sum_{n\in\Phi} \frac{\log_- \varepsilon_n}{1+n^2} < \infty \tag{8.6}$$

推出

$$D'_*(\Phi) \le a.$$

那么，任何满足下述条件的算子 $L \in \mathcal{S}^2$

$$|\alpha_n - \gamma_n| < \varepsilon_n, \tag{8.7}$$

其中 $\{\gamma_n\} = \Gamma(\sigma_{DD})$，均由其谱 σ_{DD} 及其在 $(0, d\pi) \cup ((1-d)\pi, \pi)$ 上的势 q 唯一确定，任意 $d > a$ 均如此。也就是说，若 L 满足 (8.7)，那么任何满足 $\tilde\sigma_{DD} = \sigma_{DD}$、且在 $(0, d\pi) \cup ((1-d)\pi, \pi)$ 上的势为 $\tilde q = q$ 的 $\tilde L \in \mathcal{S}^2$，对于某个 $d > a$，都必定与 L 相同。

注 8.13。 最后的陈述揭示了一种有趣的现象。正如我们从原始反例中看到的那样，如果一个算子就势而言接近偶对称（但并非偶对称）（这里是指正问题的意义），也就是说，如果它的势在 $[0, d] \cup [1-d, \pi]$ 上是偶对称的，那么它就不能由相应的混合谱数据唯一确定。然而，如果一个算子就谱测度而言接近偶对称（这里是指逆问题的意义），那么它就能由混合谱数据唯一确定。这一性质还有待

充分理解。它的一个具体推论是一个具有不确定性原理领域典型特征的结论：按照最后一段陈述的意义，一个算子不可能在势和谱两方面同时接近偶对称（但并非偶对称）。

可以用以下条件代替 $\tilde{\sigma}_{DD} = \sigma_{DD}$：假设谱的交集具有足够大的密度。这个替代条件可由 [17]中的定理证明得出。

9. Examples and open problems

本节将运用本文所述的方法和结果，为谱问题提供具体示例。

我们先来看一些谱问题的例子。

9.1. **常哈密顿量**。 利用定理 3.1 和 3.2 或定理4.3 和 4.6，我们可以求出具有常哈密顿量的系统的正问题和逆问题的解。

例 9.1 ([18])。 设常数 $h_1 > 0$、$h_2 > 0$、$g \in \mathbb{R}$ 满足 $h_1 h_2 = 1 + g^2$，并且

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} h_1 & g \\ g & h_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}).$$

于是 $\mu = h_1^{-1}$。

9.2. **偶 2π–周期谱测度**。 利用定理4.3或 4.7，我们求解这一特定谱测度的逆谱问题$d\mu = (1 + \text{余弦}\, x)dx$。

例 9.2 ([18])。 对于谱测度 $d\mu = (1 + \text{余弦}\, x)dx$, h 是步长为 1 2 的阶梯函数，且各阶的取值为

$$1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \ldots, \frac{n}{2n-1}, \frac{n}{2n+1}, \frac{n+1}{2n+1}, \ldots$$

在区间上

$$\left[0, \frac{1}{2}\right), \left[\frac{1}{2}, 1\right), \left[1, \frac{2}{3}\right), \ldots$$

或者等价地，

$$h_n^{\mu} = \frac{((-1)^n(2n+3)+1)^2}{8(n+1)(n+2)} \quad on \quad \left[\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}\right).$$

同样，我们可以求解谱测度 $d\mu = (1 - \text{余弦}\, x)dx$对应的逆谱问题。

例 9.3 ([18, 40])**.** 对于谱测度 $d\mu = (1 - 余弦\, x)dx$, h 是步长为1 2的阶梯函数，并且满足

$$h_n^\mu = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad on \quad \left[\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}\right).$$

我们利用定理4.4得到了以下例子。

例9.4 ([40])。 考虑满足以下条件的对角行列式归一化哈密顿量： $h_n^\mu = a^n$ 在 $[\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2})$ 其中 $a > 0$。

该谱测度对应于 *Geronimus* 多项式：令 $\alpha \equiv \frac{1-a}{1+a}$ ，在单位圆上 μ 有═个绝对连续部分

$$w(x) = \frac{1}{|1+\alpha|} \frac{\sqrt{1 - \alpha^2 - \cos^2 \frac{x}{2}}}{\sin \frac{x}{2}},$$

其支撑为 [2反正弦 $|\alpha|$, 2π − 2反正弦 $|\alpha|$]，并有一个奇异部分

$$\frac{2}{|1+\alpha|^2} \left(|\alpha + \frac{1}{2}|^2 - \frac{1}{4}\right) \delta_{z=1},$$

若 $\alpha > 0$，或等价地 $a < 1$。

9.3. **一般的** 2π**–周期测度**。利用定理4.3和4.6 或4.7和4.9，我们可以求出谱测度的逆谱问题$d\mu = (1 \pm 正弦\, x)dx$。

例9.5([18])。对于周期谱测度 $d\mu = (1 + 正弦\, x)dx$，我们可以使用定理*4.3* 或*4.7* 来求得 h^μ，使用定理*4.6* 或*4.9*来求得 g^μ。哈密顿量在区间上取值

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5/3 & -4/3 \\ -4/3 & 5/3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4/3 & -5/3 \\ -5/3 & 17/6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4/5 & -1 \\ -1 & 5/2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 13/15 & -2/3 \\ -2/3 & 5/3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 25/21 & -22/21 \\ -22/21 & 37/21 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8/7 & -9/7 \\ -9/7 & 65/28 \end{pmatrix}, \dots$$

在区间上

$$\left[0, \frac{1}{2}\right), \left[\frac{1}{2}, 1\right), \left[1, \frac{2}{3}\right), \dots$$

例9.6([18])。对于谱测度 $d\mu = (1 - 正弦\, x)dx$，我们再次可以得到与前一个例子类似的哈密顿量：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5/3 & 4/3 \\ 4/3 & 5/3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4/3 & 5/3 \\ 5/3 & 17/6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4/5 & 1 \\ 1 & 5/2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 13/15 & 2/3 \\ 2/3 & 5/3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 25/21 & 22/21 \\ 22/21 & 37/21 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8/7 & 9/7 \\ 9/7 & 65/28 \end{pmatrix}, \dots$$

关于区间

$$\left[0, \frac{1}{2}\right), \left[\frac{1}{2}, 1\right), \left[1, \frac{2}{3}\right), \dots$$

9.4. **非周期测度与周期化方法**。 利用定理 3.3，我们可以显式求解 μ 为勒贝格测度加上一个点质量的情形。

例 9.7 ([18])。 考虑谱测度 $d\mu = \alpha + \beta\pi\delta_0, \quad \alpha > 0, \quad \beta \geq 0$。利用定理 *3.3* 可得

$$\psi_t = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi\alpha + 2\pi t\beta} 1_{(-t,t)},$$

and

$$k_t(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \psi_t = \frac{2tc(t)}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\pi} \frac{t}{\alpha + t\beta}.$$

由此可得

$$h^\mu(t) = \pi \frac{d}{dt} k_t(0) = \frac{d}{dt} \frac{t}{\alpha + t\beta} = \frac{\alpha}{(\alpha + t\beta)^2}$$

并且

$$H(t) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{(\alpha+t\beta)^2} & 0 \\ 0 & \frac{(\alpha+t\beta)^2}{\alpha} \end{pmatrix}$$

是具有谱测度 μ的唯一对角哈密顿量。

注 9.8。 注意，在极限情形 $\alpha \to 0$ （以及 $\beta = 1$）下：

$$\mu(x) \to \pi\delta(x), \qquad h^\mu(t) \to \delta(t).$$

确实，

$$\int_0^\infty \frac{\alpha}{(\alpha + t)^2} \, dt = -\frac{\alpha}{\alpha + t}\Big|_{t=0}^\infty = 1$$

这表明，如何运用我们为 *PW* 测度开发的方法，求解非 *PW* 测度的逆问题 $\mu = \pi\delta$，这与第 *4* 节中提到的一些收敛结果 [32]一致。

例 9.9 ([18])。 这是对最后一个例子的推广；*H. Winklerin* [38] 曾用不同的方法研究过该例。

设 μ 为 *PW* 采样测度。对于 $r \geq 0$，设 $\mu_r = \mu + r\pi\delta$。则

$$h^{\mu_r}(t) = \frac{h^\mu(t)}{\left(1 + r\int_0^t h^\mu\right)^2}.$$

这为逆谱问题提供了许多例子。令 $\mu = \alpha m, \quad h^\mu = \alpha^{-1}$，则有

$$h^{\mu_r}(t) = \frac{\alpha^{-1}}{(1 + \alpha^{-1} rt)^2} = \frac{\alpha}{(\alpha + rt)^2}.$$

注意，μ_{x+y} 可表示为 $\mu_{x+y} = \mu_x + y\delta_0$。对于 $h_x = h^{\mu_x}$，该结果给出方程

$$h_{x+y}(t) = \frac{h_x(t)}{\left(1 + y\int_0^t h_x\right)^2}$$

初始条件为 $h_0 = h^\mu$。

例 9.10 ([18])。考虑谱测度 $\mu = \alpha + \beta\pi\delta_\lambda$。这里$\alpha > 0$，$\beta > 0$，以及 $\lambda \in \mathbb{R}$ 均为参数。与例 *9.7*不同，若 $\lambda \neq 0$，则该测度不是偶测度。

(i) 我们希望求出

$$h^\mu = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{d}{dt}\int \psi_t,$$

其中

$$\hat{\mu} * \psi_t = 1 \qquad \text{on} \quad (-t, t).$$

我们可以求解这个卷积方程，并得到

$$h^\mu(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{t}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}\frac{1}{\alpha+\beta t}\left(\frac{\sin\lambda t}{\lambda}\right)^2\right].$$

例如，若 $\alpha = \beta = 1$，则

$$h^\mu(t) = \sin^2\lambda t + \left[\cos\lambda t - \frac{\sin\lambda t}{\lambda(1+t)}\right]^2.$$

(ii) 现在我们来计算 g^μ 对于

$$\mu = \alpha + \pi\beta\delta_\lambda$$

要计算 g^μ，我们需要

$$l_t(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-t}^{t} \psi_t * (\sigma\hat{\mu}).$$

通过直接计算，我们可以求解 l_t，并得到

$$g^\mu(t) = -\frac{\beta}{\alpha\pi\lambda}\left[1 - \frac{\alpha}{\alpha+\beta t}\cos(2\lambda t)\right.$$
$$\left. - \frac{\alpha\beta + 2\beta^2 t}{(\alpha+\beta t)^2}\frac{\sin(2\lambda t)}{2\lambda} + \frac{\beta^2}{(\alpha+\beta t)^2}\frac{\sin^2(\lambda t)}{\lambda^2}\right].$$

让我们在特殊情况 $\alpha = \beta = \lambda = 1$ 下简化上述公式：

$$g^\mu(t) = -\frac{1}{\pi}\left[1 - \frac{\cos(2t)}{1+t} - \frac{1+2t}{(1+t)^2}\frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin^2 t}{(1+t)^2}\right]$$
$$= \frac{(2t+1)(\cos(2t)+\sin(2t)) + 2\cos(2t) - 1}{2\pi(1+t)^2} - \frac{1}{\pi}.$$

例9.11 ([18])。 让我们进一步推广前面的例子，并求解以下对象的逆问题

$$\mu = \alpha + \sum_n \pi\beta_n \delta_{\lambda_n}.$$

其傅里叶变换为

$$\hat{\mu} = \sqrt{2\pi}\alpha\delta_0 + \sum_n \frac{\pi\beta_n}{\sqrt{2\pi}} e_{-\lambda_n},$$

其中 $e_s(t) = e^{ist}$。

与前面一样，设 $\psi = \psi_t$ 为再生核的傅里叶变换$k_t(\cdot) = K_t(0,\cdot) \in \mathcal{B}_t$。定理 *3.3* 于是给出

$$\hat{\mu} * \psi = 1 \ on \ (-t, t)$$

可将其改写为

$$\sqrt{2\pi}\alpha\psi(x) + \sum_n c_n(t)\frac{\pi\beta_n}{\sqrt{2\pi}} e_{-\lambda_n}(x) = 1 \tag{9.1}$$

其中

$$c_n(t) = \int_{\mathbb{R}} e_{\lambda_n}\psi = \sqrt{2\pi}\hat{\psi}(-\lambda_n).$$

求解(9.1)可得 ψ 如下

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha} - \sum_n \frac{\beta_n}{2\alpha} c_n(t) e_{-\lambda_n}(x). \tag{9.2}$$

直接计算可得

$$(\alpha + \beta_n t)\, c_n + \sum_{k\neq n} \operatorname{sinc}_t(\lambda_n - \lambda_k)\beta_k c_k = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}_t(\lambda_n), \tag{9.3}$$

其中

$$\operatorname{sinc}_t(x) = \frac{\sin(tx)}{x}.$$

引入以下两个矩阵，

$$B = \operatorname{diag}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \quad and \quad S_t = (\operatorname{sinc}_t(\lambda_j - \lambda_k))_{1\leq j,k\leq n},$$

以及两个向量

$$L_t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \begin{pmatrix} \operatorname{sinc}_t(\lambda_1) \\ \operatorname{sinc}_t(\lambda_2) \\ \vdots \\ \operatorname{sinc}_t(\lambda_n) \end{pmatrix}, \text{ and } C(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix}.$$

由以上计算可得如下

定理 9.12 （[18]）。

$$(\alpha + S_t B)^{-1} L_t = C(t).$$

因此，现在可以通过以下公式计算 h^μ，由此便完成了 μ 为偶数时的求解。

推论 9.13([18])。

$$h^\mu(t) = \frac{1}{\pi\alpha} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha}\frac{d}{dt} < B(\alpha + S_t B)^{-1} L_t, L_t > .$$

一般情形下， $\mathcal{H}$、 g^μ的非对角项可以使用定理*4.6*中的公式计算。

9.5. **周期化方法**。 我们首先将周期化方法应用于例 9.7。

例 9.14 ([18, 32])。 我们来考虑例 *9.7*$\mu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} m + \sqrt{2\pi}\delta_0$的一个特殊情形，并且已知相应的 $h^\mu(t)$ 为

$$h^\mu(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{(1+2t)^2}.$$

该测度满足定理*2.5*和*4.13*的所有假设。我们用 $T = \pi$， 2π， 4π， 8π对该测度进行周期化，并将 h^μ_T与实际的 h^μ进行比较。在图*1*中，黑色阶梯函数是由周期化得到的 h^μ_T，每幅图中的橙色曲线则是实际的$h^\mu(t)$。

对于这个例子，我们可以从 h^μ 的 h^μ_T中得到 $2T-$的周期化 μ，其形式为$\mu_T = \sqrt{2\pi}\delta_0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} m$，定义在 $[-T, T]$e 上。于是，单位圆上与 μ_T 对应的测度 $\mathbb{T}$ 为 $\mu^{\mathbb{T}}_T = \frac{\pi+T}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\pi}{\pi+T}\delta_0 + \frac{T}{\pi+T}\frac{m}{2\pi}\right)$，其中 δ_0 在此表示 $\theta = 0$ 上位于 $\mathbb{T}$处的单位点质量。我们知道与该测度对应的正交归一多项式，例如可由[37]得到。因此，根据定理*4.7*，与 n对应的 h^μ_T 的第 μ_T 步取值为

$$\frac{\sqrt{2\pi}T^2}{(n\pi + T)(n\pi + T + \pi)}.$$

给定 T，将 n 所在的位置代入 $\frac{2Tt}{\pi} + 1$。这样得到的函数图像经过 h^μ_T 各阶梯的所有右端点。将此函数记为 $\tilde{\phi}_T(t)$，则有

$$\tilde{\phi}_T(t) = \frac{\sqrt{2\pi}T^2}{4t^2T^2 + 4tT^2 + 6\pi tT + T^2 + 3\pi T + 2\pi^2}.$$

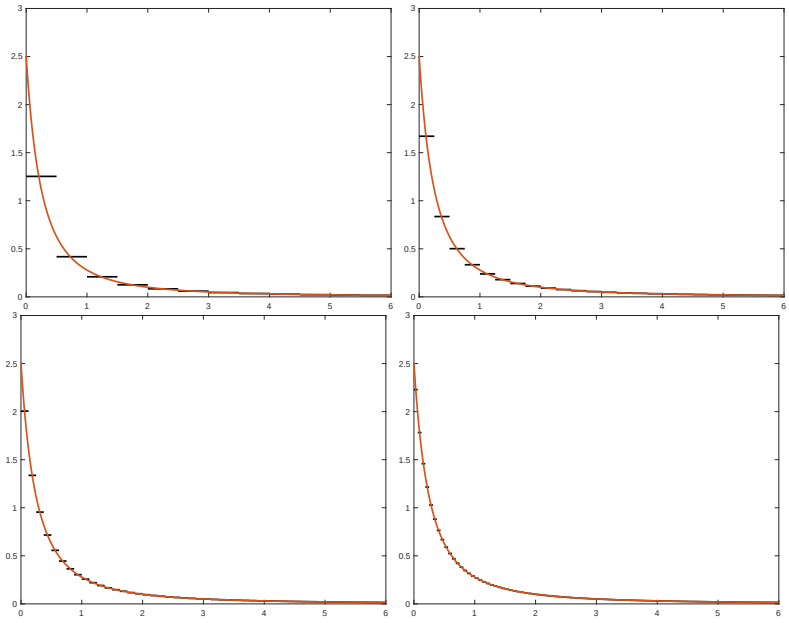

FIGURE 1. 从左到右： h^{μ}_{π}、 $h^{\mu}_{2\pi}$、 $h^{\mu}_{4\pi}$、 $h^{\mu}_{8\pi}$。

取 $T \to \infty$ 的极限后，我们得到预期的答案：

$$\lim_{T\to\infty} \tilde{\phi}_T(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4t^2+4t+1} = \frac{\sqrt{2\pi}}{(2t+1)^2} = h^{\mu}(t).$$

例 9.15 ([32])。 考虑如下 *PW* 系统

$$d\mu(x) = (1+\frac{\sin x}{x})dx.$$

该测度的密度有界且远离零。因此 μ 是一个 *PW* 测度。根据定理 *4.12*，我们可以使用由周期化 μ_T 恢复得到的哈密顿量，来逼近对应于 μ 的哈密顿量。采用 $T = \pi$、 2π、 4π、 8π 所得的逼近结果见图*2*。

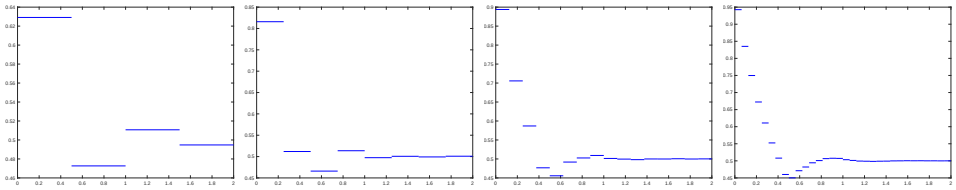

FIGURE 2. 对 $d\mu(x) = (1+\text{正弦}_x{}^x)dx$进行周期化。
从左到右： h^{μ}_{π}、 $h^{\mu}_{2\pi}$、 $h^{\mu}_{4\pi}$、 $h^{\mu}_{8\pi}$。

例 9.16 ([32])。 考虑如下典范系统：

$$d\mu(x) = \left(1+\sin(x^2)\right)dx.$$

可以利用第 μ 节中的等价条件证明它是一个 *PW*测度（见 *2.5* 节）。利用定理 *4.12*，我们可以使用从周期化 μ_T 中恢复的哈密顿量来逼近与μ对应的哈密顿量。具体来说，我们考察图 h_T^μ 中的 $T = \pi$， 2π， 4π， 8π。*3*。

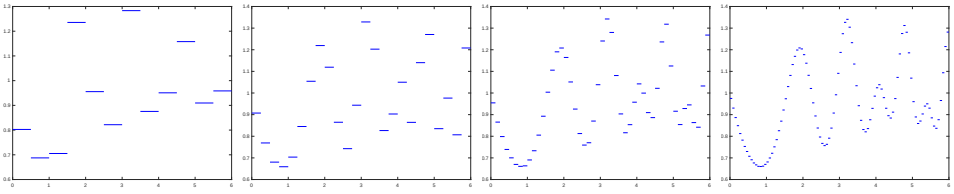

FIGURE 3. $d\mu(x)$ 的周期化 $= \left(1 + \sin(x^2)\right) dx$。从左到右： h_π^μ、 $h_{2\pi}^\mu$、 $h_{4\pi}^\mu$、 $h_{8\pi}^\mu$。

例9.17 ([32])。 考虑满足以下条件的典范系统

$$d\mu(x) = (1 + |x|^{\frac{1}{2}})dx.$$

该测度不是 *PW*测度，但满足推论*4.16*的假设。

使用以下参数得到的近似 $T = \pi$、 2π、 4π、 8π 可见图 *4*。

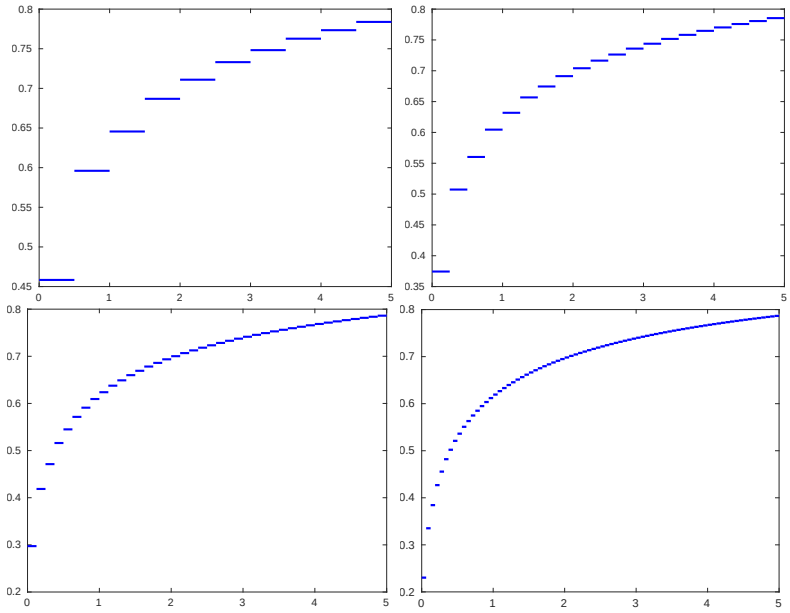

FIGURE 4. $d\mu(x)$ 的周期化 $= (1 + |x|^{\frac{1}{2}})dx$。从左到右： h_π^μ、 $h_{2\pi}^\mu$、 $h_{4\pi}^\mu$、 $h_{8\pi}^\mu$。

例9.18 ([32])。 考虑如下典范系统：

$$\mu(x) = (1 + |x|)^{\frac{1}{4}} m + \delta_0,$$

其中 m 是勒贝格测度，而 δ_0 是位于 0 处的单位点质量。该测度不是 *PW*测度，但满足定理 *4.15* 的假设。

在图*5*中，我们给出了以下近似： $T = \pi$， 2π， 4π， 8π。

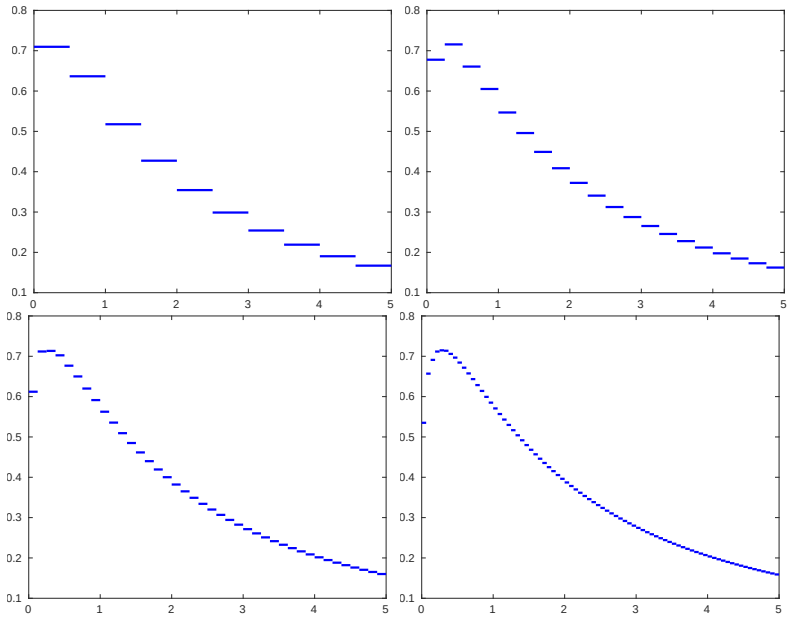

FIGURE 5. $\mu(x) = (1+|x|)^{\frac{1}{4}} m + \delta_0$的周期化。-从左到右： h^{μ}_{π}、 $h^{\mu}_{2\pi}$、 $h^{\mu}_{4\pi}$、 $h^{\mu}_{8\pi}$。

例9.19 ([40])。 设 H 为对角行列式归一化哈密顿量，且 $h_{11}(t) = \exp(t)$。阶梯函数近似 $h^T_{11}(t)$ 满足

$$\frac{h^{T,n+1}_{11}}{h^{T,n}_{11}} = \frac{\frac{1}{T}\int_{(n+1)T}^{(n+2)T} e^s ds}{\frac{1}{T}\int_{nT}^{(n+1)T} e^s ds} = e^T, \qquad \text{span}$$

这意味着相应的谱测度具有恒定的 *Verblunsky* 系数。

利用例 *9.4*，我们可以求出谱测度 μ_T。对于每个T，在区间 $[0, T\pi] \subseteq \mathbb{R}$上，测度 μ_T具有一个绝对连续部分

$$w^T(\theta) = \frac{T\left(e^T+1\right)}{2\left(e^T-1\right)} \frac{\sqrt{\frac{4*e^T}{(e^T+1)^2} - \cos^2(T\theta)}}{\sin(T\theta)},$$

支撑于 $[\frac{1}{T}\arcsin\frac{1-e^T}{1+e^T}, \frac{\pi}{T} = \frac{1}{T}\arcsin\frac{1-e^T}{1+e^T}]$，且没有奇异部分。

由于对每个 T 都明确知道 $w^T(x)$，因此也可以确定极限测度 μ 。 μ_T 的极限为

$$d\mu(x) = \frac{\sqrt{4x^2-1}}{2|x|}dx, \tag{9.4}$$

支撑于 $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \infty)$。

9.6. **PW 情形下齐次系统的逆谱问题解**。 本节概述 [19] 关于如何求解 PW 情形下齐次系统逆谱问题的计算。

考虑定义在 $\mathbb{R}$ 上的齐次谱测度

$$\mu = c_1 m + c_2 \sigma,$$

满足 $c_1 > |c_2|$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$。回顾第 5 节，齐次测度必须是绝对连续的， $d\mu(x) = \rho(x)dx$，其中 $\rho(x)$ 在$\mathbb{R}_+$ 以及 $\mathbb{R}_-$上为常数。

为了计算函数 $h^\mu(t)$ 和 $g^\mu(t)$（相差一个常数），在哈密顿量中，回顾定理 5.1:

$$k_t(z) = tk_1(tz),$$

特别是,

$$k_t(0) = C_1 t, \qquad C_1 := k_1(0).$$

显然,

$$h^\mu(t) = \pi \dot{k}_t(0) = \pi C_1.$$

对于第二个函数，我们应用广义希尔伯特变换:

$$g^\mu(t) = \pi \dot{l}_t(0), \qquad l_t(0) = (H^\mu k_t)(0).$$

回忆一下

$$\begin{aligned}(H^\mu k_t)(0) &= \frac{1}{\pi}\int \left[\frac{k_t(x) - k_t(0)}{x} + \frac{xk_t(0)}{1+x^2}\right] d\mu(x) \\ &= At + \frac{tC_1}{\pi}B,\end{aligned}$$

其中

$$A = \frac{1}{\pi}\int \left[\frac{k_1(y) - k_1(0)}{y} + \frac{yk_1(0)}{1+y^2}\right] \rho(y)dy$$

and

$$B = \int y\left[\frac{1}{y^2+t^2} - \frac{1}{1+y^2}\right] \rho(y)dy.$$

因此， A 和 C_1 是常数，但 $B = B(t)$。事实上,

$$B = -\left[\rho(1) - \rho(-1)\right]\log t$$

and

$$g^{\mu}(t) = C - \frac{1}{\pi} C_1 \left[\rho(1) - \rho(-1)\right] \log t$$

对于某个常数 C。

对于行列式归一化系统，

$$h_{22} = \frac{1 - h_{12}^2}{h^{\mu}} = \frac{1 - (C - C_2 \log t)^2}{C_1},$$

其中 $C_2 = \frac{1}{\pi} C_1 \left[\rho(1) - \rho(-1)\right]$。

由此得到逆谱问题的解，其中含有一个自由常数参数C

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} C_1 & C - C_2 \log t \\ C - C_2 \log t & \frac{1-(C-C_2 \log t)^2}{C_1} \end{pmatrix}.$$

如 [18], 所示，每个谱测度 μ 都会对应一个由哈密顿量构成的一参数族 $\mathcal{H}^{\mu}$。上述公式给出了以下逆谱问题的一般解： μ 由（5.1）定义。

接下来需要计算 C_1 关于 c_1 和 c_2的表达式。这一计算在技术上较为复杂，但也揭示了它与若干经典分析工具的联系：希尔伯特变换、黎曼–希尔伯特问题的解以及特殊积分。这里，我们仅简要概述 [19]中的完整计算。

我们用记号 $\mathbf{H}f$ 表示函数的标准希尔伯特变换 n
f 上 $\mathbb{R}$:

$$\mathbf{H}f(x) = \frac{1}{\pi} \text{ p.v. } \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t - x}\, dt.$$

用卷积表示，

$$\mathbf{H}f = \frac{1}{\pi} f * \frac{1}{t}, \quad \text{and} \quad \mathbf{H}\psi_t = \frac{1}{\pi} \psi_t * \frac{1}{t}.$$

ˆ 与之前一样，令 $\psi_t = k_{t\circ}$ 由于

$$\psi_t * \hat{\mu} = \sqrt{2\pi} \left[c_1 \psi_t - i c_2 \mathbf{H}\psi_t\right],$$

由（3.2）可得

$$\sqrt{2\pi} \left[c_1 \psi_t - i c_2 \mathbf{H}\psi_t\right] = 1 \quad \text{on} \quad (-t, t).$$

为求解该方程，我们需要转向经典复分析。引入函数

$$C_t(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-t}^{t} \frac{\psi_t(s)\, ds}{s - z}, \quad z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus [-t, t], \tag{9.5}$$

并将其边界值记为 $C_t^{\pm}(x)$, $-t \le x \le t$:

$$C_t^{\pm}(x) = \lim_{y \to \pm 0} C_t(x + iy).$$

定理 9.20 ([19])。

$$\psi_t = C_t^+ - C_t^-, \qquad -i(H\psi_t) = C_t^+ + C_t^-.$$

由此可知，(3.2)具有如下形式

$$C_t^+ = GC_t^- + g, \tag{9.6}$$

其中 G 和 g 是以下数值

$$G = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}, \qquad g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{c_1 + c_2}.$$

上述方程(9.6)是经典黎曼–希尔伯特问题的一个特例。给定定义在 $F(s)$ 上的两个函数 $f(s)$ 和 $[-t, t]$，我们希望找到一个在 $\Phi = \Phi_t(z)$ 中的解析函数 $\mathbb{C} \setminus [-t, t]$，使得 $\Phi(\infty) = 0$ 并且

$$\Phi^+ = F\Phi^- + f \quad \text{on} \quad [-t, t].$$

以下陈述可通过直接计算验证

定理 9.21 ([19])。 记

$$X_t(z) = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-t}^{t} \frac{\log F(s)}{s - z}\, ds \right\}. \tag{9.7}$$

Then

$$\Phi_t(z) = X_t(z) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-t}^{t} \frac{f(s)\, ds}{(s - z) X_t^+(s)} \right]. \tag{9.8}$$

我们用该定理结合 $F(s) = G$和 $f(s) = g$来求解（9.6）。由于$z \to \infty$,（9.5）推出

$$C_t(z) \sim -\frac{1}{z} \frac{1}{2\pi i} \int_{-t}^{t} \psi_t$$

并且，由（9.8），

$$C_t(z) = \Phi_t(z) \sim -\frac{1}{z} \frac{1}{2\pi i} \int_{-t}^{t} \frac{g}{X_t^+}(s).$$

通过直接计算,

$$\int_{-t}^{t} \frac{1}{s - z} ds = \log\left(\frac{z - t}{z + t} \right).$$

最后一个函数在 $(-t,\ t)$ 上的边界极限为

$$\left(\log\left(\frac{z - t}{z + t} \right) \right)_{\pm} = \pm \pi i + \log \left| \frac{z - t}{z + t} \right|.$$

由（9.7）可得

$$X_t^+(s) = \exp\left[D\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i}\log\left|\frac{s-t}{s+t}\right|\right)\right],$$

其中 $D = \log G$。

作变量替换 $u = \frac{s}{t}$，再作进一步替换 $w = \frac{1-u}{1+u}$，——

$$I = \int_{-t}^{t} \frac{1}{X_t^+(s)} ds = te^{-D/2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^{\frac{Di}{2\pi}} du = te^{-D/2}\cdot 2\int_0^{\infty}\frac{w^{\frac{Di}{2\pi}}}{(1+w)^2}dw.$$

令 $k = \frac{Di}{2\pi}$。则最后一个积分变为

$$J = \int_0^{\infty}\frac{w^k}{(1+w)^2}dw.$$

这是一个贝塔积分:

$$J = B(k+1, 1-k) = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(1-k)}{\Gamma(2)} = \Gamma(k+1)\Gamma(1-k), \quad \text{since } \Gamma(2) = 1.$$

因此,

$$J = \Gamma\left(1 + \frac{Di}{2\pi}\right)\Gamma\left(1 - \frac{Di}{2\pi}\right).$$

利用伽马函数恒等式,

$$\Gamma(1+z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi z}{\sin(\pi z)}$$

令 $z = \frac{Di}{2\pi}$，我们得到

$$J = \frac{\frac{Di}{2}}{i\sinh\left(\frac{D}{2}\right)} = \frac{D}{2\sinh\left(\frac{D}{2}\right)}.$$

结合这些计算，我们得到

$$I = te^{-D/2}\cdot 2\cdot J = te^{-D/2}\cdot\frac{D}{\sinh\left(\frac{D}{2}\right)} = \frac{2tD}{e^D - 1}.$$

为了完成对 C_1的计算,

$$C_1 = \pi\frac{\partial}{\partial t}\int_{-t}^{t}\psi_t = \pi\frac{\partial}{\partial t}\int_{-t}^{t}\frac{g}{X_t^+(s)} = \frac{2\pi g\log G}{G-1} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{c_2}\log\left(\frac{c_1+c_2}{c_1-c_2}\right).$$

将其代入 C_2，我们得到

$$C_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\log\left(\frac{c_1+c_2}{c_1-c_2}\right).$$

9.7. **贝塞尔函数和典范系统**。本节将介绍一个正谱问题的例子，其中涉及来自 [19]。

贝塞尔函数可以用以下引理来定义

引理 9.22 ([19])**.** 设 $F(t)$ 满足

$$t^2\ddot{F}(t) + t\dot{F}(t) + (t^2 - \nu^2)F(t) = 0 \tag{9.9}$$

对 $t > 0$ 成立。设 $\kappa > 0$、$\beta > 0$、α 为给定的实数。那么函数

$$y(t) = t^\alpha F(\kappa t^\beta)$$

满足方程

$$t^2\ddot{y} + at\dot{y} + (b + c^2t^{2\beta})y = 0 \tag{9.10}$$

with

$$a = 1 - 2\alpha, \qquad b = \alpha^2 - \beta^2\nu^2, \qquad c^2 = \beta^2\kappa^2. \tag{9.11}$$

令 J_ν 表示第一类贝塞尔函数。那么 J_ν 对所有 $t \in \mathbb{R}$ 都满足 (9.9)，且在 0 处有限，这可以作为 J_ν 的定义。

本节研究的特殊情形是

$$t^2\ddot{y} + at\dot{y} + c^2t^2y = 0$$

参数为 a 和 $c > 0$ （以及 $\beta = 1$、$b = 0$）。我们发现

$$\alpha = \frac{1-a}{2}, \qquad \nu = \alpha, \qquad \kappa = c.$$

通解为

$$\operatorname{span}\left\{t^\alpha J_\alpha(ct),\ t^\alpha J_{-\alpha}(ct)\right\}.$$

现在我们可以定义贝塞尔规范系统了。对于每个 $m > 0$，我们考虑哈密顿量为

$$H(t) = \begin{pmatrix} h(t) & 0 \\ 0 & 1/h(t) \end{pmatrix}, \qquad h(t) = t^m, \quad t > 0.$$

注意，当且仅当 $m < 1$ 时，该系统是正则的。按照惯例，我们引入函数 $A = A(t, z)$ 和 $C = C(t, z)$：

$$\Omega\dot{X} = zHX, \qquad X = (A, C)^\tau,$$

也就是说，

$$\dot{C} = zhA, \quad -\dot{A} = \frac{z}{h}C,$$

带有“初始值”

$$A(0, z) = 1, \qquad C(0, z) = 0$$

（当 $t \to 0$ 时取极限）。将系统改写为关于 C 的二阶方程，可得

$$\ddot{C} - \frac{m}{t}\dot{C} + z^2 C = 0$$

满足初始条件

$$C(0,z) = 0, \qquad \dot{C}(t,z) \sim zt^m \text{ as } t \to 0.$$

考虑由下式定义的函数 F_ν

$$J_\nu(\lambda) = \lambda^\nu F_\nu(\lambda).$$

已知 F_ν 是一个整函数，并且

$$F_\nu(0) = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}, \qquad F_\nu'(0) = 0.$$

若固定 z 并令 $t \to 0$，则有

$$t^\nu J_\nu(zt) = t^{2\nu} z^\nu F_\nu(zt) \sim F_\nu(0) z^\nu t^{2\nu}$$

and

$$t^\nu J_{-\nu}(zt) = z^{-\nu} F_{-\nu}(zt) \to z^{-\nu} F_{-\nu}(0).$$

由条件 $C(0, z) = 0$ 可得

$$C(t,z) = G(z) t^\nu J_\nu(zt),$$

剩下的就是求出 $G(z)$。

我们有

$$C(t,z) \sim G(z) F_\nu(0) z^\nu t^{2\nu},$$

and

$$\dot{C}(t,z) \sim G(z) F_\nu(0) z^\nu \ 2\nu t^{2\nu-1}.$$

结合第二个边界条件 $C(t, z) \sim zt^m$，我们有

$$zt^m \sim G(z) F_\nu(0) z^\nu \ 2\nu t^{2\nu-1},$$

因此（回忆一下 $m = 2\nu - 1$）

$$G(z) = \frac{z^{1-\nu}}{F_\nu(0)\ 2\nu} = g_\nu z^{1-\nu}, \qquad g_\nu := 2^{\nu-1}\frac{\Gamma(1+\nu)}{\nu} = 2^{\nu-1}\Gamma(\nu).$$

Thus

$$C(t,z) = g_\nu t^{2\nu} z F_\nu(zt).$$

对每个固定的 t，C 关于 z 是整函数。于是得到

$$C = g_\nu (t^{2\nu} z F_\nu(zt)),$$

and

$$A = g_\nu (2\nu F_\nu(zt) + tz F_\nu'(zt)).$$

事实上，我们有

$$\dot{C} = g_\nu (2\nu t^{2\nu-1} z F_\nu(zt) + t^{2\nu} z^2 F_\nu'(zt)),$$

并且，由于 $m = 2\nu - 1$,

$$A = g_\nu \frac{\dot{C}}{zt^m} = g_\nu(2\nu F_\nu(zt) + tzF'_\nu(zt)).$$

我们可以简化 A 的表达式，得到：

定理 9.23 ([19])。

$$A(t,z) = g_\nu F_{\nu-1}(zt)$$

and

$$C(t,z) = g_\nu t^{2\nu} z F_\nu(zt).$$

设 $k_t(z)$ 是 $\mathcal{B}(E_t)$ 的再生核， $E := A - iC$，取在零点处：

$$k_t(z) = \frac{C(z)A(0)}{\pi z} = \frac{g_\nu^2 F_{\nu-1}(0)}{\pi} t^{2\nu} F_\nu(zt).$$

结合 [19]，的结果，这一关系意味着系统的谱测度 μ 是阶为 $\nu - 1 = (m-1)/2$ 的准齐次测度。哈密顿量的对角形式意味着 μ 是偶函数。总之，

$$\mu = \text{const}|x|^m.$$

正如我们所见， $\mu \notin$PW。

最后，让我们通过“推导”哈密顿量来验证我们的计算。我们可以应用（3.1），尽管该系统不满足 PW 要求。所得答案的正确性表明，定理 3.1 及类似公式可以有更广泛的用途。

根据我们之前的计算，

$$\pi k_t(0) = \frac{g_\nu^2 F_{\nu-1}(0)}{\pi} t^{2\nu} F_\nu(0) = \frac{1}{2\nu\pi} t^{2\nu}.$$

利用（3.1），

$$h^\mu(t) = \pi \dot{k}_t(0) = t^{2\nu-1} = t^m.$$

9.8.**问题：双区间问题中无条件端点情形下定义序列的描述**。在第7.3 节讨论的 Horvath 定理中，算子由其在 $(0, a\pi$ 上的一部分势，以及韦伊函数 m_- 的取值确定；该函数通过在对侧端点 π处固定边界条件而得到。如果考虑一个类似的问题，但在 π处为无条件端点，即试图根据算子在 0 附近的势，以及通过在同一端点 0 处固定边界条件而得到的函数 m_+ 来恢复算子，会怎样？在这种情况下，类似于 Horvath 定理的结论不成立。

反例 *9.24*。最简单的反例是对前面提到的三区间反例作一处修改。设来自 $\mathcal{S}^2$ 的算子L 和 $\tilde{L}$ 满足：在 $(0, (1-\varepsilon)\pi)$ 上 $q = \tilde{q}$，且在 $((2-\varepsilon)\pi - x)$ 上 $q(x) = \tilde{q}$，其中区间为 $((1-\varepsilon)\pi, \pi)$。考虑定义在 $(0, (2-\varepsilon)\pi)$ 上的辅助算子 L_a，其势在 $(0, \pi)$ 上定义为 $q_a = q$，并在$\tilde{}(\pi, (2-\varepsilon)\pi)$ 上定义为 $q_a(x) = q((2-\varepsilon)\pi) - x)$。设算子 L_a 满足：在 $(0, \pi)$ 上 $\tilde{q}_a = \tilde{q}$，且在 $(\pi, (2-\varepsilon)\pi)$ 上 $\tilde{q}_a(x) = q((2-\varepsilon)\pi - x)$。注意，此时 L_a 和$\tilde{}L_a$ 的狄利克雷—狄利克雷谱相同。将该序列记为 Λ。不难看出，算子 L 和 L 的韦伊函数$\tilde{}$ m_+ 和 $\tilde{m}_+$ 在 Λ 上相同。最后注意到，Λ 的密度为 $2-\varepsilon$，即远大于 ε。

不过，正如我们从这个反例中看到的，并非任何密度足够大的序列 Λ都能用于我们修改后的双区间问题；但如下面所示，也有一些序列可以使用。

命题 9.25 ([17])。设 $g \in L^2((0, \pi-\varepsilon))$ $\varepsilon < \pi/2$，且令 $\Sigma = \sigma_{DD}$为定义在 $\mathcal{S}^2((0, \pi-\varepsilon))$ 上的薛定谔算子的谱，其中 $q = g$。那么，任意两个 $L, \tilde{L} \in \mathcal{S}^2((0, \pi))$，若它们在 $(0, \pi-\varepsilon)$ 上满足 $q = \tilde{q} = g$，并且在 Σ的一个子序列 Λ 上满足$m_+ = \tilde{m}_+$，则必定相同 $\pi D^*(\Lambda) > 2\varepsilon$。

设 $g \in L^2(0, \pi-\varepsilon)$。用 $\mathcal{S}_g^2$ 表示所有满足 $q = g$ 且属于 $\mathcal{S}^2$的算子组成的集合。由该命题自然引出的问题是：描述序列 Λ 的集合，使得韦伊函数 m_+ 在 Λ 上的取值能够在类 $\mathcal{S}_g^2$中唯一确定一个算子。这个反例表明，该集合不包含所有具有适当密度的序列，而该命题则表明这个集合非空。

9.9. 问题：三区间情形下唯一算子的描述。设 $0 \le a < b \le 1$ and $a+(1-b) > 1/2$。如第 8.4 节的讨论所示，存在定义在 $(0, \pi)$ 上的薛定谔算子 $L \in \mathcal{S}^2$，具有如下唯一性：若 $\tilde{L} \in \mathcal{S}^2$ 是另一个薛定谔算子，且在 $(0, a\pi)$ 上 $\tilde{q} = q \cup (b\pi, \pi)$，并且 $\pi D^*(\tilde{\sigma}_{DD} \cap \sigma_{DD}) > 2(b-a)$，则 $\tilde{}L \equiv L$。

这自然引出了一个问题：如何描述所有这类“唯一”算子，即其势在 $(0, a\pi)$ 上的限制 $\cup$（$b\pi$，π) 以及谱的一个长度适当的子序列能够唯一确定的算子。定理 8.12 给出的例子是一个在谱情形下几乎为偶的算子。首先可以提出的问题是，是否还有其他例子。

虽然我们的讨论 [17] 集中于$\mathcal{S}^2$ 情形，但只需稍加努力便可将其推广到正则情形。关于这个问题的进一步研究，可以涉及非正则情形中的类似例子和描述。如果 q 是

不可求和，那么正确的问题应是描述 L ，使得任何具有上述性质的L ，只要 $q-\tilde{q}$ 足够小（例如可求和），就必须与 L重合。

三区间情形只是一个模型案例，在其中我们已经看到了双区间问题中未曾出现的一些困难。本问题及类似问题的最终目标，是考察区间的其他子集。

9.10.**问题：其他类型谱数据的不确定性**。第 8.2 节讨论的双谱问题版本，并非不确定性量化在谱问题背景中自然出现的唯一情形。下面再举一个此类问题的例子。

设 $L \in \mathcal{S}^2$ 是一个薛定谔算子，其谱测度为 $\mu_- = \sum \alpha_n \delta_{\lambda_n}$。设 $\mathcal{E} = \{\varepsilon_n\}$ 是一个正数列。记$\mathcal{E}_L$ 满足以下条件的算子 $\tilde{L} \in \mathcal{S}^2$ 的集合：$\tilde{\mu}_- = \sum \tilde{\alpha}_n \delta_{\lambda_n}$，$|\alpha_n - \tilde{\alpha}_n| \le \varepsilon_n$。与第 8.2 节类似，记 $U(\mathcal{E}_L)$ 为下确界：若势在 $(0, a\pi)$ 上的取值能够唯一确定一个属于的薛定谔算子 $\mathcal{E}_L$，则取相应的

命题 9.26 ([17])。

$$U(\mathcal{E}_L) = \pi \sup \left\{ D_*(\Phi) \ : \ \sum_{n \in \Phi} \frac{\log_- \varepsilon_n}{1+n^2} < \infty \right\}.$$

证明可由引理8.2 和推论 7.6轻易得出。

在谱问题的其他变体中估计不确定性大小，可能需要采用不同的技术。对于本文所研究的问题而言，适用于谱数据 D 的 $U(D)$定义对我们有效，但对于其他类型的数据，这一定义可能需要进一步发展。例如，值得指出的是，如果在上述 $\mathcal{E}_L$ 的定义中用 μ_+ 替换 μ_- ，那么当前的 U 定义将无法正常发挥作用。尽管只需将 U中的$(0, a\pi)$替换为$((1-a)\pi, \pi)$这一显而易见的修改，就能解决这个具体问题，但人们仍希望有一种更普适的定义。

9.11. **问题：混合谱问题与完备性问题之间的进一步联系**。Horvath 定理 7.7 建立了 Beurling-Malliavin（BM）关于 L^2 区间上指数函数系完备性的问题与混合谱问题的原始情形——没有无条件端点的双区间情形——之间的联系。尽管文献中已经考虑了多个区间的情形（例如参见 [33], 第 4 章, 问题 10a），但类似的联系尚未被发现。有趣的是，注意到

不存在将一个区间替换为直线上的任意其他子集（包括下一个最简单的情形——两个区间的并集）后的 BM 定理。尽管关于L^2 一般集合上指数函数系的完备性已有许多深刻的结果，例如参见 [27], 但即使在两个区间的情形下，也没有关于完备半径的公式，甚至没有关于什么可以替代这种公式的合理思路。

正如我们在第 8.3 节所见，从双区间情形转向三区间及多区间情形时，混合谱问题中也会出现许多相同的复杂情况。此外，韦尔变换与傅里叶变换之间的类比，以及后者在 BM 理论中的应用，都表明，更一般区间子集上的混合谱问题必定与一般集合上的 BM 问题密切相关。寻找这类联系，即为更一般的子集表述 Horvath 定理的类似结果，似乎是一个有趣且富有挑战性的课题。

References

[1] Baranov,
A. Belov Yu. Poltoratski A. *De Branges functions for Schrödinger* , , , , , 预印本, . *equations* 2016
[2] Beurling, A. Malliavin P. *On Fourier transforms of measures with compact* , *support* 107 1962 291 302
, , 《数学学报》 ( ), – . [3] Beurling,
A. Malliavin P. *On the closure of characters and the zeros of entire* , , , 《数学学报》 *functions* 118 1967 79 93
( ), – . [4] Bessonov, R. *Sampling measures,*
Muckenhoupt Hamiltonians and triangular fac- , , Int. Math. *torization* 2018, 12, 3744 3768
Res. Not. no. – . [5] Bessonov, R., Romanov,
R. *An inverse problem for weighted Paley–Wiener spaces*, 反问题 32 (2016), no. 11. [6] Borg,
G. *Uniqueness theorems in the spectral theory of* $y'' + (\lambda - q(x))y = 0$, 第 11 届斯堪的纳维亚数学家大会论文集, Johan Grundt Tanums Forlag, 奥斯陆, 1952, 276–287. [7] De Branges,
L. *Hilbert spaces of entire functions*, Prentice–Hall, 恩格尔伍德克利夫斯, 新泽西州, 1968.
[8] del Rio, R. Gesztesy F. Simon B. *Inverse spectral analysis with partial in-* , , *formation on the potential. III. Updating boundary conditions*
, , , Internat. Math. Res. Notices 1997, no. 15, 751–758.[9] Gesztesy,
F. Simon B. *Uniqueness theorems in inverse spectral theory for one-* , , , Trans. *dimensional Schrödinger operators* 348 1996 1, 349
Amer. Math. Soc. ( ), no. – 373.[10] Gesztesy,
F. Simon B. *A new approach to inverse spectral theory II. General* , , , , 数学年刊 *real potentials and the connection to the spectral measure* 152 2000
( ), 593–643.[11] Gesztesy,
F. Simon B. *Inverse spectral analysis with partial information on the* , , , , Trans. *potential II. The case of discrete spectrum* 352 2000
Amer. Math. Soc. ( ), 2765–2787.[12] Hochstadt,
H. Lieberman B. *An inverse Sturm–Liouville problem with mixed* , , , SIAM J. *given data* 34 1978 676 680
Appl. Math. ( ), – . [13] Horváth, M. *Inverse spectral problems and closed exponential systems*, 数学年刊 162 (2005), no. 2, 885–918. [14] Levitan, B. M., Sargsjan,
I. S. *Sturm–Liouville and Dirac operators*, Kluwer, 多德雷赫特, 1991. [15] Lubinsky,
D. S. *A Survey of Weighted Polynomial Approximation with Exponential* , 《逼近理论综 *Weights* 3 2007 1105
述》 ( ), . [16] Makarov, N.,
Poltoratski *Toeplitz kernels and* , *the uncertainty principle Perspectives in Analysis* 2005, 185 252
A. *Meromorphic inner functions*, , , 载于 , Springer, 柏林, – . [17] Makarov, N., Poltoratski,
A. *Two spectra theorem with uncertainty*, 《谱理论杂志》 9 (2019), no. 4, 1249–1285.
[18] Makarov, N., Poltoratski, A. *Études in the inverse spectral problem*, J. London Math. Soc. 108 (2023), no. 3, 916–977.[19] Makarov, N., Poltoratski,
A. *Études in the inverse spectral problem, II*, 预印本, arXiv, 2025. [20] N. Makarov,
A. Poltoratski, and M. Sodin. "线性复分析讲义", *unpublished lecture notes*. [21] Marchenko,
V. *Some questions in the theory of one-dimensional linear differential* , , 《莫斯科数 *operators of the second order I* 1 1952 327 420
学会会刊》 ( ), – . [22] Marchenko, V. *Sturm–Liouville operators and applications*, Birkh¨ auser, 巴塞尔, 1986.

[23] Mergelyan, S. *Weighted approximation by polynomials*,《数学科学进展》11 (1956), 107–152，英文译本见《美国数学会译丛》第二辑，10 (1958), 59–106。[24] Mitkovski, M., Poltoratski *Toeplitz kernels and gap theo-* , *rems* 224 2010 1057 1070
A. *Polya sequences*, , 数学进展 ( ), – 。[25] Mitkovski, M., Poltoratski,
A. *On the determinacy problem for measures*,《数学发明》202 (2015), 1241–1267。
[26] Ortega-Cedrá, J., Seip, K. *Fourier frames*, 数学年刊 155 (2002), 789–806。
[27] Olevskii, A., Ulanovskii, A. *Functions with disconnected spectrum: sampling, interpolation translates* 2016 , , 大学讲座系列，美国数学会，。[28] Poltoratski, A. *Spectral gaps for sets and measures*,《数学学报》208 1, 151 2012 209 ( ), no. – .[29] Poltoratski,
A. *A problem on completeness of exponentials*, 数学年刊 178 (2013), 983–1016。
[30] Poltoratski, A. *Toeplitz Approach to Problems of the Uncertainty Principle*, CBMS系列，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2015。[31] Poltoratski, A., Sarason,
D. *Aleksandrov–Clark measures*, 算子相关函数论新进展，当代数学 393，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2006，1–14。[32] Poltoratski,
A. Zhang A. R. *Periodic approximations in inverse spectral prob-* , , , 泛函 *lems for canonical Hamiltonian systems* 284 2023 11 分析杂志 ( ), no. 。[33] Pöschel, J., Trubowitz, E. *Inverse spectral theory*, 学术出版社，纽约，1987。[34] Remling, C. *Spectral theory of canonical systems*, 德格鲁伊特出版社，2018。
[35] R. Romanov. “典范系统与 de Branges 空间”，2014。arXiv:1408.6022。[36] Simon,
B. *A new approach to inverse spectral theory, I. Fundamental formalism*, 数学年刊 150 (1999), 1029–1057。[37] Simon, B. *Orthogonal polynomials on the unit circle, Parts I and II*, 美国数学会讨论会出版物，第54卷，2004。[38] Winkler,
H. *On Transformation of Canonical Systems*, 见 Gohberg, I., Langer, H.（编），
Operator Theory and Boundary Eigenvalue Problems, 算子理论：进展与应用，第80卷，Birkh¨auser，巴塞尔。[39] Zhang, A. “从离散到连续非线性傅里叶变换的收敛”，
Transactions of the American Mathematical Society 378 (2025), 1483–1501。[40] Zhang,
A. *Direct spectral problems for Paley-Wiener canonical systems*, https://arxiv.org/abs/2505.00669。[41] Zhang,
A. *Direct spectral problems for Paley-Wiener canonical systems, II*, 预印本，2026。

California Institute of Technology, Department of Mathematics, Pasadena, CA 91125, USA

Email address: makarov@its.caltech.edu

University of Wisconsin, Department of Mathematics, Van Vleck Hall, 480 Lincoln Drive, Madison, WI 53706, USA

Email address: poltoratski@wisc.edu

Vanderbilt University, Department of Mathematics, 1326 Stevenson Cen-ter, Nashville, TN 37240, USA

Email address: ashley.zhang@vanderbilt.edu