arXiv:2603.13692v1 [math.KT] 14 Mar 2026

代数 K理论中的一般 Mayer-Vietoris 序列

Yakun Zhang

南京审计大学数学学院，

中国南京 *211815*

电子邮件：*zhangyakun@nau.edu.cn*

摘要。 本文研究 Milnor 方块的 Mayer-Vietoris 序列。此类序列的中间项往往难以捉摸，而我们在一种更新、更一般的序列变体中，对关键群 X 给出了明确刻画。通过将 X 识别为范畴拉回，我们为修正后的 Mayer-Vietoris 序列提供了完整的构造性证明。此外，我们证明 X 适合置于一个涉及相对 K-群 $K_*(A, B, I)$ 的结构性正合序列中。最后，我们将 X 描述为某个适当纤维的同伦群，从而阐明其结构、核和像。

2020 年数学主题分类： 19C20, 19D55, 16S34, 13N05。**关键词：** 代数 K-理论，Mayer-Vietoris 序列，拉回，推出。

1 引言

考虑一个结合环的 Milnor 方块

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/I & \xrightarrow{\bar{f}} & B/I \end{array} \tag{1.1}$$

其中， I 是 A 的一个双边理想，在环同态 f作用下同构映射到 B的一个双边理想，而竖直映射是典范投影。这

个拉回方块诱导出代数 K-群的交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} K_{i+1}(A) & \longrightarrow & K_{i+1}(A/I) & \longrightarrow & K_i(A,I) & \xrightarrow{\alpha_i} & K_i(A) & \longrightarrow & K_i(A/I) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_i} & & \downarrow & & \downarrow \\ K_{i+1}(B) & \longrightarrow & K_{i+1}(B/I) & \xrightarrow{\beta_i} & K_i(B,I) & \longrightarrow & K_i(B) & \longrightarrow & K_i(B/I) \end{array}$$

这里，ε_i：$K_i(A,I) \to K_i(B,I)$ 表示相对 K-群的第 i 个同态，$\ker(\varepsilon_i)$ 称为第 i 个切除核。由于 ε_i 并非总是同构，无法直接从该交换图导出 Mayer–Vietoris型长正合列。为此，Weibel [1,在命题 5.1] 中引入了适用于所有 $i \geq 0$ 的修正 Mayer-Vietoris 序列：

$$\cdots \to K_{i+1}(A/I) \oplus K_{i+1}(B) \to \text{sub-}K_{i+1}(B/I) \to \text{quo-}K_i(A) \to K_i(A/I) \oplus K_i(B) \to \cdots \quad (1.2)$$

其中，$\text{sub-}K_{i+1}(B/I)$ 表示 $K_{i+1}(B/I)$ 中在 $K_{i+1}(B/I) \to K_{i-1}(A,B,I)$ 下映为 0 的元素所构成的子群，而 $\text{quo-}K_i(A)$ 是 $K_i(A)$ 对 $K_i(A,B,I)$ 的像取商所得的商群。然而，他并未给出完整而严谨的证明，只通过交换图和图追逐来说明论证。

本文从范畴论视角重新考察这两个群。具体而言，$\text{quo-}K_i(A) = K_i(A)/\alpha_i\big(\ker(\varepsilon_i)\big)$ 可刻画为以下推出：

$$\begin{array}{ccc} K_i(A,I) & \xrightarrow{\alpha_i} & K_i(A) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ K_i(A,I)/\ker(\varepsilon_i) & \longrightarrow & \text{quo-}K_i(A) \end{array} \quad (1.3)$$

相应地，$\text{sub-}K_{i+1}(B/I) = \{x \in K_{i+1}(B/I) \mid \beta_i(x) \in \text{Im}\varepsilon_i\}$ 是以下拉回：

$$\begin{array}{ccc} \text{sub-}K_{i+1}(B/I) & \longrightarrow & K_i(A,I)/\ker(\varepsilon_i) \\ \downarrow{\scriptstyle i_1} & & \downarrow{\scriptstyle i_2} \\ K_{i+1}(B/I) & \xrightarrow{\beta_i} & K_i(B,I) \end{array} \quad (1.4)$$

本文的主要贡献如下。首先，我们重新审视了 Weibel 的结果，并为他提出的 Mayer-Vietoris 序列变体给出了完整的构造性证明。在此基础上，我们进一步改进了这一构造，得到了该序列一个更新且更一般的变体。最后，我们运用同伦论方法，对

新序列中神秘的第三项给出了精确刻画。通过将其识别为适当同伦纤维的同伦群，我们推导出一个新的正合序列，从而全面阐明了它的结构、核与像。

2 广义 Mayer-Vietoris 序列

在本节中，我们沿用引言中关于 Milnor 方块 (1.1) 所确立的记号。具体而言，quo-$K_i(A)$ 和 sub-$K_{i+1}(B/I)$ 分别表示推出 (1.3) 和拉回 (1.4) 构造。

为证明主要结果，我们先给出两个关键命题，它们是下述构造的基础。这些命题的证明仅依赖同调代数中的标准技巧，包括正合序列、拉回和推出。由于论证常规且直接，我们省略详细证明，留给读者完成。这些命题将用于以严谨的图论方式证明 Weibel 的 Mayer-Vietoris 序列 (1.2)。在此基础上，我们给出主要结果：一个更一般的 Mayer-Vietoris 序列变体，它阐明了这些项的内部结构。

下文中，若 R-模的序列 $A \to B \to C \to D$ 在 B 和 C 处正合，即每个态射的像等于其后继态射的核，则称该序列为正合序列。

命题 2.1 (正合性的稳定性)。设 R 是一个交换环，且 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ 是 R-模的正合序列。

(a) 拉回情形：设 $i_2 : C_1 \to C$ 是一个子模嵌入。设 B_1 是 g 和 i_2 的拉回，并带有诱导映射 $i_1 : B_1 \to B$ 以及 $g_1 : B_1 \to C_1$。设 $f_1 : A \to B_1$ 是满足 $i_1 \circ f_1 = f$ 和 $h_1 = h \circ i_2$ 的唯一映射。则下图交换，且顶行正合：

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f_1} & B_1 & \xrightarrow{g_1} & C_1 & \xrightarrow{h_1} & D \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle i_1} & & \downarrow{\scriptstyle i_2} & & \| \\ A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D \end{array}$$

(b) 推出情形：设 $\pi_1 : B \twoheadrightarrow B_2$ 是一个满同态。设 C_2 是 g 和 π_1 的推出，其诱导映射为 $\pi_2 : C \to C_2$ 和 $g_2 : B_2 \to C_2$。设 $f_2 = \pi_1 \circ f$，且

h_2： $C_2 \to D$ 是满足 $h_2 \circ \pi_2 = h$ 的唯一映射。则下图交换，且底行正合:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} & & \| \\ A & \xrightarrow{f_2} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & C_2 & \xrightarrow{h_2} & D \end{array}$$

下面的命题确立了通过拉回和推出构造提升正合性的范畴对偶结果。

命题 2.2（**正合性提升**）。设 R 为交换环。

（a）推出情形：设 i_1： B_1 , $\to B$ 是 R-模的单同态。设 C 是 g_1： $B_1 \to C_1$ 和 i_1的推出，并带有诱导映射 i_2： C_1 , $\to C$ 以及 g： $B \to C$。设f： $A \to B$ 是满足 $i_1 \circ f_1 = f$的唯一映射，并且 h： $C \to D$ 是满足$h \circ i_2 = h_1$的唯一映射。如果下列交换图的上行是正合的，则下行 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ 是正合的:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f_1} & B_1 & \xrightarrow{g_1} & C_1 & \xrightarrow{h_1} & D \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle i_1} & & \downarrow{\scriptstyle i_2} & & \| \\ A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D \end{array}$$

（b）拉回情形：设 π_2： $C \twoheadrightarrow C_2$ 是 R-模的满同态。设 B 是 g_2： $B_2 \to C_2$ 和 π_2的拉回，并带有诱导映射 π_1： $B \twoheadrightarrow B_2$ 和 g： $B \to C$。设f： $A \to B$ 是满足 $\pi_1 \circ f = f_2$的唯一映射，并且 $h = h_2 \circ \pi_2$。如果下列交换图的下行是正合的，则上行 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ 是正合的:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} & & \| \\ A & \xrightarrow{f_2} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & C_2 & \xrightarrow{h_2} & D \end{array}$$

定理 2.3。 与 Milnor 方块 (1.1) 相关的 Mayer-Vietoris 序列有一个更一般的变体，其形式为

$$\cdots \to K_{i+1}(A/I) \oplus K_{i+1}(B) \to X_i \to K_i(A) \to K_i(A/I) \oplus K_i(B) \to \cdots , \qquad (2.1)$$

¯其中 X_i 唯一地刻画为 ∂_i 的拉回：sub-$K_{i+1}(B/I)$ $\to$ quo-$K_i(A)$ 以及π_i： $K_i(A)$ $\to$ quo-$K_i(A)$。此外， X_i 还构成一个附加的正合序列

$$\cdots \to K_i(A,B,I) \to X_i \xrightarrow{\varphi_i} K_{i+1}(B/I) \to K_{i-1}(A,B,I) \to \cdots, \tag{2.2}$$

其中 ker $\varphi_i = \alpha_i\big(\ker(\varepsilon_i)\big)$ 以及 im φ_i = sub-$K_{i+1}(B/I)$。

证明。 为证明该定理，我们分三步进行：首先，严格验证 Weibel 变体 (1.2) 的正合性；其次，利用 X_i 的拉回刻画构造广义梅耶-维托里斯序列 (2.1)；最后，通过将 X_i 与某个适当映射的同伦纤维联系起来，分析其内部结构。

步骤 1：Weibel 变体的正合性 (1.2)

我们首先证明 Weibel 变体 (1.2) 的正合性，这为后续论证奠定了基础。如引言所述，quo-$K_i(A)$ 被理解为一个推出；结合这一刻画与命题 2.1，我们得到如下所示的一个具有正合行的交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
K_{i+1}(A/I) & \longrightarrow & K_i(A,I) & \xrightarrow{\alpha_i} & K_i(A) & \longrightarrow & K_i(A/I) \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} & & \| \\
K_{i+1}(A/I) & \longrightarrow & K_i(A,I)/\ker(\varepsilon_i) & \longrightarrow & \text{quo-}K_i(A) & \longrightarrow & K_i(A/I)
\end{array}$$

类似地，利用对 sub-$K_{i+1}(B/I)$ 的拉回理解，并结合命题 2.1(a)，我们推导出另一个具有正合行的交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
K_{i+1}(B) & \longrightarrow & \text{sub-}K_{i+1}(B/I) & \longrightarrow & K_i(A,I)/\ker(\varepsilon_i) & \longrightarrow & K_i(B) \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle i_1} & & \downarrow{\scriptstyle i_2} & & \| \\
K_{i+1}(B) & \longrightarrow & K_{i+1}(B/I) & \xrightarrow{\beta_i} & K_i(B,I) & \longrightarrow & K_i(B)
\end{array}$$

接着，我们沿着两个图的公共项 $K_i(A,I)/\ker(\varepsilon_i)$ 将它们粘合起来，从而得到一个带有正合行的扩展交换图（见下文）。对这个粘合后图的中间两行进行标准的图追逐，即可确认 Weibel 变体 (1.2) 的正合性，从而完成证明中的这一基础步骤。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
K_{i+1}(A) & \longrightarrow & K_{i+1}(A/I) & \longrightarrow & K_i(A,I) & \xrightarrow{\alpha_i} & K_i(A) & \longrightarrow & K_i(A/I) \\
\| & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} & & \| \\
K_{i+1}(A) & \longrightarrow & K_{i+1}(A/I) & \longrightarrow & K_i(A,I)/\ker(\varepsilon_i) & \longrightarrow & \text{quo-}K_i(A) & \longrightarrow & K_i(A/I) \\
\downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle h_1} & & \| & & \downarrow{\scriptstyle h_2} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{f}_*} \\
K_{i+1}(B) & \longrightarrow & \text{sub-}K_{i+1}(B/I) & \longrightarrow & K_i(A,I)/\ker(\varepsilon_i) & \longrightarrow & K_i(B) & \longrightarrow & K_i(B/I) \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle i_1} & & \downarrow{\scriptstyle i_2} & & \| & & \| \\
K_{i+1}(B) & \longrightarrow & K_{i+1}(B/I) & \xrightarrow{\beta_i} & K_i(B,I) & \longrightarrow & K_i(B) & \longrightarrow & K_i(B/I)
\end{array}
$$

步骤 2：广义梅耶-维托里斯序列的构造 (2.1)

接下来，我们将 X_i 定义为同态 $\partial_i : \text{sub-}K_{i+1}(B/I) \to \text{quo-}K_i(A)$ 与 $\pi_i : K_i(A) \to \text{quo-}K_i(A)$ 的拉回；这一定义如定理所述唯一刻画了 X_i。根据命题 2.2(a)，X_i 位于下列交换图的顶行：

$$
\begin{array}{ccccccc}
K_{i+1}(A/I) \oplus K_{i+1}(B) & \longrightarrow & X_i & \longrightarrow & K_i(A) & \longrightarrow & K_i(A/I) \oplus K_{i+1}(B) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
K_{i+1}(A/I) \oplus K_{i+1}(B) & \longrightarrow & \text{子-}K_{i+1}(B/I) & \longrightarrow & \text{quo-}K_i(A) & \longrightarrow & K_i(A/I) \oplus K_i(B)
\end{array}
$$

由于该图表的底行是正合的（根据构造以及第 1 步的结果），顶行的正合性可直接推出。该顶行正是我们旨在建立的广义梅耶-维托里斯序列 (2.1)。

第 3 步：X_i 的内部结构

为刻画 X_i 的内部结构，并推导涉及 $K_i(A,B,I)$ 的附加正合序列，我们采用 [2, 定理 2.1] 中概述的方法。值得注意的是，这部分主要基于第 2 步中 X_i 得出的拉回结论，同时通过引入映射 $K(f \times \text{pr})$ 的同伦纤维 U，补充了新的视角，以深入开展分析。回顾一下，$K(A) = BQ\mathcal{P}(A)$（对 $i = 0$ 作标准修正）表示代数 K-理论空间，其中对所有 $i \geq 0$，均有 $\pi_{i+1}(K(A)) = K_i(A)$。我们首先考虑下面的交换图，其中每一行和每一列都是拟纤维化序列：

$$
\begin{array}{ccccc}
K(A,B,I) & \longrightarrow & U & \longrightarrow & \Omega K(B/I) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
K(A,I) & \longrightarrow & K(A) & \longrightarrow & K(A/I) \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle K(f\times \mathrm{pr})} & & \downarrow{\scriptstyle K(\bar{f}\times \mathrm{id})} \\
K(B,I) & \longrightarrow & K(B\times A/I) & \xrightarrow{K(\bar{f}\times \mathrm{id})} & K(B/I\times A/I)
\end{array}
$$

上方的拟纤维化序列导出一个同伦群的长正合序列:

$$
\cdots \to K_i(A,B,I) \to \pi_{i+1}(U) \to K_{i+1}(B/I) \to K_{i-1}(A,B,I) \to \cdots .
$$

根据 sub-$K_{i+1}(B/I)$ 的定义，我们有:

$$
\text{sub-}K_{i+1}(B/I) = \ker\left(K_{i+1}(B/I) \to K_{i-1}(A,B,I)\right) = \operatorname{im}\left(\pi_{i+1}(U) \to K_{i+1}(B/I)\right).
$$

为了将 $\pi_{i+1}(U)$ 与 X_i 联系起来，我们构造如下交换图:

$$
\begin{array}{ccccccc}
K_i(A,B,I) & \longrightarrow & \pi_{i+1}(U) & \twoheadrightarrow & \text{sub-}K_{i+1}(B/I) & \hookrightarrow & K_{i+1}(B,I) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\delta}} & & \downarrow{\scriptstyle 0} \\
\alpha_i(\ker(\varepsilon_i)) & \hookrightarrow & K_i(A) & \twoheadrightarrow & \text{quo-}K_i(A) & \longrightarrow & K_i(A/I)
\end{array}
$$

这里，根据拉回 X_i 的泛性质，存在唯一的同态$\pi_{i+1}(U) \to X_i$。由于 $\pi_{i+1}(U)$ 和 X_i 都适合于同一个正合序列 (2.1)，由五引理可知，这个同态是一个同构，即 $\pi_{i+1}(U) \cong X_i$。这进一步证实，对 X_i 内部结构的分析根植于其拉回刻画，而同伦纤维则作为一种补充工具。

最后， X_i 的拉回性质在相应同态的核之间诱导出一个同构。具体而言，这得到 $\ker \varphi_i \cong \alpha_i(\ker(\varepsilon_i))$，其中 φ_i 在 (2.2) 中定义。结合此前 $\operatorname{im}\varphi_i = \text{sub-}K_{i+1}(B/I)$ 的结果，我们完成了定理的证明。

□

披露声明

作者声明不存在财务或个人性质的利益冲突。

参考文献

[1] Susan C. Geller 和 Charles A. Weibel。 $K_1(A, B, I)$。纯粹与应用数学杂志，1983年(342):12–34，1983年。

[2] Reinhard C. Laubenbacher。代数 K-理论中的广义梅耶-维托里斯序列。《纯粹与应用代数杂志》，51(1-2):175–192，1988年。