arXiv:2603.13755v1 [math.HO] 14 Mar 2026

庆祝 π日：欧拉恒等式的欢乐变奏

Takao Inoué

日本大阪大和大学信息学部*

2026年3月14日

摘要

这篇短文通过欧拉公式，颂扬圆周率日的数学意义

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

由此可立即得到欧拉恒等式

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

。我们简要介绍这一公式的历史背景：它通常被认为源自欧拉的《无穷分析引论》（1748年），同时也提及罗杰·科茨在1714年提出的更早先驱。我们以明确的类比方式，将欧拉恒等式与若干著名的物理学公式进行比较，以凸显其非凡的简洁性与丰富的概念内涵。随后，我们探讨由同一欧拉来源衍生出的若干趣味变体，包括负角情形、素数倍数、代换 $x = \pi/2$，以及形式如下的函数方程变体

$$f(i\pi x) + 1 = 0.$$

最后这一变体自然引出了全纯情形中的刚性与离散插值情形中的自由之间的对比。

*电子邮箱：inoue.takao@yamato-u.ac.jp；个人邮箱：takaoapple@gmail.com[我更愿意使用个人邮箱地址进行联系。
]

核心目标是将这些观察整理为两组简单的变体：几何角度变体和函数方程变体。

讲解的前半部分旨在让有学习动力的高中生能够理解，而后半部分则引向复分析中的更高级思想。

关键词： 圆周率日、欧拉公式、欧拉恒等式、罗杰·科茨、复指数、恒等定理、插值、全纯刚性

MSC2020： 01A50, 30A10, 30E05

目录

1 引言 **2**

2 欧拉恒等式的几何角度变体 6

2.1 负角变体.6 2.2 素数变体.7 2.3 四分之一转变化：将 π 替换为 $\pi/2$ 。. . . . . 8 2.4 一般视角 .9

3 函数方程变体 10

3.1 连续情形.10 3.2 无约束情形.11 3.3 离散情形与插值.11 3.4 进一步的值指定变体：情形 $f(i\pi x) = 1/2$ 133.5 自然结论.14

1 引言

3月14日被庆祝为 π日。对许多学生而言， π 最初是在几何课上作为与圆相关的数出现的。人们会学习周长公式 $2\pi r$ 和面积公式 πr^2，因此 π 最初是通过熟悉的几何图形进入数学的。然而，圆周率日也可以提醒我们， π 的应用远不止于基础几何。尤其是，它出现在数学领域最著名的公式之一——欧拉公式中

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

从历史上看，这个公式通常与莱昂哈德·欧拉联系在一起，其渊源一般可追溯到他于 1748 [1, 2, 6]撰写的《无穷分析引论》。

与此同时，数学史学家常指出，罗杰·科茨早在1714年就得出了一个重要的先驱结果，其表达形式是对数形式，而非如今标准的指数形式 [3, 8, 7]。因此，从文献学和历史视角来看，说标准公式属于欧拉是合理的，而其概念背景的一部分则可追溯至科茨。

就本文而言，核心观点很简单：欧拉恒等式

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

并非孤立的奇迹。它直接源自欧拉公式。事实上，若代入 $x = \pi$，我们便得到

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi.$$

由于

$$\cos\pi = -1 \qquad \text{and} \qquad \sin\pi = 0,$$

由此可得

$$e^{i\pi} = -1,$$

因此

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

因此，这个著名的恒等式只是欧拉公式的一个特例，只需取角 $x = \pi$ 即可得到。

为了以更轻松有趣的方式庆祝圆周率日，我还准备了一小盘受公式 $e^{i\pi} + 1 = 0$ 启发的点心，如图1所示。



图1：作者制作的欢乐圆周率日餐盘，灵感源自欧拉恒等式 $e^{i\pi}+1=0$。

为什么这个恒等式常被视为非凡之作？原因之一是它将

$$\pi, \quad e, \quad i, \quad 1, \quad 0$$

浓缩在一个等式中。这些符号来自数学中截然不同的领域。数 π 来自几何和圆。常数 e是自然对数的底数，属于增长、对数和指数函数理论。符号 i 是虚数单位，属于将数系扩展到复数域的范畴。1 和 0 是算术和代数中最基本的常数。可是，它们全都出现在一个简短的公式中。

或许可以通过类比物理学中的一些著名公式，更好地体会这一点。胡克定律，

$$f=-kx,$$

包含两个主要的物理量——力和位移，以及常数 k。牛顿方程，

$$f=ma,$$

将三个核心物理量联系起来：力、质量和加速度。爱因斯坦著名的公式，

$$E = mc^2,$$

还连接着三个重要的物理概念：能量、质量和光速。

当然，这种比较只是一种类比，不应过分强调。它并非严格的同类比较。在胡克、牛顿和爱因斯坦的公式中，主要涉及的是对物理量的计量；而在欧拉恒等式中，涉及的则是数、常数和符号。因此，这种比较并非旨在进行严谨的科学分类，而是一种说明性的类比，旨在凸显欧拉恒等式何其简洁，又蕴含着多么丰富的概念。

从这个角度来看，圆周率日不仅是庆祝十进制数 3.14 的日子，也不仅是庆祝圆的日子。它也是一个领略数学深层统一性的好机会。欧拉公式表明，指数函数、三角函数和复数并非彼此孤立的主题，而是有着深刻的联系。由该公式通过一次代换 $x = \pi$ 得到的欧拉恒等式，则是这种统一性的一个尤为引人注目的例子。

如需了解更多关于欧拉数学工作的历史背景，请参阅 [4, 5, 6]。

与此同时，经典恒等式并非故事的终点。一旦将欧拉公式视为真正的源头，便可以通过改变角，自然而然地构造出各种变体。其中一些保留了相同的基本形式，另一些则将结果值从实轴移至虚轴。还有一些会引出小型函数方程问题，其表现取决于采用连续还是离散的方式。从这个意义上说，欧拉恒等式不仅可以被视为最终目的地，也可以看作一组小型数学变体的开篇主题。

本文旨在以聚焦的方式阐明这一点。经过引言部分的讨论后，本文将这些变体分为两大类：通过改变欧拉公式的输入而得到的几何角度变体，以及通过规定虚轴上的取值而得到的函数方程变体。这种两部分的组织方式旨在更明确地凸显本文的数学主题。

因此， π 日不仅可以作为日历上一个有趣的日子来庆祝，也可以提醒我们数学联系与优雅最鲜明的典范之一

。这个公式

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

它简短到可以写在一行之内，却又蕴含丰富内涵，将数学中几个最重要的思想融为一体。正因如此，它至今仍令学生、教师和数学家们着迷。

本文有意采用分层的写法：前面的章节旨在让有学习热情的高中生也能读懂，而后面的章节则逐步引向复分析中更高级的观点。

2 欧拉恒等式的几何角度变体

引言部分重点介绍了经典恒等式

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

它由欧拉公式推导而来

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

从这里开始，我们可以探讨一些自然的变体。这些变体并非要取代经典恒等式，而是要展现欧拉公式的灵活性与启发性。本节的组织原则很简单：改变角度，并观察复平面上相应的端点如何变化。

2.1 负角变体

第一种变体是将 π 替换为 $-\pi$。根据欧拉公式，得

$$e^{-i\pi} = \cos(-\pi) + i \sin(-\pi).$$

由于余弦是偶函数，而正弦是奇函数，因此有

$$\cos(-\pi) = \cos(\pi) = -1, \qquad \sin(-\pi) = -\sin(\pi) = 0.$$

因此

$$e^{-i\pi} = -1,$$

因此

$$e^{-i\pi} + 1 = 0.$$

这个恒等式在数值上与经典恒等式相同，但在概念上却增添了一个新特点：指数中明确出现了负号。若将欧拉经典恒等式解读为对五个符号的统一

$$\pi, \qquad e, \qquad i, \qquad 1, \qquad 0,$$

那么公式

$$e^{-i\pi} + 1 = 0$$

可以看作一种变体，其中也明确包含了负性的概念。从这个富有启发性的意义上说，与其说是五个概念，不如说是六个概念的结合。当然，这只是诠释性的评论，而非严格的数学计数，因为减号是一种运算，并不像其他概念那样是一个数。

2.2 素数变体

接下来可以问，如果将 π 替换为 πp，会发生什么，其中 p 是一个素数。那么

$$e^{-i\pi p} = \cos(\pi p) - i\sin(\pi p).$$

如果 p 是一个奇素数，那么 p 是一个奇整数，因此

$$\cos(\pi p) = -1, \qquad \sin(\pi p) = 0.$$

因此

$$e^{-i\pi p} = -1 \qquad \text{for every odd prime } p.$$

由此可得

$$e^{-i\pi p} + 1 = 0 \qquad \text{for every odd prime } p.$$

这就得到了欧拉恒等式的一个真正的素数变体。它表明，同样的形式模式会在所有奇素数中重现。从这个意义上说，这个恒等式并非只与单一角 π 相关，而是沿着 π 的奇数倍周期性地延伸。

不过，值得注意的是，这个公式

$$e^{-i\pi p} + p = 0$$

通常并不成立。事实上，对于每个奇素数 p，都有

$$e^{-i\pi p} = -1,$$

因此

$$e^{-i\pi p} + p = p - 1,$$

这不为零。因此，正确的素数类比是

$$e^{-i\pi p} + 1 = 0 \qquad (p \text{ an odd prime}).$$

对于例外素数 $p = 2$，有

$$e^{-2i\pi} = \cos(2\pi) - i\sin(2\pi) = 1,$$

从而

$$e^{-2i\pi} + 1 = 2.$$

因此，素数 2 的表现不同于奇素数，这正如其特殊的奇偶性所预期的那样。

2.3 四分之一转变化：将 π 替换为 $\pi/2$

将 π 替换为 $\pi/2$ 会产生另一种自然的变化。于是，根据欧拉公式，有

$$e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = i,$$

同理

$$e^{-i\pi/2} = \cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2) = -i.$$

因此我们得到以下恒等式

$$e^{i\pi/2} - i = 0 \qquad \text{and} \qquad e^{-i\pi/2} + i = 0.$$

这些公式的性质与欧拉恒等式不同

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

在经典情形中，指数表达式的结果是实数 -1，因此等式以基本实数 1 和 0 收尾。相比之下，当角为 $\pi/2$ 时，指数表达式的结果就是虚数单位本身。因此，这并非一个只涉及 1 和 0 的恒等式，而是一个让 i 仍清晰可见的恒等式。

几何上，这很自然。乘以 e^{ix} 对应于在复平面上旋转角度 x。角度 π 表示半周旋转，使 1 变为 -1；而角度 $\pi/2$ 表示四分之一周旋转，使 1 变为i。因此，从 π 到 $\pi/2$ 的变化，会使终点从负实轴移至正虚轴。

因此可以说，代换 $x = \pi$ 产生了一个在指数函数、几何和算术之间尤为平衡的恒等式，而代换 $x = \pi/2$ 则产生了一个复数特征更为明显的变体。两者都自然源自同一个欧拉来源，但突显了该公式的不同方面。

2.4 一般视角

这些例子表明，欧拉恒等式只是由欧拉公式生成的更广泛关系族中一个特别著名的成员。经典方程

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

之所以依然特殊，是因为它以异常简洁的形式将数学中若干最基本的常数和符号联系在一起。然而，附近的公式

$$e^{-i\pi} + 1 = 0, \qquad e^{-i\pi p} + 1 = 0 \,(p \text{ 奇素数}) \qquad e^{-i\pi/2} + i = 0, \qquad e^{i\pi/2} - i = 0$$

表明，这个著名的恒等式也适合进行系统性变化。

从这个意义上说，欧拉公式并非只是某个著名方程的来源，也是一个由相关数学变化构成的小家族的源头。

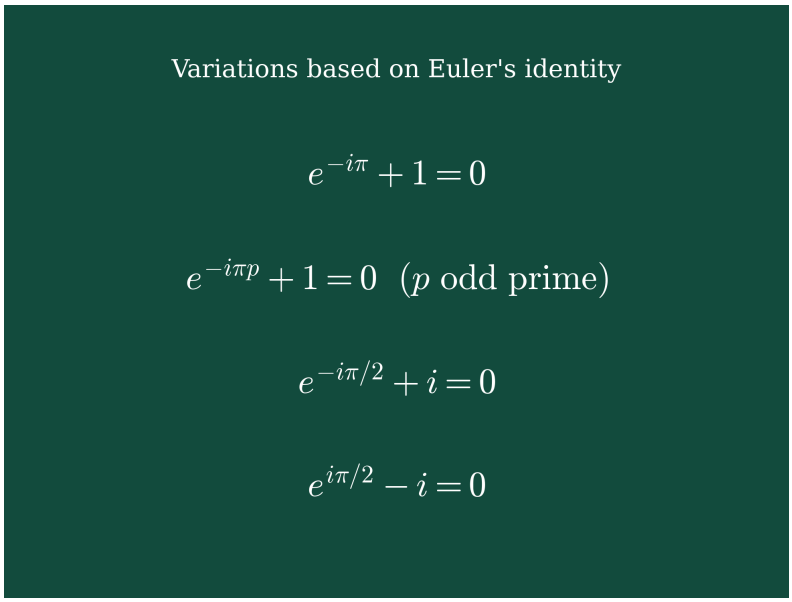

图 2：欧拉恒等式的四种愉快变体。

3 函数方程变体

上一节考察了将特殊角代入欧拉公式得到的几个具体变化。我们也可以换个方向，探求满足以下条件的函数 f

$$f(i\pi x) + 1 = 0.$$

等价地，

$$f(i\pi x) = -1.$$

乍看之下，这似乎是一种新型的欧拉型函数方程。然而，它的数学本质很大程度上取决于x 允许取值的集合，以及对函数 f施加了什么正则性要求。本节的组织原则，是对比连续集上的全纯刚性与离散集上的插值自由度。

3.1 连续情形

首先，假设关系式

$$f(i\pi x) = -1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

对所有实数 x都成立。那么 $i\pi x$ 会遍历整个虚轴。换言之，这个条件表明，f 在整个虚轴上取常数值–1 。

现在假设 f 在一个包含虚轴的连通开集上全纯。考虑函数

$$g(z) := f(z) + 1.$$

于是 g 是全纯函数，而上述条件意味着

$$g(i\pi x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

因此， g 在其定义域内一个具有聚点的无限集合上为零。根据全纯函数的恒等定理，可得

$$g(z) \equiv 0,$$

从而

$$f(z) \equiv -1.$$

因此，在全纯情形下，函数方程只有平凡解。这说明，在连续情形中，这个问题实际上过于刚性，无法产生一族有趣的解析解 [9, 10]。

命题 3.1。 设 $U \subseteq \mathbb{C}$ 是一个包含虚轴的连通开集。如果 $f\colon U \to \mathbb{C}$ 是全纯函数并满足

$$f(i\pi x) = -1 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

然后在 U 上的 $f \equiv -1$。

证明。 对 $g(z) = f(z) + 1$ 应用恒等定理，它在集合 $\{i\pi x$ 上为零： $x \in \mathbb{R}\}$。 □

3.2 无约束情形

如果不对 f 施加任何正则性要求，情况就会完全不同。在这种情况下，可以在虚轴之外任意定义 f，同时只要求

$$f(iy) = -1$$

对所有实数 y 均成立。因此，这样的函数有无穷多个。从这个角度看，这个方程不再是一个严格的解析条件，而是复平面某个特定子集上的规定值条件。

因此，同一个形式表达式

$$f(i\pi x) + 1 = 0$$

有两种截然不同的含义。在全纯函数范畴中，它会迫使 f 为常数；而在无约束范畴中，它则留下了极大的自由度。

3.3 离散情形与插值

当参数 x 被限制在一个离散子集（例如整数）中时，会出现一种更有趣的变化：

$$f(i\pi n) = -1 \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

现在，条件仅施加于虚轴上的一个离散子集。在这种情况下，自然会引出一个插值问题：能否构造一个全纯函数或整函数，使其在离散集上取给定的值?

这是复分析中的一个经典方向。一旦这些点成为离散点集，该条件便不再通过恒等定理强制函数为常数，因为有限复平面中不存在聚点。相反，问题就进入了解析函数或整函数的插值理论领域。在这

种意义上，离散版本在数学上比连续情形丰富得多 [11, 12, 9]。

事实上，这不仅仅是一个存在性问题：可以写出一个显式的非常数整函数解。也就是说，

$$f(z) = -1 + \sinh^2 z$$

满足

$$f(i\pi n) = -1 \qquad (n \in \mathbb{Z}),$$

因为

$$\sinh(i\pi n) = i \sin(\pi n) = 0.$$

因此，离散问题存在具体的非平凡解。

如果只限制在奇素数上，同样的观察也适用：

$$f(i\pi p) = -1 \qquad (p \text{ odd prime}).$$

同样，这就成为一个离散插值问题，而不是刚性结论。随后可以在附加约束下探讨存在性、显式构造、增长或唯一性。

命题 3.2. 对于任意给定的常数 $c \in \mathbb{C}$，这一族

$$f(z) = c + a \sinh^2 z \qquad (a \in \mathbb{C})$$

由满足以下条件的整函数组成

$$f(i\pi n) = c \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

更一般地，任何如下形式的函数

$$f(z) = c + \sinh z \, g(z),$$

若其中 g 为整函数，则也满足相同条件。

证明。 由于对于每个整数 n，$\sinh(i\pi n) = i\sin(\pi n) = 0$，因此两个公式都给出 $f(i\pi n) = c$。 □

3.4 另一种值指定变体：情形 $f(i\pi x) = 1/2$

通过将值 -1 替换为值 $1/2$，可以得到一个密切相关的变体。因此，我们要寻找一个满足以下条件的函数 f

$$f(i\pi x) = \frac{1}{2}.$$

等价地，

$$f(i\pi x) - \frac{1}{2} = 0.$$

这个问题的数学结构与前一种情形基本相同。如果要求该关系对所有实数 x都成立，那么 $i\pi x$ 会遍历整个虚轴，因此该条件表示 f 在这条轴上等于常数 $1/2$ 。

现在假设 f 在包含虚轴的某个连通开集上全纯，并定义

$$g(z) := f(z) - \frac{1}{2}.$$

那么 g 是全纯函数，并且

$$g(i\pi x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

因此， g 在其定义域内一个具有聚点的集合上为零。根据全纯函数的恒等定理，可得

$$g(z) \equiv 0,$$

因此

$$f(z) \equiv \frac{1}{2}.$$

所以，正如在 $f(i\pi x) = -1$ 的情形中，连续全纯版本完全刚性。

另一方面，如果不对 f 施加任何正则性要求，那么这样的函数有无穷多个：只需将 f 在虚轴上定义为 $1/2$ ，并在其他地方任意取值即可。因此，在不受限制的情形下，这个条件就只是一个规定值条件。

和之前一样，最有趣的情况是离散情形。例如，可以求一个满足以下条件的整函数：

$$f(i\pi n) = \frac{1}{2} \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

事实上，我们还可以写出一个明确的非恒定整函数解：

$$f(z) = \frac{1}{2} + \sinh^2 z.$$

确实，

$$\sinh(i\pi n) = i\sin(\pi n) = 0,$$

因此

$$f(i\pi n) = \frac{1}{2} + \sinh^2(i\pi n) = \frac{1}{2}.$$

类似地，可以考虑

$$f(i\pi p) = \frac{1}{2} \qquad (p \text{ odd prime}),$$

这又是一个离散插值问题。

这个变体在概念上很有启发性。值 -1 之所以特殊，是因为它恰好是欧拉公式在角 π处给出的值。相比之下，值 $1/2$并没有这种直接的欧拉式特权。因此，方程

$$f(i\pi x) = \frac{1}{2}$$

更清楚地表明，根本问题并非仅仅在于欧拉恒等式特有的算术性质，而在于更广泛的解析对比：连续集上的刚性与离散集上的自由。

3.5 自然的结论

因此，这个表达式

$$f(i\pi x) + 1 = 0$$

似乎并未定义一个独立成名的特殊函数方程。相反，它引出了两个截然不同的方向。如果变量 x 连续变化，且 f 是全纯的，那么该方程便退化为平凡的常数解

$$f \equiv -1.$$

另一方面，如果变量被限制在整数或奇素数等离散集合上，那么这个问题就成为复分析中的一个自然插值问题，而且还可以给出明确的非恒定整函数解。

当人们用另一个给定常数（例如 $1/2$）替换值 -1 时，同样的模式依然成立。在连续的全纯情形下，人们

仍然只能得到常数解，而在离散情形下，则会引出插值问题和具体例子。

这样一来，函数方程变体延续了前几节的主题。欧拉恒等式所揭示的不仅是孤立的公式，还有更广泛的问题族，其中刚性与自由以一种富有启发性的平衡共存。

参考文献

[1] L. Euler，《无穷分析引论》，第一至二卷，洛桑：Marc-Michel Bousquet，1748年。[2]L. Euler，《无穷分析导论》，J. D. Blanton 译，第一卷，施普林格，纽约，1988年。[3] R. Cotes，《对数测量学》，《伦敦皇家学会哲学汇刊》29（1714年），5–45。[4] R. E. Bradley 和 C. E. Sandifer（编），《莱昂哈德·欧拉：生平、著作与遗产》，数学史与数学哲学研究，爱思唯尔，阿姆斯特丹，2007年。[5] W. Dunham，《欧拉：我们的数学大师》，美国数学协会，华盛顿哥伦比亚特区，1999年。[6] R. Calinger，《莱昂哈德·欧拉：启蒙时代的数学天才》，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2016年。[7] E. Maor，《e：一个数的故事》，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1994年。[8] J. Stillwell，《数学及其历史》，第3版，施普林格，纽约，2010年。[9] J. B. Conway，《单复变函数 I》，《数学研究生教材》第11卷，第2版，施普林格，纽约，1978年。[10] E. M. Stein 和 R. Shakarchi，《复分析》，《普林斯顿分析学讲义》第II卷，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2003年。

[11] R. P. Boas, Jr.，《整函数》，学术出版社，纽约，1954年。

[12] B. Ya. Levin，《整函数讲义》，《数学专著译丛》第150卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1996年。

Takao Inoué 大和大学信息学部 日本大阪府吹田市片山町 2-5-1，邮编 564-0082 inoue.takao@yamato-u.ac.jp（工作邮箱）takaoapple@gmail.com（我更喜欢使用个人邮箱）