arXiv:2603.13769v1 [math.RT] 14 Mar 2026

关于异特征下具有 T-稳定直线的简单SL_2（$\mathbb{F}_p$）-模分类的注记

JUNBIN DONG

Abstract. 令$\mathbf{T}$ 为 $SL_2(\mathbb{F}_p)$中的对角矩阵群，其中p 为素数。设 $\Bbbk$ 为特征不等于 2 且 p的代数闭域。我们对所有具有$\mathbf{T}$-稳定直线的 $\Bbbk$表示 $SL_2(\bar{\mathbb{F}}_p)$的不可约表示进行分类。

1. Introduction

令$\mathbf{G} = SL_2(\mathbb{F}_p)$，其中 $\mathbb{F}_p$ 表示含有 p 个元素的有限域，且 p 为素数。设 $\Bbbk$ 为代数闭域，其特征 r不同于 2 且 p。根据 Borel 和 Tits 的一个结果 [2, 定理 10.3 和推论 10.4], ，我们知道，除平凡表示外，$SL_2(\mathbb{F}_p)$的所有其他不可约表示都是无限维的。N.H. Xi 通过取 $SL_2(\mathbb{F}_p)$的有限维表示的直极限，研究了 $SL_2(\mathbb{F}_{p^m})$的抽象表示，并在 [8, 第 6]节中得到许多有趣的结果。一个自然的问题是对 $SL_2(\mathbb{F}_p)$-模进行分类。然而，这个问题绝不容易处理。这一点可以从以下事实中理解： $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$是唯一一个其简单模已有描述的复半单李代数（见 [7]）。

令$\mathbf{T}$ 为对角矩阵，$\mathbf{U}$ 为 $SL_2(\mathbb{F}_p)$中的严格上三角幺幺矩阵。令$\mathbf{B}$ 为由$\mathbf{T}$和$\mathbf{U}$生成的 Borel 子群，也就是 $SL_2(\mathbb{F}_p)$中的上三角矩阵。存在两个自然同构

$$h : \bar{\mathbb{F}}_p^* \to \mathbf{T},\ h(c) = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}; \quad \varepsilon : \bar{\mathbb{F}}_p \to \mathbf{U},\ \ \varepsilon(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 20C07, 20G05.*Key words and phrases.* 约化群，单模，乘法特征。

其满足 $h(c)\varepsilon(x)h(c)^{-1} = \varepsilon(c^2x)$。单根 $\alpha : \mathbf{T} \to \bar{\mathbb{F}}_p^*$ 由 $\alpha(h(c)) = c^2$给出。令$\mathbf{N}$ 为$\mathbf{T}$ 在$\mathbf{G}$ 中的正规化子，且 $W = \mathbf{N}/\mathbf{T}$为魏尔群。我们设 $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，它是$W$的简单反射。则有

$$s\varepsilon(x)s = \varepsilon(-x^{-1})sh(-x)\varepsilon(-x^{-1}).$$

设 M 是 $SL_2(\mathbb{F}_p)$ 的任意表示。对于任意特征 $\theta : \mathbf{T} \to \Bbbk^*$，定义

$$M_\theta = \{m \in M \mid tm = \theta(t)m, \forall t \in \mathbf{T}\}.$$

记作 $M^{\mathbf{T}} = \bigoplus_{\theta \in \widehat{\mathbf{T}}} M_\theta$，其中 $\widehat{\mathbf{T}}$ 是 $\mathbf{T}$ 的特征群。若一个$\theta \in \widehat{\mathbf{T}}$表示 M 属于 $SL_2(\bar{\mathbb{F}}_p)$，且满足 $M^{\mathbf{T}} \neq 0$，则称其具有 $\mathbf{T}$-稳定直线。

在 [4]，中，我们在 char $\Bbbk = 0$ 的假设下，对所有具有 T-稳定直线的 $SL_2(\mathbb{F}_p)$-简单模进行分类。为完整起见，我们列出所有$\widehat{\ }$简单模。设 $\theta \in$ T，并通过同态 B $\to$T 将其视为 B 的一个特征。令 $\Bbbk_\theta$ 为相应的 B-模。我们考虑诱导模 $\mathbb{M}(\theta) = \Bbbk\mathrm{G} \otimes_{\Bbbk\mathbf{B}} \Bbbk_\theta$。令 $\mathbf{1}_\theta$ 为 $\Bbbk_\theta$ 中一个固定的非零元素。对于 $x \in$ G，我们将 $x\mathbf{1}_\theta := x \otimes \mathbf{1}_\theta \in \mathbb{M}(\theta)$ 记作简写。当 θ 是平凡的时，定义 $\eta_s = (1 - s)\mathbf{1}_{\mathrm{tr}}$，因此 St $= \Bbbk\mathrm{U}\eta_s$ 是 Steinberg 模。此外， $\mathbb{M}$(tr)/ St 是 $SL_2(\mathbb{F}_p)$ 的平凡模 $\Bbbk_{\mathrm{tr}}$。根据 [3, 定理$\widehat{\ }$3.1], $\Bbbk_{\mathrm{tr}}$、St、 $\mathbb{M}(\theta)$ 是 $SL_2(\mathbb{F}_p)$-简单模，其中 $\theta \in$T 非平凡。本文的主要结果如下。

定理 1.1. 设 $\Bbbk$ 是一个特征不等于2 且 p的代数闭域。那么， $\Bbbk$ 上所有存在$\widehat{\ }(\mathbb{F}_p)$-模，且具有$\mathbf{T}$-稳定直线的简单 SL_2模，恰为 $\Bbbk_{\mathrm{tr}}$、St以及 $\mathbb{M}(\theta)$，其中 $\theta \in \mathbf{T}$取遍所有非平凡特征标。

根据 [5, 命题 4.3] 和 [5, 命题 4.5]，， St $\otimes$St 的一个直和项（记作 V_-）是有限生成的，因此有简单商。然而， V_- 的任何简单商都不具有$\mathbf{T}$-稳定直线。 V_- 的简单商给出了 $SL_2(\mathbb{F}_p)$的一些此前未曾发现的新的无限维简单模。

现在设 M 是 $SL_2(\mathbb{F}_p)$ 的一个表示，且对于某个 $\theta \in \mathbf{T}$，有 $M_\theta \neq 0$。于是利用弗罗贝尼乌斯互反律，我们得到

$$\mathrm{Hom}_{\Bbbk\mathbf{G}}(\mathrm{Ind}_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}} \Bbbk_\theta, M) \cong \mathrm{Hom}_{\Bbbk\mathbf{T}}(\Bbbk_\theta, M) \cong M_\theta \neq 0.$$

为了证明定理 1.1，只需研究对每个 $\theta \in \widehat{\mathbf{T}}$ 的诱导模 $\mathrm{Ind}_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}} \Bbbk_\theta$ 的简单商。因此，本文其余部分安排如下：在第 2 节中，我们考察 θ 为平凡表示时诱导模 $\mathrm{Ind}_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}} \Bbbk_\theta$ 的简单商。第 3 节给出一个关键引理，为非平凡情形做准备；该情形将在第 4 节中研究。第 5 节提供一个补充结果，讨论有限域上非平凡乘法特征的平移的线性无关性。

2. The trivial character case

首先，我们引入一些记号。对于$\mathbf{G} = SL_2(\bar{\mathbb{F}}_p)$的任意有限子集 X，令 $\overline{X := \sum_{x \in X} x} \in \Bbbk\mathbf{G}$。我们设 $U_{p^n} = \{\varepsilon(x) \mid x \in \mathbb{F}_{p^n}\}$. 在本节中，我们讨论 θ 为平凡的情形。注意到 $\mathrm{char}\,\Bbbk \neq 2$ and$\mathbf{N}/\mathbf{T} \cong W = \{e, s\}$，不难看出

$$\mathrm{Ind}_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}} \Bbbk_{\mathrm{tr}} \cong \mathrm{Ind}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{G}} \Bbbk_+ \oplus \mathrm{Ind}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{G}} \Bbbk_-,$$

其中，$\Bbbk_+$ 是$\mathbf{N}$ 的平凡表示，而 $\Bbbk_-$ 是 W的符号表示，也可视为$\mathbf{N}$的一个表示。令 $\mathbf{1}_{\mathrm{tr}}$ 为 $\Bbbk_{\mathrm{tr}}$中的一个固定非零元素。记 $\mathbf{1}_+ = \frac{1}{2}(e+s)\mathbf{1}_{\mathrm{tr}}$和 $\mathbf{1}_- = \frac{1}{2}(e-s)\mathbf{1}_{\mathrm{tr}}$。对于任意 $x \in \mathbf{G}$，我们将 $x\mathbf{1}_+ := x \otimes \mathbf{1}_+ \in \mathrm{Ind}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{G}} \Bbbk_+$ 和 $x\mathbf{1}_- := x \otimes \mathbf{1}_- \in \mathrm{Ind}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{G}} \Bbbk_-$ 简记为。

引理 2.1。 设 M 是一个 $\Bbbk\mathbf{G}$-子模，属于 $\mathrm{Ind}_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}} \Bbbk_{\mathrm{tr}}$。若存在 $n \in \mathbb{N}$使得

$$\xi = \sum_{z \in \mathbb{F}_{p^n}^*} a_z \overline{U_{p^n}} s\varepsilon(z)\mathbf{1}_{\mathrm{tr}} \in M,$$

其中 $a_z \in \Bbbk$ 且 $A := \sum_{z \in \mathbb{F}_{p^n}^*} a_z \neq 0$。那么我们有 $(e+s)\mathbf{1}_{\mathrm{tr}} \in M$.

证明。 选取 $\mathfrak{D}_{p^n} \subset \mathbf{T}$ 使得 $\alpha : \mathfrak{D}_{p^n} \to \mathbb{F}_{p^n}^*$ 是一个双射。容易验证

$$\overline{\mathfrak{D}_{p^n}}\ \xi = A\overline{U_{p^n}} s \overline{U_{p^n}^*} \mathbf{1}_{\mathrm{tr}} \in M. \tag{2.1}$$

这意味着 $U_{p^n} s U_{p^n}^* \mathbf{1}_{\mathrm{tr}} \in \overline{M}$，因为 $A \neq 0$。令 V 为由$\{U_{p^n}\mathbf{1}_{\mathrm{tr}}, U_{p^n}s\varepsilon(z)\mathbf{1}_{\mathrm{tr}} \mid z \in \mathbb{F}_{p^n}\}$张成的空间。令 ω 为循环群 $\mathbb{F}_{p^n}^*$的生成元。记 $\mathcal{A} : V \to V$ 为由 $h(\omega^{\frac{1}{2}})$在 V上的作用所诱导的线性映射。则 $\mathcal{A}$ 的最小多项式为 $t^{p^n-1} - 1$。该

对应于特征值 1 的特征子空间由 $U_{p^n}\mathbf{1}_{\mathrm{tr}}$、 $U_{p^n}s\mathbf{1}_{\mathrm{tr}}$和 $U_{p^n}sU_{p^n}^*\mathbf{1}_{\mathrm{tr}}$张成。容易看出，$\overline{U_{p^n}s}\xi$ 具有如下形式

$$\overline{U_{p^n}}s\xi = A(\overline{U_{p^n}}\mathbf{1}_{\mathrm{tr}} + \overline{U_{p^n}}s\mathbf{1}_{\mathrm{tr}}) + \sum_{z\in\mathbb{F}_{p^n}^*} b_z\overline{U_{p^n}}s\varepsilon(z)\mathbf{1}_{\mathrm{tr}}, \tag{2.2}$$

其中 $b_z \in \Bbbk$。当 $r \nmid p^n - 1$ 时，线性映射 $\mathcal{A}$ 可对角化。因此，利用 (2.2)，容易看出

$$A(\overline{U_{p^n}}\mathbf{1}_{\mathrm{tr}} + \overline{U_{p^n}}s\mathbf{1}_{\mathrm{tr}}) + b\overline{U_{p^n}}s\overline{U_{p^n}^*}\mathbf{1}_{\mathrm{tr}} \in M$$

对于某个 $b \in \Bbbk$。注意到由 (2.1) 有 $\overline{U_{p^n}}sU_{p^n}^*\mathbf{1}_{\mathrm{tr}} \in M$，我们得到 $\overline{\overline{U_{p^n}}\mathbf{1}_{\mathrm{tr}} + U_{p^n}s\mathbf{1}_{\mathrm{tr}}} \in M$。因此，根据引理 3.6]，，有 $(e+s)\mathbf{1}_{\mathrm{tr}} \in M$。

现在考虑 $r|p^n-1$ 的情形。写作 $p^n-1 = ml$，其中 m 是 r 的幂，且 $(l,r) = 1$。那么 $\mathcal{A}$ 的约当标准形为

$$J_1(\lambda_1)\dot{+}J_1(\lambda_1)\dot{+}J_m(\lambda_1)\dot{+}J_m(\lambda_2)\dot{+}\cdots\dot{+}J_m(\lambda_l),$$

其中 $\lambda_1 = 1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l$ 是方程 $t^l - 1 = 0$ 的根。令$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}2, \cdots, \mathbf{u}_m$ 为对应于块 $J_m(\lambda)$ $(\lambda \neq 1)$ 的约当基，其中 $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i$。设 $\mathbf{w}_i = U_{p^n}s\mathbf{u}_i \in V$。注意到 $\mathcal{A}U_{p^n}s\mathbf{u}_i = U_{p^n}s\mathcal{A}^{-1}\mathbf{u}_i$于是有

$$\mathcal{A}\mathbf{w}_{i+1} = \overline{U_{p^n}}s\mathcal{A}^{-1}\mathbf{u}_{i+1} = \lambda^{-1}\overline{U_{p^n}}s(\mathbf{u}_{i+1} - \mathcal{A}^{-1}\mathbf{u}_i) = \lambda^{-1}(\mathbf{w}_{i+1} - \mathcal{A}\mathbf{w}_i).$$

因此 $(\mathcal{A} - \lambda^{-1}\mathcal{E})\ \mathbf{w}_{i+1} = -\lambda^{-1}\mathcal{A}\mathbf{w}_i$。因此我们有

$$\mathbf{w}_i = \overline{U_{p^n}}s\mathbf{u}_i \in \ker(\mathcal{A} - \lambda^{-1}\mathcal{E})^i \tag{2.3}$$

由 i上的归纳法可知。特别地，我们看到

$$\overline{U_{p^n}}s : \ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^m \to \ker(\mathcal{A} - \lambda^{-1}\mathcal{E})^m \tag{2.4}$$

是一个线性算子。

令 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}2, \cdots, \mathbf{v}_m$ 为对应于块 $J_m(1)$ 的约当基，其中 $(\mathcal{A} - \mathcal{E})\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i$ 且 $\mathbf{v}_1 = U_{p^n}sU_{p^n}^*\mathbf{1}_{\mathrm{tr}}$。令 $\mathbf{v}_i' = U_{p^n}s\overline{\mathbf{v}_i} \in \overline{V}$，它属于 $\ker(\overline{\mathcal{A} - \mathcal{E}})^i$。记 $\mathbf{x} = U_{p^n}\mathbf{1}_{\mathrm{tr}}$ 和 $\mathbf{y} = U_{p^n}s\mathbf{1}_{\mathrm{tr}}$。因此，对于任意 $k = 1, \overline{2, \cdots}, m$，$\mathbf{v}_k'$ 都是 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y}$、$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}2, \cdots$、$\mathbf{v}_k$的线性组合。取约当块 $J_m(1)$ 中 ξ 的直和项，得到一个元素

$$\xi' = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2\cdots + a_k\mathbf{v}_k \in M,$$

其中 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k \in \Bbbk$ 和 $a_k \neq 0$。因此我们有 $\mathbf{v}_k \in M$。在 (2.2) 中，取约当块 $J_1(\lambda_1) \dot{+} J_1(\lambda_1) \dot{+} \cdots \dot{+} J_m(1)$ 中 $U_{p^n} s\xi$ 的直和项。利用 (2.3) 和 (2.4)，得到一个元素

$$\xi'' = A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) + b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_k\mathbf{v}_k \in M.$$

因此我们有 $\mathbf{x}+\mathbf{y} = \overline{U_{p^n}\mathbf{1}_{\mathrm{tr}}} + \overline{U_{p^n}s}\mathbf{1}_{\mathrm{tr}} \in M$。利用 $[3, \text{引理 } 3.6],$，我们得到 $(e+s)\mathbf{1}_{\mathrm{tr}} \in M$。引理得证。□

现在我们考虑 $\mathrm{Ind}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{G}} \Bbbk_+$ 的简单商。令

$$\mathbb{M}_+ = \{\sum_{g\in\mathbf{G}} a_g g\mathbf{1}_+ \mid \sum_{g\in\mathbf{G}} a_g = 0\},$$

它是 $\mathrm{Ind}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{G}} \Bbbk_+$ 的一个 $\Bbbk\mathbf{G}$-子模。容易看出，$\mathrm{Ind}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{G}} \Bbbk_+/\mathbb{M}_+$ 是平凡的 $\Bbbk\mathbf{G}$-模。我们证明 $\mathbb{M}_+$ 是 $\mathrm{Ind}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{G}} \Bbbk_+$ 的唯一极大子模。令 $\xi \notin \mathbb{M}_+$ 具有如下表达式

$$\xi = \sum_{x,y\in\mathbb{F}_{p^m}} a_{x,y}\varepsilon(x)s\varepsilon(y)\mathbf{1}_+, \quad \text{where} \sum_{x,y\in\mathbb{F}_{p^m}} a_{x,y} \neq 0.$$

令 $n > m$ 满足 $m|n$，并固定 $u \in \mathbb{F}_{p^n} \setminus \mathbb{F}_{p^m}$。令 $\eta = s\varepsilon(u)\xi$，其形式为

$$\eta = \sum_{x,y\in\mathbb{F}_{p^n}} a_{x,y}\varepsilon(-(u+x)^{-1})s\varepsilon((u+x)^2y - (u+x))\mathbf{1}_+.$$

于是我们有

$$\overline{U_{p^n}}\eta = \sum_{z\in\mathbb{F}_{p^n}^*} c_z\overline{U_{p^n}}s\varepsilon(z)\mathbf{1}_+,$$

其中 $\sum_{z\in\mathbb{F}_{p^n}^*} c_z = \sum_{x,y\in\mathbb{F}_{p^m}} a_{x,y} \neq 0$。注意，$\mathbf{1}_+ = \frac{1}{2}(e+s)\mathbf{1}_{\mathrm{tr}}$ 和

$$\overline{U_{p^n}}s\varepsilon(z)s\mathbf{1}_{\mathrm{tr}} = \overline{U_{p^n}}s\varepsilon(-z)\mathbf{1}_{\mathrm{tr}}.$$

因此我们有

$$\overline{U_{p^n}}\eta = \frac{1}{2}\sum_{z\in\mathbb{F}_{p^n}^*} c_z\overline{U_{p^n}}s\varepsilon(z)\mathbf{1}_{\mathrm{tr}} + \frac{1}{2}\sum_{z\in\mathbb{F}_{p^n}^*} c_z\overline{U_{p^n}}s\varepsilon(-z)\mathbf{1}_{\mathrm{tr}}.$$

因此，由引理 2.1 可知 $\mathbf{1}_+ \in \Bbbk\mathbf{G}\xi$，于是对任意元素 $\xi \notin \mathbb{M}_+$，我们有 $\Bbbk\mathbf{G}\xi = \mathrm{Ind}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{G}} \Bbbk_+$。因此，平凡模是 $\mathrm{Ind}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{G}} \Bbbk_+$ 的唯一简单商模。

现在我们考虑 $\mathrm{Ind}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{G}}\Bbbk_-$ 的简单商模。令 $\mathrm{St} = \Bbbk\mathbf{U}\eta_s$ 为 Steinberg 模，其中 $\eta_s = (1-s)\mathbf{1}_{\mathrm{tr}}$。那么我们有 $s\eta_s = -\eta_s$，且对任意 $x \in \bar{\mathbb{F}}_p^*$，有 $s\varepsilon(x)\eta_s = (\varepsilon(-x^{-1}) - 1)\eta_s$。我们证明 St 是 $\mathrm{Ind}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{G}}\Bbbk_-$ 的唯一简单模。为方便起见，我们记

$$\Lambda(z) = (s\varepsilon(z) + 1 - \varepsilon(-z^{-1}))\mathbf{1}_-$$

对每个 $z \in \bar{\mathbb{F}}_p^*$。于是，对于任意 $c \in \bar{\mathbb{F}}_p^*$，我们有 $h(c)\Lambda(z) = \Lambda(c^{-2}z)$。此外，容易得到以下引理。

引理 2.2. 以下恒等式成立：

$$\varepsilon(z)\Lambda(z^{-1}) = -\Lambda(-z^{-1}), \quad s\Lambda(z) = -\Lambda(-z^{-1})$$

¯对于任意 $z \in \mathbb{F}_p^*$ 和

$$s\varepsilon(x)\Lambda(y) = \varepsilon(-x^{-1})\Lambda(x(xy-1)) + \Lambda(x) - \Lambda(y^{-1}(xy-1)),$$

¯其中 $x, y \in \mathbb{F}_p^*$ 和 $xy \neq 1$。

设 $\mathbb{M}_-$ 为 $\mathrm{Ind}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{G}}\Bbbk_-$ 的子模，由 $\Lambda(z)$ $z \in \bar{\mathbb{F}}_p^*$ 生成。因此，$\mathrm{Ind}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{G}}\Bbbk_-/\mathbb{M}_-$ 与 Steinberg 模同构。设 $\zeta \in \mathrm{Ind}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{G}}\Bbbk_-$，它不属于 $\mathbb{M}_-$。根据引理 2.2，ζ 有如下表达式

$$\zeta = \sum_{xy\neq 1} a_{x,y}\varepsilon(x)\Lambda(y)\mathbf{1}_- + \sum_{z\in\bar{\mathbb{F}}_p^*} b_z\Lambda(z)\mathbf{1}_- + \sum_{u\in\bar{\mathbb{F}}_p} c_u\varepsilon(u)\mathbf{1}_-,$$

其中，对于某个 u，$c_u \neq 0$。存在一个整数 $n \in \mathbb{N}$，使得 x，y，z，$u \in \mathbb{F}_{p^n}$ 只要 $a_{x,\,y} \neq 0$，$b_z \neq 0$ 且 $c_u \neq 0$。不妨设 $c_0 \neq 0$。此外，假设 $\sum_{u\in\bar{\mathbb{F}}_p} c_u \neq 0$。否则，我们
考虑 $s\zeta$ 而不是 ζ。事实上，如果我们写成

$$s\zeta = \sum_{xy\neq 1} a'_{x,y}\varepsilon(x)\Lambda(y)\mathbf{1}_- + \sum_{z\in\bar{\mathbb{F}}_p^*} b'_z\Lambda(z)\mathbf{1}_- + \sum_{u\in\bar{\mathbb{F}}_p} c'_u\varepsilon(u)\mathbf{1}_-,$$

由引理 2.2 可知，$\sum_{u\in\bar{\mathbb{F}}_p} c'_u = -c_0$ 非零，这一点显而易见。为便于后续讨论，我们记为 $C = \sum_{u\in\bar{\mathbb{F}}_p} c_u$。注意，$C$

根据我们的假设，非零。因此我们有

$$\overline{U_{p^n}}\zeta = C\overline{U_{p^n}}\mathbf{1}_- + \sum_{z\in\mathbb{F}_{p^n}^*} d_z\overline{U_{p^n}}s\varepsilon(z)\mathbf{1}_-, \tag{2.5}$$

其中 $d_z \in \Bbbk$。容易验证

$$\overline{U_{p^n}}s\varepsilon(z)\mathbf{1}_- = -\overline{U_{p^n}}s\varepsilon(z)s\mathbf{1}_- = -\overline{U_{p^n}}s\varepsilon(-z)\mathbf{1}_-. \tag{2.6}$$

设 $t_0 \in \bar{\mathbb{F}}_p^*$ 满足 $t_0^2 = -1$。利用 (2.5) 和 (2.6)，我们得到

$$h(t_0)\overline{U_{p^m}}\zeta + \overline{U_{p^m}}\zeta = 2C\overline{U_{p^n}}\mathbf{1}_-,$$

这意味着 $U_{p^n}\mathbf{1}_- \in \overline{\Bbbk\mathbf{G}}\zeta$。因此，由 [3, 引理 3.6]，我们得到 $\mathbf{1}_- \in \Bbbk\mathbf{G}\zeta$。于是，对任意元素 $\zeta \notin \mathbb{M}_-$，我们看到 $\Bbbk\mathbf{G}\zeta = \mathrm{Ind}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{G}}\Bbbk_-$，因此 Steinberg 模是 $\mathrm{Ind}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{G}}\Bbbk_-$ 的唯一简单商模。

3. A key lemma

沿用论文 [4]，中的证明策略，我们发现 [4, 推论 3.3] 起着关键作用。零特征情形下 [4, 推论 3.3] 的原始证明依赖于 [6, 定理 1.1] 中确立的主要结果。本节中，我们证明以下引理，它是 [4,推论 3.3] 的推广。

引理 3.1. 设 $\Bbbk$ 是一个特征为 $r \neq p$的代数闭域。设 $\lambda: \mathbb{F}_p^* \to \Bbbk^*$ 是一个非平凡乘法特征，且 u_1、u_2、…、$u_n \in \mathbb{F}_p^*$彼此不同。给定 a_1、a_2、…、$a_n \in \Bbbk^*$，则存在无穷多个元素 $x \in \mathbb{F}_p^*$ 使得

$$a_1\lambda(x+u_1) + a_2\lambda(x+u_2) + \cdots + a_n\lambda(x+u_n) \neq 0.$$

我们将利用有限群特征标的正交关系来证明引理 3.1。下面的命题是一个众所周知的事实。

命题 3.2. 设 φ、ψ 是 $\mathbb{F}_{p^m}^*$ 在 $\Bbbk$上的两个乘法特征。则

$$\sum_{z\in\mathbb{F}_{p^m}^*} \varphi(z)\psi(z^{-1}) = (p^m-1)\delta_{\varphi,\psi}.$$

特别地，对于 $\mathbb{F}_{p^m}^*$ 的任意非平凡乘法特征 χ，有 $\sum_{z\in\mathbb{F}_{p^m}^*} \chi(z) = 0$。

引理 3.3。设 p、r 是不同的素数，满足 $p \neq 1$ （模 r）。有

(i) 集合 $X = \{m \in \mathbb{N} \mid r \nmid p^m - 1\}$ 是无限的。*(ii)* 对于任意 $k \in \mathbb{N}$，存在 m、$l \geq k$，使得 $p^m \neq p^l$ （模 r）。

证明。(i) 令 d 为 $\mathbb{F}_r = \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ 中 p 的阶，即 $p^d \equiv 1$ （模 r）。注意到 $p \neq 1$ （模 r），我们可知 $d \geq 2$。因此 $X = \{m \in \mathbb{N} \mid d \nmid m\}$，它是无限集，故 (i) 得证。

(ii) 由于 X 是无限的，对于任意 $k \in \mathbb{N}$，令 $m \in X$ 和 $m \geq k$。设 $l = 2m$，则

$$p^{2m} - p^m = p^m(p^m - 1) \not\equiv 0 \pmod{r},$$

这就证明了 (ii)。 □

引理 3.1 的证明。由于 λ 非平凡，为方便起见，我们设 $\lambda(0) = 0$。令 $S(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda(x + u_i)$。记 $Z = \{x \in \bar{\mathbb{F}}_p^* \mid S(x) \neq 0\}$。假设集合 Z 是有限的。存在一个整数 m，使得 $\mathbb{F}_{p^m} \supseteq Z \cup \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$，且 $\lambda|_{\mathbb{F}_{p^m}^*}$ 是 $\mathbb{F}_{p^m}^*$ 的非平凡乘法特征。

首先考虑 $p \neq 1 \pmod r$ 的情况。利用命题 3.2，对于任意 $u \in \mathbb{F}_{p^m}^*$，我们可知

$$\sum_{z \in \mathbb{F}_{p^m}^*} \lambda(z + u)\lambda(z^{-1}) = \sum_{z \in \mathbb{F}_{p^m}^*} \lambda(1 + uz^{-1}) = -1.$$

因此，不难看出

$$\sum_{x \in \mathbb{F}_{p^m} \setminus \{-u_1\}} S(x)\lambda((x + u_1)^{-1}) = p^m a_1 - \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{3.1}$$

由引理 3.3，存在一个整数 l，使得 $m \mid l$ 且 $p^m \neq p^l \pmod r$。由于 $\mathbb{F}_{p^l} \supseteq \mathbb{F}_{p^m} \supseteq Z \cup \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$，我们可知

$$\sum_{x \in \mathbb{F}_{p^m} \setminus \{-u_1\}} S(x)\lambda((x + u_1)^{-1}) = \sum_{x \in \mathbb{F}_{p^l} \setminus \{-u_1\}} S(x)\lambda((x + u_1)^{-1}),$$

这意味着 $p^m a_1 = p^l a_1$，由 (3.1) 得出。注意到 $p^m \neq p^l$ （模 r），我们得到矛盾。因此，引理 3.1 在 $p \neq 1$ （模 r）的情况下得证。

现在我们考虑 $p \equiv 1$ （模 r）的情况。注意，根据假设，对任意 $x \in \overline{\mathbb{F}}_p \setminus \mathbb{F}_{p^m}$，都有 $S(x) = 0$。因此我们得到

$$S(xy) = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda(xy + u_i) = 0 \tag{3.2}$$

对于任意 $x \in \mathbb{F}_p \setminus \mathbb{F}_{p^m}$ 和 $y \in \mathbb{F}_{p^m}^*$，这意味着 $\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda(x + u_i y^{-1}) = 0$。因此我们有

$$\sum_{y \in \mathbb{F}_{p^m}^*} \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda(x + u_i y^{-1}) = (\sum_{i=1}^{n} a_i) \sum_{z \in \mathbb{F}_{p^m}^*} \lambda(x + z)$$

对于任意 $x \in \mathbb{F}_p \setminus \mathbb{F}_{p^m}$。如果 $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$，则 $\sum_{z \in \mathbb{F}_{p^m}^*} \lambda(x + z) = 0$ 对于任意 $x \in \mathbb{F}_p \setminus \mathbb{F}_{p^m}$。如果 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$，那么我们考虑 $S(x - u_1)$ 而不是 $S(x)$，并且根据 (3.2)，得到

$$a_1 \lambda(x) + \sum_{i=2}^{n} a_i \lambda(x + (u_i - u_1) y^{-1}) = 0$$

对于任意 $x \in \mathbb{F}_p \setminus \mathbb{F}_{p^m}$ 和 $y \in \mathbb{F}_{p^m}^*$。注意到 $p \equiv 1$ （模 r），因此我们有

$$\sum_{y \in \mathbb{F}_{p^m}^*} \big(a_1 \lambda(x) + \sum_{i=2}^{n} a_i \lambda(x + (u_i - u_1) y^{-1}) \big) = (\sum_{i=2}^{n} a_i) \sum_{z \in \mathbb{F}_{p^m}^*} \lambda(x + z) = 0$$

根据命题 3.2。由于 $\sum_{i=2}^{n} a_i \neq 0$，我们还有 $\sum_{z \in \mathbb{F}_{p^m}^*} \lambda(x + z) = 0$ 对于任意 $x \in \mathbb{F}_p \setminus \mathbb{F}_{p^m}$。

记 $R_m(x)$ 为 $\sum_{z \in \mathbb{F}_{p^m}} \lambda(x + z)$，因此

$$R_m(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{F}_{p^m} \\ \lambda(x), & x \in \overline{\mathbb{F}}_p \setminus \mathbb{F}_{p^m}. \end{cases}$$

令 $l \in \mathbb{N}$ 使得 $m | l$ 且 $l > m$，我们还有

$$R_l(x) = \sum_{z \in \mathbb{F}_{p^l}} \lambda(x + z) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{F}_{p^l} \\ \lambda(x), & x \in \overline{\mathbb{F}}_p \setminus \mathbb{F}_{p^l}. \end{cases}$$

令 $\{0, z_1, z_2, \cdots, z_r\}$ 为 $\mathbb{F}_{p^l}$中 $\mathbb{F}_{p^m}$的左陪集代表元。因此

$$R_l(0) = R_m(0) + \sum_{j=1}^{r} R_m(z_j) = \sum_{j=1}^{r} \lambda(z_j) = 0.$$

因此我们得到 $\lambda(z_j + u) = \lambda(z_j)$，从而对于任意$u \in \mathbb{F}_{p^m}$和 $j = 1, 2, \cdots, r$，都有 $\lambda(1 + uz_j^{-1}) = 1$。因此不难看出，对于任意 $z \in \mathbb{F}_{p^l} \setminus \mathbb{F}_{p^m}$，都有 $\lambda(z) = 1$，这与 $\lambda|_{\mathbb{F}_{p^m}^*}$ 是非平凡的这一事实相矛盾。因此，引理 3.1 得证。□

4. The nontrivial character case

本节考虑 θ 是非平凡特征的情形。令$\varphi_e : \mathrm{Ind}_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}} \Bbbk_\theta \to \mathbb{M}(\theta)$ 为满足 $\varphi_e(\mathbf{1}_\theta) = \widehat{\mathbf{1}}_\theta$ 的自然态射。令$\varphi_s : \mathrm{Ind}_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}} \Bbbk_\theta \to \mathbb{M}(\theta^s)$ 为满足 $\varphi_s(\mathbf{1}_\theta) = s\widehat{\mathbf{1}}_{\theta^s}$ 的态射。$\mathbb{M}(\theta)$ 和 $\mathbb{M}(\theta^s)$ 都是 $\mathrm{Ind}_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}} \Bbbk_\theta$ 的简单商模。我们将证明，诱导模 $\mathrm{Ind}_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}} \Bbbk_\theta$ 只有两个简单商模，即 $\mathbb{M}(\theta)$ 和$\mathbb{M}(\theta^s)$。

引理 4.1。设 M 是一个 $\Bbbk\mathbf{G}$-子模，且属于 $\mathrm{Ind}_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}} \Bbbk_\theta$。如果存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得

$$\zeta = \sum_{z \in \mathbb{F}_{p^n}^*} c_z \overline{U_{p^n}} s\varepsilon(z)\mathbf{1}_\theta \in M, \quad c_z \in \Bbbk,$$

where $\sum_{z \in \mathbb{F}_{p^n}^*} c_z \neq 0$ *and* $\sum_{z \in \mathbb{F}_{p^n}^*} c_z \theta^s(-z) \neq 0$. *Then we have* $\Bbbk\mathbf{G}\zeta = \mathrm{Ind}_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}} \Bbbk_\theta$.

证明。不妨设 $\theta|_{\mathbb{F}_{p^n}^*} \neq \theta^s|_{\mathbb{F}_{p^n}^*}$。记 $C = \sum_{z \in \mathbb{F}_{p^n}^*} c_z$ 和 $D = \sum_{z \in \mathbb{F}_{p^n}^*} c_z \theta^s(-z)$。通过简单计算可得

$$\overline{U_{p^n}} s\zeta = \theta(-1)C\overline{U_{p^n}}\mathbf{1}_\theta + D\overline{U_{p^n}} s\mathbf{1}_\theta + \sum_{z \in \mathbb{F}_{p^n}^*} d_z \overline{U_{p^n}} s\varepsilon(z)\mathbf{1}_\theta \tag{4.1}$$

其中 $d_z \in \Bbbk$。令 V为由$\{U_{p^n}\mathbf{1}_\theta, U_{p^n} s\varepsilon(z)\mathbf{1}_\theta \mid z \in \mathbb{F}_{p^n}\}$张成的空间。令 ω 为循环群 $\mathbb{F}_{p^n}^*$的生成元。记 $\mathcal{A} : V \to V$为由 $h(\omega^{\frac{1}{2}})$在 V上的作用所引入的线性映射。令 $\kappa = \theta^s(\omega^{-\frac{1}{2}})$。我们看到$\kappa \neq \kappa^{-1}$ 和 $\kappa^{2(p^n-1)} = 1$。于是$\mathcal{A}$ 的最小多项式为 $t^{p^n-1} - \kappa^{p^n-1}$。当 $r \nmid p^n - 1$时，线性映射 $\mathcal{A}$ 可对角化。对应于特征值 κ 的特征子空间由 $U_{p^n} s\mathbf{1}_\theta$张成

以及$\overline{U_{p^n}}\overline{sU_{p^n}^*}\mathbf{1}_\theta$。取 ζ 和 $U_{p^n}s\zeta$ 在特征值 1 对应的特征子空间中的分量。我们看到$U_{p^n}s\mathbf{1}_\theta \in \Bbbk\mathbf{G}\zeta$。因此，利用 [3, 引理 3.6], ，我们有$\mathbf{1}_\theta \in \Bbbk\mathbf{G}\zeta$ ，从而 $\Bbbk\mathbf{G}\zeta = \mathrm{Ind}_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}\Bbbk_\theta$。

现在考虑 $r|p^n-1$的情形。设 $p^n-1=ml$，其中 m 是一个幂 r 为 r 且（l， r）$=1$。那么 $\mathcal{A}$ 的约当标准形为

$$J_1(\kappa^{-1})\dot{+}J_1(\kappa)\dot{+}J_m(\kappa\lambda_1)\dot{+}J_m(\kappa\lambda_2)\dot{+}\cdots\dot{+}J_m(\kappa\lambda_l),$$

其中 $\lambda_1=1$， λ_2， $\cdots$， λ_l是方程 $t^l-1=0$的根。令$\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$， $\cdots$， $\mathbf{u}_m$ 为对应于分块 $J_m(\lambda)$的约当基，其中（$\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}$）$\mathbf{u}_{i+1}=\mathbf{u}_i$。设$\mathbf{u}_i'=U_{p^n}s\mathbf{u}_i\in V$。则

$$\mathcal{A}\mathbf{u}_{i+1}'=\overline{U_{p^n}}s\mathcal{A}^{-1}\mathbf{u}_{i+1}=\lambda^{-1}\overline{U_{p^n}}s(\mathbf{u}_{i+1}-\mathcal{A}^{-1}\mathbf{u}_i)=\lambda^{-1}(\mathbf{u}_{i+1}'-\mathcal{A}\mathbf{u}_i').$$

因此（$\mathcal{A}-\lambda^{-1}\mathcal{E}$）$\mathbf{u}_{i+1}'=-\lambda^{-1}\mathcal{A}\mathbf{u}_i'$。因此我们得到

$$\mathbf{u}_i'=\overline{U_{p^n}}s\mathbf{u}_i\in\ker(\mathcal{A}-\lambda^{-1}\mathcal{E})^i \tag{4.2}$$

对 i归纳可得。特别地，我们看到

$$\overline{U_{p^n}}s:\ker(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^m\to\ker(\mathcal{A}-\lambda^{-1}\mathcal{E})^m \tag{4.3}$$

根据（4.2），这是一个线性算子。

令 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}2$、 $\cdots$、$\mathbf{v}_m$为对应于块 $J_m(\kappa)$ 的约当基，其中 $(\mathcal{A}-\kappa\mathcal{E})\mathbf{v}_{i+1}=\mathbf{v}_i$。我们有 $\mathbf{v}_1=U_{p^n}sU_{p^n}^*\mathbf{1}_\theta$。令 $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}2$、 $\cdots$、$\mathbf{w}_m$为对应于块 $J_m(\kappa^{-1})$ 的约当基，其中 $(\mathcal{A}-\kappa^{-1}\mathcal{E})\mathbf{w}_{i+1}=\mathbf{w}_i$ 且 $\mathbf{w}_1=U_{p^n}s\sum_{x\in\mathbb{F}_{p^n}^*}\theta(x)\varepsilon(x)\mathbf{1}_\theta$。令 $\mathbf{v}_i'=U_{p^n}s\mathbf{v}_i$ 且 $\mathbf{w}_i'=U_{p^n}s\mathbf{w}_i$。

记 $\mathbf{x}=U_{p^n}\mathbf{1}_\theta$ 和 $\mathbf{y}=U_{p^n}s\mathbf{1}_\theta$。因此，对于任意 $k=1,2,\cdots,m$，我们看到，$\mathbf{v}_k'$ 是 $\mathbf{x},\mathbf{w}_1,\mathbf{w}2,\cdots,\mathbf{w}_k$ 的线性组合，而 $\mathbf{w}_k'$ 是$\mathbf{y},\mathbf{v}_1,\mathbf{v}2,\cdots,\mathbf{v}_k$的线性组合。

取约当块 $J_m(\kappa)\dot{+}J_m(\kappa^{-1})$中 ζ 的直和项，我们得到一个元素

$$\zeta'=a_1\mathbf{v}_1+\cdots+a_k\mathbf{v}_k+b_1\mathbf{w}_1+\cdots+b_l\mathbf{w}_l\in\Bbbk\mathbf{G}\zeta,$$

其中 $a_k\neq0$ 和 $b_l\neq0$。因此我们看到 $\mathbf{v}_k$，$\mathbf{w}_l\in\Bbbk\mathbf{G}\zeta$。取$U_{p^n}s\zeta$ 在约当块 $J_1(\kappa^{-1})\dot{+}J_1(\kappa)\dot{+}J_m(\kappa^{-1})\dot{+}J_m(\kappa)$ 中的直和项。

利用 (4.1) 和 (4.3)，我们得到一个元素

$$\zeta'' = \theta(-1)C\overline{U_{p^n}}\mathbf{1}_\theta + D\overline{U_{p^n}}s\mathbf{1}_\theta + \sum_{i=1}^{k} a_i'\mathbf{w}_i + \sum_{j=1}^{l} b_j'\mathbf{v}_j \in \Bbbk\mathbf{G}\zeta.$$

因此我们有

$$\theta(-1)C\overline{U_{p^n}}\mathbf{1}_\theta + \sum_{i=1}^{k} a_i'\mathbf{w}_i \in \Bbbk\mathbf{G}\zeta, \quad D\overline{U_{p^n}}s\mathbf{1}_\theta + \sum_{j=1}^{l} b_j'\mathbf{v}_j \in \Bbbk\mathbf{G}\zeta.$$

若 $k \geq l$，由于 $\mathbf{v}_k \in \Bbbk\mathbf{G}\zeta$，可得 $\overline{U_{p^n}}s\mathbf{1}_\theta \in \Bbbk\mathbf{G}\zeta$。若 $k \leq l$，利用 $\mathbf{w}_{\overline{l}} \in \Bbbk\mathbf{G}\zeta$，可知$U_{p^n}\mathbf{1}_\theta \in \Bbbk\mathbf{G}\zeta$ 。两种情况下，根据 [3,引理 3.6] ，都有 $\mathbf{1}_\theta \in \Bbbk\mathbf{G}\zeta$ ，因此 $\Bbbk\mathbf{G}\zeta = \mathrm{Ind}_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}} \Bbbk_\theta$。引理得证。 □

设 ξ为满足 $\xi \notin$ 核 φ_e 且 $\xi \notin$ 核φ_s的一个元素。我们将证明 $\Bbbk\mathbf{G}\xi = \mathrm{Ind}_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}} \Bbbk_\theta$。因此，$\mathrm{Ind}_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}} \Bbbk_\theta$ 除了 $\mathbb{M}(\theta)$ 和 $\mathbb{M}(\theta^s)$之外，没有其他简单商模。记作

$$\xi = \sum_{z\in\bar{\mathbb{F}}_p} a_z\varepsilon(z)\mathbf{1}_\theta + \sum_{x,y\in\bar{\mathbb{F}}_p} b_{x,y}\varepsilon(x)s\varepsilon(y)\mathbf{1}_\theta.$$

[¯]容易看出，存在一个元素 $u \in \mathbb{F}_p$ ，使得 $s\varepsilon(u)\xi$ 具有如下形式

$$\eta = s\varepsilon(u)\xi = \sum_{x\in\bar{\mathbb{F}}_p, y\in\bar{\mathbb{F}}_p^*} f_{x,y}\varepsilon(x)s\varepsilon(y)\mathbf{1}_\theta \in M.$$

由于 $\xi \notin$ 核φ_e 且 $\xi \notin$ 核φ_s，我们也有 $\eta \notin$ 核 φ_e 且 $\eta \notin$ 核 φ_s。记 $f_x = \sum_{y\in\bar{\mathbb{F}}_p^*} f_{x,\ y}$。利用 $\eta \notin$ 核φ_e，可知 $f_x \neq 0$ 对某个 x成立。

注意到

$$\varphi_s(\eta) = \sum_{x\in\bar{\mathbb{F}}_p, y\in\bar{\mathbb{F}}_p^*} f_{x,y}\theta^s(-y)\varepsilon(x-y^{-1})s\widehat{\mathbf{1}}_{\theta^s}, \tag{4.4}$$

通过一些简单计算。对于任意 $z \in \bar{\mathbb{F}}_p$，令 $\Xi_z = \{(x,\ y) \mid x - y^{-1} = z\}$.由于 $\eta \notin$ 核φ_s 并利用（4.4），我们得到

$$\sum_{(x,y)\in\Xi_z} f_{x,y}\theta^s(-y) \neq 0 \tag{4.5}$$

[¯]对于某个 $z \in \mathbb{F}_p$。

设 $v \in \mathbb{F}_p^*$ 满足：当 $f_{x,y} \neq 0$ 时， $v+x \neq 0$，并考虑

(4.6)
$$s\varepsilon(v)\eta = \sum_{x,y\in\bar{\mathbb{F}}_p} f_{x,y}\theta(-(v+x))\varepsilon(-(v+x)^{-1})s\varepsilon((v+x)^2y-(v+x))\mathbf{1}_\theta.$$

存在一个整数 l，使得对于任意 $v \in \mathbb{F}_p \setminus \mathbb{F}_{p^l}$，元素 $(v+x)^2y-(v+x)$ 均非零且彼此不同。根据引理 3.1，我们可以选取某个元素 $v_1 \in \mathbb{F}_{p^n} \setminus \mathbb{F}_{p^l}$，使得

$$f := \sum_{x\in\bar{\mathbb{F}}_p} f_x\theta(h(-(v_1+x))) \neq 0.$$

因此我们得到

$$\overline{U_{p^n}}s\varepsilon(v_1)\eta = \sum_{z\in\mathbb{F}_{p^n}^*} a_z\overline{U_{p^n}}s\varepsilon(z)\mathbf{1}_\theta, \quad \text{where } \sum_{z\in\mathbb{F}_{p^n}^*} a_z = f \neq 0. \tag{4.7}$$

在 $s\varepsilon(v)\eta$ 的表达式 (4.6) 中，我们考虑

$$\sum_{x,y\in\bar{\mathbb{F}}_p} f_{x,y}\theta(-(v+x))\theta^s(-((v+x)^2y-(v+x))) = \sum_{x,y\in\bar{\mathbb{F}}_p} f_{x,y}\theta^s((v+x)y-1).$$

利用 (4.5)，令 $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r \in \bar{\mathbb{F}}_p$ 使得 $f_i := \sum_{(x,\ y)\in\Xi_{\sigma_i}} f_{x,\ y}\theta^s(-y) \neq 0$。

所以我们有

$$\sum_{x,y\in\bar{\mathbb{F}}_p} f_{x,y}\theta^s((v+x)y-1) = \sum_{i=1}^{r} f_i\theta^s(-v-\sigma_i).$$

根据引理 3.1，我们可以选取某个元素 $v_2 \in \mathbb{F}_{p^n} \setminus \mathbb{F}_{p^l}$ 使得 $f := \sum_{i=1}^{r} f_i\theta^s(-v_2-\sigma_i) \neq 0$。因此我们有

$$\overline{U_{p^n}}s\varepsilon(v_2)\eta = \sum_{z\in\mathbb{F}_{p^n}} b_z\overline{U_{p^n}}s\varepsilon(z)\mathbf{1}_\theta, \quad where \sum_{z\in\mathbb{F}_{p^n}^*} b_z\theta^s(-z) = \widetilde{f} \neq 0. \tag{4.8}$$

利用 (4.7) 和 (4.8)，存在一个元素 $\zeta = \sum_{z\in\mathbb{F}_{p^n}^*} c_z U_{p^n} s\varepsilon(z)\mathbf{1}_\theta$ 使得 $\sum_{z\in\mathbb{F}_{p^n}^*} c_z \neq 0$ 并且 $\sum_{z\in\mathbb{F}_{p^n}^*} c_z\theta^s(-z) \neq 0$。由引理 4.1 可知，$\Bbbk\mathbf{G}\xi = \Bbbk\mathbf{G}\zeta = \mathrm{Ind}_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}\Bbbk_\theta$。因此，诱导模 $\mathrm{Ind}_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}\Bbbk_\theta$ 只有两个简单商模 $\mathbb{M}(\theta)$ 和 $\mathbb{M}(\theta^s)$。

5. Supplementary result

设 G 是一个群， $\mathbb{F}$ 是一个域。若存在不全为零的 a_1， a_2， $\cdots$， $a_n \in \mathbb{F}$，使得

$$a_1\sigma_1(x) + a_2\sigma_2(x) + \cdots + a_n\sigma_n(x) = 0, \quad \forall x \in G.$$

如果这些特征标不线性相关，则称它们线性无关。以下关于特征标线性无关性的定理是众所周知的。

定理 5.1. [1, 定理 12] 若 G 是一个群，且 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的 G 的两两不同特征标，则 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 线性无关。

与这一结果的陈述类似，我们证明有限域上非平凡乘法特征的平移线性无关。与引言中一样， $\Bbbk$ 是一个特征为 $\Bbbk = r$ 的代数闭域。对于一个非平凡乘法特征 $\psi\colon \mathbb{F}_{p^m}^* \to \Bbbk^*$，我们令$\psi(0) = 0$。

定理 5.2. 假设 $r \neq p$。令 $\psi\colon \mathbb{F}_{p^m}^* \to \Bbbk^*$ 为一个非平凡乘法特征。给定不同的元素 $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbb{F}_{p^m}^*$，令$f_i\colon \mathbb{F}_{p^m} \to \Bbbk$ 为由 $f_i(x) = \psi(x + u_i)$ 定义的映射，对任意 $x \in \mathbb{F}_{p^m}$均如此。则$f_1, f_2, \cdots, f_n$ 线性无关。

证明。 由于 ψ 是 $\mathbb{F}_{p^m}$的非平凡乘法特征，根据引理 3.2，我们得知$\sum_{z\in\mathbb{F}_{p^m}} \psi(z) = 0$ 。因此，对于任意 $u \in \mathbb{F}_{p^m}^*$，有

$$\sum_{x\in\mathbb{F}_{p^m}^*} \psi(x+u)\psi(x^{-1}) = \sum_{x\in\mathbb{F}_{p^m}^*} \psi(1+ux^{-1}) = -1.$$

$_n$现在我们考虑方程 $\sum a_i f_i = 0$，其中 $a_i \in \Bbbk$。我们有$_{i=1}$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{x\in\mathbb{F}_{p^m}^*} a_i f_i(x)\psi(x^{-1}) = -\sum_{i=1}^{n} a_i = 0.$$

另一方面，对于任意固定的整数 $k = 1,2,\cdots,n$，我们看到

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{x\in\mathbb{F}_{p^m}\setminus\{-u_k\}} a_i f_i(x)\psi((x+u_k)^{-1}) = (p^m-1)a_k - \sum_{i\neq k} a_i = p^m a_k.$$

注意到 char $\Bbbk \neq p$，对于任意 $k = 1$，2，$\cdots$，n，我们得到 $a_k = 0$。因此 f_1，f_2，$\cdots$，f_n 线性无关。□

推论 5.3。假设 $r \neq p$。令 ψ：$\mathbb{F}_p^* \to \Bbbk^*$ 为一个非平凡的乘法特征。给定不同的元素 u_1、u_2、.....、$u_n \in \mathbb{F}_p^*$，令 f_i：$\mathbb{F}_p \to \Bbbk$ 为由 $f_i(x) = \psi(x+u_i)$ 定义的映射，对任意 $x \in \mathbb{F}_p$ 均如此。则f_1、f_2、$\cdots$、f_n 线性无关。

证明。存在 $m \in \mathbb{N}$，使得 u_1，u_2，$\cdots$，$u_n \in \mathbb{F}_{p^m}^*$ 且 $\psi|\mathbb{F}_{p^m}^*$ 非平凡。利用定理 5.2，即可证明该推论。□

注 5.4. 若 $\Bbbk = \mathbb{F}_p$，定理 5.2 和推论 5.3不成立。事实上，设 q是 p的一个幂，且 $u_1, u_2, \ldots, u_q \in \mathbb{F}_p^*$两两不同，并满足 $\sum u_i^q = 0$. 设 ψ：$\bar{\mathbb{F}}_p^* \to \bar{\mathbb{F}}_p^*$ 为如下给出的特征：$\psi(x) = x^q$ 对任意 $x \in \mathbb{F}_p^*$成立。则对任意 $x \in \mathbb{F}_p^*$，有

$$\sum_{i=1}^{q} f_i(x) = \sum_{i=1}^{q}(x+u_i)^q = \sum_{i=1}^{q}(x^q + u_i^q) = 0.$$

因此，$f_1, f_2, \cdots, f_n$ 线性相关。

致谢作者感谢 Nanhua Xi 在整个研究过程中始终给予的鼓励。

声明作者声明，他与他人不存在利益冲突。

数据可用性 由于本研究期间未生成或分析任何数据集，因此本文不适用数据共享。

References

1. E. Artin, *Galois Theory*，第二版，《圣母大学数学讲座》，第2卷，圣母大学，圣母大学，1944年。

2. A. Borel 和 J. Tits, *Homomorphismes "abstraits" de groupes algebriques simples*, 《数学年刊》（第2辑）97（1973），99–571。 3. X. Chen，J. Dong, *Abstract-induced modules for reductive algebraic groups with Frobe-nius maps*, 《国际数学研究通知》2022年第5期，3308–3348。 4. J. Dong, *Certain complex representations of* SL_2（$\mathbb{F}_q$），《代数学杂志》612（2022），504–525。 5. J. Dong, *Some conjectures on the quotients of the tensor products in the category* $\mathscr{X}$, arXiv:2508.00488，已被《李理论杂志》接受。 6. J. H. Evertse、H.P. Schlickewei 和 W.M. Schmidt, *Linear equations in variables whichlie in a multiplicative group*, 《数学年刊》（第2辑）155（2002），第3期，807–836。 7. V. Mazorchuk, *Lectures on* $\mathfrak{sl}_2$（$\mathbb{C}$）*-modules*，帝国理工学院出版社，伦敦，2010年。 8. N. Xi, *Some infinite dimensional representations of reductive groups with Frobeniusmaps*, 《中国科学：数学》57（2014），1109–1120。

Institute of Mathematical Sciences, ShanghaiTech University, 393 MiddleHuaxia Road, Pudong, Shanghai 201210, China.*Email address*: dongjunbin@shanghaitech.edu.cn