arXiv:2603.13916v1 [math.RA] 14 Mar 2026

交换幺半群簇中的隐式运算

LUCA CARAI、MIRIAM KURTZHALS 和 TOMMASO MORASCHINI

Abstract. 同类型代数类 K 的隐式运算 是定义在 K 的成员上的一族一阶可定义偏函数，并且在同态作用下整体保持不变。例如，“取逆”可以看作所有幺半群构成的类上的一元隐式运算，因为在给定幺半群中，其图由方程 $xy \approx 1 \approx yx$定义，而幺半群同态会保持已有的逆元。正如这个例子所表明的，类 K 的隐式运算不一定由 K 中的项给出。我们证明，一个交换幺半群等式类可以扩充为含有足够多隐式运算的类，使得每个隐式运算都能由项族插值，当且仅当该类的每个成员中，对每个 a，都存在某个 b，使得 $a = a^2b$；也就是说，该类由逆幺半群组成。我们的方法以隐式运算理论与 Grillet 对有限生成次直不可分交换半群的描述之间的相互作用为基础，并运用将 Isbell 之字定理推广到所有交换幺半群等式类后所产生的组合学。

1. Introduction

隐式运算。代数语言是由函数符号组成的族 $\mathscr{L}$，以及映射 ar: $\mathscr{L} \to \mathbb{N}$ 构成的；该映射为 $\mathscr{L}$中的每个元素指定一个元数。于是，$\mathscr{L}$-代数是一种结构 $\boldsymbol{A} = \langle A; \{f^{\boldsymbol{A}} \colon f \in \mathscr{L}\}\rangle$，其中 A是一个非空集合，并且对于每个 $f \in \mathscr{L}$，$f^{\boldsymbol{A}}$都是定义在 A上的一个元数为 ar(f) 的函数（例如，参见 [Ber11，第 1 章1] 和 [CK90，第 1 章3]）。在这种情况下，我们通常称 $\mathscr{L}$ 为代数 $\boldsymbol{A}$的语言。熟悉的代数例子包括幺半群、群、环和布尔代数。若两个代数具有相同的语言，则称它们相似。

同类型代数类 K 的隐式运算，是定义在 K 的各个成员上的一族偏函数，它在整体上被同态保持，并且可由公式定义（参见[CKM25b，第 3] 节）。更准确地说，K 的一个 n 元运算是一个序列 $f = \langle f^{\boldsymbol{A}} \colon \boldsymbol{A} \in \mathrm{K}\rangle$，其中每个 $f^{\boldsymbol{A}}\colon \mathsf{dom}(f^{\boldsymbol{A}}) \to A$都是定义在 A上的偏 n元函数，其定义域为 $\mathsf{dom}(f^{\boldsymbol{A}}) \subseteq A^n$，并且在整体上被 K 的成员之间的同态保持。后者意味着，对于每个同态 $h\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$，满足 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathrm{K}$ 且 $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in \mathsf{dom}(f^{\boldsymbol{A}})$，我们有

$$\langle h(a_1), \ldots, h(a_n)\rangle \in \mathsf{dom}(f^{\boldsymbol{B}}) \quad \text{and} \quad h(f^{\boldsymbol{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\boldsymbol{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)).$$

2020 数学学科分类。20M14, 20M07, 18A20, 20M18, 03C05。关键词和短语。交换幺半群、簇、满态射、单态射、Beth伴随、隐式运算、逆幺半群、之字形定理、支配域。1

当 K 的一个 n元运算 f 由某个一阶公式$\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$定义时，我们称它为隐式的；也就是说，对所有 $\boldsymbol{A} \in \mathsf{K}$ 及 $a_1, \ldots, a_n, b \in A$,

$$\boldsymbol{A} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n, b) \iff \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathsf{dom}(f^{\boldsymbol{A}}) \text{ and } f^{\boldsymbol{A}}(a_1, \ldots, a_n) = b.$$

例如，“取逆”是所有幺半群组成的类的一个隐式运算，因为它可以由方程合取 $\varphi(x, y) = (xy \approx 1) \sqcap (yx \approx 1)$ 定义；而幺半群同态会在逆元存在时保留它们。

插值与满态射。同类型代数类 K 的项是通过对变量集应用 K 的函数符号而得到的形式表达式。例如，$(1 \cdot (x \cdot y)) \cdot z$是一个幺半群项。对于 K 的每个项 $t(x_1, \ldots, x_n)$ 以及 $\boldsymbol{A} \in \mathsf{K}$，我们关联一个映射 $t^{\boldsymbol{A}}\colon A^n \to A$，它将一个元组 $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in A^n$ 映射为对元素 $a_1, \ldots, a_n$ 应用 t 的结果。例如，若 $t(x, y, z) = (1 \cdot (x \cdot y)) \cdot z$ 且 $\boldsymbol{A}$ 是一个幺半群，那么 $t^{\boldsymbol{A}}\colon A^3 \to A$ 就是由 $t^{\boldsymbol{A}}(a, b, c) = (1 \cdot (a \cdot b)) \cdot c = abc$ 定义的映射，对所有 $a, b, c \in A$均成立。

由于同类型代数类 K 的隐式运算不必属于 K 的语言，因此很自然会想知道它们是否至少可以由 K 的项插值。为此，若对于每个 $\boldsymbol{A} \in \mathsf{K}$ 和 $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathsf{dom}(f^{\boldsymbol{A}})$，都存在 $i \in I$使得 $f^{\boldsymbol{A}}(a_1, \ldots, a_n) = t_i^{\boldsymbol{A}}(a_1, \ldots, a_n)$，我们就称 K 的一个 n 元隐式运算 f 由项族 $\{t_i\colon i \in I\}$ 插值。直观地说，隐式运算 f由项族 $\{t_i\colon i \in I\}$变得“显式”。如果 K 的每个隐式运算都可由 K 的某个项族插值，我们就说 K 具有强Beth可定义性（参见 [CKM25b，第 5] 节）。

我们回顾一下：若一个同类型代数类能够由方程公理化，或者等价地，若它在同态像、子代数和直积下封闭（参见例如 [BS12，定理 II.11.9]），则称其为一个簇。值得注意的是，在簇的语境中，强Beth可定义性等价于以下纯范畴性质（参见 [CKM25b，定理 6.5]）。若对所有满足 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathsf{K}$ 和 $b \in B - f[A]$ 的同态 $f\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$，都存在一对满足 $\boldsymbol{C} \in \mathsf{K}$ 的同态 $g, h\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$，使得 $g{\restriction_{f[A]}} = h{\restriction_{f[A]}}$ 且 $g(b) \neq h(b)$（参见例如 [Mak99，第 176] 页，或 [KMPT82]）[1]，则称簇 K 具有强满态射满射性；等价地，K 中所有单态射都是正则的（参见例如 [KMPT82，命题 6.1]）。例如，在所有幺半群（分别为所有交换幺半群）构成的簇中，包含映射 $\langle \mathbb{Z}; \cdot, 1 \rangle$ into $\langle \mathbb{Q}; \cdot, 1 \rangle$ 表明强Beth可定义性不成立，因为它说明隐式运算“取逆”无法由任何一族幺半群项插值表示（否则 $\mathbb{Z}$ 将是$\langle \mathbb{Q}; \cdot, 1 \rangle$ 的生成集，但事实并非如此）；同时，它也表明该簇中的强满态射性质不成立，因为幺半群同态保持逆元。

主要结果。 如上面的例子所示，代数类 K 的隐式运算一般不一定能由 K 中的项插值。因此，自然的做法是通过添加足够多的隐式运算来扩充 K，从而确保强Beth可定义性的成立。这样的 K 的扩充结果被称为 K 的*Beth* 伴随

[1]在 [KMPT82], 中，强满态射满射性称为 IPA，其定义方式有所不同，但等价。

[CKM25b，第 11]节。例如，阿贝尔群簇是消去交换幺半群类的 Beth 伴随（见 [CKM25b，定理 11.9(i)]），而约化交换环类的 Beth 伴随可以通过添加“取弱逆元和弱素数根”的隐式运算得到（见 [CKM26]）。一般而言，一个代数类可能有不同的 Beth 伴随，也可能没有 Beth 伴随；对于所有幺半群类（分别为交换幺半群类）而言，后一种情况成立（见 [CKM25b，定理 14.1]）。不过，在簇的语境下，只要 Beth 伴随存在，它们在本质上就是唯一的，因为一个簇的所有 Beth 伴随都是项等价的（见 [CKM25b，定理 11.7]）。

我们的主要结果是刻画具有 Beth 伴随的交换幺半群簇。我们回顾一下，交换幺半群 $\langle A;\ \cdot,\ 1\rangle$ 称为逆的，如果对每个$a \in A$ 都存在 $b \in A$ 使得 $a = a^2b$ （例如，参见 [Isb66，第 242] 页，以及 [Rap75，引理 4]）。我们还称一个交换幺半群簇为逆的，如果其中的成员都是逆的；等价地说，如果它满足方程 $x^{n+1} \approx x$ ，其中 $n > 0$ （参见定理2.11）。我们将证明，一个交换幺半群簇具有 Beth 伴随，当且仅当它是逆的；在这种情况下，它就是自身的 Beth 伴随（参见定理6.1）。换言之，一个交换幺半群簇要么已经具有强 Beth 可定义性（此时它是逆的），要么就不可能通过扩充某些隐式运算来确保这一性质成立。一个簇恰好在具有强满态射满射性时才是自身的 Beth 伴随（参见 [CKM25b，定理 11.9(vi) 和 11.6]），由此我们推得，具有这一性质的交换幺半群簇恰好就是逆的交换幺半群簇。

我们回顾一下，所有交换幺半群构成的簇不具有强Beth可定义性，因为一般而言，隐式运算“取逆”无法通过一族幺半群项插值。另一方面，在每个逆簇 K 中，逆元可以通过如下形式的项 x^{n-1}进行插值，因为 K 满足方程 $x^{n+1} \approx x$ ，其中$n > 0$ 。因此，人们很容易猜想，正是这个原因，使得只有逆簇才是具有Beth伴随的交换幺半群簇。然而，这种看法应予以摒弃，因为每个真交换幺半群簇 K 都具有一个隐式运算 f，它能够插值隐式运算“取逆”，而且还是可扩展的，也就是说，每个 $\boldsymbol{A} \in \mathsf{K}$ 都可以扩展为某个 $\boldsymbol{B} \in \mathsf{K}$ ，在其中 $f^{\boldsymbol{B}}$ 是全定义的，且扩展了 $f^{\boldsymbol{A}}$ （见例5.3）。后一点使得我们可以通过添加K 来扩展f，从而解决对已有逆元进行插值的问题。然而，正如我们的定理所示，这并不足以保证强Beth可定义性的成立，除非K 一开始就是逆簇（在这种情况下，根本无需对其进行扩展）。

Isbell 之字定理。 为了说明是什么阻碍了非逆变种交换幺半群的 Beth 伴随的存在，我们借助支配域这一概念。更确切地说，给定簇 K 中一个成员 $\boldsymbol{B}$ 的子代数 $\boldsymbol{A}$ （记作 $\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{B} \in \mathsf{K}$），$\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 中相对于 K 的支配域 是集合

$$\mathsf{d}_{\mathsf{K}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \{b \in B : g(b) = h(b) \text{ for every pair of homomorphisms } g, h\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C} \text{ with } \boldsymbol{C} \in \mathsf{K} \text{ such that } g{\restriction}_A = h{\restriction}_A\}.$$

由于 K 对子代数封闭，当且仅当对于每个 $\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{B} \in \mathsf{K}$，K 具有强满态射满射性 $\mathrm{d}_{\mathsf{K}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = A$。

一项著名结果称为 *Isbell* 之字定理（此处为定理 3.1），它用某些公式描述了所有幺半群以及所有（或交换）半群的簇中的支配域；我们将这些公式称为 *Isbell* 公式（参见 [Isb66，定理 2。3], [HI67，定理 1。1], 以及 [How96，定理 1。2]）。借助初等范畴论工具以及 Head 对交换幺半群簇的分类（例如参见 [GLV22，定理 5。1]），我们证明 Isbell 之字定理可推广到所有这类簇（见定理 3.2）。就本文目的而言，Isbell 之字定理的重要性源于这样一个观察：最简单的 Isbell 公式

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, y) = \exists w, z((y \approx wx_2z) \sqcap (wx_2 \approx x_1) \sqcap (x_2z \approx x_3))$$

在每个真簇上定义一个隐式运算K 的交换幺半群；除非K 是逆簇，否则定理6.1的证明表明，K无法扩充到使该隐式运算可由一族项插值得到。此不可能性证明依赖于 Grillet 对有限生成次直不可分交换半群的刻画（见[Gri01，推论 IV.4。6]），并且需要充分运用 Isbell 针对K的之字定理。

2. Commutative monoids

2.1. 基本概念。 给定集合 A 上的一个二元运算 $\cdot$ 以及 $a, b \in A$，我们将 ab记作 $a \cdot b$的简写。此外，回顾以下定义：

(i) 半群是一个代数 $\langle A; \cdot \rangle$，其中 $\cdot$ 是 A上的一个结合二元运算；**(ii)** 半群 $\langle A; \cdot \rangle$ 中的元素 a 在对每个 $b \in A$都有 $ab = b = ba$ 时称为中性的；**(iii)** 幺半群是一个代数 $\langle A; \cdot, 1 \rangle$，其中 $\langle A; \cdot \rangle$ 是一个中性元为 1 的半群。

半群至多有一个中性元。当运算 $\cdot$ 满足交换律时，称幺半群或半群为交换的 。幺半群 $\boldsymbol{A} = \langle A; \cdot, 1 \rangle$ 的半群约化 是半群 $\boldsymbol{A}_{\mathsf{s}} = \langle A; \cdot \rangle$。

称交换半群 $\boldsymbol{A}$ 中的元素 a 为

(i) 当 $ab = a$ 对每个 $b \in A$都成立时，称其为零元；**(ii)** 对某个 $n \in \mathbb{N}$，若 a^n 是零元，则称其为 n-幂零；**(iii)** 若对某个 $n \in \mathbb{N}$，它是 n-幂零，则称其为幂零；**(iv)** 当 $ab = ac$ 蕴含对所有 $b, c \in A$都有 $b = c$ 时，称其为可消；**(v)** 若某个 $b \in A$ 满足 ab 为中性元，则称其为其逆，此时记作 $a^{-1} = b$；**(vi)** 若它有逆，则称其为可逆 。

当一个交换半群或幺半群的所有元素都具有幂零性（分别为可消性）时，称该交换半群或幺半群 $\boldsymbol{A}$ 为幂零（分别为可消）。

以下结论可由定义直接推出。

命题 2.1. 对于所有交换半群 $\boldsymbol{A}$ 和$a \in A$，以下条件均成立：

(i) $\boldsymbol{A}$ 至多有一个零元；(ii) a 至多有一个逆；

(iii) 如果 a 可逆，那么它是可消的。

2.2. **簇**。设 $\mathbb{I}$，$\mathbb{H}$，$\mathbb{S}$，$\mathbb{P}$和 $\mathbb{P}_u$ 分别为在同构、同态像、子代数、直积和超积下闭合的类算子。那么，当一个同类型代数类在簇下对 $\mathbb{H}$，$\mathbb{S}$和 $\mathbb{P}$ 封闭时，称其为簇；等价地说，当它可以由一组方程公理化时（例如参见 [BS12，定理 II.11。9] 此结果归功于 Birkhoff）。对于每个同类型代数类K ，都存在包含K的最小簇，记作 $\mathbb{V}(\mathsf{K})$。

对于每个 m，$n \in \mathbb{N}$，我们考虑以下代数类：

S =半群簇；CS =交换半群簇；M =幺半群簇；CM = 交换幺半群簇；A_n =满足 $x^n \approx 1$的交换幺半群簇；C_n =满足 $x^n \approx x^{n+1}$的交换幺半群簇；$\mathsf{V}_{m,\,n}$ =满足 $x^{m+n} \approx x^n$.的交换幺半群簇

注记 2.2. 对于每个 $n > 0$ ，A_n 的成员都可以视为群，因为对所有$\boldsymbol{A} \in \mathsf{A}_n$ 和 $a \in A$ ，都有 $a^{-1} = a^{n-1}$。⊠

命题 2.3。对于每个 m，$n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathsf{A}_0 &= \mathsf{CM}; \\ \mathsf{A}_1 = \mathsf{C}_0 &= \textit{the variety of trivial monoids}; \\ \mathsf{V}_{m,n} &= \mathbb{V}(\mathsf{A}_m \cup \mathsf{C}_n). \end{aligned}$$

此外，$\mathsf{V}_{m,\,n}$ 是<cm>交换幺半群</cm>的真子簇，当且仅当 $m > 0$。

证明。前两个等式是定义的直接推论。最后一个等式证明如下。当 $m = 0$时，利用$\mathsf{V}_{0,n}$ 的定义以及上面展示中的第一个等式，我们得到$\mathsf{V}_{0,n} = \mathsf{CM} = \mathbb{V}(\mathsf{A}_0 \cup \mathsf{C}_n)$。因此，我们可以假设 $m > 0$。由[GLV22，定理5.1] 可知，对于某些 $s, t \in \mathbb{N}$，有$\mathsf{V}_{m,n} = \mathbb{V}(\mathsf{A}_s \cup \mathsf{C}_t)$。为导出矛盾，假设 s 不能整除 m，并令 $\boldsymbol{A}$ 为阶为 s的循环群的幺半群约化。于是 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{V}(\mathsf{A}_s \cup \mathsf{C}_t) - \mathsf{V}_{m,n}$，这与$\mathsf{V}_{m,n} = \mathbb{V}(\mathsf{A}_s \cup \mathsf{C}_t)$矛盾。因此，$s$ 整除 m。再次假设 $n < t$以导出矛盾。考虑幺半群 $\boldsymbol{B} = \langle \mathbb{N};\ +, 0\rangle/\theta$，其中 θ 是由 $\langle a, b\rangle \in \theta$ 定义的同余关系，当且仅当 $a = b$ 或 $t \leqslant a, b$。于是 $\boldsymbol{B} \in \mathbb{V}(\mathsf{A}_s \cup \mathsf{C}_t) - \mathsf{V}_{m,n}$，这与$\mathsf{V}_{m,n} = \mathbb{V}(\mathsf{A}_s \cup \mathsf{C}_t)$矛盾。因此，$s$ 整除 m 和 $t \leqslant n$。根据所涉及的簇的定义可知，$\mathsf{V}_{m,n} = \mathbb{V}(\mathsf{A}_s \cup \mathsf{C}_t) \subseteq \mathbb{V}(\mathsf{A}_m \cup \mathsf{C}_n)$。由于显然有 $\mathbb{V}(\mathsf{A}_m \cup \mathsf{C}_n) \subseteq \mathsf{V}_{m,n}$，我们得出$\mathsf{V}_{m,n} = \mathbb{V}(\mathsf{A}_m \cup \mathsf{C}_n)$。

现在只需证明该陈述的最后一部分。注意，$\mathsf{V}_{m,\,n}$ 由 $x^{m+n} \approx x^n$ 公理化，而该公理在 $\langle \mathbb{N}$ 中不成立；$+$，$0\rangle$ 当 $m > 0$ 时。因此，$\mathsf{V}_{m,\,n}$ 是本真的，当且仅当 $m > 0$。

⊠

交换幺半群簇具有 Head 给出的清晰分类。更确切地说，交换幺半群 的每个子簇都具有如下形式： $\mathbb{V}(\mathsf{A}_m \cup \mathsf{C}_n)$（参见，例如， [GLV22，定理 5。1]）。结合命题 2.3，可得如下结论。

定理 2.4。 交换幺半群的一个类 K 是一个簇，当且仅当 $\mathsf{K} = \mathbb{V}_{m,n}$ 对于某些 m、$n \in \mathbb{N}$ 成立。

2.3. **次直不可约性**。 按包含关系排序时，代数 $\boldsymbol{A}$ 的同余关系集合构成一个代数格，记作 $\mathsf{Con}(\boldsymbol{A})$，其最小元是恒等关系$\mathrm{id}_A$，定义在 A 上（例如参见 [BS12，定理 II.5。5]）。当 id_A 在$\mathsf{Con}(\boldsymbol{A})$ 中是完全交不可约时，我们称 $\boldsymbol{A}$为 次直不可约。给定一个代数类K，我们令

$$\mathsf{K}_{\mathrm{SI}} = \{\boldsymbol{A} \in \mathsf{K} : \boldsymbol{A} \text{ is subdirectly irreducible}\}.$$

次直不可约代数的重要性源自 Birkhoff 的次直分解定理，该定理蕴含对于每个簇 $\mathsf{K} = \mathbb{ISP}(\mathsf{K}_{\mathrm{SI}})$，（例如参见 [BS12，定理 II.8。6]）。

给定代数 $\boldsymbol{A}$ 和 $X \subseteq A$，我们用 $\mathrm{Sg}^{\boldsymbol{A}}(X)$ 表示由 X生成的 $\boldsymbol{A}$ 的子宇宙。当 $A = \mathrm{Sg}^{\boldsymbol{A}}(X)$ 对某个有限的 $X \subseteq A$成立时，我们称 $\boldsymbol{A}$ 为有限生成。最后，全称公式是形如 $\forall x_1, \ldots, x_n \varphi$ 的表达式，其中 φ 是一个无量词公式。

命题 2.5。设K 是一个簇，并且

$$\mathsf{K}^* = \{\boldsymbol{A} \in \mathsf{K}_{\mathrm{SI}} : \boldsymbol{A} \textit{ is finitely generated}\}.$$

在K^* 中成立的每个全称公式，在K_{SI}中也成立。

证明。由 [CKM25b，命题 2.16] 可知 $\mathsf{K} = \mathbb{ISPP}_{\mathrm{u}}(\mathsf{K}^*)$，而由 [CD90，引理 1.5]可得 $(\mathbb{ISPP}_{\mathrm{u}}(\mathsf{K}^*))_{\mathrm{SI}} \subseteq \mathbb{ISP}_{\mathrm{u}}(\mathsf{K}^*)$。因此，$\mathsf{K}_{\mathrm{SI}} \subseteq \mathbb{ISP}_{\mathrm{u}}(\mathsf{K}^*)$。由于全称公式的有效性在 $\mathbb{I}$、$\mathbb{S}$和 $\mathbb{P}_{\mathrm{u}}$ 下保持不变（例如参见 [BS12，定理 V.2.20]），故证毕。⊠

回顾定理 2.4 可知，每个交换幺半群簇都具有如下形式：$\mathsf{V}_{m,\,n}$其中 m，$n \in \mathbb{N}$。此外，对于每个 $\mathsf{V}_{0,\,n} = \mathsf{CM}$（由命题 2.3可知）。因此，下一个结果适用于CM的所有真子簇，也就是具有如下形式的簇：$\mathsf{V}_{m,\,n}$ 其中 $m > 0$（见命题 2.3）。

定理 2.6。 设 $\boldsymbol{A} \in \mathsf{V}_{m,\,n}$ 对某些 $m, n \in \mathbb{N}$ 且满足 $m > 0$ 时为次直不可约。那么每个 $a \in A$ 要么是 n-幂零的，要么是可逆的，且满足 $a^{-1} = a^{m-1}$。

为了证明定理 2.6，我们需要关于 $\mathsf{CM}_{\mathrm{SI}}$ 的有限生成成员的以下事实。

定理 2.7。 设 $\boldsymbol{A} \in \mathsf{CM}_{\mathrm{SI}}$ 为有限生成。则 $\boldsymbol{A}$ 是有限的，且 $\boldsymbol{A}$中的每个元素要么是幂零的，要么是可逆的。

证明。 令 $\boldsymbol{A}_{\mathsf{s}}$ 为 $\boldsymbol{A}$的半群约化。考虑 X 的一组有限生成元 $\boldsymbol{A}$。则 $\boldsymbol{A}_{\mathsf{s}}$ 由 $X \cup \{1\}$生成。此外，注意到 $\mathsf{Con}(\boldsymbol{A}) = \mathsf{Con}(\boldsymbol{A}_{\mathsf{s}})$。结合 $\boldsymbol{A}$ 是次直不可约的假设，可知 $\boldsymbol{A}_{\mathsf{s}}$也是次直不可约的。因此，$\boldsymbol{A}_{\mathsf{s}}$ 是有限生成且次直不可约的。于是，根据 $\boldsymbol{A}$，由 [Mal58]（另见

[Gri77，推论 3。9]）。由于 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{s}}$ 是有限的，[Gri01，推论 IV.4。6] 表明每个 $a \in A$ 不是幂零的就是可逆的。⊠

我们现在可以证明定理2.6。

证明。 我们先证明以下命题。

断言 2.8。 设 $\boldsymbol{B} \in \mathsf{V}_{m,n}$ 是有限生成且次直不可约的，其中 $m, n \in \mathbb{N}$满足 $m > 0$。那么，每个 $b \in B$ 要么是 n-幂零的，要么是可逆的，且满足 $b^{-1} = b^{m-1}$。

命题的证明。 由于 $\boldsymbol{B}$ 是 交换幺半群$_{\mathrm{SI}}$的有限生成成员， $\boldsymbol{B}$ 中的每个元素根据定理 2.7要么是幂零的，要么是可逆的。考虑 $b \in B$。根据 b 是幂零的还是可逆的，我们分两种情况讨论。首先，设 b 是幂零的。那么存在$k \in \mathbb{N}$ 使得 b^k 是 $\boldsymbol{B}$的零元。我们将证明 b 是 n-幂零的。若 $k \leqslant n$，则根据假设， b 是 k-幂零的，因此结论显然成立。若 $k > n$，令

$$t = \min\{r \in \mathbb{N} : k \leqslant n + rm\},$$

根据假设， $m > 0$ 存在。因此

$$b^n = b^{n+rm} = b^{n+rm-k}b^k = b^k,$$

其中，第一个等式成立是因为根据假设有 $\boldsymbol{B} \in \mathsf{V}_{m,\ n}$ 且根据定义有 $\mathsf{V}_{m,\ n} \vDash x^{m+n} \approx x^n$ ；第二个等式显然成立；第三个等式成立是因为 b^k 是零元。因此， b^n 是零元，由此 b 是 n-幂零的。

接下来，我们考虑 b 可逆的情形。由于 $\boldsymbol{B} \in \mathsf{V}_{m,\ n}$ 且 $\mathsf{V}_{m,\ n} \vDash x^{m+n} \approx x^n$，我们有 $b^{m+n} = b^n = 1b^n$。由于根据命题 b 2.1(iii)，可消，故得到 $b^m = 1$。结合 $m > 0$，可得 b 可逆，且 $b^{-1} = b^{m-1}$。⊠

由断言2.8可知，全称公式

$$\varphi = \forall x, y\,((x^n y \approx x^n) \sqcup (x^m \approx 1))$$

在 $\mathsf{V}_{m,\ n}$的有限生成次直不可约成员中成立。因此，根据命题2.5， φ 在 $\mathsf{V}_{m,\ n}$ 的每个次直不可约成员中成立。根据假设， $\boldsymbol{A}$ 是 $\mathsf{V}_{m,\ n}$ 的一个次直不可约成员，因此我们得出，每个 $a \in A$ 要么是 n-幂零的，要么是可逆的，且 $a^{-1} = a^{m-1}$。⊠

最后，我们将用到下面这个观察结果。

命题 2.9. 设 $\boldsymbol{A} \in$ 交换幺半群$_{\mathrm{SI}}$ 且 $a \in A$ 满足 $a = a^2$。则 $a = 1$ 或 a 是 $\boldsymbol{A}$的零元。

证明。 首先假设 $\boldsymbol{A}$ 是有限生成的。定理2.7 表明 a 是可逆的或幂零的。如果 a 是可逆的，那么 $a = a^2a^{-1} = aa^{-1} = 1$，其中第二个等式成立是因为 $a = a^2$ ，而其他等式显然成立。如果 a 是幂零的，那么 a^n 是某个 $n > 0$的零元。由于 $a = a^2$，我们得到 $a = a^n$，因此 a 是零元。因此，该陈述对 交换幺半群$_{\mathrm{SI}}$中的每个有限生成成员都成立。结合命题 2.5，这确保了全称公式

$$\varphi = \forall x, y\,(x \approx x^2 \to (x \approx 1 \sqcup xy \approx x))$$

在交换幺半群$_{\mathrm{SI}}$的每个成员中都成立。因此，对于所有满足 $a = a^2$ 的 $\boldsymbol{A} \in$ 交换幺半群$_{\mathrm{SI}}$ 和 $a \in A$， φ 的有效性意味着 $a = 1$ 或 a 是 $\boldsymbol{A}$的零元。⊠

2.4. 逆幺半群。 我们回顾一下，若对每个 $a \in A$，都存在唯一的 $b \in A$ 使得.....则称幺半群（分别地，半群） $\boldsymbol{A}$ 为逆的

$$a = aba \quad \text{and} \quad b = bab$$

（例如，参见 [Isb66，第 242]页）。若一个幺半群簇中的成员都是逆 的，我们就称该簇为逆簇。在交换性的假设下，逆幺半群的定义可以简化如下（例如，参见 [Isb66，第 242] 页，以及 [Rap75，引理 4]）。

命题 2.10。 交换幺半群 $\boldsymbol{A}$ 是逆幺半群，当且仅当对每个 $a \in A$，都存在 $b \in A$ 使得 $a = a^2b$。

交换幺半群的逆簇有如下清晰的描述。

定理 2.11。 对于交换幺半群的簇 K，以下条件等价：

(i) K是逆；(ii) K不包含 C_2；
(iii) $\mathsf{K} \vDash x^{n+1} \approx x$ 对于某个 $n > 0$。

证明。(i)⇒(ii)：假设，旨在导出矛盾，K 是逆的并且包含 C_2。于是考虑唯一的交换幺半群 $\boldsymbol{A}$，使得 $A = \{1, a, b\}$， b是零元，并且 $b = a^2$。由于 $\boldsymbol{A}$ 满足方程 $x^2 \approx x^3$，它属于 C_2。结合 $\mathsf{C}_2 \subseteq \mathsf{K}$ 这一假设，可得 $\boldsymbol{A} \in \mathsf{K}$。因此， $\boldsymbol{A}$ 是逆的。根据命题 2.10，存在 $c \in A$ 使得 $a = a^2c$。由于 $b = a^2$ 是零元，这意味着 $a = bc = b$，这是错误的。

(ii)⇔(iii)：由交换幺半群簇格的描述（例如参见[GLV22，定理 5.1]）可知，对于每个属于 $\subseteq \mathsf{CM}$ 的簇 K，我们有 $\mathsf{C}_2 \not\subseteq \mathsf{K}$，当且仅当 $\mathsf{K} \subseteq \mathsf{V}_{n,\,1}$ 对于某个 $n > 0$；但根据 $\mathsf{V}_{n,\,1}$ 的定义，后一个条件等价于 $\mathsf{K} \vDash x^{n+1} \approx x$ 对于某个$n > 0$ 。

(iii)⇒(i)：设 $\boldsymbol{A} \in \mathsf{K}$ 和 $a \in A$。由于 $a^{n+1} = a$ 由（iii），我们得到 $a = a^2b$ 对于 $b = a^{n-1}$。因此， $\boldsymbol{A}$ 根据命题 2.10 是逆元，K也如此。⊠

ThHowie 和 Isbell 的下一个结果将在后文中用到（见 [HI67，定理 2。3]）.

T定理 2.12。 对于所有满足 $\boldsymbol{A}$ 具有S 逆元的 $\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{B} \in$，有 $\mathsf{d}_{\mathsf{S}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = A$。

3. Isbell's Zigzag Theorem

对于每个 $n \geqslant 1$，令

$$\psi_n(z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_n, x_1, \ldots, x_{2n+1}, y)$$

表示半群语言中以下方程的合取：

$$y \approx x_1 z_1; \tag{1}$$
$$x_1 \approx w_1 x_2; \tag{2}$$
$$x_{2i} z_i \approx x_{2i+1} z_{i+1} \text{ for } i = 1, \ldots, n-1; \tag{3}$$
$$w_i x_{2i+1} \approx w_{i+1} x_{2(i+1)} \text{ for } i = 1, \ldots, n-1; \tag{4}$$
$$x_{2n} z_n \approx x_{2n+1}; \tag{5}$$
$$w_n x_{2n+1} \approx y. \tag{6}$$

然后令 $\varphi_0(x, y) = \psi_0(x, y) = x \approx y$，并对每个 $n \geqslant 1$，

$$\varphi_n(x_1, \ldots, x_{2n+1}, y) = \exists z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_n \psi_n(z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_n, x_1, \ldots, x_{2n+1}, y).$$

我们将 φ_n 称为第 n个*Isbell* 公式。

以下关于支配域的描述称为 Isbell 之字定理（参见 [Isb66，定理 2。3], [HI67，定理 1。1], 以及 [How96，定理 1。2]）。

定理 3.1。设 $\mathsf{K} \in \{\mathsf{S}、\mathsf{CS}、\mathsf{M}\}$、$\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{B} \in \mathsf{K}$，且 $b \in B$。那么，当且仅当存在 $n \in \mathbb{N}$ 和 $a_1、\ldots、a_{2n+1} \in A$，使得 $\boldsymbol{B} \vDash \varphi_n(a_1、\ldots、a_{2n+1}、b)$ 时，$b \in \mathsf{d}_{\mathsf{K}}(\boldsymbol{A}、\boldsymbol{B})$。

本节旨在将 Isbell 之字定理推广到所有交换幺半群簇。更准确地说，我们将证明以下定理。

定理 3.2. 设 K 是一个交换幺半群簇，$\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{B} \in \mathsf{K}$，且 $b \in B$。那么 $b \in \mathsf{d}_{\mathsf{K}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 当且仅当存在 $n \in \mathbb{N}$ 和 $a_1, \ldots, a_{2n+1} \in A$，使得$\boldsymbol{B} \vDash \varphi_n(a_1, \ldots, a_{2n+1}, b)$。

为此，我们将运用一些初等范畴论，相关内容可参阅[ML98]。首先回顾，每个簇 K 都可以视为一个范畴，其对象是 K 的成员，态射则是它们之间的同态。因此，K 是一个双完备范畴，特别是对小余极限封闭（例如参见 [Ber15，命题 9.4.8 和定理 9.4。14]）。[2] 因此，给定 $\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{B} \in \mathsf{K}$，我们用$p_1, p_2\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B} *_{\boldsymbol{A}}^{\mathsf{K}} \boldsymbol{B}$表示 K 中的一对态射，它们构成了如下图表在 K 中的推出：该图表由两个从 $\boldsymbol{A}$ 到 $\boldsymbol{B}$的包含映射副本组成。支配域与推出的关系如下（见 [Isb66，引理 1。1]）。

定理 3.3。设K 为一个簇，$\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{B} \in \mathsf{K}$，且 $p_1, p_2\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B} *_{\boldsymbol{A}}^{\mathsf{K}} \boldsymbol{B}$是$\mathsf{K}$中从 $\boldsymbol{A}$ 到 $\boldsymbol{B}$的包含映射的两个副本的推出。那么

$$\mathsf{d}_{\mathsf{K}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \{b \in B : p_1(b) = p_2(b)\}.$$

设 V 是簇 K 的一个子簇。若对于 V 中每一对态射 $g\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$和 $h\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C}$，其在 V 中的推出与 g 和 h 在 K 中的推出相同，则称 V对 K-推出封闭。类似地，若 V 中任意小图在 V 中的余极限与同一小图在 K 中的余极限相同，则称 V对 K-余极限封闭。

[2]从范畴论的角度来看，对于语言不包含任何常元符号的簇，加入一个空代数会比较方便。不过，对于幺半群簇而言，这个问题无关紧要。

由于推出是小余极限的一种特殊情形，对 K-余极限封闭意味着对 K-推出封闭。

推论 3.4. 设V 是簇K 的一个子簇，并假设V 在K-推出下封闭。则对所有 $\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{B} \in \mathsf{V}$，有$\mathsf{d}_{\mathsf{V}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \mathsf{d}_{\mathsf{K}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$。

证明。 由定理3.3立即可得。 ⊠

设 K 是交换幺半群的一个簇。根据定理2.4，K 相对于 交换幺半群 由 $x^{m+n} \approx x^n$ 某个 $m, n \in \mathbb{N}$公理化。注意，对于每个 $\boldsymbol{A} \in$ 交换幺半群，集合

$$\{a \in A : a^{m+n} = a^n\}$$

是子代数 $\Phi_{\mathsf{K}}(\boldsymbol{A})$ 的底集，其中 $\boldsymbol{A}$ 还属于 K。此外，对于交换幺半群中任意两个对象之间的同态 $h\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$，映射 $\Phi_{\mathsf{K}}(h)\colon \Phi_{\mathsf{K}}(\boldsymbol{A}) \to \Phi_{\mathsf{K}}(\boldsymbol{B})$ 定义为 $\Phi_{\mathsf{K}}(h)(a) = h(a)$，也是一个同态。因此，$\Phi_{\mathsf{K}}$: 交换幺半群 $\to$ K 可视为一个协变函子（关于这一构造的推广，参见 [Mor18，定理 2.8]）。最后，设 Ψ_{K}: K $\to$ 交换幺半群为包含函子。下一个结果证明 K 是交换幺半群的一个余反射子范畴，即 Ψ_{K} 是一个左伴随。

定理 3.5。 对于每个交换幺半群簇 K， Ψ_{K} 是 Φ_{K}的左伴随。

证明。根据 [ML98，定理 IV.2(ii)]，，只需证明对于每个同态$h\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$，若 $\boldsymbol{A} \in$ K 且 $\boldsymbol{B} \in$ CM，则有 $h[A] \subseteq \Phi_{\mathsf{K}}(\boldsymbol{B})$。为此，考虑$h\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$，如上所述。由于 K 是交换幺半群簇，因此它相对于 CM 可由 $x^{m+n} \approx x^n$ 公理化，其中某个 $m, n \in \mathbb{N}$ （见定理 2.4）。接着考虑 $a \in A$。由于$\boldsymbol{A} \in$K，我们有 $a^{m+n} = a^n$。由于 h 是同态，这就得到 $h(a)^{m+n} = h(a)^n$，从而根据 $\Phi_{\mathsf{K}}(\boldsymbol{B})$的定义，有$h(a) \in \Phi_{\mathsf{K}}(\boldsymbol{B})$。⊠

推论 3.6。 每个交换幺半群簇都对交换幺半群-余极限封闭。

证明。设 K 是一个交换幺半群簇，D 是 K 中的一个小图。此外，设 X 是 D 在 K 中的余极限。由定理 3.5 可知，Ψ_{K}: K $\to$ 交换幺半群是一个左伴随函子，而左伴随函子保持小余极限，因此 $\Psi_{\mathsf{K}}(X)$ 是 Ψ_{K}(D) 在交换幺半群中的余极限。由于 Ψ_{K} 是 K 到交换幺半群的包含函子，我们有 $X = \Psi_{\mathsf{K}}(X)$，且 D $= \Psi_{\mathsf{K}}$(D)。因此， X 也是 D 在交换幺半群中的余极限。⊠

由以下推论 3.4 和 3.6 可推出以下结论。

推论 3.7. 设 K 是一个交换幺半群簇。那么对于所有 $\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{B} \in$K ，

$$\mathsf{d}_{\mathsf{K}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \mathsf{d}_{\mathsf{CM}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}).$$

回忆一下，幺半群 $\boldsymbol{A}$ 的半群约化记作 $\boldsymbol{A}_{\mathsf{s}}$。鉴于定理 3.1和推论 3.7，要证明定理 3.2，只需证明以下结论。

命题 3.8。对于所有 $\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{B} \in$交换幺半群，

$$\mathsf{d}_{\mathsf{CM}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \mathsf{d}_{\mathsf{CS}}(\boldsymbol{A}_{\mathsf{s}}, \boldsymbol{B}_{\mathsf{s}}).$$

证明。为证明从右到左的包含关系，我们采用逆否法。考虑$b \in B - \mathsf{d}_{\mathsf{CM}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$。于是存在一对幺半群同态 $g, h\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$，其中$\boldsymbol{C} \in$ 为交换幺半群，且满足 $g{\restriction_A} = h{\restriction_A}$ 以及 $g(b) \neq h(b)$。于是 $g, h\colon \boldsymbol{B}_{\mathsf{s}} \to \boldsymbol{C}_{\mathsf{s}}$ 是一对半群同态，且满足 $\boldsymbol{C}_{\mathsf{s}} \in$ 为 CS，从而见证了 $b \notin \mathsf{d}_{\mathsf{CS}}(\boldsymbol{A}_{\mathsf{s}}, \boldsymbol{B}_{\mathsf{s}})$，证毕。

接下来，我们证明从左到右的包含关系。同样，我们采用逆否命题进行证明。考虑 $b \in B - \mathsf{d}_{\mathsf{CS}}(\boldsymbol{A}_{\mathsf{s}}, \boldsymbol{B}_{\mathsf{s}})$。那么，存在一对半群同态$g, h\colon \boldsymbol{B}_{\mathsf{s}} \to \boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C} \in \mathsf{CS}$，且 $g{\restriction_A} = h{\restriction_A}$和 $g(b) \neq h(b)$。我们可以假设 $C = \mathsf{Sg}^{\boldsymbol{C}}(g[B] \cup h[B])$；否则，就用其底集为 $\mathsf{Sg}^{\boldsymbol{C}}(g[B] \cup h[B])$ 的子代数替换 $\boldsymbol{C}$。

命题 3.9。元素 $g(1^{\boldsymbol{B}})$ 在 $\boldsymbol{C}$ 中是中性的，并且 $g(1^{\boldsymbol{B}}) = h(1^{\boldsymbol{B}})$。

命题的证明。首先，注意到 $1^{\boldsymbol{B}} \in A$，因为 $\boldsymbol{A}$ 是幺半群 $\boldsymbol{B}$ 的子代数。结合假设 $g{\restriction_A} = h{\restriction_A}$，可得 $g(1^{\boldsymbol{B}}) = h(1^{\boldsymbol{B}})$。

接下来，我们证明 $g(1^{\boldsymbol{B}})$ 是 $\boldsymbol{C}$ 中的中性元。任取元素 $c \in C$。由于 $\boldsymbol{C}$ 是交换的，只需证明 $c = g(1^{\boldsymbol{B}})c$ 即可。由于 $c \in C = \mathsf{Sg}^{\boldsymbol{C}}(g[B] \cup h[B])$，且 $g[B]$ 和 $h[B]$ 都是 $\boldsymbol{C}$ 的子代数的全集，因此存在 $a_1, a_2 \in B$ 使得

$$\text{either} \quad c = g(a_1), \quad \text{or} \quad c = g(a_1)h(a_2), \quad \text{or} \quad c = h(a_2).$$

注意到 $g(1^{\boldsymbol{B}})g(a_1) = g(1^{\boldsymbol{B}}a_1) = g(a_1)$。将其与上面显示式中的前两种情形中的任一种结合，便得到所需的 $g(1^{\boldsymbol{B}})c = c$。因此，只需考虑 $c = h(a_2)$ 的情形。回忆 $g(1^{\boldsymbol{B}}) = h(1^{\boldsymbol{B}})$。于是，

$$g(1^{\boldsymbol{B}})c = h(1^{\boldsymbol{B}})c = h(1^{\boldsymbol{B}})h(a_2) = h(1^{\boldsymbol{B}}a_2) = h(a_2) = c. \qquad \boxtimes$$

根据命题 3.9，交换半群 $\boldsymbol{C}$ 可以视为交换幺半群 $\boldsymbol{C}^*$，其中性元为 $g(1^{\boldsymbol{B}}) = h(1^{\boldsymbol{B}})$。因此，半群同态 g、$h\colon \boldsymbol{B}_{\mathsf{s}} \to \boldsymbol{C}$ 可以视为幺半群同态 g、$h\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}^*$。作为这样的同态，$g$ 和 h 证明了 $b \notin \mathsf{d}_{\mathsf{CM}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$，因为根据假设，$g{\restriction_A} = h{\restriction_A}$ 和 $g(b) \neq h(b)$。$\boxtimes$

4. Isbell's formulas

本节将建立一些后文需要用到的 Isbell 公式的性质。回想一下，ψ_n 是 (1)–(6) 中各公式的合取。

命题 4.1。设 $\boldsymbol{A} \in$ 交换幺半群 以及 $c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n, a_1, \ldots, a_{2n+1}, b \in A$ 满足 $n > 0$，使得

$$\boldsymbol{A} \vDash \psi_n(c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n, a_1, \ldots, a_{2n+1}, b).$$

此外，设 $d_0 = 1$。那么对于每个 $0 \leqslant m \leqslant n-1$，我们有

$$d_m a_{2m+1} c_{m+1} = b = d_{m+1} a_{2(m+1)} c_{m+1}.$$

证明。我们对 m 进行归纳。对于 $m = 0$，我们需要证明 $d_0 a_1 c_1 = b = d_1 a_2 c_1$。由于 $d_0 = 1$ 根据定义，这相当于 $a_1 c_1 = b = d_1 a_2 c_1$。注意到 $b = a_1 c_1$ 由（1）。此外，由（2）可得 $a_1 = d_1 a_2$。结合 $b = a_1 c_1$，可得 $b = d_1 a_2 c_1$，证毕。

归纳步骤中，假设该命题对 $0 \leqslant m < n-1$ 成立。我们将证明它对 $m+1$ 也成立。为此，注意到（3）和（4）给出

$$a_{2(m+1)}c_{m+1} = a_{2(m+1)+1}c_{m+2} \quad \text{and} \quad d_{m+1}a_{2(m+1)+1} = d_{m+2}a_{2(m+2)}. \tag{7}$$

由（7）的右侧可得 $d_{m+1}a_{2(m+1)+1}c_{m+2} = d_{m+2}a_{2(m+2)}c_{m+2}$。因此，只需证明 $d_{m+1}a_{2(m+1)+1}c_{m+2} = b$。注意，依次应用（7）的左侧和归纳假设，可得 $d_{m+1}a_{2(m+1)+1}c_{m+2} = d_{m+1}a_{2(m+1)}c_{m+1} = b$，如所求。⊠

回想一下，φ_n 是第 n个 Isbell 公式。

推论 4.2。设 $\boldsymbol{A} \in$交换幺半群 具有零元0，且 a_1、...、a_{2n+1}、$b \in A$ 满足$\boldsymbol{A} \vDash \varphi_n$（$a_1$，...，$a_{2n+1}$，$b$）。若 $a_m = 0$ 对某个 $1 \leqslant m \leqslant 2n+1$成立，则 $b = 0$。

证明。如果 $n = 0$，那么根据 φ_0 的定义，$a_1 = b$。因此，$a_1 = 0$ 推出 $b = 0$，证毕。接下来假设 $n > 0$。由 $\boldsymbol{A} \vDash \varphi_n(a_1, \ldots, a_{2n+1}, b)$ 以及 φ_n 的定义可得

$$\boldsymbol{A} \vDash \psi_n(c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n, a_1, \ldots, a_{2n+1}, b)$$

对于某些 $c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n \in A$。根据假设，$1 \leqslant m \leqslant 2n+1$，因此要么 $m = 2n+1$，要么对于某个 $0 \leqslant k \leqslant n-1$，$m \in \{2k+1, 2(k+1)\}$。首先，假设 $m = 2n+1$。则由 (6) 得到 $d_n a_{2n+1} = b$。根据假设，$a_{2n+1} = a_m = 0$，且 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的零元，因此可得 $b = 0$，证毕。接下来，我们考虑对于某个 $0 \leqslant k \leqslant n-1$，$m = 2k+1$（分别为 $m = 2(k+1)$）的情形。根据命题 4.1 以及假设 a_m 是 $\boldsymbol{A}$ 的零元，可得 $b = d_k a_{2k+1} c_{k+1} = d_k a_m c_{k+1} = 0$（分别为 $b = d_{k+1}a_{2(k+1)}c_{k+1} = d_{k+1}a_m c_{k+1} = 0$）。⊠

我们将用到以下观察结果。

命题 4.3. 设 $\boldsymbol{A} \in$交换幺半群 和 $c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n, a_1, \ldots, a_{2n+1}, b \in A$ 满足 $n \in \mathbb{N}$，则

$$\boldsymbol{A} \vDash \psi_n(c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n, a_1, \ldots, a_{2n+1}, b).$$

则以下条件成立：

(i) *If* $n > 0$, *then* $\boldsymbol{A} \vDash \psi_{n-1}(c_2, \ldots, c_n, d_2, \ldots, d_n, d_1a_3, a_4, \ldots, a_{2n+1}, b)$;
(ii) $\boldsymbol{A} \vDash \psi_n(c_1, \ldots, c_n, ed_1, \ldots, ed_n, ea_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}, eb)$ *for every* $e \in A$.

证明. 根据 ψ_n 的定义，以下结论在 $\boldsymbol{A}$中成立：

$$b = a_1c_1; \tag{8}$$
$$a_1 = d_1a_2; \tag{9}$$
$$a_{2i}c_i = a_{2i+1}c_{i+1} \text{ for } i = 1, \ldots, n-1; \tag{10}$$
$$d_ia_{2i+1} = d_{i+1}a_{2(i+1)} \text{ for } i = 1, \ldots, n-1; \tag{11}$$
$$a_{2n}c_n = a_{2n+1}; \tag{12}$$
$$d_na_{2n+1} = b. \tag{13}$$

(i)：假设 $n > 0$。我们有两种情况：要么 $n = 1$，要么 $n > 1$。首先，假设$n = 1$。应用（13）可得 $b = d_1a_3$。因此，ψ_0 的定义 $\boldsymbol{A} \vDash \psi_0$（$d_1a_3$，$b$）给出

所需结果。接下来，我们考虑 $n > 1$的情形。命题 4.1 意味着 $b = d_1a_3c_2$。由（11）可知 $d_1a_3 = d_2a_4$。这两个等式与（10）–（13）一起推出

$$\boldsymbol{A} \vDash \psi_{n-1}(c_2, \ldots, c_n, d_2, \ldots, d_n, d_1a_3, a_4, \ldots, a_{2n+1}, b)$$

根据 ψ_{n-1}的定义。

(ii)：设 $e \in A$。我们分两种情况：要么 $n = 0$，要么 $n > 0$。首先，假设 $n = 0$。那么，根据 ψ_0 的定义可得 $a_1 = b$。由此可知 $ea_1 = eb$。因此，$\boldsymbol{A} \vDash \psi_0(ea_1, eb)$，如所求。接下来，我们考虑 $n > 0$的情况。将（8）、（9）、（11）和（13）两边同乘以 e，得到

$$eb = ea_1c_1; \tag{14}$$

$$ea_1 = ed_1a_2; \tag{15}$$

$$ed_ia_{2i+1} = ed_{i+1}a_{2(i+1)} \text{ for } i = 1, \ldots, n-1; \tag{16}$$

$$ed_na_{2n+1} = eb. \tag{17}$$

方程（14）–（17），连同（10）和（12），推出

$$\boldsymbol{A} \vDash \psi_n(c_1, \ldots, c_n, ed_1, \ldots, ed_n, ea_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}, eb)$$

根据 ψ_n的定义。 ⊠

命题 4.4。设 $\boldsymbol{A} \in$ 交换幺半群 且 $c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n, a_1, \ldots, a_{2n+1}, b \in A$ 满足 $n > 0$，使得

$$\boldsymbol{A} \vDash \psi_n(c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n, a_1, \ldots, a_{2n+1}, b).$$

于是，以下条件成立：

(i) 若 $a_2 = 1$，则 $\boldsymbol{A} \vDash \varphi_{n-1}(a_1a_3, a_4, \ldots, a_{2n+1}, b)$；(ii) 若 d_1 可逆且 $a_1 = a_2$，则 $\boldsymbol{A} \vDash \varphi_{n-1}(a_3, \ldots, a_{2n+1}, b)$。

证明。(i)：设 $a_2 = 1$。由于 ψ_n 的定义蕴含 $a_1 = d_1a_2$，我们得到$a_1 = d_1$。因此，由命题 4.3(i) 可知

$$\boldsymbol{A} \vDash \psi_{n-1}(c_2, \ldots, c_n, d_2, \ldots, d_n, a_1a_3, a_4, \ldots, a_{2n+1}, b).$$

因此，φ_{n-1} 的定义确保 $\boldsymbol{A} \vDash \varphi_{n-1}(a_1a_3, a_4, a_5, \ldots, a_{2n+1}, b)$。

(ii)：设 d_1 可逆且 $a_1 = a_2$。由命题 4.1 以及假设 $a_1 = a_2$，可知

$$b = d_1a_2c_1 = d_1a_1c_1.$$

ψ_n 的定义蕴含了 $b = a_1c_1$，因此上述展示式给出 $b = d_1b$。因此，

$$\boldsymbol{A} \vDash \psi_n(c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n, a_1, \ldots, a_{2n+1}, d_1b).$$

由命题4.3(i)及上述展示式可知

$$\boldsymbol{A} \vDash \psi_{n-1}(c_2, \ldots, c_n, d_2, \ldots, d_n, d_1a_3, a_4, \ldots, a_{2n+1}, d_1b).$$

将4.3(ii)中的命题应用于 $e = d_1^{-1}$上述展示式，得到

$$\boldsymbol{A} \vDash \psi_{n-1}(c_2, \ldots, c_n, d_1^{-1}d_2, \ldots, d_1^{-1}d_n, a_3, a_4, \ldots, a_{2n+1}, b). \tag{18}$$

因此，根据 φ_{n-1} 的定义可得 $\boldsymbol{A} \vDash \varphi_{n-1}(a_3, \ldots\ldots, a_{2n+1}, b)$。 ⊠

我们回顾一下，在簇的背景下，隐式运算可以用*pp* 公式来描述，即形如 $\exists x_1$，……，$x_n\varphi$的公式，其中 φ 是一个方程合取。更确切地说，若 f 是簇K的一个隐式运算，则存在 f_1，……，f_n 个K上的隐式运算，它们可由 pp 公式定义，且 $f^{\boldsymbol{A}} = f_1^{\boldsymbol{A}} \cup \cdots \cup f_n^{\boldsymbol{A}}$对于每个$\boldsymbol{A} \in$K 均成立（参见 [CKM25b，推论 3。10]）。因此，K 的原子正合取可定义隐式运算构成了K上所有隐式运算的基本构件。我们将代数类K中原子正合取可定义隐式运算的类记为$\mathsf{imp}_{\mathrm{PP}}(\mathsf{K})$。

命题 4.5。 设K 是一个幺半群簇，且 $n \in \mathbb{N}$。那么 φ_n 定义了$(2n+1)$元的隐式运算$_{\mathrm{PP}}(\mathsf{K})$成员。

证明。 对于K $=$ M的情形，参见 [CKM25b，定理 3。15]。由于代数类K 上的隐式运算限制到子类$\mathsf{K}' \subseteq$K 后仍是K′上的隐式运算，故得证。⊠

设 K 是一个代数类，且 $\Delta \subseteq$ 隐式运算$_{\mathrm{PP}}(\mathsf{K})$。若对于所有 $\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{B} \in \mathsf{K}$ 和 $b \in \mathsf{d}_{\mathsf{K}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$，都存在 $f \in \Delta$和 $\langle a_1, \ldots\ldots, a_n\rangle \in \mathsf{dom}(f^{\boldsymbol{B}}) \cap A^n$，使得 $f^{\boldsymbol{B}}(a_1, \ldots\ldots, a_n) = b$（参见 [CKM25b，第 14] 节），则称 Δ 为 K 的支配基。

例 4.6. 给定一个交换幺半群簇 K 以及 $n \in \mathbb{N}$，令$i_{\mathsf{K},\, n}$ 为 $2n+1$元的 隐式运$_{\mathrm{PP}}(\mathsf{K})$ 中由 φ_n 定义的（见命题 4.5）。由定理 3.2 可知，$\{i_{\mathsf{K},n} : \ n \in \mathbb{N}\}$ 是 K 的一个支配基。⊠

支配基与隐式运算的联系如下（见 [CKM25b，定理 14。3]）。

定理 4.7. 设K 是一个支配基为 Δ 、且具有元数为 n 的隐式运算 $f \in$ 隐式运$_{\mathrm{PP}}(\mathsf{K})$ 的簇。那么存在 $g \in \Delta$ 元项 t_1、……、t_m 和 n 元项，属于K，使得对所有 $\boldsymbol{A} \in$K 以及$\langle a_1$、……、$a_n\rangle \in$支配$(f^{\boldsymbol{A}})$，都有

$$\langle b_1, \ldots, b_m\rangle \in \mathsf{dom}(g^{\boldsymbol{A}}) \quad \textit{and} \quad g^{\boldsymbol{A}}(b_1, \ldots, b_m) = f^{\boldsymbol{A}}(a_1, \ldots, a_n),$$

其中，对每个 $k \leqslant m$， $b_k = t_k^{\boldsymbol{A}}(a_1$、……、 $a_n)$。

鉴于例 4.6，以下是定理 4.7的一个特例。

推论 4.8。 设 K 是一个交换幺半群簇，且 $f \in \mathsf{imp}_{\mathrm{PP}}(\mathsf{K})$ 的元数为 n。那么存在 $m \in \mathbb{N}$和 n 元幺半群项 $t_1, \ldots, t_{2m+1}$，使得对于所有 $\boldsymbol{A} \in \mathsf{K}$ 以及$\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in \mathsf{dom}(f^{\boldsymbol{A}})$，我们有

$$\langle b_1, \ldots, b_{2m+1}\rangle \in \mathsf{dom}(i^{\boldsymbol{A}}_{\mathsf{K},m}) \quad \textit{and} \quad i^{\boldsymbol{A}}_{\mathsf{K},m}(b_1, \ldots, b_{2m+1}) = f^{\boldsymbol{A}}(a_1, \ldots, a_n),$$

其中 $b_k = t_k^{\boldsymbol{A}}(a_1, \ldots, a_n)$ 对每个 $k \leqslant 2m+1$ 都成立。

5. 可扩张的隐式运算

一般而言，簇 K 的隐式运算不必是全定义的。因此，若对所有 $\boldsymbol{A} \in \mathsf{K}$ 和 $\langle a_1, \ldots\ldots, a_n\rangle \in \mathsf{dom}(f^{\boldsymbol{A}})$，都存在一个代数 $\boldsymbol{B} \in \mathsf{K}$ 扩张 $\boldsymbol{A}$，使得 $\langle a_1, \ldots\ldots, a_n\rangle \in \mathsf{dom}(f^{\boldsymbol{B}})$，则称 K 的一个隐式运算 f为可扩张的。K 的可扩张隐式运算类记作 ext(K)，而原子正合取可定义的

可扩张隐式运算类K 记作$\mathsf{ext}_{\mathrm{PP}}(\mathsf{K})$。下一个结果简化了定义可扩张隐式运算的任务（参见 [CKM25b，推论 3.11 和命题 8.11(ii)]）。

命题 5.1. 设K 是一个簇，且 $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ 是一个正原子公式，使得对于所有$\boldsymbol{A} \in \mathsf{K}_{\mathrm{SI}}$和 $a_1, \ldots, a_n \in A$，都存在唯一的 $b \in A$ 满足 $\boldsymbol{A} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n, b)$。那么 φ 定义了 $\mathsf{ext}_{\mathrm{PP}}(\mathsf{K})$ 中的一个 n 元成员。

值得注意的是，簇K 中的每个成员都可以“升级”为一个簇，使其中所有可扩张隐式运算都是全定义的，具体如下（参见 [CKM25b，命题 8.1 和定理 8.4]）。

定理 5.2. 设K 是一个簇，且 $\boldsymbol{A} \in \mathsf{K}$。那么存在 $\boldsymbol{B} \in \mathsf{K}$，使得 $\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{B}$，并且 $f^{\boldsymbol{B}}$是全定义的，且对每个 $f \in \mathsf{ext}(\mathsf{K})$中的 $f^{\boldsymbol{A}}$均为其扩张。此外，当 $\boldsymbol{A} \in \mathsf{K}_{\mathrm{SI}}$时，可将代数$\boldsymbol{B}$ 选在K_{SI}中。

为了将一族隐式运算 $\mathcal{F} \subseteq \mathsf{ext}_{\mathrm{PP}}(\mathsf{K})$ 添加到簇 K 中，我们按如下方式进行。设 $\mathscr{L}$ 为 K 的语言，$\mathscr{L}_{\mathcal{F}}$ 为通过向 $\mathscr{L}$ 添加一个新的n元函数符号 g_f（每个 n元 $f \in \mathcal{F}$对应一个）而得到的语言。然后，对于 K 的每个成员 $\boldsymbol{A}$，若其中 $\{f^{\boldsymbol{A}} \colon f \in \mathcal{F}\}$是一族全函数，就将其扩张为语言 $\mathscr{L}_{\mathcal{F}}$中的代数 $\boldsymbol{A}[\mathscr{L}_{\mathcal{F}}]$，并对每个 $f \in \mathcal{F}$，将 g_f解释为 $f^{\boldsymbol{A}}$。此外，对于每个 $\mathsf{N} \subseteq \mathsf{K}$，令

$$\mathsf{N}[\mathscr{L}_{\mathcal{F}}] = \{\boldsymbol{A}[\mathscr{L}_{\mathcal{F}}] : \boldsymbol{A} \in \mathsf{N} \text{ and } \{f^{\boldsymbol{A}} : f \in \mathcal{F}\} \text{ is a family of total functions}\}.$$

由 $\mathcal{F}$ 诱导的 K 的 *pp* 扩张为 $\mathbb{S}(\mathsf{K}[\mathscr{L}_{\mathcal{F}}])$，它表示“将 $\mathcal{F}$ 中的隐式运算添加到 K 中”的结果。

例 5.3。 设 K 是交换幺半群的一个真子簇。我们将证明，存在一个一元$f \in \mathsf{ext}_{\mathrm{PP}}(\mathsf{K})$，使得对于每个 $\boldsymbol{A} \in \mathsf{K}$和 $a \in A$,

$$\text{if } a^{-1} \text{ exists, then } a \in \mathsf{dom}(f^{\boldsymbol{A}}) \text{ and } f^{\boldsymbol{A}}(a) = a^{-1}.$$

因此，$\mathcal{F} = \{f\}$ 诱导出 K 的一个 pp 扩张，其中“取逆”这一隐式运算由项 $g_f(x)$ 插值。

为证明该断言，回想一下，K 是交换幺半群的真子簇。结合命题2.3和定理2.4，可知存在 m，$n \in \mathbb{N}$，使得 $m > 0$ 满足 $\mathsf{K} = \mathsf{V}_{m,\, n}$。接着考虑正原子公式

$$\varphi(x, y) = (x^{n+1}y \approx x^n) \sqcap (y^2 x \approx y).$$

我们将证明 φ 定义了 f 的一个一元成员，其中 $\mathsf{ext}_{\mathrm{PP}}(\mathsf{K})$。根据命题5.1，只需证明对所有 $\boldsymbol{A} \in \mathsf{K}_{\mathrm{SI}}$ 和 $a \in A$，存在唯一的 $b \in A$ 使得$\boldsymbol{A} \vDash \varphi(a,\ b)$。因此，考虑 $\boldsymbol{A} \in \mathsf{K}_{\mathrm{SI}}$ 和 $a \in A$。根据定理2.6，有两种情况：要么 a 是n-幂零，要么它是可逆的。

首先，假设 a 是 n-幂零的，即 a^n 是 $\boldsymbol{A}$ 的零元。结合 φ 的定义，可得 $\boldsymbol{A} \vDash \varphi(a,\ a^n)$。接下来考虑满足 $\boldsymbol{A} \vDash \varphi(a,\ b)$ 的 $b \in A$。我们需要证明 $b = a^n$。根据 φ 的定义，我们有 $b^2 a = b$。我们将通过对 k 使用归纳法，证明对每个 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $b = b^{2^k} a^{2^k - 1}$。在基础情形下，我们有 $k = 0$，等式显然成立。对于归纳步骤，假设对于

某个 $k \in \mathbb{N}$。我们需要证明 $b = b^{2^{k+1}} a^{2^{k+1}-1}$。利用归纳假设和恒等式 $b^2 a = b$，我们得到

$$b = b^{2^k} a^{2^k-1} = (b^2 a)^{2^k} a^{2^k-1} = b^{2^{k+1}} a^{2^k} a^{2^k-1} = b^{2^{k+1}} a^{2^{k+1}-1},$$

如所需。接着，考虑满足 $n \leqslant 2^{k+1} - 1$ 的 $k \in \mathbb{N}$。我们有 $b = ca^n$，其中 $c = b^{2^{k+1}} a^{2^{k+1}-n-1}$。因此，$b = a^n$，因为 a^n 是 $\boldsymbol{A}$ 的零元。

接下来，我们考虑 a 可逆的情形。结合 φ 的定义，可得 $\boldsymbol{A} \vDash \varphi(a, a^{-1})$。接着，考虑满足 $\boldsymbol{A} \vDash \varphi(a, b)$ 的 $b \in A$。我们需要证明 $b = a^{-1}$。根据 φ 的定义，我们有 $a^{n+1} b = a^n$。由此可得

$$b = (a^{-1})^{n+1} a^{n+1} b = (a^{-1})^{n+1} a^n = a^{-1}.$$

He因此，我们得出结论：φ 定义了 $\mathsf{ext}_{\mathrm{PP}}(\mathsf{K})$ 的一个一元成员 f，如所需 .

最后，根据 φ 的定义可知，对于所有 $\boldsymbol{A} \in \mathsf{K}$ 以及使得 a^{-1} 存在的 $a \in A$，都有 $\boldsymbol{A} \vDash \varphi(a, a^{-1})$。由于 φ 定义了 f，在这种情况下，我们有 $a \in \mathsf{dom}(f^{\boldsymbol{A}})$，且 $f^{\boldsymbol{A}}(a) = a^{-1}$。⊠

6. Beth companions

称簇 K 的一个 pp 扩张是 簇 K 的 Beth 伴随，当且仅当它具有强Beth可定义性，或者等价地，具有强满态射满射性（见 [CKM25b，定理 11。6]）。尽管一个簇未必有 Beth 伴随，但在项等价意义下，它至多只有一个（见 [CKM25b，定理 11。7]）。因此，我们谈论（若存在）簇 K 的 Beth 伴随。我们的目标是证明以下结论。

定理 6.1。对于交换幺半群的一个簇K，以下条件等价：

(i) K 有 *Beth* 伴随；(ii) K 具有强满态射满射性；
(iii) K是逆的。

注 6.2。一个簇恰好在具有强满态射满射性时才是其自身的 Beth 伴随（见 [CKM25b，定理 11.9(vi) 和 11。6]），由此可知，如果交换幺半群的一个簇 K 有 Beth 伴随，那么 K 就是其自身的 Beth 伴随。⊠

证明 定理6.1 的证明依赖于下面的观察（见 [CKM25b，命题 14.6]).

命题 6.3. 设K 是一个簇，且有一个形式为 $\mathbb{S}(\mathsf{K}[\mathscr{L}_{\mathcal{F}}])$的 *Beth* 伴随。那么，对每个 $f \in \mathsf{imp}_{\mathrm{PP}}(\mathsf{K})$，都存在 $g \in \mathsf{ext}_{\mathrm{PP}}(\mathsf{K})$，使得对于所有 $\boldsymbol{A}[\mathscr{L}_{\mathcal{F}}] \in \mathsf{K}[\mathscr{L}_{\mathcal{F}}]$ 和$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathsf{dom}(f^{\boldsymbol{A}})$，我们有

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathsf{dom}(g^{\boldsymbol{A}}) \quad \textit{and} \quad f^{\boldsymbol{A}}(a_1, \ldots, a_n) = g^{\boldsymbol{A}}(a_1, \ldots, a_n).$$

现在我们可以证明定理6.1

证明。(iii)⇒(ii)：只需证明对于所有 $\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{B} \in \mathsf{K}$，都有 $\mathsf{d}_{\mathsf{K}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = A$。因此，考虑$\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{B} \in \mathsf{K}$。注意到 $\boldsymbol{A}_{\mathsf{s}} \leqslant \boldsymbol{B}_{\mathsf{s}} \in \mathsf{S}$。此外，$\boldsymbol{A}_{\mathsf{s}}$ 是一个逆半群，因为根据假设，$\boldsymbol{A}$ 是一个逆幺半群。因此，根据定理 2.12，$\mathsf{d}_{\mathsf{S}}(\boldsymbol{A}_{\mathsf{s}}, \boldsymbol{B}_{\mathsf{s}}) = A$。结合定理 3.1 和定理 3.2，可得 $\mathsf{d}_{\mathsf{K}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = A$。

(ii)⇒(i)：由于 K 是自身的 pp 扩张，该假设确保 K 是自身的 Beth 伴随。

（i）⇒（iii）：令 $\boldsymbol{B}$ 为交换幺半群[3] 其底集为

$$B = \{0,1\}^3 \cup \{0\},$$

中性元 $\langle 0, \mathbf{0}, 0\rangle$，乘法对每个 a， $b \in B$ 定义如下

$$ab = \begin{cases} \langle k_1+k_2, m_1+m_2, n_1+n_2\rangle & \text{if } a=\langle k_1,m_1,n_1\rangle, b=\langle k_2,m_2,n_2\rangle, \\ & \text{and } \langle k_1+k_2, m_1+m_2, n_1+n_2\rangle \in \{0,1\}^3; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们先来看下面这个观察。

命题 6.4. </style}幺半群 是$\mathbf{C}_2$的一个次直不可约成员。

命题的证明。 </style} $\boldsymbol{B}$ 的定义保证它是一个交换幺半群，并且 $\boldsymbol{B} \vDash x^2 \approx x^3$。由于 $\mathbf{C}_2$ 相对于交换幺半群由 $x^2 \approx x^3$公理化，因此我们得到 $\boldsymbol{B} \in \mathbf{C}_2$。接下来，我们将证明 $\boldsymbol{B}$ 是次直不可约的。为此，只需证明

$$\langle 0, \langle 1,1,1\rangle\rangle \in \bigcap(\mathsf{Con}(\boldsymbol{B}) - \{\mathrm{id}_B\}).$$

考虑 $\theta \in \mathsf{Con}(\boldsymbol{B}) - \{\mathrm{id}_B\}$。我们将证明 $\langle 0, \langle 1, \mathbf{1}, 1\rangle\rangle \in \theta$。由于 $\theta \neq \mathrm{id}_B$， 存在$\langle a, b\rangle \in \theta$ 满足 $a \neq b$。分两种情况：要么 $0 \in \{a,b\}$，要么 $0 \notin \{a,b\}$。先假设$0 \in \{a,b\}$。由对称性，不妨设 $a = 0$。由于 $b \neq a = 0$ 且 $B = \{0,1\}^3 \cup \{0\}$，对于某些 $k, m, n \in \{0,1\}$，有 $b = \langle k, m, n\rangle$。于是 $\langle 1-k, 1-m, 1-n\rangle \in \{0,1\}^3 \subseteq B$。由 $\langle 0, \langle k, m, n\rangle\rangle = \langle a, b\rangle \in \theta$ 可得

$$\langle 0, \langle 1,1,1\rangle\rangle = \langle 0 \cdot \langle 1-k, 1-m, 1-n\rangle, \langle k,m,n\rangle \cdot \langle 1-k, 1-m, 1-n\rangle\rangle \in \theta.$$

最后，我们考虑 $0 \notin \{a,b\}$ 的情形。由于 $B = \{0,1\}^3 \cup \{0\}$，我们有 $a = \langle k_1, m_1, n_1\rangle$和 $b = \langle k_2, m_2, n_2\rangle$，其中 $k_i, m_i, n_i \in \{0,1\}$。由于 $a \neq b$，利用对称性，不妨假设$k_1 \neq k_2$，特别是 $k_1 < k_2$。后者意味着 $k_1 = 0$ 和 $k_2 = 1$。接着考虑 $\langle 1-k_1, 1-m_1, 1-n_1\rangle \in \{0,1\}^3 \subseteq B$。由于 $k_2 = 1$和 $1 - k_1 = 1 - 0 = 1$，我们有 $k_2 + (1-k_1) = 2$，由此可得 $\langle k_2, m_2, n_2\rangle \cdot \langle 1-k_1, 1-m_1, 1-n_1\rangle = 0$。另一方面，$\langle k_1, m_1, n_1\rangle \cdot \langle 1-k_1, 1-m_1, 1-n_1\rangle = \langle 1, \mathbf{1}, 1\rangle$。结合 $\langle\langle k_1, m_1, n_1\rangle, \langle k_2, m_2, n_2\rangle\rangle = \langle a, b\rangle \in \theta$，可得 $\langle 0, \langle 1, \mathbf{1}, 1\rangle\rangle \in \theta$。⊠

为导出矛盾，假设 K有一个 Beth 伴随且不是逆的。令 $\mathbb{S}(\mathsf{K}[\mathscr{L}_\mathcal{F}])$ 为 K 的 Beth 伴随，并回忆根据 pp 扩张的定义， $\mathcal{F} \subseteq \mathsf{ext}_{\mathrm{PP}}(\mathsf{K})$。此外，回忆 $i_{\mathsf{K},1}$ 是 $\mathsf{imp}_{\mathrm{PP}}(\mathsf{K})$ 的一个三元成员，由 Isbell 公式 φ_1 (见命题 4.5 和例 4.6) 定义。根据命题6.3 ， 存在$g \in \mathsf{ext}_{\mathrm{PP}}(\mathsf{K})$ 使得

$$\langle a_1, a_2, a_3\rangle \in \mathsf{dom}(g^{\boldsymbol{C}}) \quad \text{and} \quad i^{\boldsymbol{C}}_{\mathsf{K},1}(a_1,a_2,a_3) = g^{\boldsymbol{C}}(a_1,a_2,a_3) \tag{19}$$

对于所有 $\langle a_1, a_2, a_3\rangle \in \mathsf{dom}(i^{\boldsymbol{C}}_{\mathsf{K},1})$ 和 $\boldsymbol{C}[\mathscr{L}_\mathcal{F}] \in \mathsf{K}[\mathscr{L}_\mathcal{F}]$。

[3]幺半群的定义 $\boldsymbol{B}$ 使人联想到 Higgings 的 [Hig83，第 2]节。

由于 K 不是逆元，定理 2.11 和命题 6.4 保证 $\boldsymbol{B} \in \mathsf{K}_{\mathrm{SI}}$。因此，我们可以应用定理 5.2，得到某个

$$\boldsymbol{A} \in \mathsf{K}_{\mathrm{SI}} \text{ with } \boldsymbol{B} \leqslant \boldsymbol{A} \text{ such that } f^{\boldsymbol{A}} \text{ is total for every } f \in \mathcal{F} \cup \{g\}. \tag{20}$$

断言 6.5。 *幺半群 $\boldsymbol{A}$ 有一个零元，即 0。*

命题的证明。 由于 $\boldsymbol{B} \leqslant \boldsymbol{A}$，我们有 $0 = 0^2$ 且 $0 \neq 1$。由于 $\boldsymbol{A}$ 是次直不可约的，命题 2.9 蕴含 0 是 $\boldsymbol{A}$的零元。⊠

命题 6.6。 *我们有*

$$\langle\langle 1,1,0\rangle,\langle 0,1,0\rangle,\langle 0,1,1\rangle\rangle \in \mathsf{dom}(i^{\boldsymbol{A}}_{\mathsf{K},1}) \quad \textit{and} \quad i^{\boldsymbol{A}}_{\mathsf{K},1}(\langle 1,1,0\rangle,\langle 0,1,0\rangle,\langle 0,1,1\rangle) = \langle 1,1,1\rangle.$$

命题的证明。 由 $\boldsymbol{B}$ 和 ψ_1 的定义可得

$$\boldsymbol{B} \vDash \psi_1(\langle 0,0,1\rangle,\langle 1,0,0\rangle,\langle 1,1,0\rangle,\langle 0,1,0\rangle,\langle 0,1,1\rangle,\langle 1,1,1\rangle).$$

根据 φ_1 的定义，这相当于

$$\boldsymbol{B} \vDash \varphi_1(\langle 1,1,0\rangle,\langle 0,1,0\rangle,\langle 0,1,1\rangle,\langle 1,1,1\rangle).$$

由于正原子公式 φ_1 定义了隐式运算 $i_{\mathsf{K},\,1}$ 和 $\boldsymbol{B} \leqslant \boldsymbol{A}$，该陈述成立，因为正原子公式的有效性在扩张下保持不变。⊠

此外，回想一下，$g \in$ 隐$_{\mathrm{PP}}(\mathsf{K})$ 是三元的，并注意到 $g^{\boldsymbol{A}}$ 根据（20）是全定义的。因此，由推论 4.8 可知，存在 $k \in \mathbb{N}$ 和三元幺半群项 t_1、……、t_{2k+1} 使得

$$g^{\boldsymbol{A}}(a_1,a_2,a_3) = i^{\boldsymbol{A}}_{\mathsf{K},k}(t^{\boldsymbol{A}}_1(a_1,a_2,a_3),\dots,t^{\boldsymbol{A}}_{2k+1}(a_1,a_2,a_3)) \text{ for all } a_1,a_2,a_3 \in A.$$

因此，也存在

$$\begin{aligned} n = \min\{m \in \mathbb{N} &: \text{存在三元幺半群项 } t_1\text{、……、} t_{2m+1} \text{ 使得} \\ & g^{\boldsymbol{A}}(a_1,a_2,a_3) = i^{\boldsymbol{A}}_{\mathsf{K},m}(t^{\boldsymbol{A}}_1(a_1,a_2,a_3),\dots,t^{\boldsymbol{A}}_{2m+1}(a_1,a_2,a_3)) \\ & \text{for all } a_1,a_2,a_3 \in A - \{0\}\}. \end{aligned} \tag{21}$$

Cl命题 6.7。 *我们可以假设对每个 $m \leqslant 2n+1$，都有 $t_m \in \{x_1,x_2,x_3,1\}$。*

命题的证明。 考虑 $m \leqslant 2n+1$。由于 $\boldsymbol{A}$ 是交换幺半群，我们可以假设 t_m 具有如下形式：$x_1^{k_1}x_2^{k_2}x_3^{k_3}$其中某个 k_1、k_2、$k_3 \in \mathbb{N}$。若 $k_1+k_2+k_3 \leqslant 1$，则我们可以假设 $t_m \in \{x_1,x_2,x_3,1\}$，如所需。接着，反设 $k_1+k_2+k_3 > 1$，以导出矛盾。回想一下，$\{0,1\}^3 \subseteq B \subseteq A$。依次应用以下事实$\boldsymbol{B} \leqslant \boldsymbol{A}$（由（20）成立）、假设 $t_m = x_1^{k_1}x_2^{k_2}x_3^{k_3}$以及 $\boldsymbol{B}$的定义，并结合 $k_1+k_2+k_3 > 1$，可得

$$\begin{aligned} t^{\boldsymbol{A}}_m(\langle 1,1,0\rangle,\langle 0,1,0\rangle,\langle 0,1,1\rangle) &= t^{\boldsymbol{B}}_m(\langle 1,1,0\rangle,\langle 0,1,0\rangle,\langle 0,1,1\rangle) \\ &= \langle 1,1,0\rangle^{k_1}\langle 0,1,0\rangle^{k_2}\langle 0,1,1\rangle^{k_3} \\ &= 0. \end{aligned}$$

结合断言 6.5，上述推导可得

$$0 = t^{\boldsymbol{A}}_m(\langle 1,1,0\rangle,\langle 0,1,0\rangle,\langle 0,1,1\rangle) \text{ is a zero element for } \boldsymbol{A}. \tag{22}$$

现在，注意到 $\boldsymbol{A} \in \mathsf{K}$，并且代数 $\boldsymbol{A}[\mathscr{L}_{\mathcal{F}}]$ 由（20）定义。因此，$\boldsymbol{A}[\mathscr{L}_{\mathcal{F}}] \in \mathsf{K}[\mathscr{L}_{\mathcal{F}}]$。结合（19）和断言 6.6，可得

$$\langle\langle 1, 1, 0\rangle, \langle 0, 1, 0\rangle, \langle 0, 1, 1\rangle\rangle \in \mathsf{dom}(g^{\boldsymbol{A}}) \quad \text{and} \quad g^{\boldsymbol{A}}(\langle 1, 1, 0\rangle, \langle 0, 1, 0\rangle, \langle 0, 1, 1\rangle) = \langle 1, 1, 1\rangle.$$

根据（21），这意味着

$$i^{\boldsymbol{A}}_{\mathsf{K},n}(t^{\boldsymbol{A}}_1(\langle 1, 1, 0\rangle, \langle 0, 1, 0\rangle, \langle 0, 1, 1\rangle), \ldots, t^{\boldsymbol{A}}_{2n+1}(\langle 1, 1, 0\rangle, \langle 0, 1, 0\rangle, \langle 0, 1, 1\rangle)) = \langle 1, 1, 1\rangle.$$

由于$i_{\mathsf{K},\ n}$ 由 φ_n 定义，我们得到

$$\boldsymbol{A} \vDash \varphi_n(t^{\boldsymbol{A}}_1(\langle 1, 1, 0\rangle, \langle 0, 1, 0\rangle, \langle 0, 1, 1\rangle), \ldots, t^{\boldsymbol{A}}_{2n+1}(\langle 1, 1, 0\rangle, \langle 0, 1, 0\rangle, \langle 0, 1, 1\rangle), \langle 1, 1, 1\rangle).$$

最后，将推论 4.2 和（22）应用于上述等式，我们得出 $0 = \langle 1,\ 1,\ 1\rangle$，这是错误的。

⊠

命题 6.8。 我们有 $n \neq 0$、 $t_2 \neq 1$ 和 $t_1 \neq t_2$。

命题的证明。 我们首先证明 $n \neq 0$。反设成立，以导出矛盾。一方面，命题6.7 蕴含

$$t^{\boldsymbol{A}}_1(\langle 1, 1, 0\rangle, \langle 0, 1, 0\rangle, \langle 0, 1, 1\rangle) \in \{\langle 0, 0, 0\rangle, \langle 1, 1, 0\rangle, \langle 0, 1, 0\rangle, \langle 0, 1, 1\rangle\}. \tag{23}$$

另一方面，依次应用（19）和命题 6.6，得到

$$\begin{aligned} g^{\boldsymbol{A}}(\langle 1, 1, 0\rangle, \langle 0, 1, 0\rangle, \langle 0, 1, 1\rangle) &= i^{\boldsymbol{A}}_{\mathsf{K},1}(\langle 1, 1, 0\rangle, \langle 0, 1, 0\rangle, \langle 0, 1, 1\rangle) \\ &= \langle 1, 1, 1\rangle. \end{aligned}$$

结合（21）、 $n = 0$的假设以及$i_{\mathsf{K}的0}$定义，上述公式可得

$$\begin{aligned} t^{\boldsymbol{A}}_1(\langle 1, 1, 0\rangle, \langle 0, 1, 0\rangle, \langle 0, 1, 1\rangle) &= i^{\boldsymbol{A}}_{\mathsf{K},0}(t^{\boldsymbol{A}}_1(\langle 1, 1, 0\rangle, \langle 0, 1, 0\rangle, \langle 0, 1, 1\rangle)) \\ &= g^{\boldsymbol{A}}(\langle 1, 1, 0\rangle, \langle 0, 1, 0\rangle, \langle 0, 1, 1\rangle) \\ &= \langle 1, 1, 1\rangle, \end{aligned}$$

这与（23）矛盾。因此，我们得出 $n \geqslant 1$，如所期望的那样。

接下来，我们证明 $t_2 \neq 1$ 和 $t_1 \neq t_2$。 反设$t_2 = 1$ 或 $t_1 = t_2$成立，以导出矛盾。我们将证明存在三元幺半群项$s_1, \ldots, s_{2n-1}$，使得这与（21）以及以下事实矛盾：Isbell 公式 φ_k 对每个 $k \in \mathbb{N}$ 定义了 $i_{\mathsf{K},\ k}$

$$\boldsymbol{A} \vDash \varphi_{n-1}(s^{\boldsymbol{A}}_1(a_1, a_2, a_3), \ldots, s^{\boldsymbol{A}}_{2n-1}(a_1, a_2, a_3), g^{\boldsymbol{A}}(a_1, a_2, a_3)) \tag{24}$$

对所有 a_1、 a_2、 $a_3 \in A - \{0\}$。

根据 $t_2 = 1$ 或 $t_1 = t_2$，我们分两种情况讨论。先考虑 $t_2 = 1$ 的情形。由（21）以及 φ_n 定义了 $i_{\mathsf{K},\ n}$ 可得，对所有 a_1、 a_2、 $a_3 \in A - \{0\}$，

$$\boldsymbol{A} \vDash \varphi_n(t^{\boldsymbol{A}}_1(a_1, a_2, a_3), 1, t^{\boldsymbol{A}}_3(a_1, a_2, a_3), \ldots, t^{\boldsymbol{A}}_{2n+1}(a_1, a_2, a_3), g^{\boldsymbol{A}}(a_1, a_2, a_3)).$$

因此，我们可以应用命题 4.4 （特别是其情形（i）），从而得到（24）对所有 a_1、 a_2、 $a_3 \in A - \{0\}$ 成立，其中令 $s_1 = t_1 t_3$ 且 $s_i = t_{i+2}$ 当 $1 < i \leqslant 2n - 1$时。

接下来，我们考虑 $t_1 = t_2$ 的情形。我们先给出以下观察。

子断言 6.9. 设 $a_1, a_2, a_3 \in A - \{0\}$。则存在 $c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n \in A$，使得 d_1可逆，并且 $t_1^{\boldsymbol{A}}(a_1, a_2, a_3) = t_2^{\boldsymbol{A}}(a_1, a_2, a_3)$ 且

$$\boldsymbol{A} \vDash \psi_n(c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n, t_1^{\boldsymbol{A}}(a_1, a_2, a_3), \ldots, t_{2n+1}^{\boldsymbol{A}}(a_1, a_2, a_3), g^{\boldsymbol{A}}(a_1, a_2, a_3)).$$

子断言的证明。由（21）可知，φ_n 定义了 $i_{\mathsf{K},\,n}$，根据 φ_n 的定义，存在 c_1、……、c_n，d_1、……、$d_n \in A$ 使得

$$\boldsymbol{A} \vDash \psi_n(c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n, t_1^{\boldsymbol{A}}(a_1, a_2, a_3), \ldots, t_{2n+1}^{\boldsymbol{A}}(a_1, a_2, a_3), g^{\boldsymbol{A}}(a_1, a_2, a_3)).$$

此外，$t_1 = t_2$ 这一假设确保了 $t_1^{\boldsymbol{A}}(a_1, a_2, a_3) = t_2^{\boldsymbol{A}}(a_1, a_2, a_3)$。因此，剩下的唯一工作是证明 d_1 是可逆的。为此，注意到，ψ_n 中的方程（2）以及 $t_1^{\boldsymbol{A}}(a_1, a_2, a_3) = t_2^{\boldsymbol{A}}(a_1, a_2, a_3)$ 蕴含 $t_1^{\boldsymbol{A}}(a_1, a_2, a_3) = d_1 t_2^{\boldsymbol{A}}(a_1, a_2, a_3) = d_1 t_1^{\boldsymbol{A}}(a_1, a_2, a_3)$。因此，

$$t_1^{\boldsymbol{A}}(a_1, a_2, a_3) = d_1^m t_1^{\boldsymbol{A}}(a_1, a_2, a_3) \text{ for every } m \in \mathbb{N}.$$

回顾 (20) 可知，$\boldsymbol{A}$ 是次直不可约的。因此，根据定理 2.6，d_1 要么是幂零的，要么是可逆的。为导出矛盾，假设 d_1 对某个 $m \in \mathbb{N}$ 是 m-幂零的。结合上面的显示式，可得 $t_1^{\boldsymbol{A}}(a_1, a_2, a_3) = d_1^m t_1^{\boldsymbol{A}}(a_1, a_2, a_3) = d_1^m$。由于 d_1 是 m-幂零的，我们得出，对于 $\boldsymbol{A}$，$t_1^{\boldsymbol{A}}(a_1, a_2, a_3)$ 是零元。结合命题 2.1(i)和断言 6.5，这意味着 $t_1^{\boldsymbol{A}}(a_1, a_2, a_3) = 0$。此外，回顾断言 6.7 可知$t_1 \in \{x_1, x_2, x_3, 1\}$。因此，$t_1^{\boldsymbol{A}}(a_1, a_2, a_3) \in \{a_1, a_2, a_3, 1\}$。由于根据假设，$a_1, a_2, a_3 \in A - \{0\}$，且 $t_1^{\boldsymbol{A}}(a_1, a_2, a_3) = 0$，我们推得 $0 = t_1^{\boldsymbol{A}}(a_1, a_2, a_3) = 1$。因此，$\boldsymbol{A}$ 是平凡的，这与其为次直不可约的假设相矛盾。由此，我们得出 d_1 是可逆的。⊠

鉴于子断言 6.9，我们可以应用命题 4.4 （特别是其情形（ii））， 从而得到（24）对所有 a_1， a_2， $a_3 \in A - \{0\}$ 令 $s_1 = t_3$ 且 $s_i = t_{i+2}$，其中 $1 < i \leqslant 2n - 1$。 ⊠

根据断言6.8，我们有 $t_1 \neq t_2$ 和 $t_2 \neq 1$。因此，断言 6.7 推出 $t_2 \in \{x_1, x_2, x_3\}$。此外，利用对称性，不妨设 $t_2 = x_1$。[4] 由（21）可知

$$\begin{aligned} i_{\mathsf{K},n}^{\boldsymbol{A}}(t_1^{\boldsymbol{A}}(\langle 1,0,0\rangle, \langle 0,0,0\rangle, \langle 0,0,0\rangle), \ldots, t_{2n+1}^{\boldsymbol{A}}(\langle 1,0,0\rangle, \langle 0,0,0\rangle, \langle 0,0,0\rangle)) \\ = g^{\boldsymbol{A}}(\langle 1,0,0\rangle, \langle 0,0,0\rangle, \langle 0,0,0\rangle). \end{aligned}$$

回顾一下，$i_{\mathsf{K},\,n}$ 由 φ_n定义。结合上述公式以及 φ_n的定义，可知存在某些 c_1，……，c_n，d_1，……，$d_n \in A$ 使得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \vDash \psi_n(c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n, t_1^{\boldsymbol{A}}(\langle 1,0,0\rangle, \langle 0,0,0\rangle, \langle 0,0,0\rangle), \ldots \\ \ldots, t_{2n+1}^{\boldsymbol{A}}(\langle 1,0,0\rangle, \langle 0,0,0\rangle, \langle 0,0,0\rangle), g^{\boldsymbol{A}}(\langle 1,0,0\rangle, \langle 0,0,0\rangle, \langle 0,0,0\rangle)). \end{aligned}$$

因此，方程（2）中的 ψ_n 确保了

$$t_1^{\boldsymbol{A}}(\langle 1,0,0\rangle, \langle 0,0,0\rangle, \langle 0,0,0\rangle) = d_1 t_2^{\boldsymbol{A}}(\langle 1,0,0\rangle, \langle 0,0,0\rangle, \langle 0,0,0\rangle).$$

[4] t_2 为 x_2 或 x_3 的情形，可在下一条证明中以自然的方式调换参数 $\langle 1, 0, 0\rangle$,$\langle 0, 0, 0\rangle$和 $\langle 0, 0, 0\rangle$ 的顺序来处理。

此外，断言 6.7 保证 $t_1 \in \{x_2, x_3, 1\}$，因为 $t_1 \neq t_2 = x_1$ 根据假设。依次应用以下事实：$\langle 0,\ 0,\ 0\rangle$ 是 $\boldsymbol{A}$的中性元，$t_1 \in \{x_2, x_3, 1\}$、上述等式以及 $t_2 = x_1$，我们得到

$$1^{\boldsymbol{A}} = \langle 0,0,0\rangle = t_1^{\boldsymbol{A}}(\langle 1,0,0\rangle, \langle 0,0,0\rangle, \langle 0,0,0\rangle) = d_1 t_2^{\boldsymbol{A}}(\langle 1,0,0\rangle, \langle 0,0,0\rangle, \langle 0,0,0\rangle) = d_1\langle 1,0,0\rangle.$$

最后，我们有

$$1^{\boldsymbol{A}} = (1^{\boldsymbol{A}})^2 = d^2\langle 1,0,0\rangle^2 = d^2 \cdot 0 = 0,$$

其中第一个等式成立，是因为 $1^{\boldsymbol{A}}$ 是 $\boldsymbol{A}$的中性元；第二个等式由上面的推导得出，第三个由 $\boldsymbol{B}$的定义得出，第四个则由断言 6.5得出。注意，上述推导表明 $\boldsymbol{A}$ 是平凡的，这与 $\langle 0$、0和 $0\rangle \neq 0$ 都是 $\boldsymbol{A}$的元素这一事实矛盾。⊠

注 6.10. 设 K 是一个簇。回顾一下，同态 $f\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathsf{K}$ 时，若对于任意一对满足 $\boldsymbol{C} \in \mathsf{K}$ 的同态 $g, h\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$，

$$g \circ f = h \circ f \text{ implies } g = h$$

(例如，参见 [AHS06，定义 7.39])。我们称 K 具有

(i) 当所有 $\boldsymbol{K}$-满态射均为满射时，称其具有K-满态射满射性质；(ii) 当有限生成代数之间的所有$\boldsymbol{K}$-满态射均为满射时，称其具有K-弱上同态满射性质（例如，参见 [HMT85，第 259] 页及 [CKM25a]）。

换言之，K 具有（分别为弱）满同态满射性质，是指对于所有（分别为有限生成的）$\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{B} \in \mathsf{K}$，我们都有 $A = B$ 或$\mathsf{d}_{\mathsf{K}}(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}) \neq B$。顾名思义，强满态射满射性强于满同态满射性质，而后者又强于弱上同态满射性质。不过，当K具有融合性质时，这三种性质等价（参见例如 [BMR17，定理 1。3] 以及 [CKM25b，定理 7。14]）。

根据定理6.1，交换幺半群簇具有强满态射满射性质，当且仅当它是逆簇。因此，自然会想知道是否存在具有（分别为弱）满同态满射性质的非逆交换幺半群簇。在这条注记中，我们将对此问题给出完整的答案。

一方面，交换幺半群簇具有满同态满射性质，当且仅当它是逆簇；下面将对此加以说明。设 K 是一个非逆的交换幺半群簇。由定理 2.11 可知 $\mathsf{C}_2 \subseteq$K。在 [Hig83 的例 2], 中，Higgins 给出了一对交换半群 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，它们满足 $x^2 \approx x^3$，且 $\mathsf{d}_{\mathsf{CS}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = B \neq A$。添加一个新元素 1，使其分别作为 $\boldsymbol{A}$ 和$\boldsymbol{B}$ 的中性元，就能将它们变为一对幺半群 $\boldsymbol{A}^1 \leqslant \boldsymbol{B}^1 \in \mathsf{C}_2 \subseteq \mathsf{K}$，且满足 $A \neq B$。由于 $\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{A}_{\mathsf{s}}^1$ 和 $\boldsymbol{B} \leqslant \boldsymbol{B}_{\mathsf{s}}^1$，我们有

$$B = \mathsf{d}_{\mathsf{CS}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \subseteq \mathsf{d}_{\mathsf{CS}}(\boldsymbol{A}_{\mathsf{s}}^1, \boldsymbol{B}_{\mathsf{s}}^1) = \mathsf{d}_{\mathsf{CM}}(\boldsymbol{A}^1, \boldsymbol{B}^1), \tag{25}$$

其中第一步由假设成立，第二步由 [CKM25b、推论 4.6(i)], 得出，第三步则由命题3.8得出。此外，注意到 $1 \in A^1 \subseteq \mathsf{d}_{\mathsf{CM}}(\boldsymbol{A}^1, \boldsymbol{B}^1)$。结合 (25，可得$\mathsf{d}_{\mathsf{CM}}(\boldsymbol{A}^1, \boldsymbol{B}^1) = B^1 \neq A^1$。因此，K 不具有满同态满射性质，证毕（根据定理6.1，交换幺半群的逆簇具有这一性质）。

另一方面，交换幺半群簇 CM 的所有真子簇 K 都具有弱上同态满射性质。设 $\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{B} \in \mathsf{K}$ 有限生成。由于 CM 的每个真子簇都是局部有限的（例如参见 [SVV09, p. 23]），交换幺半群 $\boldsymbol{A}$ 是有限的。因此，要么$A = B$ 要么 $\mathsf{d}_{\mathsf{K}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \neq B$，这是 Howie 和 Isbell 的一项结果（参见 [HI67, Thm. 3.2]）。[5] 因此，K 具有弱上同态满射性质，证毕。注意，CM 本身不具有这一性质，因为交换幺半群 $\mathbb{N} = \langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle$ 和 $\mathbb{Z} = \langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$ 都是有限生成的，且 $\mathsf{d}_{\mathsf{CM}}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$（后者是因为逆元在幺半群同态下保持不变）。

这些观察结果总结在下表中，其中“ES”代表“满同态满射性质”。

⊠

	逆子簇	真非逆子簇	CM
弱 ES	✓	✓	×
ES	✓	×	×
强满同态满射性质	✓	×	×
Beth 伴随	✓	×	×

致谢。 第二位作者获得了由 MICIU/AEI/10.13039/501100011033 和 FSE+资助的 PREP2022-000927 项目资助，该项目是由 MICIU/AEI/10.13039/501100011033 和 FEDER、欧盟资助的 PID2022-141529NB-C21 研究项目的一部分。第三位作者获得了由 MICIU/AEI/10.13039/501100011033 和 FEDER、欧盟资助的 PID2022-141529NB-C21 研究项目资助。他还获得了由欧盟地平线2020计划资助的 MSCA-RISE-Marie Sk-lodowska-Curie 研究与创新人员交流（RISE）项目 MOSAIC 101007627 的资助。

References

[AHS06] J. Ad´amek、H. Herrlich 和 G. E. Strecker。《抽象范畴与具体范畴：范畴之乐》。*Repr. Theory Appl. Categ.*，(17):1–507，2006。[Ber11] C. Bergman。《普遍代数：基础与精选主题》。Chapman & Hall 纯粹与应用数学丛书。Chapman and Hall/CRC，2011。[Ber15] G. M. Bergman。《一般代数与普遍构造导论》。Universitext。Springer，Cham，第二版，2015。[BMR17] G. Bezhanishvili、T. Moraschini 和 J. G. Raftery。剩余结构簇中的满态射。*J. Algebra*，492:185–211，2017。[BS12] S. Burris 和 H. P. Sankappanavar。《普遍代数教程》。2012 年。千禧年版，可在线获取。[CD90] L. Czelakowski 和 W. Dziobiak。其有限次子直不可约成员构成普遍类的同余分配拟簇。*Algebra Universalis*，27(1):128–149，1990。[CK90] C. C. Chang 和 H. J. Keisler。《模型论》，《逻辑与数学基础研究》第 73 卷。North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹，第三版，1990。[CKM25a] L. Carai、M. Kurtzhals 和 T. Moraschini。有限生成代数之间的满态射。*Indag. Math. (N.S.)*，36(5):1336–1354，2025。

[5] HI67 的陈述 [HI67，定理 3。2] 涉及交换半群。然而，根据推论 3.7和命题 3.8，并注意到幺半群与其半群约化具有相同的理想，交换幺半群簇的相应陈述也成立。

[CKM25b] L. Carai、M. Kurtzhals 和 T. Moraschini。隐式运算理论。可访问 https://arxiv.org/abs/2512.14326v1，2025 年。[CKM26] L. Carai、M. Kurtzhals 和 T. Moraschini。约化交换环中的隐式运算。准备中，2026 年。[GLV22] S. V. Gusev、Edmond W. H. Lee 和 Boris M. Vernikov。幺半群簇格。Jpn. J. Math.，17(2):117–183，2022。[Gri77] P. A. Grillet。关于亚直不可约交换半群。Pacific J. Math.，69(1):55–71，1977。[Gri01] P. A. Grillet。交换半群，《数学进展》（Dordrecht）第 2 卷。Kluwer Academic Publishers，2001。[HI67] J. M. Howie 和 J. R. Isbell。满态射与支配域。II。J. Algebra，6:7–21，1967。[Hig83] P. M. Higgins。满态射均为满上的交换半群簇。Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A，94(1-2):1–7，1983。[HMT85] L. Henkin、J. D. Monk 和 A. Tarski。柱形代数。第二部分，《逻辑与数学基础研究》第 115 卷。North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹，1985。[How96] J. M. Howie。Isbell 之字定理及其推论。载于《半群理论及其应用》（美国路易斯安那州新奥尔良，1994），《伦敦数学学会讲义丛书》第 231 卷，第 81–91 页。Cambridge Univ. Press，剑桥，1996。[Isb66] J. R. Isbell。满态射与支配域。载于《范畴代数会议论文集》（美国加利福尼亚州拉霍亚，1965），第 232–246 页。Springer-Verlag New York, Inc.，纽约，1966。[KMPT82] E. W. Kiss、L. M´arki、P. Pr¨ohle 和 W. Tholen。范畴代数性质。关于 amalgamation、同余扩张、满态射、剩余小性和内射性的汇编。Studia Sci. Math. Hungar.，18(1):79–140，1982。[Mak99] L. L. Maksimova。模态逻辑与超直觉主义逻辑中的投射 Beth 性质。Algebra Log.，38(3):316–333，379，1999。[Mal58] A. I. Mal'cev。关于映 onto 有限群的同态。Ivanov. Gos. Ped. Inst. Uc. Zap.，18:49–60，1958。（俄文）。[ML98] S. Mac Lane。《工作数学家的范畴论》，Graduate Texts in Mathematics 第 5 卷。Springer-Verlag，纽约，第二版，1998。[Mor18] T. Moraschini。广义拟簇之间伴随的逻辑与代数刻画。J. Symb. Log.，83(3):899–919，2018。[Rap75] R. Raphael。关于正则环和强正则环的若干评论。Canad. Math. Bull.，17(5):709–712，1974/75。[SVV09] L. N. Shevrin、B. M. Vernikov 和 M. V. Volkov。半群簇格。Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.，(3):3–36，2009。

Luca Carai: Dipartimento di Matematica "Federigo Enriques", Università degli Studi di Milano, via Cesare Saldini 50, 20133 Milano, Italy电子邮箱地址：luca.carai.uni@gmail.com

Miriam Kurtzhals and Tommaso Moraschini: Departament de Filosofia, Facultat de Filosofia, Universitat de Barcelona (UB), Carrer Montalegre, 6, 08001 Barcelona, Spain电子邮箱地址：mkurtzku7@alumnes.ub.edu and tommaso.moraschini@ub.edu