arXiv:2603.13954v1 [math.OC] 14 Mar 2026

有效的拉塞尔扰动正定性定理

Igor Klep* Victor Magron† Matthias Schötz‡

摘要

我们研究非负多项式 p 在$\mathbb{R}^d$ 上的平方和（SOS）证书，以及它们对无界域上多项式优化的蕴含关系。基于 Lasserre 的扰动方法，我们考虑由加权多项式尾项 $\sum_{n=0}^{N}(x\cdot x)^n/(n!)^t$ （$0<t<1$）扩充的 p 的平方和表示。我们的主要结果给出了实现 ε 精度证书所需截断阶数 N 的显式定量界。利用梅勒核的正性性质以及受多项式核方法启发的技术，我们证明 N 关于 $1/\varepsilon$ 呈多项式增长，其增长率为 $N=O((\|p\|/\varepsilon)^{1/(1-t)})$。

关键词。多项式优化；平方和；正定性定理；非紧优化；核方法。

2020年数学主题分类。90C26; 13J30; 90C22; 42C05; 14P10; 33C45; 41A25.

1 引言

1.1 主要结果

我们用$\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]$ 表示由 $d\in\mathbb{N}$ 个变量 $x_1,\dots,x_d$构成的实系数多项式代数，并定义平方和的凸锥，

$$\sum\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]^2 := \Big\{ \sum\nolimits_{\ell=1}^{k} p_\ell^2 \;\Big|\; k\in\mathbb{N}_0;\ p_1,\dots,p_k\in\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d] \Big\}.$$

显然 $p(\xi)\geq 0$ 对所有 $p\in\sum\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]^2$ 和 $\xi\in\mathbb{R}^d$均成立。在一维情形中，逆命题也成立，即多项式 $p\in\mathbb{R}[z]$ 满足 $p(\xi)\geq 0$ 对所有 $\xi\in\mathbb{R}$ 当且仅当 $p\in\sum\mathbb{R}[z]^2$ （这是代数学基本定理的一个众所周知的推论，参见例如 [Sch17，命题 3。1]）。但如果 $d\geq 2$，例如就有 Motzkin 多项式

$$\mathcal{M} := x_1^2x_2^2(x_1^2+x_2^2-3)+1\in\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d],$$

*卢布尔雅那大学数学与物理学院，Jadranska 21, 1000 Ljubljana & University of Primorska 数学、自然科学与信息技术学院，Glagoljaška 8, 6000 Koper, 斯洛文尼亚。电子邮箱：igor.klep@fmf.uni-lj.si

†图卢兹大学；LAAS-CNRS，罗什上校大道 7 号，F-31400 图卢兹，法国。电子邮箱：victor.magron@laas.fr

‡维尔茨堡大学，数学研究所，埃米尔·费舍尔街 31 号，97074 维尔茨堡，德国。电子邮件：matthias.schoetz@uni-wuerzburg.de

它满足 $\mathcal{M}(\xi) \geq 0$ 对所有 $\xi \in \mathbb{R}^d$均成立，但 $\mathcal{M} + \lambda \notin \sum \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_d]^2$ 对所有 $\lambda \in \mathbb{R}$ [Mar08，命题 1.2.2 和注 1.2。3]。然而， $\sum \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_d]^2$ 实际上在如下意义上，在逐点正多项式的凸锥中稠密：

定理 1 设 $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_d]$，则以下条件等价：

i.) $p(\xi) \geq 0$ *for all* $\xi \in \mathbb{R}^d$;

ii.) 对任意 $\epsilon \in]0, \infty[$，存在 $N \in \mathbb{N}_0$ 使得

$$p + \epsilon \sum_{n=0}^{N} \sum_{j=1}^{d} \frac{x_j^{2n}}{n!} \in \sum \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_d]^2; \tag{1}$$

ii'.) 对任意 $\epsilon \in]0, \infty[$，存在 $N \in \mathbb{N}_0$ 使得

$$p + \epsilon \sum_{n=0}^{N} \sum_{j=1}^{d} \frac{x_j^{2n}}{(2n)!} \in \sum \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_d]^2. \tag{2}$$

条件 *i* 与 *ii* 等价已由 [Las07], 通过结合矩问题理论中的 Carleman 条件与凸优化的一个对偶性结果得以证明。我们的首要贡献是利用一个简单的分离论证（并运用 Carleman 条件），简洁地证明条件 *i* 与 *ii'* 等价。尽管非平凡的蕴含关系 *i* $\Rightarrow$ *ii'* 在形式上强于 *i* $\Rightarrow$ *ii*，但这一扰动项渐近性质的改进实际上也可通过对 [Las07], 中的原始论证作少许调整而得到；不过我们的证明显著更短（见第 3 节）。

记 $\lfloor \cdot \rfloor, \lceil \cdot \rceil \colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ 分别表示下取整函数和上取整函数，即 $\lfloor \lambda \rfloor := \max\{ z \in \mathbb{Z} \mid z \leq \lambda \}$以及 $\lceil \lambda \rceil := \min\{ z \in \mathbb{Z} \mid \lambda \leq z \}$。我们的主要结果是对类似于式（1）和（2）中扰动的次数上界给出一个显式估计，不过这里的扰动项更宽松。

定理 2 设 $M \in \mathbb{N}$、 $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_d]$ 的次数至多为 $2M$，且 $t \in [0, 1[$, $\epsilon \in]0, \infty[$。假设对于所有 $\xi \in \mathbb{R}^d$ 都有 $p(\xi) \geq 0$，并令

$$\mu := M \binom{2M + d - 1}{d - 1}^{\frac{1}{2}} 2^{M + \frac{1}{2}} \in]0, \infty[. \tag{3}$$

设 $N_{\mathrm{expl}}(p/\epsilon) \in \mathbb{N}_0$ 为以下各项中的最大值

$$2M + \left\lceil \frac{5d}{2} \right\rceil + 2 \tag{4}$$

and

$$\left\lceil 2\mathrm{e}\left(4\mu \left\| p/\epsilon \right\|\right)^{\frac{1}{1-t}} \right\rceil + \max\left\{ 0, \left\lceil \frac{1}{1-t} \ln\left(\frac{(d+1)^2 \, 2^{2d} \left\| p/\epsilon \right\|}{\mu} \right) \right\rceil \right\} + \left\lfloor \frac{3d}{2} \right\rfloor + 1, \tag{5}$$

其中 e 是欧拉数，范数为 $\| \cdot \|$ 在 $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_d]$ 上，该范数将在定义 *12*中给出。于是

$$p + \epsilon \sum_{n=0}^{N_{\mathrm{expl}}(p/\epsilon)} \frac{1}{(n!)^t} \left(\sum\nolimits_{j=1}^{d} x_j^2 \right)^n \in \sum \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_d]^2. \tag{6}$$

显然，当 $\epsilon \to 0$ 时， $N_{\mathrm{expl}}(p/\epsilon) \sim \|p/\epsilon\|^{\frac{1}{1-t}}$ ，因此， $N_{\mathrm{expl}}(p/\epsilon)$ 对带有 $1/(n!)^t$-权重的扰动项具有多项式增长，其中 $t \in [0,1[$。定理 1 表明，通过添加满足 $t \in [1,2]$ 的 $1/(n!)^t$-加权扰动，也可以保证最终得到一个平方和分解；但在这种情况下，我们无法估计所需扰动次数（可能更快）的增长。我们也不知道， $t = 2$ 是否是这样一个最大数：添加 $1/(n!)^t$-加权扰动能够保证分解为平方和。然而，由于 $\sum\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]^2$ 与 $\mathrm{R}[x_1,\dots,x_d]$ 的任意有限维线性子空间的交集都是闭集（参见 Lau09, Cor. 3.34]）， 且 Motzkin 多项式 $\mathcal{M}$ 不是平方和，因此可以迭代地构造一个序列 $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ，其中 $]0,\infty[$ ，使得

$$\mathcal{M} + \sum_{n=0}^{N} \epsilon_n \Big(\sum\nolimits_{j=1}^{d} x_j^2\Big)^n \notin \sum\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]^2 \qquad \text{for all } N \in \mathbb{N}_0. \tag{7}$$

定理 2 的证明见第 4 节。我们的方法受到 Fang 和 Fawzi 首先提出的多项式核方法的启发 [FF21] (另见综述 [LS26])，并针对这一非紧致情形作了必要调整。具体而言，我们利用由埃尔米特多项式构造的积分核的性质，用它构造任意逐点为正的多项式的平方和逼近，然后估计逼近误差。

1.2 相关工作

1.2.1 Lasserre 的扰动正定性定理

Lasserre 提出的扰动正定性定理 [Las07] 通过推导 Carleman 条件的适当类比，已推广至其他正多项式空间。首个非交换类比见 [NGSA+13，定理 1]：作者证明，对于 Weyl 代数中在薛定谔表示下非负的任意元素，都存在另一个与之任意接近且可分解为厄米平方和的元素。随后在 [KSV23，定理 B], 中，作者证明，每个迹正非交换多项式都可以用非交换多项式的厄米平方和与交换子的和显式逼近，且其系数的 1-范数误差可任意小。最后， [KMV25，定理 6。9] 证明了：在实际概率测度上为正的矩多项式（即由交换变量及其形式混合矩构成的多项式表达式），在对其系数作任意小扰动后，可表示为平方和与平方的形式矩之和。

该微扰结果不仅具有理论意义，还对计算结果中观察到的某些数值误差具有实际影响。具体而言，在半定规划求解器的各种应用中，都有报告称，由数值误差导致了错误结果。这一问题在使用 Lasserre 层级求解多项式优化问题时尤为明显（例如，参见 [Wak12]）。关于这些误差， [Las07] 和 [NGSA+13]最初提出了一种直观但非正式的数学解释。后来， [LM19] 通过将求解器的输出解释为鲁棒优化的一种形式，系统地阐明了这一行为，并指出这是其运行过程中固有且一致的特征。在 [MED21], 中，作者提出了一种混合数值-符号算法，旨在为处于平方和锥内部的多项式计算精确的平方和证书

。该方法通过对输入多项式的系数施加有意扰动，利用半定规划求解器获得近似分解。

1.2.2 正定性定理的次数界与 Lasserre 矩-SOS 层级

虽然我们目前的研究聚焦于多项式在 整个 R 上 处处^{d}非负，但已有大量研究致力于分析基于 Schmüdgen 正定性定理 [Las01]和 Putinar 正定性定理 [Put93]的两个重要层级在（主要为）紧致约束集上的多项式优化中的渐近行为。假设 $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_d]$ 在给定的基本紧半代数集 $\{\xi \in \mathbb{R}^d \mid g_1(\xi) \geq 0, \ldots, g_m(\xi) \geq 0\}$上为正，其中每个$g_j \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_d]$。那么 Schmüdgen 正定性定理 [Sch91] 指出，存在 $N \in \mathbb{N}_0$，使得 p 属于由 $\mathcal{T}_N$ 定义的截断预序

$$\mathcal{T}_N := \left\{ \sum_{J \subseteq \{1,\ldots,m\}} \sigma_J g_J \;\middle|\; \begin{array}{l} m \in \mathbb{N}_0 \text{ and } \sigma_J \in \sum \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_d]^2 \text{ for } J \subseteq \{1, \ldots, m\} \\ \text{such that } \deg(\sigma_J g_J) \leq 2N \end{array} \right\},$$

其中 $g_J := \prod_{j \in J} g_j$对于 $J \subseteq \{1, \ldots, m\}$。在额外假设可行集的描述中包含一个球约束的情况下，Putinar 正定性定理 [Put93] 断言存在 $N \in \mathbb{N}_0$ 使得 p 属于由下式定义的截断二次模 $\mathcal{Q}_N$：

$$\mathcal{Q}_N := \left\{ \sum_{j=0}^{m} \sigma_j g_j \;\middle|\; \begin{array}{l} m \in \mathbb{N}_0 \text{ and } \sigma_j \in \sum \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_d]^2 \text{ for } j \in \{1, \ldots, m\} \\ \text{such that } \deg(\sigma_j g_j) \leq 2N \end{array} \right\}.$$

对于一般的紧致基本半代数集，Schmüdgen 型层级已在 [Sch04] 中证明能够在 $N = O(\varepsilon^{-c})$的次数界下认证 $p + \varepsilon$的非负性，其中 c是依赖于该集合的正数。最初，Putinar 型层级已知可依据 [NS07] 认证非负性，但速度较慢，其次数界为 $N = O(\exp(\varepsilon^{-c}))$。近期 [BM23] 中的工作显著改进了后一个结果，证明Putinar 型层级同样能够在 $N = O(\varepsilon^{-c})$下认证非负性，达到与Schmüdgen 型层级相当的性能。对于Schmüdgen 型层级的特殊情形，包括单位球面 [FF21], 单位球和标准单纯形 [Slo22], 以及超立方体 [LS23], ，已经证明可以选取 $c = 1/2$。对于由这类集合（单位球面、单位球或标准单纯形）的笛卡尔积构成的可行集， [Mag25] 中也获得了类似的次数界。二元超立方体 $\{0, 1\}^d$ 在 [SL23], 中被单独讨论，而近期[BS24]建立了超立方体上Putinar 型层级的 $O(1/\varepsilon)$次数界。在具有相关稀疏性的多项式优化背景下，假设输入数据足够稀疏， [KMRZ25], 中推导出了更优的次数界。对于非紧可行集，可以基于具有统一分母的有理函数的平方和构造Putinar 型层级。在这种情况下， [MM22]中也得到了类似的 $N = O(\varepsilon^{-c})$次数界。关于这些结果的详细综述，包括性能分析的紧性、局部最优性条件下的指数收敛以及有限收敛，请参阅近期综述 [LS26]。

1.3 致谢

本研究得到欧盟HORIZON–MSCA-2023-DN-JD计划在Horizon Europe（HORIZON）玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里行动框架下的支持，资助协议编号为101120296（TENORS）；同时还得到COMPUTE项目的支持。该项目由QuantERA II计划资助，该计划获得了欧盟H2020研究与创新计划的资助，GA编号为101017733 [redacted]。IK还感谢斯洛文尼亚研究局项目P1-0222以及J1-50002、N1-0217、J1-60011、J1-50001、J1-3004和J1-60025号资助。部分资助来自巴黎综合理工学院基金会，作为加斯帕尔·蒙日访问教授计划的一部分。IK和MS感谢巴黎综合理工学院与Inria在准备本文期间提供的接待。

2 一般事实与记号

我们将使用标准的多重指标记法：对于 $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$，记作 $\alpha! := \prod_{j=1}^d \alpha_j!$ 和 $|\alpha| := \sum_{j=1}^d \alpha_j$，于是 $x^\alpha := \prod_{j=1}^d x_j^{\alpha_j}$。多重指标可以逐分量比较，即 $\alpha \le \beta$ 对于 $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$ 意味着对所有 $j \in \{1, \dots, d\}$都有 $\alpha_j \le \beta_j$。此时我们也记作 $\binom{\beta}{\alpha} := \prod_{j=1}^d \binom{\beta_j}{\alpha_j}$。向下取整函数和上取整函数 $\lfloor \cdot \rfloor, \lceil \cdot \rceil \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{Z}^d$ 按分量定义。

我们将多项式代数 $\mathbb{R}[\,\cdot\,]$ 视为相应形式幂级数代数 $\mathbb{R}[[\,\cdot\,]]$的子代数。对于 $p \in \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_d]]$ 和 $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$，我们用 $[p]_\alpha \in \mathbb{R}$ 表示 x^α 的系数，使得$p = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d} [p]_\alpha \, x^\alpha$。设 $D \in \mathbb{N}_0$，则记作

$$\mathbb{R}[x_1, \dots, x_d]_D := \left\{ p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_d] \;\middle|\; [p]_\alpha = 0 \text{ for all } \alpha \in \mathbb{N}_0^d \text{ with } |\alpha| > D \right\} \tag{8}$$

次数至多为 D的关于 x_1、.....、 x_d的多项式空间。

凸锥 $\sum \mathbb{R}[x_1, \dots, x_d]^2$ 在$\mathbb{R}[x_1, \dots, x_d]$上诱导出偏序 $\preccurlyeq$，即，设 p， q $\in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_d]$，则

$$p \preccurlyeq q \qquad \text{if and only if} \qquad q - p \in \sum \mathbb{R}[x_1, \dots, x_d]^2. \tag{9}$$

显然， $p \preccurlyeq q$ 推出 $p(\xi) \le q(\xi)$ 对所有 $\xi \in \mathbb{R}^d$均成立；而在单变量情形（即 $d = 1$）下，反过来也成立，参见例如 [Sch17，命题 3。1]注意

$$0 \preccurlyeq p, \qquad pq \preccurlyeq pr, \qquad \textit{and} \qquad q + s \preccurlyeq r + s \tag{10}$$

对所有 $p \in \sum \mathbb{R}[x_1, \dots, x_d]^2$ 和 q， r， $s \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_d]$ 满足 $q \preccurlyeq r$的情形。接下来，考虑 p， $p' \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_d]$和 q， $q' \in \sum \mathbb{R}[x_1, \dots, x_d]^2$:

$$\text{If} \quad -q \preccurlyeq p \preccurlyeq q \quad \text{and} \quad -q' \preccurlyeq p' \preccurlyeq q', \quad \text{then} \quad -qq' \preccurlyeq pp' \preccurlyeq qq', \tag{11}$$

因为

$$qq' + pp' = \frac{(q+p)(q'+p') + (q-p)(q'-p')}{2} \in \sum \mathbb{R}[x_1, \dots, x_d]^2$$

and

$$qq' - pp' = \frac{(q+p)(q'-p') + (q-p)(q'+p')}{2} \in \sum \mathbb{R}[x_1, \dots, x_d]^2.$$

此外，以下估计也将很有帮助：

$$-\frac{1}{2}\left(\lambda p^2+\frac{q^2}{\lambda}\right)\preccurlyeq pq\preccurlyeq\frac{1}{2}\left(\lambda p^2+\frac{q^2}{\lambda}\right)\qquad\text{for any } p,q\in\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_d] \text{ and } \lambda\in]0,\infty[, \tag{12}$$

这是通过展开 $\left(\lambda^{1/2}p\pm\lambda^{-1/2}q\right)^2\in\sum\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_d]^2$ 得出的。

3 分离论证

本节的目标是给出定理 1 的一个简短证明。对于 a， $b\in\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_d]$，我们定义序区间 $[a,b]:=\left\{p\in\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_d]\;\middle|\;a\preccurlyeq p\preccurlyeq b\right\}$，它显然是$\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_d]$的一个凸子集。此外， $[-a,a]$ 对于所有 $a\in\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_d]$都是平衡的，即对于所有$p\in[-a,a]$， $-p\in[-a,a]$。我们还定义

$$U:=\bigcup_{N\in\mathbb{N}_0}\left[-\sum_{n=0}^{N}\sum_{j=1}^{d}\frac{x_j^{2n}}{(2n)!},\sum_{n=0}^{N}\sum_{j=1}^{d}\frac{x_j^{2n}}{(2n)!}\right]\subseteq\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_d]. \tag{13}$$

作为$\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_d]$，$U$中一列平衡凸子集的并集，它仍然是平衡的和凸的。

引理 3 集合 U是$\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_d]$ 的吸收的子集，即，对于每个 $p\in\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_d]$，存在$\lambda\in[0,\infty[$ 使得 $p\in\lambda U$。

证明： 令 $V:=\bigcup_{\lambda\in[0,\infty[}\lambda U,$，则我们需要证明 $V=\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_d]$。由于 U 是平衡的且为凸集， V 是 $\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_d]$ 的线性子空间。因此，只需证明对于所有满足 $\alpha\in\mathbb{N}_0^d$ 的单项式 x^α，有 $x^\alpha\in V$。显然，对于所有 $j\in\{1,\ldots,d\}$ 和 $n\in\mathbb{N}_0$，都有 $x_j^{2n}\in V$。我们还注意到，根据 U 是一列平衡的序区间之递增序列的并集这一性质，可得以下结论：若 $p\in\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_d]$ 且 $q\in\sum\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_d]^2\cap V$ 满足 $-q\preccurlyeq p\preccurlyeq q$，则 $p\in V$。

考虑满足对于所有 $j\in\{2,\ldots,d\}$ 均有 $\alpha_j=0$ 的 $\alpha\in\mathbb{N}_0^d$，则

$$-\frac{1}{2}\left(1+x_1^{2\alpha_1}\right)\preccurlyeq x^\alpha\preccurlyeq\frac{1}{2}\left(1+x_1^{2\alpha_1}\right)$$

由（12）可知，因此 $x^\alpha\in V$，因为 $\frac{1}{2}\left(1+x_1^{2\alpha_1}\right)\in\sum\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_d]^2\cap V$。现在假设存在 $i\in\{2,\ldots,d\}$，使得对于所有满足 $\alpha_j=0$ 的 $\alpha\in\mathbb{N}_0^d$，都有 $x^\alpha\in V$。考虑满足对于所有 $j\in\{i+1,\ldots,d\}$ 都有 $\alpha_j=0$ 的$\alpha\in\mathbb{N}_0^d$，并定义 $\beta\in\mathbb{N}_0^d$ 如下：对于 $j\in\{1,\ldots,i-1\}$，有 $\beta_j:=\alpha_j$；对于 $j\in\{i,\ldots,d\}$，有 $\beta_j:=0$，因此 $x^{2\beta}\in\sum\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_d]^2\cap V$。于是 $x^\alpha=x^\beta x_i^{\alpha_i}$，并且

$$-\frac{1}{2}\left(x^{2\beta}+x_i^{2\alpha_i}\right)\preccurlyeq x^\alpha\preccurlyeq\frac{1}{2}\left(x^{2\beta}+x_i^{2\alpha_i}\right)$$

由（12）。这表明 $x^\alpha\in V$因为 $\frac{1}{2}\left(x^{2\beta}+x_i^{2\alpha_i}\right)\in\sum\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_d]^2\cap V$。由归纳法可得 $x^\alpha\in V$对所有 $\alpha\in\mathbb{N}_0^d$。 □

综上所述， U 是 $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]$ 的一个吸收平衡凸子集。其闵可夫斯基泛函 $\|\cdot\|_U\colon \mathbb{R}[x_1,\dots,x_d] \to [0,\infty[$,

$$p \mapsto \|p\|_U \coloneqq \inf\{\, \lambda \in [0,\infty[\;\big|\; p \in \lambda U \,\} \tag{14}$$

因此，这是 $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]$ 上的一个定义良好的半范数。

注4 闵可夫斯基泛函 $\|\cdot\|_U$ 实际上是 $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]$ 上的一个范数：若 $p \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]$ 满足 $\|p\|_U = 0$, 则 $p \in \epsilon U$ 对所有 $\epsilon \in]0,\infty[$, 都成立，这意味着存在 $N(\epsilon) \in \mathbb{N}_0$ 使得

$$-\epsilon \sum_{n=0}^{N(\epsilon)} \sum_{j=1}^{d} \frac{x_j^{2n}}{(2n)!} \preccurlyeq p \preccurlyeq \epsilon \sum_{n=0}^{N(\epsilon)} \sum_{j=1}^{d} \frac{x_j^{2n}}{(2n)!}, \quad \text{so} \quad |p(\xi)| \le \epsilon \sum_{n=0}^{N(\epsilon)} \sum_{j=1}^{d} \frac{\xi_j^{2n}}{(2n)!} \le \epsilon \sum_{j=1}^{d} \cosh(\xi_j) \quad \text{for } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

由于这对所有 $\epsilon \in]0,\infty[$ 以及所有 $\xi \in \mathbb{R}^d$ 都成立，因此可得 $p = 0$。然而，在定理 1的证明中, $\|\cdot\|_U$ 是一个范数这一事实并不重要。

我们称线性泛函 $\omega\colon \mathbb{R}[x_1,\dots,x_d] \to \mathbb{R}$ 是正的，如果对所有 $p \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]$, 都有 $\omega(p^2) \ge 0$；等价地，对所有 $q \in \sum \mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]^2$, 都有 $\omega(q) \ge 0$。矩问题理论中的一个基本结果由 Nussbaum 提出：若 $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]$ 上的正线性泛函 ω 满足多元 *Carleman* 条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega\big(x_j^{2n}\big)^{1/(2n)}} = \infty \qquad \text{for all } j \in \{1,\dots,d\}, \tag{15}$$

其中 $1/0 \coloneqq \infty$, 则存在唯一的正 Radon 测度 μ_ω, 定义在 $\mathbb{R}^d$ 上，使得

$$\omega(p) = \int_{\mathbb{R}^d} p(\xi)\,\mathrm{d}\mu_\omega(\xi) \qquad \text{for all } p \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]. \tag{16}$$

详情请参阅，例如教科书 [Sch17，定理 14。19]。

证明（定理 1）： 令 $p \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]$。首先假设 $\epsilon \in]0,\ \infty[$ 且 $N \in \mathbb{N}_0$ 满足 $p + \epsilon \sum_{n=0}^{N} \sum_{j=1}^{d} x_j^{2n}/(2n)! \in \sum \mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]^2$。于是

$$0 \preccurlyeq p + \epsilon \sum_{n=0}^{N} \sum_{j=1}^{d} \frac{x_j^{2n}}{(2n)!} \preccurlyeq p + \epsilon \sum_{n=0}^{N} \sum_{j=1}^{d} \frac{x_j^{2n}}{n!}$$

成立，这证明了蕴含关系 *ii'* $\Rightarrow$ *ii*。

接下来假设对于每个 $\epsilon \in]0,\ \infty[$ 都存在 $N \in \mathbb{N}_0$ 使得 $p + \epsilon \sum_{n=0}^{N} \sum_{j=1}^{d} x_j^{2n}/n! \in \sum \mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]^2$。任取 $\xi \in \mathbb{R}^d$。于是

$$0 \le p(\xi) + \epsilon \sum_{n=0}^{N(\epsilon)} \sum_{j=1}^{d} \frac{\xi_j^{2n}}{n!} \le p(\xi) + \epsilon \sum_{j=1}^{d} \exp(\xi_j^2)$$

对所有 $\epsilon \in]0,\ \infty[$, 在适当的 N（ϵ）下， $\in \mathbb{N}_0$ 取决于 ϵ, 因此 $0 \le p$（ξ）。这证明了蕴含关系 *ii* $\Rightarrow$ *i*。

最后，假设存在 $\epsilon \in]0,\ \infty[$ 使得对于所有$N \in \mathbb{N}$0</style}，均有 $p + \epsilon \sum_{n=0}^{N} \sum_{j=1}^{d} x_j^{2n}/(2n)! \notin \sum \mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]^2$。注意到，该假设蕴含 $(p+\epsilon U) \cap \sum \mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]^2 = \emptyset$: 事实上，如果存在

$q \in (p+\epsilon U) \cap \sum \mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]^2$，那么 $q-p \in \epsilon U$，因此特别地会存在 $N \in \mathbb{N}0$ 使得 $q-p \preccurlyeq \epsilon \sum_{n=0}^{N}\sum_{j=1}^{d} x_j^{2n}/(2n)!$，从而 $0 \preccurlyeq q \preccurlyeq p+\epsilon \sum_{n=0}^{N}\sum_{j=1}^{d} x_j^{2n}/(2n)!$，这就产生了矛盾。为了证明剩余的蕴含关系 i $\Rightarrow$ ii'，我们将证明存在 $\xi \in \mathbb{R}^d$ 使得 $p(\xi) < 0$。根据（半）范数 $\|\cdot\|_U$的定义，集合 U包含 $\|\cdot\|_U$的开单位球，因此 p不包含于 $\|\cdot\|_U$-闭包 $\sum \mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]^2$中，因为 $(p+\epsilon U) \cap \sum \mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]^2 = \emptyset$。根据哈恩–巴拿赫定理 [Dav25, Cor. 3.3.9],，存在一个 $\|\cdot\|_U$-有界线性泛函 $\omega\colon \mathbb{R}[x_1,\dots,x_d] \to \mathbb{R}$，使得对于所有 $q \in \sum \mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]^2$，$\omega(q) > \omega(p)$。由 $0 \in \sum \mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]^2$ 可知 $\omega(p) < 0$，因此对于所有 $q \in \sum \mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]^2$，均有 $\omega(q) \geq 0$，因为 $\sum \mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]^2$ 在数乘 $\lambda \in [0,\infty[$下封闭。所以，ω是 $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]$ 上的正线性泛函，并且$\omega(p) < 0$。由于 ω是 $\|\cdot\|_U$-有界的，存在 $\mu \in]0,\infty[$使得对于所有 $u \in U$，$|\omega(u)| \leq \mu$。特别地，对于所有 $N \in \mathbb{N}0$，有$\sum_{n=0}^{N}\sum_{j=1}^{d} \omega(x_j^{2n})/(2n)! \leq \mu$，因此对于所有 $n \in \mathbb{N}0$ 和$j \in \{1,\dots,d\}$，均有 $\omega(x_j^{2n}) \leq \mu(2n)!$。由此可知，$\omega$满足多元 Carleman 条件（15）：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega\left(x_j^{2n}\right)^{1/(2n)}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\mu(2n)!\right)^{1/(2n)}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^{1/(2n)}2n} \geq \frac{1}{2\max\{1,\sqrt{\mu}\}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

对所有 $j \in \{1,\dots,d\}$ 均成立。因此，存在唯一的正 Radon 测度 μ_ω，定义在 $\mathbb{R}^d$ 上，它表示正泛函 ω，如（16）所示。因此，由于 $\omega(p) < 0$，必然存在一点 $\xi \in \mathbb{R}^d$，使得 $p(\xi) < 0$。□

Re标记 5 作为定理 1 的一个应用，我们证明 $\|\cdot\|_U$ 是加权的 L^∞-范数 ：

$$\|p\|_U = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \frac{|p(\xi)|}{\sum_{j=1}^{d} \cosh(\xi_j)} \qquad \text{for all } p \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]. \tag{17}$$

要验证这一点，只需证明，式（17）左侧范数 $\|\cdot\|_U$ 的开单位球包含于由式（17）右侧定义的范数的闭单位球中，反之亦然。首先假设 $p \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]$ 满足 $\|p\|_U < 1$。那么 $p \in U$，因此存在 $N \in \mathbb{N}_0$ 使得

$$\left|p(\xi)\right| \leq \sum_{n=0}^{N}\sum_{j=1}^{d} \frac{\xi_j^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{j=1}^{d} \cosh(\xi_j)$$

对所有 $\xi \in \mathbb{R}^d$ 均成立。反过来，假设 $p \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]$ 且 $\epsilon \in]0,\ 1[$ 满足 $|p(\xi)| \leq (1-\epsilon)\sum_{j=1}^{d} \cosh(\xi_j)$，对所有 $\xi \in \mathbb{R}^d$ 均成立。我们证明这意味着 $p \in U$，因此 $\|p\|_U \leq 1$：对于每个 $N \in \mathbb{N}_0$，记

$$P(N) \coloneqq \left\{ \xi \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; |p(\xi)| \geq (1-\epsilon/2)\sum_{n=0}^{N}\sum_{j=1}^{d} \xi_j^{2n}/(2n)! \right\}.$$

当 $N' \in \mathbb{N}0$ 严格大于 p 的一半次数时，集合 $P(N')$ 是紧致的。此外，对于每个 $\xi \in \mathbb{R}^d$，都存在 $N \in \mathbb{N}0$，使得 $(1-\epsilon)\sum_{j=1}^{d} \cosh(\xi_j) < (1-\epsilon/2)\sum_{n=0}^{N}\sum_{j=1}^{d} \xi_j^{2n}/(2n)!$，因此 $|p(\xi)| < (1-\epsilon/2)\sum_{n=0}^{N}\sum_{j=1}^{d} \xi_j^{2n}/(2n)!$，即 $\xi \notin P(N)$。这表明$\bigcap_{N\in\mathbb{N}_0} P(N) = \emptyset$，因此，所有满足 $N \in \mathbb{N}0$ 的闭集 $P(N)$ 的补集覆盖 $P(N')$。由 $P(N')$ 的紧致性，且对所有 $N \in \mathbb{N}0$ 都有 $P(N) \supseteq P(N+1)$，可知存在 $N_0 \in \mathbb{N}0$，使得 $\mathbb{R}^d \setminus P(N_0) \supseteq P(N')$；不失一般性，我们可以假设 $N_0 \geq N'$。由此可得 $P(N_0) \cap P(N') = \emptyset$ 并且

$P(N_0) \subseteq P(N')$，因此 $P(N_0) = \emptyset$。这意味着

$$\big|p(\xi)\big| < \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \sum_{n=0}^{N_0} \sum_{j=1}^{d} \frac{\xi_j^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{for all } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

应用定理 1 到两个逐点（严格）正多项式

$$q_\pm := \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \sum_{n=0}^{N_0} \sum_{j=1}^{d} \frac{x_j^{2n}}{(2n)!} \pm p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_d]$$

可知存在两个数 $N_\pm \in \mathbb{N}_0$ 使得

$$q_\pm + \frac{\epsilon}{2} \sum_{n=0}^{N_\pm} \sum_{j=1}^{d} \frac{x_j^{2n}}{(2n)!} \in \sum \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_d]^2.$$

对于 $N_{\max} := \max\{N_0, N_+, N_-\}$ 可得

$$-\sum_{n=0}^{N_{\max}} \sum_{j=1}^{d} \frac{x_j^{2n}}{(2n)!} \preccurlyeq p \preccurlyeq \sum_{n=0}^{N_{\max}} \sum_{j=1}^{d} \frac{x_j^{2n}}{(2n)!}$$

因此 $p \in U$。

4 一个正积分核

本节将推导定理 2 关于扰动项次数 N_{expl} 的显式估计。我们的方法依赖于 d 个变量中的埃尔米特多项式 $x_1, \ldots, x_d$，参见例如 [Sze75], [Rai71],或 [AAR00]。

4.1 埃尔米特多项式与截断迈勒核

定义埃尔米特多项式的一种方式是使用显式公式

$$H_n := n! \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (2z)^{n-2k}}{k!\,(n-2k)!} \in \mathbb{R}[z] \qquad \text{for } n \in \mathbb{N}_0, \tag{18}$$

然后

$$H_\alpha := \prod_{j=1}^{d} H_{\alpha_j}(x_j) = \alpha! \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^d \\ 2\beta \le \alpha}} \frac{(-1)^{|\beta|} 2^{|\alpha - 2\beta|} x^{\alpha - 2\beta}}{\beta!\,(\alpha - 2\beta)!} \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_d] \qquad \text{for } \alpha \in \mathbb{N}_0^d. \tag{19}$$

不难验证，

$$H_0 = 1, \quad H_1 = 2z, \quad \text{and} \quad H_{n+1} = 2zH_n - 2nH_{n-1} \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

回顾一下 $\ell \in \mathbb{N}_0$ 和 $\lambda \in]0,\infty[$ 的高斯积分：

$$\int_{\mathbb{R}} \xi^\ell \exp\left(-\frac{\xi^2}{\lambda}\right) \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\lambda\pi}} = \begin{cases} 0 & \text{if } \ell \text{ is odd,} \\ \frac{\lambda^{\ell/2}\ell!}{2^\ell(\ell/2)!} & \text{if } \ell \text{ is even.} \end{cases} \tag{21}$$

因此

$$\int_{\mathbb{R}} \xi^{2m} \exp\left(-\frac{\xi^2}{\lambda}\right) \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\lambda\pi}} \leq \lambda^m m! \qquad \text{for all } m \in \mathbb{N}_0,\, \lambda \in]0,\infty[, \tag{22}$$

and

$$\int_{\mathbb{R}} \xi^\ell \exp\left(-\frac{\xi^2}{\lambda}\right) \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\lambda\pi}} \leq \frac{\lambda^{\ell/2}\sqrt{\ell!}}{2^{\ell/2}} \qquad \text{for all } \ell \in \mathbb{N}_0,\, \lambda \in]0,\infty[, \tag{23}$$

因为，对于 $\ell = 2m$，(21) 的右侧为 $\lambda^m \ell!/(2^\ell m!)$，且估计 $\ell!/(2^\ell m!) = 2^{-\ell}\binom{\ell}{m} m! \leq m!$ 以及 $\ell!/(2^\ell m!) = \sqrt{\ell!}\; 2^{-\ell}\binom{\ell}{m}^{1/2} \leq \sqrt{\ell!}\, 2^{-\ell/2}$成立。利用递推关系 (20) 可以很容易验证

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(\xi)\, \xi^m \exp\bigl(-\xi^2\bigr) \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\pi}} = 0 \tag{24}$$

对于 $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \{0,\dots,n-1\}$，以及

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(\xi)\, \xi^{n+\ell} \exp\bigl(-\xi^2\bigr) \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\pi}} = \begin{cases} 0 & \text{if } \ell \text{ is odd,} \\ \frac{(n+\ell)!}{2^\ell(\ell/2)!} & \text{if } \ell \text{ is even} \end{cases} \tag{25}$$

对于 $n, \ell \in \mathbb{N}_0$。特别是

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(\xi)\, H_m(\xi) \exp\bigl(-\xi^2\bigr) \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\pi}} = 0 \tag{26}$$

and

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(\xi)^2 \exp\bigl(-\xi^2\bigr) \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\pi}} = \int_{\mathbb{R}} H_n(\xi)\, (2\xi)^n \exp\bigl(-\xi^2\bigr) \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\pi}} = 2^n n! \tag{27}$$

对于 $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \{0,\dots,n-1\}$。

为了高效处理多维情形，我们对 ℓ元组$r = (r_1,\dots,r_\ell)$ $s = (s_1,\dots,s_\ell) \in \mathcal{R}^\ell$ 在任意环 $\mathcal{R}$中使用点积，即

$$(r \cdot s) := \sum_{j=1}^{\ell} r_j s_j \in \mathcal{R}. \tag{28}$$

注意，根据多项式定理，

$$(r \cdot s)^n = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^\ell \\ |\alpha| = n}} \frac{r^\alpha s^\alpha}{\alpha!} \qquad \text{for all } n \in \mathbb{N}_0. \tag{29}$$

我们将使用点积的记号。例如，在特殊情形 $\ell = d$ 和 $\mathcal{R} = \mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]$ 下，对于所有 $\xi \in \mathbb{R}^d$，有 $(x \cdot \xi) = \sum_{j=1}^d x_j \xi_j \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]$。

我们用 $B^d(r)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中半径为 $r \in [0,\infty[$ 的闭欧几里得球，并用 $\mathcal{C}\big(B^d(r)\big)$ 表示其上的连续实值函数向量空间。随后定义内积 $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_r$：$\mathcal{C}\big(B^d(r)\big) \times \mathcal{C}\big(B^d(r)\big) \to \mathrm{R}</\mathrm{style}\}$，

$$(f,g) \mapsto \langle f \,|\, g \rangle_r \coloneqq \int_{B^d(r)} f(\xi)\, g(\xi)\, \exp\big(-(\xi\cdot\xi)\big)\, \frac{\mathrm{d}^d\xi}{\sqrt{\pi}^d} \tag{30}$$

并且对于 $f,\ g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$，我们定义

$$\langle f \,|\, g \rangle_\infty \coloneqq \lim_{r\to\infty} \langle f \,|\, g \rangle_r \qquad \text{(provided the limit exists).} \tag{31}$$

注意

$$\langle f \,|\, f \rangle_r \le \langle f \,|\, f \rangle_{r'} \le \langle f \,|\, f \rangle_\infty \tag{32}$$

对于所有 $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ 以及所有 $r,\ r' \in [0,\infty[$ 满足 $r \le r'$（且可能 $\langle f \,|\, f \rangle_\infty = \infty$）。我们将 $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]$ 与 $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$中的多项式函数线性子空间等同起来。由（26）和（27）可得

$$\big\langle H_\alpha \,\big|\, H_\beta \big\rangle_\infty = \prod_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} H_{\alpha_j}(\xi_j)\, H_{\beta_j}(\xi_j)\, \exp\big(-\xi_j^2\big)\, \frac{\mathrm{d}\xi_j}{\sqrt{\pi}} = \delta_{\alpha,\beta} 2^{|\alpha|}\alpha! \qquad \text{for all } \alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^d. \tag{33}$$

任取 $D \in \mathbb{N}0$。多维厄米特多项式 H_α（其中 $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$、$|\alpha| \le D$）显然构成 $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]_D$ 的一组基。因此，若 $p \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]_D$，则

$$p = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d \\ |\alpha|\le D}} \frac{H_\alpha}{2^{|\alpha|}\alpha!} \langle H_\alpha \,|\, p \rangle_\infty \qquad \text{and} \qquad \langle H_\alpha \,|\, p \rangle_\infty = 0 \quad \text{for } \alpha \in \mathbb{N}_0^d \text{ with } |\alpha| > D. \tag{34}$$

此外，结合（22）和（32），我们得到估计

$$\langle x^\alpha \,|\, x^\alpha \rangle_r \le \langle x^\alpha \,|\, x^\alpha \rangle_\infty \le \alpha! \tag{35}$$

对所有 $r \in [0,\infty]$ 以及 $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ 均成立。

不同变量中的埃尔米特多项式乘积的形式和由迈勒公式描述。注意，对于每个实代数 $\mathcal{A}$ 以及每个 $p \in \mathcal{A}[[\nu]]$，形式幂级数 $\exp(\nu p) \in \mathcal{A}[[\nu]]$ 都是良定义的，因为在 ν 的每个次数中，只有有限项会产生贡献。单变量情形下的迈勒公式（即 $d=1$）指出恒等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu^n H_n(x) H_n(y)}{2^n n!} = \big(1-\nu^2\big)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2\nu^2 - 2xy\nu + y^2\nu^2}{1-\nu^2}\right) \tag{36}$$

成立于 $\mathbb{R}[[x,y,\nu]]$（例如参见 [Sze75，第23题，第 380] 页，或 [Rai71，§111，第 198] 页，或 [AAR00，（6.1.13）]）。由此可得

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d} \frac{\nu^{|\alpha|} H_\alpha(x) H_\alpha(y)}{2^{|\alpha|}\alpha!} = \big(1-\nu^2\big)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{(x\cdot x)\nu^2 - 2(x\cdot y)\nu + (y\cdot y)\nu^2}{1-\nu^2}\right) \tag{37}$$

成立于 $\mathbb{R}[[x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n,\nu]]$。注意，该形式幂级数在$\mathbb{C}^d\times\mathbb{C}^d\times\mathbb{D}$上绝对且局部一致收敛，其中$\mathbb{D}$ 是$\mathbb{C}$中的开单位圆盘。

我们将（37）中的指数级数截断在足够大的偶数次幂处，从而构造一个正积分核。对于 $N\in\mathbb{N}_0$，我们首先定义

$$\exp_N \coloneqq \sum_{n=0}^{2N}\frac{z^n}{n!}\in\mathbb{R}[z]. \tag{38}$$

然后我们定义截断迈勒核 $\mathcal{K}_{N,\,\lambda}\colon\ \mathbb{R}^d\to\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]_{4N}$，

$$\xi\mapsto\mathcal{K}_{N,\lambda}(\xi)\coloneqq\left(1-\lambda^2\right)^{-\frac{d}{2}}\exp_N\!\left(-\frac{(x\cdot x)\lambda^2-2(x\cdot\xi)\lambda}{1-\lambda^2}\right)\exp\!\left(-\frac{(\xi\cdot\xi)\lambda^2}{1-\lambda^2}\right). \tag{39}$$

所有分量函数 $[\mathcal{K}_{N,\lambda}]_\alpha\colon\ \mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 对于 $\alpha\in\mathbb{N}_0^d$，均为多项式与高斯因子的乘积；特别地，它们有界，因而可分别由常函数从上方和下方控制。我们还对所有 $N\in\mathbb{N}_0$、$\lambda\in[0,1[$，和 $r\in[0,\infty]$定义积分算子 $\mathcal{I}_{N,\,\lambda,\,r}\colon\ \mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]\to\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]_{4N}$，

$$p\mapsto\mathcal{I}_{N,\lambda,r}(p)\coloneqq\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\|\alpha|\le 4N}}\left\langle\,[\mathcal{K}_{N,\lambda}]_\alpha\,\middle|\,p\,\right\rangle_r x^\alpha. \tag{40}$$

注意，$\mathcal{I}_{N,\,\lambda,\,r}$ 确实也对 $r=\infty$ 有定义，因为函数 $\left|[\mathcal{K}_{N,\lambda}]_\alpha\right|$ 在$\mathbb{R}^d$上有界。

引理 6 对于所有 $N\in\mathbb{N}_0$，多项式 $\exp_N$ 都是平方和，即 $\exp_N\in\sum\mathbb{R}[z]^2$。

证明： 我们只需验证 $\exp_N(\xi)\ge 0$ 对所有 $\xi\in\mathbb{R}$、$N\in\mathbb{N}_0$均成立，因此任取 $N\in\mathbb{N}_0$ 以及 $\xi\in\mathbb{R}$。若 $\xi\ge 0$，则由（38）可立即看出 $\exp_N(\xi)>0$。若 $\xi<0$，则由 exp 的级数展开的拉格朗日余项形式可知，存在 $\eta\in[\xi,0]$ 使得

$$\exp(\xi)=\exp_N(\xi)+\frac{\exp(\eta)}{(2N+1)!}\,\xi^{2N+1},$$

因此

$$\exp_N(\xi)=\exp(\xi)-\frac{\exp(\eta)}{(2N+1)!}\,\xi^{2N+1}>0$$

因为 $\xi^{2N+1}<0$。 □

命题 7 设 $N\in\mathbb{N}_0$, $\lambda\in[0,1[$, $r\in[0,\infty]$, 且 $p\in\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]$。假设对所有 $\xi\in\mathbb{R}^d$，均有 $p(\xi)\ge 0$。则 $\mathcal{I}_{N,\lambda,r}(p)\in\sum\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]^2\cap\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]_{4N}$。

证明： 令 C表示凸锥 $\sum\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]^2\cap\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]_{4N}$。由前述引理 6可知，对于所有 $\xi\in\mathbb{R}^d$，$\mathcal{K}_{N,\lambda}(\xi)\,p(\xi)\in C$。由于 $\mathbb{R}^d\ni\xi\mapsto\mathcal{K}_{N,\lambda}(\xi)\,p(\xi)\in C\subseteq\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]_{4N}$连续，我们可以将 $\mathcal{I}_{N,\lambda,r}(p)$ 对于 $r<\infty$ 计算为一个向量值黎曼积分：

$$\mathcal{I}_{N,\lambda,r}(p)=\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\|\alpha|\le 4N}}\left\langle\,[\mathcal{K}_{N,\lambda}]_\alpha\,\middle|\,p\,\right\rangle_r x^\alpha=\int_{B^d(r)}\mathcal{K}_{N,\lambda}(\xi)\,p(\xi)\,\exp\bigl(-(\xi\cdot\xi)\bigr)\,\frac{\mathrm{d}^d\xi}{\sqrt{\pi}^d}.$$

特别地，$\mathcal{I}_{N,\lambda,r}(p)$ 是 C 中的一个序列的极限（即黎曼和）。由于凸锥 C 在 $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]_{4N}$ 中是闭的（例如参见 [Lau09，推论 3.34]），因此，对于所有 $r\in[0,\infty[$，$\mathcal{I}_{N,\lambda,r}(p)\in C$ 成立，进而对于 $r=\infty$ 也成立。□

命题 8 令 $N\in\mathbb{N}_0$、$\lambda\in[0,1[$，$r\in[0,\infty]$，和 $p\in\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]$。那么，对所有满足 $|\gamma|\le 2N$ 的 $\gamma\in\mathbb{N}_0^d$，恒等式

$$\big[\mathcal{I}_{N,\lambda,r}(p)\big]_\gamma=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d}\frac{\lambda^{|\alpha|}\,[H_\alpha]_\gamma\,\langle\,H_\alpha\,|\,p\,\rangle_r}{2^{|\alpha|}\alpha!}\tag{41}$$

成立，且右侧的级数绝对收敛。

证明： 令 $\gamma\in\mathbb{N}_0^d$，其中 $|\gamma|\le 2N$，并注意到

$$\left[\exp_N\!\left(-\frac{(x\cdot x)\lambda^2-2(x\cdot\xi)\lambda}{1-\lambda^2}\right)\right]_\gamma=\left[\exp\!\left(-\frac{(x\cdot x)\lambda^2-2(x\cdot\xi)\lambda}{1-\lambda^2}\right)\right]_\gamma\qquad(\blacklozenge)$$

因为 $\big[\big((x\cdot x)\lambda^2-2(x\cdot\xi)\lambda\big)^n\big]_\gamma=0$ 对所有满足 $n\in\mathbb{N}_0$ 的 $n>2N$。在迈勒公式（37）中，x^γ 的系数是关于 y_1、……、y_d、ν 的形式幂级数，它在紧空间 $B^d(r)\times[-\lambda,\lambda]$ 上 $r<\infty$ 绝对且一致收敛。因此，我们可以交换求和与积分，从而得到恒等式

$$\begin{aligned}
&\big[\mathcal{I}_{N,\lambda,r}(p)\big]_\gamma=\\
&=\big\langle\,[\mathcal{K}_{N,\lambda}]_\gamma\,\big|\,p\,\big\rangle_r\\
&\overset{(\blacklozenge)}{=}\int_{B^d(r)}\big(1-\lambda^2\big)^{-\frac{d}{2}}\left[\exp\!\left(-\frac{(x\cdot x)\lambda^2-2(x\cdot\xi)\lambda}{1-\lambda^2}\right)\right]_\gamma\exp\!\left(-\frac{(\xi\cdot\xi)\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)p(\xi)\,\exp\big(-(\xi\cdot\xi)\big)\,\frac{\mathrm{d}^d\xi}{\sqrt{\pi}^d}\\
&=\int_{B^d(r)}\sum\nolimits_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d}\frac{\lambda^{|\alpha|}\,[H_\alpha(x)]_\gamma\,H_\alpha(\xi)}{2^{|\alpha|}\alpha!}\,p(\xi)\,\exp\big(-(\xi\cdot\xi)\big)\,\frac{\mathrm{d}^d\xi}{\sqrt{\pi}^d}\\
&=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d}\frac{\lambda^{|\alpha|}[H_\alpha]_\gamma}{2^{|\alpha|}\alpha!}\int_{B^d(r)}H_\alpha(\xi)\,p(\xi)\,\exp\big(-(\xi\cdot\xi)\big)\,\frac{\mathrm{d}^d\xi}{\sqrt{\pi}^d}\\
&=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d}\frac{\lambda^{|\alpha|}\,[H_\alpha]_\gamma\,\langle\,H_\alpha\,|\,p\,\rangle_r}{2^{|\alpha|}\alpha!}
\end{aligned}$$

成立，并且关于 $\alpha\in\mathbb{N}_0^d$ 的级数绝对收敛。

然而，为了取极限 $r\to\infty$，我们需要对所有 $r\in[0,\infty]$ 的右端级数绝对收敛给出一致估计：第一步，估计

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\lambda^{|\alpha|}\,[H_\alpha]_\gamma\,\langle\,H_\alpha\,|\,p\,\rangle_r}{2^{|\alpha|}\alpha!}\right|&\le\frac{\lambda^{|\alpha|}\,|[H_\alpha]_\gamma|}{2^{|\alpha|}\alpha!}\,\big\langle\,H_\alpha\,\big|\,H_\alpha\,\big\rangle_r^{1/2}\big\langle\,p\,\big|\,p\,\big\rangle_r^{1/2}\\
&\le\frac{\lambda^{|\alpha|}\,|[H_\alpha]_\gamma|}{2^{|\alpha|}\alpha!}\,\big\langle\,H_\alpha\,\big|\,H_\alpha\,\big\rangle_\infty^{1/2}\big\langle\,p\,\big|\,p\,\big\rangle_\infty^{1/2}\\
&\le\frac{\lambda^{|\alpha|}\,|[H_\alpha]_\gamma|}{2^{|\alpha|/2}\sqrt{\alpha!}}\big\langle\,p\,\big|\,p\,\big\rangle_\infty^{1/2}
\end{aligned}$$

对所有 r 都成立 $\in[0,\infty]$，其中我们先应用柯西–施瓦茨不等式，然后（32）一个 d

（33）。此外，由（19），$|[H_\alpha]_\gamma| = 0$ 若 $\alpha - \gamma \notin 2\mathbb{N}_0^d$ 且若 $\alpha - \gamma \in 2\mathbb{N}_0^d$，则

$$|[H_\alpha]_\gamma| = \alpha! \, \frac{2^{|\gamma|}}{((\alpha-\gamma)/2)!\,\gamma!} = \sqrt{\alpha!}\,\frac{2^{|\gamma|}}{\sqrt{\gamma!}} \binom{\alpha-\gamma}{(\alpha-\gamma)/2}^{\frac{1}{2}} \binom{\alpha}{\gamma}^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\alpha!}\,\frac{2^{|\alpha|/2+|\gamma|/2}}{\sqrt{\gamma!}} \binom{\alpha}{\gamma}^{\frac{1}{2}}.$$

So

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d} \frac{\lambda^{|\alpha|}|[H_\alpha]_\gamma|}{2^{|\alpha|/2}\sqrt{\alpha!}} \leq \frac{2^{|\gamma|/2}}{\sqrt{\gamma!}} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d \\ \gamma\leq\alpha}} \lambda^{|\alpha|} \binom{\alpha}{\gamma}^{\frac{1}{2}} < \infty$$

因为对于所有 $k \in \mathbb{N}_0$，$\sum_{n=k}^\infty \lambda^n \binom{n}{k}^{1/2} \leq (k!)^{-1/2} \sum_{n=k}^\infty \lambda^n \, n^{k/2} < \infty$。综合这些估计可知，(41) 的右端在 $r = \infty$时也绝对收敛，并且对于每个$\epsilon \in]0,\infty[$，都存在 $n \in \mathbb{N}_0$ 使得

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d \\ |\alpha|>n}} \left| \frac{\lambda^{|\alpha|}\,[H_\alpha]_\gamma\,\langle\, H_\alpha \,|\, p\,\rangle_r}{2^{|\alpha|}\alpha!} \right| \leq \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d \\ |\alpha|>n}} \frac{\lambda^{|\alpha|}\,|[H_\alpha]_\gamma|}{2^{|\alpha|/2}\sqrt{\alpha!}} \langle\, p \,|\, p\,\rangle_\infty^{1/2} \leq \epsilon/3$$

对于所有 $r \in [0,\infty]$ 均成立。因此可得

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d} \frac{\lambda^{|\alpha|}\,[H_\alpha]_\gamma\,\langle\, H_\alpha \,|\, p\,\rangle_r}{2^{|\alpha|}\alpha!} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d} \frac{\lambda^{|\alpha|}\,[H_\alpha]_\gamma\,\langle\, H_\alpha \,|\, p\,\rangle_\infty}{2^{|\alpha|}\alpha!}$$

因为

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d} \frac{\lambda^{|\alpha|}\,[H_\alpha]_\gamma\,\langle\, H_\alpha \,|\, p\,\rangle_\infty}{2^{|\alpha|}\alpha!} - \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d} \frac{\lambda^{|\alpha|}\,[H_\alpha]_\gamma\,\langle\, H_\alpha \,|\, p\,\rangle_r}{2^{|\alpha|}\alpha!} \right| \leq \\ \leq \frac{2\epsilon}{3} + \left| \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d \\ |\alpha|\leq n}} \frac{\lambda^{|\alpha|}\,[H_\alpha]_\gamma}{2^{|\alpha|}\alpha!} \Big(\langle\, H_\alpha \,|\, p\,\rangle_\infty - \langle\, H_\alpha \,|\, p\,\rangle_r \Big) \right| \\ \leq \epsilon \end{aligned}$$

对于所有充分大的 r 均成立。 □

注9 在 $r = \infty$ 的情况下，上述证明相当繁琐。不过，似乎没有直接且不那么技术性的办法来得到这一结果：它无法直接从迈勒公式中的幂级数在 $\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \times \mathbb{D}$ 上绝对收敛这一事实推出，因为其绝对值在 ξ 处的渐近行为为 $\sim \exp((\xi\cdot\xi)\lambda^2/(1-\lambda^2))$，当 λ 接近 1 时，该式在 $\exp(-(\xi\cdot\xi))\mathrm{d}^d\xi$ 上不可积。引入带有 $r < \infty$ 的内积 $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle_r$，唯一的原因是在上述证明中将其作为正则化 $r = \infty$-情形的工具。

推论 10 令 $M \in \mathbb{N}_0$ 且 $p \in \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_d]_{2M}$。令 $\lambda \in [0,1[$ 和 $N \in \mathbb{N}_0$ 满足 $M \leq N$。则

$$\mathcal{I}_{N,\lambda,\infty}(p) = p + \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d \\ |\alpha|\leq 2M}} \frac{(\lambda^{|\alpha|}-1)\,H_\alpha\,\langle\, H_\alpha \,|\, p\,\rangle_\infty}{2^{|\alpha|}\alpha!} + \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d \\ 2N<|\alpha|\leq 4N}} \big\langle\, [\mathcal{K}_{N,\lambda}]_\alpha \,\big|\, p\,\big\rangle_\infty \, x^\alpha. \tag{42}$$

证明： 由命题8 以及 $\mathcal{I}_{N,\lambda,\infty}(p)$ 的定义恒等式（40），

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{N,\lambda,\infty}(p) &= \sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}_0^d\\ |\gamma|\le 4N}} \left[\mathcal{I}_{N,\lambda,\infty}(p)\right]_\gamma x^\gamma \\ &= \sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}_0^d\\ |\gamma|\le 2N}} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d} \frac{\lambda^{|\alpha|}\,[H_\alpha]_\gamma\, x^\gamma\,\langle H_\alpha \,|\, p\rangle_\infty}{2^{|\alpha|}\alpha!} + \sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}_0^d\\ 2N<|\gamma|\le 4N}} \left\langle [\mathcal{K}_{N,\lambda}]_\gamma \,\middle|\, p\right\rangle_\infty x^\gamma.\end{aligned}$$

由（34），$p = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d,\ |\alpha|\le 2M} H_\alpha \langle H_\alpha \,|\, p\rangle_\infty / (2^{|\alpha|}\alpha!)$ 以及对于 $\alpha\in\mathbb{N}_0^d$，$\langle H_\alpha \,|\, p\rangle_\infty = 0$。此外，对于所有满足 $|\alpha|\le 2M$ 的 $\alpha\in\mathbb{N}_0^d$，$H_\alpha\in\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]_{2M}\subseteq\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]_{2N}$，因此

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}_0^d\\ |\gamma|\le 2N}} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d} \frac{\lambda^{|\alpha|}\,[H_\alpha]_\gamma\, x^\gamma\,\langle H_\alpha \,|\, p\rangle_\infty}{2^{|\alpha|}\alpha!} &= \sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}_0^d\\ |\gamma|\le 2N}} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\ |\alpha|\le 2M}} \frac{\lambda^{|\alpha|}\,[H_\alpha]_\gamma\, x^\gamma\,\langle H_\alpha \,|\, p\rangle_\infty}{2^{|\alpha|}\alpha!} \\ &= \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\ |\alpha|\le 2M}} \frac{\lambda^{|\alpha|}\, H_\alpha\,\langle H_\alpha \,|\, p\rangle_\infty}{2^{|\alpha|}\alpha!} \\ &= p + \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\ |\alpha|\le 2M}} \frac{(\lambda^{|\alpha|}-1)\, H_\alpha\,\langle H_\alpha \,|\, p\rangle_\infty}{2^{|\alpha|}\alpha!}.\end{aligned}$$

□

考虑 $M\in\mathbb{N}_0$ 和 $p\in\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]_{2M}$。假设 $p(\xi)\ge 0$ 对所有 $\xi\in\mathbb{R}^d$，并令 $t\in[0,1[$。命题7和推论 10共同表明

$$0 \preccurlyeq \mathcal{I}_{N,\lambda,\infty}(p) = p + \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\ |\alpha|\le 2M}} \frac{(\lambda^{|\alpha|}-1)\, H_\alpha\,\langle H_\alpha \,|\, p\rangle_\infty}{2^{|\alpha|}\alpha!} + \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\ 2N<|\alpha|\le 4N}} \left\langle [\mathcal{K}_{N,\lambda}]_\alpha \,\middle|\, p\right\rangle_\infty x^\alpha \tag{43}$$

对所有 $\lambda\in[0,1[$ 以及充分大的 $N\in\mathbb{N}_0$。为了证明 $0\preccurlyeq p+\sum_{n=0}^{N_{\mathrm{expl}}(p)} (x\cdot x)^n/(n!)^t$，我们将在第 4.2节证明

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\ |\alpha|\le 2M}} \frac{(\lambda^{|\alpha|}-1)\, H_\alpha\,\langle H_\alpha \,|\, p\rangle_\infty}{2^{|\alpha|}\alpha!} \preccurlyeq \sum_{n=0}^{M+\lfloor d/2\rfloor} \frac{(x\cdot x)^n}{(n!)^t} \tag{44}$$

对于 $\lambda\in[0,1[$ 充分接近1，然后在第4.3 节中

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\ 2N<|\alpha|\le 4N}} \left\langle [\mathcal{K}_{N,\lambda}]_\alpha \,\middle|\, p\right\rangle_\infty x^\alpha \preccurlyeq \sum_{n=N-\lfloor d/2\rfloor}^{2N+\lceil d/2\rceil} \frac{(x\cdot x)^n}{(n!)^t} \tag{45}$$

对于充分大的 $N\in\mathbb{N}_0$。我们将得到这些参数的显式估计 λ 和 N，进而证明定理2 对 $\epsilon=1$ 成立（一般 ϵ 的情形可通过重新缩放得到）。

注 11 启发式地，我们可以预期这类估计（44）和（45）确实存在：将 p 展开为 e

埃尔米特多项式的基表明，（44）的左侧是作用于$\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]$上的对角线性算子，其特征值为$\lambda^\alpha-1$。由于当$N\to\infty$时，$\mathcal{K}_N$、$\lambda$、$\infty$对完整的梅勒核收敛，（45）左侧所描述的高阶误差项应当趋于零；更准确地说，我们将看到，主导项是关于高斯测度的$(x\cdot\xi)^n/n!$的积分，其增长率类似于$\sim 2^{-n/2}(x\cdot x)^{n/2}\sqrt{n!}/n! = 2^{-n/2}/\sqrt{n!}$，见（23）。之所以在截断迈勒核（39）中以不同于$(x\cdot x)$$\lambda^2-2(x\cdot\xi)\lambda$—分量的方式处理$(\xi\cdot\xi)$ λ^2—分量，是为了使这第二个估计成立；尽管对其级数展开的各个部分$(\xi\cdot\xi)^n/n!$进行积分可能导致一个并非绝对收敛的级数，我们仍然可以对整个高斯因子$\exp\big(-(\xi\cdot\xi)\lambda^2/(1-\lambda^2)\big)$进行积分。

这两个估计（λ和N（44）和（45）中可容许的界必然依赖于p。我们将利用一种易于根据系数计算的多项式范数来表示这种依赖关系：

定义 12 我们定义范数$\|\cdot\|\colon\ \mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]\to[0,\infty[$，

$$p\mapsto\|p\|\coloneqq\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d}\big|[p]_\alpha\big|(\alpha!)^{1/2}.$$

尽管$\|\cdot\|$不是由内积$\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle_r$与$r\in[0,\infty]$之一诱导的范数，我们仍然可以证明以下结论：

命题 13 对所有$r\in[0,\infty]$以及所有$p\in\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]$，估计

$$\langle p\,|\,p\rangle_r^{1/2}\le\|p\| \tag{46}$$

成立。

证明： 确实，$\langle p\,|\,p\rangle_r^{1/2}\le\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d}\big|[p]_\alpha\big|\langle x^\alpha\,|\,x^\alpha\rangle_r^{1/2}\le\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d}\big|[p]_\alpha\big|\,(\alpha!\,)^{1/2}=\|p\|$，其中第一个不等式成立，是因为映射$\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]\ni p\mapsto\langle p\,|\,p\rangle_r^{1/2}\in[0,\infty[$是一个半范数，而第二个不等式由（35）得出。□

4.2 第一个估计

回顾一下，

$$\binom{k}{\ell}\le\binom{k}{\lfloor k/2\rfloor}\qquad\text{for all } k\in\mathbb{N}_0 \text{ and } \ell\in\{0,\dots,k\}, \tag{47}$$

这由以下观察可得：$\binom{k}{\ell}/\binom{k}{\ell-1}=(k-\ell+1)/\ell>1$当且仅当$2\ell\le k$，或等价地，$\ell\le\lfloor k/2\rfloor$。对于这些最大的二项式系数，有一个简单公式：

引理 14 令$n\in\mathbb{N}_0$，则

$$\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}=2^n\prod_{j=1}^{\lceil n/2\rceil}\frac{2j-1}{2j}. \tag{48}$$

证明： (48) 对于 $n=0$ 显然成立；若 (48) 对某个 $n\in\mathbb{N}_0$ 成立，那么将 n 替换为 $n+1$ 后也成立。为此，我们分别讨论 n 为奇数和偶数的情形：若 n 为偶数，即 $n=2k$ 对某个 $k\in\mathbb{N}_0$ 成立，则

$$\binom{n+1}{\lfloor (n+1)/2\rfloor}=\binom{2k+1}{k}=\binom{2k}{k}\frac{2k+1}{k+1}=\left(2^{2k}\prod_{j=1}^{k}\frac{2j-1}{2j}\right)\frac{2k+1}{k+1}=2^{2k+1}\prod_{j=1}^{k+1}\frac{2j-1}{2j}.$$

若 n 为奇数，即存在某个 $k\in\mathbb{N}_0$ 使得 $n=2k+1$，则

$$\binom{n+1}{\lfloor (n+1)/2\rfloor}=\binom{2k+2}{k+1}=\binom{2k+1}{k}\frac{2k+2}{k+1}=\left(2^{2k+1}\prod_{j=1}^{k+1}\frac{2j-1}{2j}\right)\frac{2k+2}{k+1}=2^{2k+2}\prod_{j=1}^{k+1}\frac{2j-1}{2j}.$$

由归纳法可知，(48) 对所有 $n\in\mathbb{N}_0$ 都成立。 □

命题 15 设 $n\in\mathbb{N}_0$ 且 $k,\ell\in\{0,\dots,n\}$。则

$$\binom{n}{k}\le 2^{n-\ell}\binom{\ell}{\lfloor \ell/2\rfloor}. \tag{49}$$

证明： 这可由以下估计得出

$$\binom{n}{k}\le\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}=2^n\prod_{j=1}^{\lceil n/2\rceil}\frac{2j-1}{2j}=2^{n-\ell}\binom{\ell}{\lfloor \ell/2\rfloor}\prod_{j=\lceil \ell/2\rceil+1}^{\lceil n/2\rceil}\frac{2j-1}{2j}\le 2^{n-\ell}\binom{\ell}{\lfloor \ell/2\rfloor}$$

其中我们先应用(47)，然后应用前述引理 14。 □

命题 16 以下估计成立：

$$-2^{|\alpha|}\sqrt{\alpha!}\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^d\\ \beta\le\lceil\alpha/2\rceil}}\frac{x^{2\beta}}{\beta!}\preccurlyeq H_\alpha\preccurlyeq 2^{|\alpha|}\sqrt{\alpha!}\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^d\\ \beta\le\lceil\alpha/2\rceil}}\frac{x^{2\beta}}{\beta!}\qquad \textit{for all } \alpha\in\mathbb{N}_0^d. \tag{50}$$

证明： 根据（11），只需考虑单变量情形，即

$$-2^n\sqrt{n!}\sum_{k=0}^{\lceil n/2\rceil}\frac{z^{2k}}{k!}\preccurlyeq H_n\preccurlyeq 2^n\sqrt{n!}\sum_{k=0}^{\lceil n/2\rceil}\frac{z^{2k}}{k!}\qquad \text{for all } n\in\mathbb{N}_0,$$

其中，$\preccurlyeq$ 是由凸锥 $\sum\mathbb{R}[z]^2$在$\mathbb{R}[z]$ 上诱导的偏序，或者等价地说，是由 z中的逐点正多项式所构成的凸锥诱导的偏序。这意味着我们只需证明

$$\left|H_n(\xi)\right|\le 2^n\sqrt{n!}\sum_{k=0}^{\lceil n/2\rceil}\frac{\xi^{2k}}{k!}\qquad \text{for all } \xi\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}_0.$$

因此，令 $n\in\mathbb{N}_0$ 和 $\xi\in\mathbb{R}$ 任意。于是

$$\left|H_n(\xi)\right|\le n!\sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{|2\xi|^{n-2\ell}}{\ell!\,(n-2\ell)!}=2^n\sqrt{n!}\sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{\sqrt{n!}\,|\xi|^{n-2\ell}}{2^{2\ell}\,\ell!\,(n-2\ell)!}$$

根据18中 H_n的定义，因此只要证明

$$\sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \frac{\sqrt{n!}\,|\xi|^{n-2\ell}}{2^{2\ell}\,\ell!\,(n-2\ell)!} \le \sum_{k=0}^{\lceil n/2\rceil} \frac{\xi^{2k}}{k!}.$$

我们分别处理 n 为偶数和奇数的两种情况：若 n 为偶数，即存在某个 $m \in \mathbb{N}_0$使得 $n = 2m$，则

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=0}^{m} \frac{\sqrt{(2m)!}\,\xi^{2m-2\ell}}{2^{2\ell}\,\ell!\,(2m-2\ell)!} &= \sum_{k=0}^{m} \frac{\sqrt{(2m)!}\,\xi^{2k}}{2^{2(m-k)}\,(m-k)!\,(2k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{2m-2k}{m-k}^{\frac{1}{2}} \binom{2m}{2k}^{\frac{1}{2}} \frac{\xi^{2k}}{2^{2(m-k)}\sqrt{(2k)!}} \\
&\le \sum_{k=0}^{m} 2^{m-k}\,2^{m-k} \binom{2k}{k}^{\frac{1}{2}} \frac{\xi^{2k}}{2^{2(m-k)}\sqrt{(2k)!}} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{\xi^{2k}}{k!}
\end{aligned}$$

其中我们代入 $k \coloneqq m-\ell$，并使用标准估计 $\binom{2m-2k}{m-k} \le 2^{2m-2k}$ 以及命题 15 中的估计 $\binom{2m}{2k} \le 2^{2m-2k}\binom{2k}{k}$。若 n 为奇数，即存在某个 $m \in \mathbb{N}_0$使得 $n = 2m+1$，则

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=0}^{m} \frac{\sqrt{(2m+1)!}\,|\xi|^{2(m-\ell)+1}}{2^{2\ell}\,\ell!\,(2(m-\ell)+1)!} &= \sum_{k=0}^{m} \frac{\sqrt{(2m+1)!}\,|\xi|^{2k+1}}{2^{2(m-k)}\,(m-k)!\,(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{2m-2k}{m-k}^{\frac{1}{2}} \binom{2m+1}{2k+1}^{\frac{1}{2}} \frac{|\xi|^{2k+1}}{2^{2(m-k)}\sqrt{(2k+1)!}} \\
&\le \sum_{k=0}^{m} 2^{m-k}\,2^{m-k} \binom{2k+1}{k}^{\frac{1}{2}} \frac{|\xi|^{2k+1}}{2^{2(m-k)}\sqrt{(2k+1)!}} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{|\xi|^{2k+1}}{\sqrt{k!(k+1)!}} \\
&\le \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m} \left(\frac{\xi^{2k}}{k!} + \frac{\xi^{2(k+1)}}{(k+1)!} \right) \\
&\le \sum_{k=0}^{m+1} \frac{\xi^{2k}}{k!}
\end{aligned}$$

其中我们再次代入 $k \coloneqq m-\ell$，使用标准估计 $\binom{2m-2k}{m-k} \le 2^{2m-2k}$ 以及估计$\binom{2m+1}{2k+1} \le 2^{2m-2k}\binom{2k+1}{k}$（参见命题 15），然后使用 $|\xi| \le \frac{1}{2}\big(\sqrt{k}+1+\xi^2/\sqrt{k+1}\big)$，参见（12）。□

现在我们可以证明第一个估计（44）：

命题 17 令 $M \in \mathbb{N}_0$、 $p \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]_{2M}$ 和 $t \in [0,1]$。则该估计

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d \\ |\alpha|\le 2M}} \frac{(\lambda^{|\alpha|}-1)\,H_\alpha\,\langle H_\alpha\,|\,p\,\rangle_\infty}{2^{|\alpha|}\alpha!} \preccurlyeq \sum_{n=0}^{M+\lfloor d/2\rfloor} \frac{(x\cdot x)^n}{n!} \preccurlyeq \sum_{n=0}^{M+\lfloor d/2\rfloor} \frac{(x\cdot x)^n}{(n!)^t} \tag{51}$$

对所有满足以下条件的 $\lambda \in [0,1]$ 均成立

$$\left(1-\lambda^{2M}\right)\binom{2M+d-1}{d-1}^{\frac{1}{2}} 2^{M+\frac{1}{2}}\|p\| \leq 1. \tag{52}$$

证明： 显然 $1/n! \leq 1/(n!)^t$ 对所有 $n \in \mathbb{N}_0$ 和 $t \in [0,1]$，因此（51）中的第二个不等式显然成立，我们只需处理第一个不等式。令 $\lambda \in [0,1]$。根据命题 16 和多项式定理（29）可得

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\ |\alpha|\leq 2M}} \frac{(\lambda^{|\alpha|}-1)\, H_\alpha \langle H_\alpha \,|\, p\rangle_\infty}{2^{|\alpha|}\alpha!} &\preccurlyeq \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\ |\alpha|\leq 2M}} \left|\frac{(\lambda^{|\alpha|}-1)\,\langle H_\alpha \,|\, p\rangle_\infty}{\sqrt{\alpha!}}\right| \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^d\\ \beta\leq\lceil\alpha/2\rceil}} \frac{x^{2\beta}}{\beta!} \\
&\preccurlyeq \left(1-\lambda^{2M}\right) \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\ |\alpha|\leq 2M}} \frac{\left|\langle H_\alpha \,|\, p\rangle_\infty\right|}{\sqrt{\alpha!}} \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^d\\ |\beta|\leq M+\lfloor d/2\rfloor}} \frac{x^{2\beta}}{\beta!} \\
&= \left(1-\lambda^{2M}\right) \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\ |\alpha|\leq 2M}} \frac{\left|\langle H_\alpha \,|\, p\rangle_\infty\right|}{\sqrt{\alpha!}} \sum_{n=0}^{M+\lfloor d/2\rfloor} \frac{(x\cdot x)^n}{n!},
\end{aligned}$$

其中我们利用了 $|\lceil \alpha/2 \rceil| \leq |\alpha|/2 + d/2$。根据柯西–施瓦茨不等式，

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\ |\alpha|\leq 2M}} \frac{\left|\langle H_\alpha \,|\, p\rangle_\infty\right|}{\sqrt{\alpha!}} = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\ |\alpha|\leq 2M}} 2^{|\alpha|/2} \frac{\left|\langle H_\alpha \,|\, p\rangle_\infty\right|}{2^{|\alpha|/2}\sqrt{\alpha!}} \leq \left(\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\ |\alpha|\leq 2M}} 2^{|\alpha|}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\ |\alpha|\leq 2M}} \frac{\langle H_\alpha \,|\, p\rangle_\infty^2}{2^{|\alpha|}\alpha!}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

根据（34），第二个因子等于 $\langle p \,|\, p\rangle_\infty^{1/2}$，并且根据命题 13 有 $\langle p \,|\, p\rangle_\infty^{1/2} \leq \|p\|$。对于第一个因子，注意到 $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d,\ |\alpha|\leq 2M} 2^{|\alpha|} \leq \binom{2M+d-1}{d-1} 2^{2M+1}$，因为根据隔板法公式，$N_k := \binom{k+d-1}{d-1}$是满足 $|\alpha| = k \in \mathbb{N}_0$ 的多重指标 $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ 的数量，并且显然对于 $k,\ k' \in \mathbb{N}_0$ 有 $N_k \leq N_{k'}$，其中$k \leq k'$，因此

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\ |\alpha|\leq 2M}} 2^{|\alpha|} = \sum_{k=0}^{2M} N_k\, 2^k \leq N_{2M} \sum_{k=0}^{2M} 2^k \leq N_{2M}\, 2^{2M+1} = \binom{2M+d-1}{d-1} 2^{2M+1}.$$

结合这些估计可得

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\ |\alpha|\leq 2M}} \frac{(\lambda^{|\alpha|}-1)\, H_\alpha \langle H_\alpha \,|\, p\rangle_\infty}{2^{|\alpha|}\alpha!} \preccurlyeq \left(1-\lambda^{2M}\right)\binom{2M+d-1}{d-1}^{\frac{1}{2}} 2^{M+\frac{1}{2}}\|p\| \sum_{n=0}^{M+\lfloor d/2\rfloor} \frac{(x\cdot x)^n}{n!} \preccurlyeq \sum_{n=0}^{M+\lfloor d/2\rfloor} \frac{(x\cdot x)^n}{n!}$$

前提是满足（52）。 □

推论 18 令 $M \in \mathbb{N}_0$, $p \in \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_d]_{2M}$，且 $t \in [0,1]$。与定理 2中一样，设

$$\mu := M\binom{2M+d-1}{d-1}^{\frac{1}{2}} 2^{M+\frac{1}{2}}. \tag{53}$$

若 $\mu\,\|p\| > 1$，则

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\ |\alpha|\le 2M}} \frac{(\lambda^{|\alpha|}-1)\,H_\alpha\,\langle\, H_\alpha\,|\,p\,\rangle_\infty}{2^{|\alpha|}\alpha!} \preccurlyeq \sum_{n=0}^{M+\lfloor d/2\rfloor} \frac{(x\cdot x)^n}{(n!)^t} \qquad for \qquad \lambda := \left(1-\frac{1}{\mu\,\|p\|}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{54}$$

证明：根据前面的命题 17，我们只需证明 $(1-\lambda^{2M})(\mu/M)\|p\| \le 1$，或者等价地证明 $1 - M/(\mu\,\|p\|) \le \lambda^{2M}$，其中 $\lambda^{2M} = \big(1-1/(\mu\,\|p\|)\big)^M$。若$M = 0$，则这显然成立。否则，我们考虑光滑函数 $]-\infty,1[\ni\eta\mapsto(1-\eta)^M\in]0,\infty[$。其一阶导数为 $-M(1-\eta)^{M-1}$，二阶导数为 $M(M-1)(1-\eta)^{M-2}\ge 0$。因此，该函数是凸函数，且其在 $\eta=0$处的切线为 $\mathbb{R}\ni\eta\mapsto 1-M\eta\in\mathbb{R}$，所以对所有$\eta\in]-\infty,1[$，都有 $1-M\eta\le(1-\eta)^M$。特殊情形 $\eta:=1/(\mu\,\|p\|)\in]0,1[$ yields $1-M/(\mu\,\|p\|)\le\big(1-1/(\mu\,\|p\|)\big)^M$，即得所需结论。□

这一部分特定的选取 λ 在推论 18 具有一个很好的性质，即 $1-\lambda^2 = 1/(\mu\,\|p\|)$.

4.3 第二个估计

为简便起见，我们记

$$\mathcal{T}_{N,\lambda}(p) := \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\ 2N<|\alpha|\le 4N}} \big\langle\,[\mathcal{K}_{N,\lambda}]_\alpha\,\big|\,p\,\big\rangle_\infty\, x^\alpha \tag{55}$$

对于 $N\in\mathbb{N}_0$，$\lambda\in[0,1[$，以及 $p\in\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]$。本节将给出 $\mathcal{T}_{N,\,\lambda}(p)$的一个估计，它作为推论10中高阶项的尾项出现。

我们还将使用简记

$$C_\lambda(\alpha,\beta) := \left(\frac{2^{|\alpha|}\,\lfloor\frac{\alpha}{2}\rfloor!\,\lceil\frac{\alpha}{2}\rceil!}{(1-\lambda^2)^{|\alpha|}\,(\alpha!)^2}\right)^{1/2}\int_{\mathbb{R}^d}\xi^{\alpha+\beta}\exp\!\left(-\frac{(\xi\cdot\xi)}{1-\lambda^2}\right)\frac{\mathrm{d}^d\xi}{\sqrt{\pi(1-\lambda^2)}^d} \tag{56}$$

对于 $\lambda\in[0,1[$和 $\alpha,\ \beta\in\mathbb{N}_0^d$。由于 $C_\lambda(\alpha,\ \beta)$ 是高斯积分的乘积，其精确值可用（21）计算。特别地，对于所有 $\lambda\in[0,1[$和 $\alpha,\ \beta\in\mathbb{N}_0^d$，$C_\lambda(\alpha,\ \beta)\ge 0$。

命题19 设 $M, N\in\mathbb{N}_0$, $p\in\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]_{2M}$，且 $\lambda\in[0,1[$。则

$$\mathcal{T}_{N,\lambda}(p) = \\ = \sum_{n=N+1}^{2N} 2^n \sum_{k=0}^{2n-2N-1} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\ |\alpha|=k}} \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^d\\ |\beta|\le 2M}} \frac{\big(-(x\cdot x)\big)^{n-k}}{(n-k)!}\left(\frac{\lambda^2}{2(1-\lambda^2)}\right)^{n-k/2}\frac{x^\alpha}{\big(\lfloor\frac{\alpha}{2}\rfloor!\,\lceil\frac{\alpha}{2}\rceil!\big)^{1/2}}\,[p]_\beta\,C_\lambda(\alpha,\beta).$$

特别地，若 $\lambda=0$，则 $\mathcal{T}_{N,\ \lambda}(p)\ =0$。

证明： 我们应用 $\mathcal{T}_{N,\,\lambda}(p)$、$\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle_\infty$、$\mathcal{K}_{N,\,\lambda}$、$\exp_N$和 C_λ的定义，分别参见（55）、（31）、（39）、（38）和（56），并在此过程中进行了一些化简：

$\mathcal{T}_{N,\lambda}(p) =$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\ 2N<|\alpha|\le 4N}} \big\langle\, [\mathcal{K}_{N,\lambda}]_\alpha \,\big|\, p \,\big\rangle_\infty \, x^\alpha \\
&= \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\ 2N<|\alpha|\le 4N}} \int_{\mathbb{R}^d} \big[\mathcal{K}_{N,\lambda}(\xi)\big]_\alpha \, x^\alpha \, p(\xi) \exp\big(-(\xi\cdot\xi)\big) \, \frac{\mathrm{d}^d\xi}{\sqrt{\pi}^d} \\
&= \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\ 2N<|\alpha|\le 4N}} \int_{\mathbb{R}^d} \left[\exp_N\!\left(-\frac{(x\cdot x)\lambda^2 - 2(x\cdot\xi)\lambda}{1-\lambda^2}\right)\right]_\alpha x^\alpha \, p(\xi) \exp\!\left(-\frac{(\xi\cdot\xi)}{1-\lambda^2}\right) \frac{\mathrm{d}^d\xi}{\sqrt{\pi(1-\lambda^2)}^d} \\
&= \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\ 2N<|\alpha|\le 4N}} \sum_{n=0}^{2N} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\big[\big(-(x\cdot x)\lambda^2 + 2(x\cdot\xi)\lambda\big)^n\big]_\alpha \, x^\alpha}{(1-\lambda^2)^n \, n!} \, p(\xi) \exp\!\left(-\frac{(\xi\cdot\xi)}{1-\lambda^2}\right) \frac{\mathrm{d}^d\xi}{\sqrt{\pi(1-\lambda^2)}^d} \\
&= \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\ 2N<|\alpha|\le 4N}} \sum_{n=0}^{2N} \sum_{k=0}^{n} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\big[\big(-(x\cdot x)\lambda^2\big)^{n-k}\big(2(x\cdot\xi)\lambda\big)^k\big]_\alpha \, x^\alpha}{(1-\lambda^2)^n \, (n-k)!\, k!} \, p(\xi) \exp\!\left(-\frac{(\xi\cdot\xi)}{1-\lambda^2}\right) \frac{\mathrm{d}^d\xi}{\sqrt{\pi(1-\lambda^2)}^d} \\
&\overset{\text{(a)}}{=} \sum_{n=N+1}^{2N} \sum_{k=0}^{2n-2N-1} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\big(-(x\cdot x)\lambda^2\big)^{n-k}\big(2(x\cdot\xi)\lambda\big)^k}{(1-\lambda^2)^n \, (n-k)!\, k!} \, p(\xi) \exp\!\left(-\frac{(\xi\cdot\xi)}{1-\lambda^2}\right) \frac{\mathrm{d}^d\xi}{\sqrt{\pi(1-\lambda^2)}^d} \\
&\overset{\text{(b)}}{=} \sum_{n=N+1}^{2N} \sum_{k=0}^{2n-2N-1} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\ |\alpha|=k}} \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^d\\ |\beta|\le 2M}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\big(-(x\cdot x)\lambda^2\big)^{n-k} \, 2^k \, \lambda^k \, x^\alpha \, \xi^\alpha}{(1-\lambda^2)^n \, (n-k)!\, \alpha!} \, [p]_\beta \, \xi^\beta \, \exp\!\left(-\frac{(\xi\cdot\xi)}{1-\lambda^2}\right) \frac{\mathrm{d}^d\xi}{\sqrt{\pi(1-\lambda^2)}^d} \\
&= \sum_{n=N+1}^{2N} \sum_{k=0}^{2n-2N-1} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\ |\alpha|=k}} \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^d\\ |\beta|\le 2M}} \frac{\big(-(x\cdot x)\lambda^2\big)^{n-k} \, 2^{k/2} \, \lambda^k \, x^\alpha}{(1-\lambda^2)^{n-k/2} \, (n-k)! \, \big(\lfloor\frac{\alpha}{2}\rfloor!\,\lceil\frac{\alpha}{2}\rceil!\big)^{1/2}} \, [p]_\beta \, C_\lambda(\alpha,\beta) \\
&= \sum_{n=N+1}^{2N} 2^n \sum_{k=0}^{2n-2N-1} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\ |\alpha|=k}} \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^d\\ |\beta|\le 2M}} \frac{\big(-(x\cdot x)\big)^{n-k}}{(n-k)!} \left(\frac{\lambda^2}{2(1-\lambda^2)}\right)^{n-k/2} \frac{x^\alpha}{\big(\lfloor\frac{\alpha}{2}\rfloor!\,\lceil\frac{\alpha}{2}\rceil!\big)^{1/2}} \, [p]_\beta \, C_\lambda(\alpha,\beta).
\end{aligned}
$$

在 (a) 处，我们利用 $\big(-(x\cdot x)\lambda^2\big)^{n-k}\big(2(x\cdot\xi)\lambda\big)^k$ 关于 $x_1,\dots,x_d$ 是次数为 $2n-k$ 的齐次式，并且 $2N<2n-k$ 当且仅当 $n\ge N+1$ 且 $k\le 2n-2N-1$。在 (b) 处，我们将多项式定理（29）应用于 $(x\cdot\xi)^k/k!$，并展开 $p(\xi)=\sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^d}[p]_\beta\,\xi^\beta$。至此，证明基本完成。在特殊情形 $\lambda=0$ 下，可得 $\mathcal{T}_{N,\,\lambda}(p)=0$，因为对于所有 $n\in\{N+1,\dots,2N\}$ 和 $k\in\{0,\dots,2n-2N-1\}$，$\lambda^2/(2(1-\lambda^2))$ 的指数 $n-k/2$ 都严格为正。 □

为了得到关于 $\preccurlyeq$ 的 $\mathcal{T}_{N,\lambda}(p)$ 上界，我们需要单项式 x^α 的上界和下界，尤其是在 $\alpha\notin(2\mathbb{N}_0)^d$ 的情况下。

引理20 对于所有的 $\eta\in\,]0,\infty[$ 和 $\alpha\in\mathbb{N}_0^d$，以下估计成立：

$$
-b(\eta,\alpha) \preccurlyeq \frac{x^\alpha}{\big(\lfloor\frac{\alpha}{2}\rfloor!\,\lceil\frac{\alpha}{2}\rceil!\big)^{1/2}} \preccurlyeq b(\eta,\alpha) \quad \textit{with} \quad b(\eta,\alpha) \coloneqq \frac{1}{2^d} \sum_{\nu\in\{0,1\}^d} \eta^{|\lfloor\frac{\alpha+\nu}{2}\rfloor|-\frac{|\alpha|}{2}} \, \frac{x^{2\lfloor\frac{\alpha+\nu}{2}\rfloor}}{\lfloor\frac{\alpha+\nu}{2}\rfloor!}. \tag{57}
$$

证明： 设 $\eta \in]0,\ \infty[$。由（11）可知，只需考虑单变量情形，即 .,

$$-c(\eta,k) \preccurlyeq \frac{z^k}{\left(\lfloor \frac{k}{2} \rfloor ! \lceil \frac{k}{2} \rceil !\right)^{1/2}} \preccurlyeq c(\eta,k) \quad \text{with} \quad c(\eta,k) := \frac{1}{2} \sum_{e\in\{0,1\}} \eta^{\lfloor \frac{k+e}{2} \rfloor - \frac{k}{2}} \frac{z^{2\lfloor \frac{k+e}{2} \rfloor}}{\lfloor \frac{k+e}{2} \rfloor !} \quad \text{for } k \in \mathbb{N}_0, \quad (\clubsuit)$$

其中，$\preccurlyeq$ 是由凸锥 $\sum \mathbb{R}[z]^2$ 在 $\mathbb{R}[z]$ 上诱导的偏序。因此令 $k \in \mathbb{N}_0$。我们分别讨论 k 为偶数和奇数的两种情形。若 k 为偶数，则 $k/2 = \lfloor k/2 \rfloor = \lceil k/2 \rceil = \lfloor (k+1)/2 \rfloor$，所以$z^k/\left(\lfloor \frac{k}{2} \rfloor ! \lceil \frac{k}{2} \rceil !\right)^{1/2} = z^k/(k/2)! = c(\eta,\ k)$，且（♣ 成立。若 k 为奇数，即 $k = 2\ell+1$ 对某个 $\ell \in \mathbb{N}_0$ 成立，则 $\lfloor k/2 \rfloor = \ell$，且 $\lceil k/2 \rceil = \lfloor (k+1)/2 \rfloor = \ell+1$，所以

$$c(\eta,k) = \frac{1}{2}\left(\eta^{-\frac{1}{2}} \frac{z^{2\ell}}{\ell!} + \eta^{\frac{1}{2}} \frac{z^{2(\ell+1)}}{(\ell+1)!}\right).$$

由（12），估计

$$-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\ell+1}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\eta}{\ell+1}\right)^{\frac{1}{2}} z^2\right) \preccurlyeq z \preccurlyeq \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\ell+1}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\eta}{\ell+1}\right)^{\frac{1}{2}} z^2\right)$$

成立，由此将两边乘以 $z^{2\ell}/\left(\ell!(\ell+1)!\right)^{1/2}$，即可得到 (♣。 □

命题21 设 $M, N \in \mathbb{N}_0$, $p \in \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_d]_{2M}$，且 $\lambda \in [0,1[$。那么

$$\mathcal{T}_{N,\lambda}(p) \preccurlyeq$$

$$\preccurlyeq \sum_{\nu\in\{0,1\}^d} \sum_{n=N+1}^{2N} 2^{n-d} \sum_{k=0}^{2n-2N-1} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d \\ |\alpha|=k}} \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^d \\ |\beta|\le 2M}} \frac{(x\cdot x)^{n-k}}{(n-k)!} \left(\frac{1}{2(1-\lambda^2)}\right)^{n-k+|\lfloor \frac{\alpha+\nu}{2} \rfloor|} \frac{x^{2\lfloor \frac{\alpha+\nu}{2} \rfloor}}{\lfloor \frac{\alpha+\nu}{2} \rfloor !} |[p]_\beta|\, C_\lambda(\alpha,\beta).$$

证明： 将引理20 中的估计应用于 $\eta := \lambda^2/(2(1-\lambda^2))$，作用于$\mathcal{T}_{N,\ \lambda}(p)$ 的公式（来自命题19），然后利用 $\lambda^2/\left(2(1-\lambda^2)\right) \le 1/\left(2(1-\lambda^2)\right)$。 □

接下来，我们对积分 $C_\lambda(\alpha,\ \beta)$ 使用一个估计。

引理 22 设 $\lambda \in [0,1[$ 和 $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$。若 $\alpha+\beta \notin (2\mathbb{N}_0)^d$，则 $C_\lambda(\alpha+\beta) = 0$。特别地，若 $|\alpha|+|\beta| \notin 2\mathbb{N}_0$，则 $C_\lambda(\alpha+\beta) = 0$。此外，估计 $C_\lambda(\alpha,\beta) \le (\beta!)^{1/2}$ 成立。

证明： 我们可以将 $C_\lambda(\alpha,\beta)$ 展开为高斯积分的乘积：

$$C_\lambda(\alpha,\beta) = \prod_{j=1}^d \left(\frac{2^{\alpha_j} \lfloor \frac{\alpha_j}{2} \rfloor ! \lceil \frac{\alpha_j}{2} \rceil !}{(1-\lambda^2)^{\alpha_j} (\alpha_j!)^2}\right)^{1/2} \int_{\mathbb{R}} \xi_j^{\alpha_j+\beta_j} \exp\left(-\frac{\xi_j^2}{1-\lambda^2}\right) \frac{\mathrm{d}\xi_j}{\sqrt{\pi(1-\lambda^2)}}$$

高斯积分的公式（21）表明 C_λ（$\alpha+\beta$）$= 0$ 若 $\alpha+\beta \notin$（$2\mathbb{N}_0$）^{d}，则成立；特别是，若 $|\alpha|+|\beta| \notin 2\mathbb{N}_0$。此外，估计（23）给出

$$C_\lambda(\alpha,\beta) \le \left(\frac{2^{|\alpha|} \lfloor \frac{\alpha}{2} \rfloor ! \lceil \frac{\alpha}{2} \rceil !}{(1-\lambda^2)^{|\alpha|} (\alpha!)^2} \frac{(1-\lambda^2)^{|\alpha+\beta|} (\alpha+\beta)!}{2^{|\alpha+\beta|}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{(1-\lambda^2)^{|\beta|}\,\beta!}{2^{|\beta|}} \binom{\alpha+\beta}{\alpha} \binom{\alpha}{\lfloor \alpha/2 \rfloor}^{-1} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left((1-\lambda^2)^{|\beta|}\,\beta! \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (\beta!)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

这里用到了$\binom{\alpha+\beta}{\alpha} \leq 2^{|\beta|}\binom{\alpha}{\lfloor \alpha/2 \rfloor}$ 由命题15可知。 □

命题 23 设 $M, N \in \mathbb{N}_0$, $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_d]_{2M}$, *and* $\lambda \in [0,1[$. *Then*

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{T}_{N,\lambda}(p) \preccurlyeq \\
&\preccurlyeq \sum_{\nu \in \{0,1\}^d} \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^d \\ |\beta| \leq 2M}} |[p]_\beta|\,(\beta!)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=N+1}^{2N} 2^{n-d} \sum_{k \in \mathcal{K}_\beta(n,N)} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_\beta(k)} \frac{(x \cdot x)^{n-k}}{(n-k)!} \left(\frac{1}{2(1-\lambda^2)} \right)^{n-k+|\lfloor \frac{\alpha+\nu}{2} \rfloor|} \frac{x^{2\lfloor \frac{\alpha+\nu}{2} \rfloor}}{\lfloor \frac{\alpha+\nu}{2} \rfloor!}
\end{aligned}
$$

其中

$$
\mathcal{K}_\beta(n,N) := \left\{ k \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; 0 \leq k \leq 2n-2N-1 \text{ and } k+|\beta| \in 2\mathbb{N}_0 \right\} \tag{58}
$$

and

$$
\mathcal{A}_\beta(k) := \left\{ \alpha \in \mathbb{N}_0^d \;\middle|\; |\alpha| = k \text{ and } \alpha+\beta \in (2\mathbb{N}_0)^d \right\}. \tag{59}
$$

证明： 将引理 22应用于命题 $\mathcal{T}_{N,\lambda}(p)$ 中的估计 21。 □

接下来，我们简化对 $\mathcal{K}_\beta(n,N)$ 和 $\mathcal{A}_\beta(k)$ 的求和：

引理 24 设 $\lambda \in [0,1[$, $\nu \in \{0,1\}^d$, $\beta \in \mathbb{N}_0^d$, $N \in \mathbb{N}_0$ 以及 $n \in \{N+1, \ldots, 2N\}$。令 $\mathcal{K}_\beta(n,N)$和 $\mathcal{A}_\beta(k)$ 按命题 *23*中的定义给出。假设 $N \geq \lfloor d/2 \rfloor$。那么

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k \in \mathcal{K}_\beta(n,N)} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_\beta(k)} \frac{(x \cdot x)^{n-k}}{(n-k)!} \left(\frac{1}{2(1-\lambda^2)} \right)^{n-k+|\lfloor \frac{\alpha+\nu}{2} \rfloor|} \frac{x^{2\lfloor \frac{\alpha+\nu}{2} \rfloor}}{\lfloor \frac{\alpha+\nu}{2} \rfloor!} \preccurlyeq \\
&\qquad \preccurlyeq (d+1) \sum_{m=N-\lfloor d/2 \rfloor}^{n+\lceil d/2 \rceil} \frac{(x \cdot x)^m}{m!} \left(\frac{1}{1-\lambda^2} \right)^m.
\end{aligned} \tag{60}
$$

证明： 首先注意，对所有 $b \in \mathbb{N}_0$ 以及 $e \in \{0,1\}$，映射

$$
\left\{ a \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; a+b \in 2\mathbb{N}_0 \right\} \ni a \mapsto \left\lfloor \frac{a+e}{2} \right\rfloor \in \mathbb{N}_0
$$

and

$$
\left\{ a \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; a+b \in 2\mathbb{N}_0 \right\} \ni a \mapsto \left\lceil \frac{a+e}{2} \right\rceil \in \mathbb{N}_0
$$

是单射：对于每个 $n \in \mathbb{N}_0$，在映射$\mathbb{N}_0 \ni a \mapsto \lfloor \frac{a+e}{2} \rfloor \in \mathbb{N}_0$和 $\mathbb{N}_0 \ni a \mapsto \lceil \frac{a+e}{2} \rceil \in \mathbb{N}_0$下至多有两个原像（一个奇数，一个偶数），但其中至多只有一个满足条件

$a+b\in 2\mathbb{N}_{0\infty}$。因此，映射

$$\mathcal{A}_\beta(k)\ni\alpha\mapsto\gamma(\alpha)\coloneqq\left\lfloor\frac{\alpha+\nu}{2}\right\rfloor\in\mathbb{N}_0^d$$

是单射。由 $|\alpha+\nu|=k+|\nu|$ 对所有 $\alpha\in\mathcal{A}_\beta(k)$ 成立可得 $\frac{k+|\nu|-d}{2}\leq|\lfloor\frac{\alpha+\nu}{2}\rfloor|\leq\frac{k+|\nu|}{2}$，因此 $\lceil\frac{k+|\nu|-d}{2}\rceil\leq|\lfloor\frac{\alpha+\nu}{2}\rfloor|\leq\lfloor\frac{k+|\nu|}{2}\rfloor$，所以

$$\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor\leq\left\lceil\frac{k-d}{2}\right\rceil\leq\left\lceil\frac{k+|\nu|-d}{2}\right\rceil\leq\left|\left\lfloor\frac{\alpha+\nu}{2}\right\rfloor\right|\leq\left\lfloor\frac{k+|\nu|}{2}\right\rfloor\leq\left\lfloor\frac{k+d}{2}\right\rfloor\leq\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor+\left\lceil\frac{d}{2}\right\rceil.$$

类似地，映射

$$\mathcal{K}_\beta(n,N)\ni k\mapsto\ell(k)\coloneqq n-\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil\in\mathbb{N}_0$$

是单射，并且

$$N=n-\left\lceil\frac{2n-2N-1}{2}\right\rceil\leq n-\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil\leq n$$

对所有 $k\in\mathcal{K}_\beta(n,\ N)$均成立。将 γ代入 $\lfloor\frac{\alpha+\nu}{2}\rfloor$（为合理描述代入后求和范围的新形式，我们可以添加一些正项），将 ℓ代入 $n-\lceil\frac{k}{2}\rceil$，并进行一些化简（特别是应用多项式定理（29）），即可得到（60）：

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\in\mathcal{K}_\beta(n,N)}\sum_{\alpha\in\mathcal{A}_\beta(k)}\frac{(x\cdot x)^{n-k}}{(n-k)!}\left(\frac{1}{2(1-\lambda^2)}\right)^{n-k+|\lfloor\frac{\alpha+\nu}{2}\rfloor|}\frac{x^{2\lfloor\frac{\alpha+\nu}{2}\rfloor}}{\lfloor\frac{\alpha+\nu}{2}\rfloor!}\preccurlyeq\\
&\quad\preccurlyeq\sum_{\Delta=-\lfloor d/2\rfloor}^{\lceil d/2\rceil}\sum_{k\in\mathcal{K}_\beta(n,N)}\sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}_0^d\\|\gamma|=\lfloor k/2\rfloor+\Delta}}\frac{(x\cdot x)^{n-k}}{(n-k)!}\left(\frac{1}{2(1-\lambda^2)}\right)^{n-k+\lfloor k/2\rfloor+\Delta}\frac{x^{2\gamma}}{\gamma!}\\
&\quad=\sum_{\Delta=-\lfloor d/2\rfloor}^{\lceil d/2\rceil}\sum_{\substack{k\in\mathcal{K}_\beta(n,N)\\\lfloor k/2\rfloor+\Delta\geq0}}\frac{(x\cdot x)^{n-k}}{(n-k)!}\left(\frac{1}{2(1-\lambda^2)}\right)^{n-k+\lfloor k/2\rfloor+\Delta}\frac{(x\cdot x)^{\lfloor k/2\rfloor+\Delta}}{(\lfloor k/2\rfloor+\Delta)!}\\
&\quad=\sum_{\Delta=-\lfloor d/2\rfloor}^{\lceil d/2\rceil}\sum_{\substack{k\in\mathcal{K}_\beta(n,N)\\\lfloor k/2\rfloor+\Delta\geq0}}\frac{(x\cdot x)^{n-k+\lfloor k/2\rfloor+\Delta}}{(n-k+\lfloor k/2\rfloor+\Delta)!}\binom{n-k+\lfloor k/2\rfloor+\Delta}{n-k}\left(\frac{1}{2(1-\lambda^2)}\right)^{n-k+\lfloor k/2\rfloor+\Delta}\\
&\quad\overset{(a)}{\preccurlyeq}\sum_{\Delta=-\lfloor d/2\rfloor}^{\lceil d/2\rceil}\sum_{k\in\mathcal{K}_\beta(n,N)}\frac{(x\cdot x)^{n-\lceil k/2\rceil+\Delta}}{(n-\lceil k/2\rceil+\Delta)!}\binom{n-\lceil k/2\rceil+\Delta}{n-k}\left(\frac{1}{2(1-\lambda^2)}\right)^{n-\lceil k/2\rceil+\Delta}\\
&\quad\preccurlyeq\sum_{\Delta=-\lfloor d/2\rfloor}^{\lceil d/2\rceil}\sum_{k\in\mathcal{K}_\beta(n,N)}\frac{(x\cdot x)^{n-\lceil k/2\rceil+\Delta}}{(n-\lceil k/2\rceil+\Delta)!}\left(\frac{1}{1-\lambda^2}\right)^{n-\lceil k/2\rceil+\Delta}\\
&\quad=\sum_{\Delta=-\lfloor d/2\rfloor}^{\lceil d/2\rceil}\sum_{\ell=N}^{n}\frac{(x\cdot x)^{\ell+\Delta}}{(\ell+\Delta)!}\left(\frac{1}{1-\lambda^2}\right)^{\ell+\Delta}
\end{aligned}$$

$$\preccurlyeq (d+1) \sum_{m=N-\lfloor d/2 \rfloor}^{n+\lceil d/2 \rceil} \frac{(x\cdot x)^m}{m!} \left(\frac{1}{1-\lambda^2}\right)^m$$

其中，(a) 并非等式，因为我们舍弃了限制条件 $\lfloor k/2 \rfloor + \Delta \geq 0$；这不会引入未定义项，因为 $n - \lceil k/2 \rceil + \Delta \geq N + \Delta \geq \lfloor d/2 \rfloor + \Delta \geq 0$，这归因于假设 $N \geq \lfloor d/2 \rfloor$。□

命题 25 设 $M, N \in \mathbb{N}_0$，$p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_d]_{2M}$，且 $\lambda \in [0, 1[$。假设 $N \geq \lfloor d/2 \rfloor$。则

$$\mathcal{T}_{N,\lambda}(p) \preccurlyeq (d+1)\, 2^{d+1} \|p\| \sum_{m=N-\lfloor d/2 \rfloor}^{2N+\lceil d/2 \rceil} \frac{(x\cdot x)^m}{m!} \left(\frac{4}{1-\lambda^2}\right)^m. \tag{61}$$

证明： 我们应用前面的引理 24 对 $\mathcal{T}_{N,\lambda}(p)$ 的估计，见命题 23，然后化简结果：

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{N,\lambda}(p) &\preccurlyeq \sum_{\nu\in\{0,1\}^d} \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^d \\ |\beta|\leq 2M}} |[p]_\beta|\, (\beta!)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=N+1}^{2N} 2^{n-d}(d+1) \sum_{m=N-\lfloor d/2 \rfloor}^{n+\lceil d/2 \rceil} \frac{(x\cdot x)^m}{m!} \left(\frac{1}{1-\lambda^2}\right)^m \\
&= (d+1)\, \|p\| \sum_{n=N+1}^{2N} 2^n \sum_{m=N-\lfloor d/2 \rfloor}^{n+\lceil d/2 \rceil} \frac{(x\cdot x)^m}{m!} \left(\frac{1}{1-\lambda^2}\right)^m \\
&\preccurlyeq (d+1)\, \|p\|\, 2^{2N+1} \sum_{m=N-\lfloor d/2 \rfloor}^{2N+\lceil d/2 \rceil} \frac{(x\cdot x)^m}{m!} \left(\frac{1}{1-\lambda^2}\right)^m \\
&\preccurlyeq (d+1)\, \|p\| \sum_{m=N-\lfloor d/2 \rfloor}^{2N+\lceil d/2 \rceil} 2^{2m+d+1} \frac{(x\cdot x)^m}{m!} \left(\frac{1}{1-\lambda^2}\right)^m \\
&\preccurlyeq (d+1)\, 2^{d+1} \|p\| \sum_{m=N-\lfloor d/2 \rfloor}^{2N+\lceil d/2 \rceil} \frac{(x\cdot x)^m}{m!} \left(\frac{4}{1-\lambda^2}\right)^m.
\end{aligned}$$

□

对于 $m \to \infty$，因子 $\frac{1}{m!}\left(4/(1-\lambda^2)\right)^m$ 趋于 0。若要得到定量结果，我们应用斯特林公式的一种变体，参见 [Rob55] 或 [JAM15]:

$$\Gamma(1+\xi) > \sqrt{2\pi\xi} \left(\frac{\xi}{\mathrm{e}}\right)^\xi \qquad \text{for all } \xi \in]0, \infty[\tag{62}$$

其中 e 是欧拉数，且 $\Gamma\colon\ ]0,\infty[\to]0,\infty[$ 是满足基本方程 $\Gamma(1+\xi) = \xi\,\Gamma(\xi)$（对所有 $\xi \in]0, \infty[$ 成立）且对数凸的唯一函数，并且 $\Gamma(1) = 1$（这是由博尔–莫勒鲁普定理刻画的伽马函数）。特别地，对所有 $n \in \mathbb{N}_0$，$\Gamma(1+n) = n!$

引理 26 设 $\xi \in]0, \infty[$ 和 $\eta \in [0, \infty[$。则恒等式 $\Gamma(1+\xi+\eta) \geq \xi^\eta\, \Gamma(1+\xi)$ 成立。

证明： 令 $\lambda := \eta - \lfloor \eta \rfloor \in [0,1[$。注意到 $1+\xi = \lambda(\xi+\lambda) + (1-\lambda)(1+\xi+\lambda)$。由 Γ 的对数凸性可知

$$\ln\bigl(\Gamma(1+\xi)\bigr) \le \lambda \ln\bigl(\Gamma(\xi+\lambda)\bigr) + (1-\lambda)\ln\bigl(\Gamma(1+\xi+\lambda)\bigr),$$

或等价地

$$\Gamma(1+\xi) \le \Gamma(\xi+\lambda)^{\lambda}\,\Gamma(1+\xi+\lambda)^{1-\lambda}.$$

将 $(\xi+\lambda)^{\lambda}$ 相乘，并应用基本方程 $(\xi+\lambda)\,\Gamma(\xi+\lambda) = \Gamma(1+\xi+\lambda)$，即可得到 $(\xi+\lambda)^{\lambda}\,\Gamma(1+\xi) \le \Gamma(1+\xi+\lambda)$。因此

$$\begin{aligned}
\xi^{\eta}\,\Gamma(1+\xi) &\le \Bigl(\prod\nolimits_{j=1}^{\lfloor\eta\rfloor}(j+\xi+\lambda)\Bigr)(\xi+\lambda)^{\lambda}\,\Gamma(1+\xi) \\
&\le \Bigl(\prod\nolimits_{j=1}^{\lfloor\eta\rfloor}(j+\xi+\lambda)\Bigr)\Gamma(1+\xi+\lambda) \\
&= \Gamma\bigl(1+\lfloor\eta\rfloor+\xi+\lambda\bigr) \\
&= \Gamma(1+\xi+\eta)
\end{aligned}$$

其中我们在 $j \in \{1,\dots,\lfloor\eta\rfloor\}$ 的条件下应用基本方程 $(j+\xi+\lambda)\,\Gamma(j+\xi+\lambda) = \Gamma(1+j+\xi+\lambda)$。
□

引理27 设 $a, b \in]0,\infty[$ 和 $m \in \mathbb{N}_0$。假设

$$m \ge \mathrm{e}b + \max\left\{0, \ln\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right)\right\}, \tag{63}$$

其中 e 是欧拉数。则 $m! \ge a b^m$。
证明： 注意到 $m \ge \mathrm{e}b > 0$ 并且 $m - \mathrm{e}b \ge \ln\bigl(a/\sqrt{b}\bigr) \ge \ln\bigl(a/\sqrt{2\pi\mathrm{e}b}\bigr)$。结合前面的引理 26，对于 $\xi := \mathrm{e}b > 0$ 以及 $\eta := m - \mathrm{e}b \ge 0$，再利用斯特林公式（62）：

$$m! = \Gamma(1+m) \ge (\mathrm{e}b)^{m-\mathrm{e}b}\,\Gamma(1+\mathrm{e}b) \ge (\mathrm{e}b)^{m-\mathrm{e}b}\sqrt{2\pi\mathrm{e}b}\,b^{\mathrm{e}b} = \mathrm{e}^{m-\mathrm{e}b}\sqrt{2\pi\mathrm{e}b}\,b^m \ge a b^m. \qquad \square$$

现在我们可以证明第二个估计（45）：

命题28 设 $M, N \in \mathbb{N}_0$, $p \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]_{2M}$, 和 $\lambda, t \in [0,1[$。假设

$$N \ge \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + \mathrm{e}\left(\frac{4}{1-\lambda^2}\right)^{\frac{1}{1-t}} + \max\left\{0, \frac{\ln\bigl((d+1)2^d \|p\| \sqrt{1-\lambda^2}\bigr)}{1-t}\right\}. \tag{64}$$

Then

$$\mathcal{T}_{N,\lambda}(p) \preccurlyeq \sum_{m=N-\lfloor d/2\rfloor}^{2N+\lceil d/2\rceil} \frac{(x\cdot x)^m}{(m!)^t}. \tag{65}$$

证明： 当 $p = 0$ 时，这显然成立。否则，令

$$a := \bigl((d+1)\,2^{d+1}\,\|p\|\bigr)^{\frac{1}{1-t}} \in]0,\infty[\qquad \text{and} \qquad b := \left(\frac{4}{1-\lambda^2}\right)^{\frac{1}{1-t}} \in]0,\infty[$$

并注意到，假设（64）等价于 $N - \lfloor d/2 \rfloor \geq eb + \max\{0, \ln(a/\sqrt{b})\}$。由命题 25以及前面的引理 27，估计

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{N,\lambda}(p) &\preccurlyeq (d+1)\, 2^{d+1} \|p\| \sum_{m=N-\lfloor d/2 \rfloor}^{2N+\lceil d/2 \rceil} \frac{(x \cdot x)^m}{m!} \left(\frac{4}{1-\lambda^2}\right)^m \\ &= \sum_{m=N-\lfloor d/2 \rfloor}^{2N+\lceil d/2 \rceil} \frac{(x \cdot x)^m}{(m!)^t} \left(\frac{ab^m}{m!}\right)^{1-t} \\ &\preccurlyeq \sum_{m=N-\lfloor d/2 \rfloor}^{2N+\lceil d/2 \rceil} \frac{(x \cdot x)^m}{(m!)^t}\end{aligned}$$

成立。 □

4.4 综合

现在，我们可以应用第 4.2 节和4.3节中得到的显式估计。

（定理 2的证明）： 设 $M \in \mathbb{N}$ 和 $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_d]_{2M}$，并假设 $p(\xi) \geq 0$ 对所有$\xi \in \mathbb{R}^d$都成立。设 $t \in [0, 1[$。只需处理特殊情形 $\epsilon = 1$；一般情形 $\epsilon \in]0, \infty[$则可通过将此特殊情形应用于缩放后的多项式 p/ϵ得出。由命题7 和推论10，

$$0 \preccurlyeq \mathcal{I}_{N,\lambda,\infty}(p) = p + \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^d \\ |\alpha| \leq 2M}} \frac{(\lambda^{|\alpha|} - 1)\, H_\alpha \langle H_\alpha \,|\, p \rangle_\infty}{2^{|\alpha|}\alpha!} + \mathcal{T}_{N,\lambda}(p) \quad \text{for all } \lambda \in [0, 1[\text{ and } N \in \mathbb{N}_0,\ N \geq M,$$

其中$\mathcal{T}_{N,\ \lambda}(p)$ 来自（55）。定义 $\mu \in]0, \infty[$ 如（3）或等价地（53）中那样。若 $\mu \|p\| \leq 1$，则命题 52）的条件17 对所有 $\lambda \in [0, 1]$ 都成立（注意，此处我们假设 $M \geq 1$），因此

$$\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^d \\ |\alpha| \leq 2M}} \frac{(\lambda^{|\alpha|} - 1)\, H_\alpha \langle H_\alpha \,|\, p \rangle_\infty}{2^{|\alpha|}\alpha!} \preccurlyeq \sum_{m=0}^{M+\lfloor d/2 \rfloor} \frac{(x \cdot x)^m}{(m!)^t}$$

对所有 $\lambda \in [0, 1]$，由命题 17 可知，特别地，对 $\lambda = 0$ 也成立。由于 $\mathcal{T}_N$，对所有 $N \in$，由命题 19 可得 $0(p) = 0$ N0，因此可推出

$$0 \preccurlyeq \mathcal{I}_{M,0,\infty}(p) = p + \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^d \\ |\alpha| \leq 2M}} \frac{(\lambda^{|\alpha|} - 1)\, H_\alpha \langle H_\alpha \,|\, p \rangle_\infty}{2^{|\alpha|}\alpha!} + \mathcal{T}_{M,0}(p) \preccurlyeq p + \sum_{m=0}^{M+\lfloor d/2 \rfloor} \frac{(x \cdot x)^m}{(m!)^t}.$$

由于 $M + \lfloor d/2 \rfloor \leq N_{\text{expl}}(p)$，这就完成了 $\mu \|p\| \leq 1$ 情形下的证明。否则 $\mu \|p\| > 1$。在

这种情况下

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\|\alpha|\le 2M}} \frac{(\lambda^{|\alpha|}-1)\,H_\alpha\,\langle\,H_\alpha\,|\,p\,\rangle_\infty}{2^{|\alpha|}\alpha!} \preccurlyeq \sum_{m=0}^{M+\lfloor d/2\rfloor} \frac{(x\cdot x)^m}{(m!)^t} \qquad \text{for} \qquad \lambda \coloneqq \left(1-\frac{1}{\mu\,\|p\|}\right)^{\frac{1}{2}}$$

根据推论18，以及

$$\mathcal{T}_{N,\lambda}(p) \preccurlyeq \sum_{m=N-\lfloor d/2\rfloor}^{2N+\lceil d/2\rceil} \frac{(x\cdot x)^m}{(m!)^t}$$

根据命题 28 对于所有满足 $N\in\mathbb{N}_0$ 的

$$N \ge \left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor + \mathrm{e}\left(\frac{4}{1-\lambda^2}\right)^{\frac{1}{1-t}} + \max\left\{0, \frac{\ln\big((d+1)2^d\|p\|\sqrt{1-\lambda^2}\big)}{1-t}\right\}.$$

由于 $1-\lambda^2=\big(\mu\,\|p\|\big)^{-1}$，关于 N 的这个条件等价地可表示为

$$N \ge \left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor + \mathrm{e}\big(4\mu\,\|p\|\big)^{\frac{1}{1-t}} + \max\left\{0, \frac{\ln\big((d+1)2^d\sqrt{\|p\|/\mu}\big)}{1-t}\right\}. \tag{♠}$$

总之，

$$0 \preccurlyeq \mathcal{I}_{N,\lambda,\infty}(p) = p + \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\|\alpha|\le 2M}} \frac{(\lambda^{|\alpha|}-1)\,H_\alpha\,\langle\,H_\alpha\,|\,p\,\rangle_\infty}{2^{|\alpha|}\alpha!} + \mathcal{T}_{N,\lambda}(p) \preccurlyeq p + \sum_{m=0}^{2N+\lceil d/2\rceil} \frac{(x\cdot x)^m}{(m!)^t}$$

前提是条件 $M\le N$、$M+\lfloor d/2\rfloor < N-\lfloor d/2\rfloor$ 和 (♠) 均得到满足。若将 $N\in\mathbb{N}_0$ 取为满足 $N\ge M+d+1$ 和 (♠) 的最小整数，则这一条件成立。于是$2N+\lceil d/2\rceil \le N_{\mathrm{expl}}(p)$，因为

$$2\big(M+d+1\big)+\left\lceil\frac{d}{2}\right\rceil = 2M+\left\lceil\frac{5d}{2}\right\rceil+2$$

并且由于

$$\begin{aligned}
&2\left(\left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor+\left\lceil \mathrm{e}\big(4\mu\,\|p\|\big)^{\frac{1}{1-t}}+\max\left\{0,\frac{\ln\big((d+1)2^d\sqrt{\|p\|/\mu}\big)}{1-t}\right\}\right\rceil\right)+\left\lceil\frac{d}{2}\right\rceil = \\
&\qquad = 2\left\lceil \mathrm{e}\big(4\mu\,\|p\|\big)^{\frac{1}{1-t}}+\max\left\{0,\frac{\ln\big((d+1)2^d\sqrt{\|p\|/\mu}\big)}{1-t}\right\}\right\rceil + d + \left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor \\
&\qquad \le \left\lceil 2\mathrm{e}\big(4\mu\,\|p\|\big)^{\frac{1}{1-t}}\right\rceil + \max\left\{0,\left\lceil\frac{1}{1-t}\ln\left(\frac{(d+1)^2\,2^{2d}\,\|p\|}{\mu}\right)\right\rceil\right\} + \left\lfloor\frac{3d}{2}\right\rfloor + 1.
\end{aligned} \qquad \square$$

5 结论与展望

我们的工作借鉴 Lasserre 框架所启发的扰动方法，重点研究用平方和（SOS）逼近非负多项式。我们在$\mathbb{R}^d$ 上建立了定量的扰动正定性定理，并给出了截断阶数的显式界 N，从而确保存在如下形式的平方和证书

$$p+\varepsilon\sum_{n=0}^{N}\frac{(x\cdot x)^n}{(n!)^t}\in\sum\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]^2,\qquad 0<t<1,$$

只要 $p\geq 0$ 在 $\mathbb{R}^d$上。主要贡献定理 2给出了多项式增长界

$$N=O\big((\|p\|/\varepsilon)^{1/(1-t)}\big),$$

该界通过一种由埃尔米特多项式构造的正积分核（利用迈勒公式）并遵循多项式核方法的思路而得到。我们的结果加强了在无界域上逼近非负多项式的理论基础；在这些域上，传统的 SOS 方法往往面临挑战。

未来的研究有几个值得探索的方向。首先，将基于核的构造推广到其他已知微扰结果的正性情形会很有意思，例如正非交换多项式 [NGSA+13]、迹正非交换多项式[KSV23],以及正矩多项式 [KMV25]。

另一项重要的未来工作，是针对相对于高斯参考测度的无约束多项式优化，推导 Lasserre 上界层级的显式收敛速度。据我们所知，这将为非紧域上的基于 SOS 的多项式优化层级提供首个显式收敛速率保证。Lasserre 上界层级通过最小化目标多项式相对于固定参考测度的期望来构造，其中所用的多项式密度是定义在该测度支撑集 [Las11]上的、有界次数的平方和。尽管在温和假设下，这些上界渐近收敛到全局最小值，但近期研究的一个重点是理解定量收敛速度 [dKLS17、dKL20、dKL22]。在我们的情形中，我们考虑在 $\mathbb{R}^n$上对多项式 $p\in\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]$ 求最小值的问题，即计算

$$p_{\min}=\inf_{\xi\in\mathbb{R}^d}p(\xi). \tag{66}$$

公式化（66）的另一种方式如下：

$$p_{\min}=\inf_{\Phi\in\mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d)}\left\{\int_{\mathbb{R}^d}p(\xi)\mathrm{d}\Phi(\xi)\;\middle|\;\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{d}\Phi(\xi)=1\right\}, \tag{67}$$

其中 $\mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d)$ 表示支撑于 $\mathbb{R}^d$ 上的非负博雷尔测度集合。Lasserre 在 $\mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d)$ 中提出的框架，不再对完整集合 [Las11] 进行优化，而是对形如 $\mathrm{d}\Phi(\xi)=\sigma(\xi)\mathrm{d}\Psi(\xi)$ 的测度进行优化，其中 Ψ 是一个固定的参考测度，其支撑集为

恰好是 $\mathbb{R}^d$，且 σ 是一个在 $\mathbb{R}^d$ 上逐点非负的多项式。这就得到所谓的 $p_{\min}$ 的上界层级，其由 $N \in \mathbb{N}_0$ 进行索引：

$$\operatorname{ub}(p,\Psi)_N \coloneqq \inf_{\sigma\in C_N}\left\{\int_{\mathbb{R}^d} p(\xi)\sigma(\xi)\mathrm{d}\Psi(\xi) \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}^d}\sigma(\xi)\mathrm{d}\Psi(\xi)=1\right\}, \tag{68}$$

其中 C_N是凸锥 $\sum\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]^2\cap\mathbb{R}[x_1,\dots,x_d]_{2N}$。我们希望遵循 [Slo22 第 5] 节中的步骤，通过给出一个显式的参考测度 Ψ，其支撑集等于 $\mathbb{R}^d$，以及一列概率密度 $(\sigma_N)_{N\in\mathbb{N}_0}$，其中每个 $\sigma_N \in C_N$，并且使得差值

$$\int_{\mathbb{R}^d} p(\xi)\sigma_N(x)\mathrm{d}\Psi(\xi) - p_{\min}$$

可以从上方界定。然而，由于我们的核在交换输入参数 x 和输出参数 ξ时并不对称，因此无法直接应用这一方法。要克服这一障碍，还需要专门开展进一步研究。

参考文献

[AAR00] George E. Andrews、Richard Askey 和 Ranjan Roy。《特殊函数》，《数学应用百科全书》第 71 卷，剑桥大学出版社，平装版，2000 年。[BM23] Lorenzo Baldi 和 Bernard Mourrain。论有效的 Putinar 正定性定理与矩近似。《数学规划》，200(1):71–103，2023 年。[BS24] Lorenzo Baldi 和 Lucas Slot。超立方体上 Putinar 正定性定理的次数界。《SIAM 应用代数与几何杂志》，8(1):1–25，2024 年。[Dav25] Kenneth R. Davidson。《泛函分析与算子代数》，《CMS/CAIMS 数学丛书》第 13 卷，施普林格，2025 年。[dKL20] Etienne de Klerk 和 Monique Laurent。超立方体上多项式优化的 Lasserre 测度型层级的最坏情形示例。《数学运筹研究》，45(1):86–98，2020 年。[dKL22] Etienne de Klerk 和 Monique Laurent。球面上多项式最小化的 Lasserre 上界层级的收敛性分析。《数学规划》，193(2 (B)):665–685，2022 年。[dKLS17] Etienne de Klerk、Monique Laurent 和 Zhao Sun。多项式优化的 Lasserre 测度型上界层级的收敛性分析。《数学规划》，162(1-2 (A)):363–392，2017 年。[FF21] Kun Fang 和 Hamza Fawzi。球面上的平方和层级及其在量子信息论中的应用。《数学规划》，190(1-2 (A)):331–360，2021 年。[JAM15] G. J. O. JAMESON。伽马函数斯特林公式的简单证明。《数学公报》，99(544):68–74，2015 年。[KMRZ25] Milan Korda、Victor Magron 和 Rodolfo Rios-Zertuche。具有相关稀疏性的平方和层级的收敛速度。《数学规划》，209(1):435–473，2025 年。

[KMV25] Igor Klep、Victor Magron 和 Jurij Volčič。多项式矩不等式的平方和证书。《计算数学基础》，第 1–43 页，2025 年。[KSV23] Igor Klep、Claus Scheiderer 和 Jurij Volčič。全局迹正非交换多项式与无界迹矩问题。《数学年刊》，387(3):1403–1433，2023 年。[Las01] Jean B. Lasserre。利用多项式进行全局优化与矩问题。《SIAM 优化杂志》，11(3):796–817，2001 年。[Las07] Jean B. Lasserre。非负多项式的平方和逼近。《SIAM 评论》，49(4):651–669，2007 年。[Las11] Jean B. Lasserre。重新审视闭集上的非负性与多项式优化。《SIAM 优化杂志》，21(3):864–885，2011 年。[Lau09] Monique Laurent。平方和、矩阵与多项式优化。载于《代数几何的新兴应用》。IMA 研讨会论文集：优化与控制（2007 年 1 月 16–20 日）以及生物学、动力学与统计学应用（2007 年 3 月 5–9 日），美国明尼苏达州明尼阿波利斯 IMA 举办，第 157–270 页。纽约：施普林格，2009 年。[LM19] Jean B. Lasserre 和 Victor Magron。在半定规划松弛中，不精确求解器能够实现鲁棒优化。《SIAM 优化杂志》，29(3):2128–2145，2019 年。[LS23] Monique Laurent 和 Lucas Slot。针对超立方体的 Schmüdgen 正定性定理的有效版本。《优化快报》，17(3):515–530，2023 年。[LS26] Monique Laurent 和 Lucas Slot。多项式优化中平方和层级收敛速度概述。载于 Shin’ichi Oishi、Hisashi Okamoto 和 Ken Hayami（编），《工业与应用数学新进展》，第 149–176 页，新加坡，2026 年。新加坡施普林格自然，2026 年。[Mag25] Victor Magron。集合乘积上多项式优化的收敛速度。预印本，arXiv:2505.18580 [math.OC] (2024)，2025 年。[Mar08] Murray Marshall。《正多项式与平方和》，《数学调查专著》第 146 卷。美国数学学会（AMS），2008 年。[MED21] Victor Magron 和 Mohab Safey El Din。论精确的 Reznick、Hilbert-Artin 和 Putinar 表示。《符号计算杂志》，107:221–250，2021 年。[MM22] Ngoc Hoang Anh Mai 和 Victor Magron。论 Putinar–Vasilescu 正性定理的复杂度。《复杂性杂志》，72:101663，2022 年。[NGSA+13] Miguel Navascués、Artur García-Sáez、Antonio Acín、Stefano Pironio 和 Martin B Plenio。通过半定规划松弛进行玻色能量计算时的一个悖论。《新物理学杂志》，15(2):023026，2013 年。[NS07] Jiawang Nie 和 Markus Schweighofer。论 Putinar 正定性定理的复杂度。《复杂性杂志》，23(1):135–150，2007 年。[Put93] Mihai Putinar。紧半代数集上的正多项式。《印第安纳大学数学杂志》，42(3):969–984，1993 年。

[Rai71] Earl D. Rainville. 特殊函数. Chelsea Publishing Comp, 1971.[Rob55] Herbert Robbins. 关于斯特林公式的一则注记。《美国数学月刊》, 62:26–29, 1955.[Sch91] Konrad Schmüdgen. 紧半代数集上的 K-矩问题。《数学年刊》, 289:203–206, 1991.[Sch04] Markus Schweighofer. 关于 Schmüdgen 正定性定理的复杂度。*J. Com-plex.*, 20(4):529–543, 2004.[Sch17] Konrad Schmüdgen. 矩问题. 施普林格, 2017.[SL23] Lucas Slot 和 Monique Laurent. 二元多项式优化的平方和层级。《数学规划》, 197(2):621–660, 2023.[Slo22] Lucas Slot. 多项式优化的平方和层级与 Christoffel–Darboux 核。《*SIAM* 优化杂志》, 32(4):2612–2635, 2022.[Sze75] Gabor Szegö. 正交多项式，第 *4* 版, *Colloq. Publ.* 第 23 卷，美国数学学会（AMS），1975.[Wak12] Hayato Waki. 如何通过多项式优化的 Lasserre 松弛生成弱不可行半正定规划。《优化快报》, 6(8):1883–1896, 2012.