arXiv:2603.13986v2 [gr-qc] 19 Mar 2026

超越薄壳机制的多场膨胀子屏蔽

Philippe Brax，[1] Carsten van de Bruck，[2] Anne-Christine Davis，[3] 以及 Adam Smith[2]1理论物理研究所，巴黎-萨克雷大学，吉夫叙尔伊韦特，法国2数学与物理科学学院，谢菲尔德大学，谢菲尔德，英国3应用数学与理论物理系及卡弗里宇宙学研究所（*KICC*），剑桥大学，剑桥，英国（日期：2026年3月23日）

我们分析了多场标量–张量理论中的屏蔽现象，重点研究存在行星和恒星密度分布的系统，其中膨胀子与物质耦合，且轴子具有依赖于膨胀子的动力学项。通过解析论证和完全耦合数值解，我们确定了一种无需精细调节的参数区域，在该区域内，暗能量尺度的轻型、实际上未被钉扎的弦膨胀子能够实现完全屏蔽。膨胀子伴随的轴子场所产生的反作用，可以通过选择最低能量构型（BBQ机制）来抑制外部标量荷，从而对一般的轴子梯度产生稳健的屏蔽。在这一机制下，屏蔽是通过抵消膨胀子的梯度，而不是将其局域化来实现的。这会减小外部标量荷，使其能够通过太阳系中的引力检验。随后我们表明，在多场情形下，更为熟悉的薄壳直觉未必适用。轴子表面梯度能够显著重塑膨胀子分布，并驱动一种更加局域化的相变，同时通常不会抑制第五种力。当由动力学耦合场使壳层变得更薄时，外部荷可以基本保持不变，甚至得到增强。因此，多场二阶导数动力学将薄壳中的局域化与屏蔽相互解耦，规避单场不可行性论证，并为与物质具有强耦合的宇宙学尺度的轻膨胀子类标量重新开启可行参数空间。

I. 引言

现代宇宙学数据如今已足够精确，因此，新的轻自由度不再只是一个纯粹的推测性想法。质量处于哈勃尺度或低于该尺度的标量场，正通过《宇宙》的膨胀历史和结构增长得到直接检验 [1–11]。这重新激发了人们对理论上可控的标量扇区的兴趣，这类扇区能够改变晚期动力学 [12–14], 缓解参数层面的张力 [15–20], ，或留下能够区别动力学暗能量与宇宙学常数的特征信号 [21–27]。与此同时，弦理论等引力的紫外完备理论很少能提供仅包含单个孤立标量场的低能有效理论 [28–32]。它们通常包含多个轻场，其中包括与耦合和尺度相关的模场，以及由近似平移对称性保护的轴子；这些场的主导相互作用在很大程度上由场空间几何而非势所支配 [33]。这类标量出现在规范耦合和其他基本参数中，通常会诱导它们与标准模型中的大量场发生耦合。因此，自然的问题并不是轻标量是否存在，而是它们如何在保持宇宙学相关性的同时，仍能与严格的局域检验相容。

任何与物质耦合的轻标量场都会传递一种新的长程相互作用。实验室实验、太阳系动力学和天体物理观测对这类第五种力施加了极其严格的限制 [34–39]。因此，可行的标量-张量理论必须包含一种屏蔽机制，以抑制致密天体的标量响应，使场在大尺度上保持活跃，同时在约束最严格的局部环境中有效解耦。

在理论依据最充分的轻标量场中，膨胀子既是普适闭弦扇区中引力子的标量伴侣，也是其低能有效作用量中的标量场 [40–43], ； 此外，乔丹–布兰斯–迪克型标量–张量理论经共形重标度改写为爱因斯坦框架时，也会显现出膨胀子这一标量模态 [44, 45]。其耦合可通过最小耦合原理及其失控型和环境依赖型扩展而动态受抑制 [46–53]。膨胀子为描述有效耦合和质量如何依赖于轻场提供了最简参数化方式。对具有恒定物质耦合的膨胀子进行屏蔽，在根本上十分困难。按照标准叙述，膨胀子会形成依赖密度的有效势，并在致密天体内部和外部分别处于不同的极小值。对于指数耦合，场在这些极小值之间的变化幅度与密度对比的对数成正比。考虑到现实的天体物理密度对比，这一变化幅度在参数上很大，因此膨胀子在源外必须具有非零空间梯度，才能到达渐近极小值，而标准的薄壳屏蔽也就失效了 [46, 50]。除非将耦合调得极小，否则第五种力基本上不会受到屏蔽。当宇宙学分析更倾向于或能够轻松容纳远大于无屏蔽时所允许的物质耦合时，这一障碍尤其具有约束力 [54–57], ； 当轻标量通过在关键时期有控制地改变粒子质量，同时影响引力和微观物理时，就可能出现这种情况[46]。

本文的一个核心观点是：在得出关于物质耦合及其与可观测量之间对应关系的结论时所采用的单场假设，无论从紫外观点还是从有效场

论观点来看，都不是普遍成立的。一旦存在不止一个轻标量场，动能部分便定义了一个弯曲的目标空间几何，与之相关的双导数相互作用无法通过场重定义消除。在静态构型中，即使势较为平缓，或对称性抑制了直接耦合，一个标量场的梯度仍可能成为另一个标量场的源。因此，屏蔽可能由真正的多场双导数动力学所控制，而这类动力学在任何单场截断中都不存在。场空间曲率耦合的符号和大小可以决定额外的场是有助于屏蔽，还是使其恶化，而与势的具体形式无关。

在本工作中，我们分析了这种最小轴子–膨胀子系统中的效应。该系统以多种形式在 [58–67], 中被用于宇宙学研究，由一个χ 与物质共形耦合的膨胀子，以及与其配对的轴子场 $\mathfrak{a}$ 组成；后者的动能项带有一个依赖于 χ–$W^2(\chi)$ 的前因子。由此产生的弯曲场空间诱导出一种特征性的二阶导数相互作用，其正比于$W(\chi)W_{,\chi}(\chi)\ \mathfrak{a}'(r)^2$,，并在膨胀子运动方程中充当源项。因此，即使不存在直接的势耦合，轴子梯度通常也会反作用于膨胀子分布。

膨胀子演化所受到的物理影响在很大程度上取决于 $W_{,\chi}$ 的符号。鉴于在物体外部的真空中，膨胀子总是渐近地向无穷远滚动，如果该符号为正，轴子梯度会进一步为膨胀子提供源，并在其存在的任何位置诱导出局域化的膨胀子分布。这会改变$where$ 膨胀子能够发生显著演化的区域，因此产生与膨胀子仅由物质耦合自然演化时截然不同的场分布。在天体物理物体外部的真空中，轻膨胀子总会沿径向顺着汤川尾部向其环境值 $\chi_{\rm env}$ 演化，满足

$$\chi \simeq \chi_{\rm env} - \frac{L}{r}, \tag{1}$$

其中，参数 L是膨胀子的标量荷，其大小控制与该场相关的外部空间梯度的整体大小。我们试图回答，这种外部动能驱动是否通常能够降低天体外部膨胀子的标量荷（因为降低标量荷就相当于屏蔽膨胀子），例如通过改变膨胀子演化发生的位置，驱使膨胀子在更小的半径范围内从一个渐近极小值演化到另一个（即形成更薄的膨胀子壳层）。我们发现，在任何一般情形下，动能驱动都无法抑制净标量荷，因为向系统中加入外部驱动的膨胀子梯度会带来额外的荷惩罚。然而，若 $W_{,\chi}$ 为负，轴子梯度通常会阻碍膨胀子单场朝较大的 χ演化；研究表明，它通常能降低源表面的膨胀子梯度和有效耦合 [1] [68]。这种

当膨胀子表面值和渐近值可以自由变化时，将这一效应与系统的全局能量最小化结合起来，便会自然地产生这种结果；此时系统会动态地选择该状态，无需精细调节。

本文通过不同的案例研究来说明屏蔽机制的实际作用，重点考察密度依赖有效势存在极小值的弦论膨胀子的不同变体。局部系统是否被束缚在这些极小值处，取决于介质中的质量尺度；对于暗能量膨胀子，场通常不会在恒星和行星尺度上被束缚。在这一机制下，试图通过外场强行产生局域插值来实现屏蔽，即形成薄壳，通常会适得其反，因为在无法到达渐近驻点的情况下，使 χ进一步偏离其环境值会增大膨胀子场变化幅度，进而增加外部标量荷。相反，当 $W_{,\chi} < 0$ 时，可行的屏蔽通过动力学梯度抑制实现；这一条件由耦合轴子–膨胀子系统的最低能量构型决定。

如果膨胀子的质量足够大，或系统的密度足够高，局域天体就会被钉扎在内部极小值处。在这种情况下，梯度抑制机制通常难以达到全局平衡构型。此时，若借助额外的场来减小外部膨胀子梯度，就需要使 χ 在某些内部区域偏离其极小值，从而付出额外的势能代价。因此，钉扎环境中的显著屏蔽敏感地取决于环境细节，通常需要调节轴子剖面或模型参数，而非稳健地源于能量最小化。即使轴子动能耦合的符号相反 $W_{,\chi} > 0$ 因而有助于而非阻碍膨胀子向其外部极小值演化，转变局域于薄壳内也不会抑制第五种力。轴子梯度通过通量平衡带来自身的荷惩罚，因此减小壳层宽度 $\Delta R/R_s$ 仍会使外部荷 L基本保持不变，从而使薄壳的形成与实际屏蔽脱钩。

这些结果表明，多场轴子–膨胀子动力学会定性地改变剖面局域化与可观测的第五种力之间的联系，并促使我们即使在固定的微观模型中，也将钉扎环境与未钉扎环境分开处理。本文建立了相应的解析判据，并通过完全耦合数值解加以验证[2],，确定了轴子–膨胀子模型既符合局域约束又保持宇宙学相关性的参数空间区域。出乎意料的是，我们发现，在多场情形下，膨胀子的屏蔽关键取决于轴子对膨胀子演化的动能贡献的符号

[1] 我们将这一过程简称为 BBQ。

[2] 本研究所用的代码已在 [69] 公开。

。当该符号为负时，如果物质内部的膨胀子取值未被其势钉扎，就可以实现屏蔽。屏蔽成为一种全局性质，源于标量场能量的最小化。在这种情况下，钉扎场的屏蔽也遵循与单场情形相同的模式，即形成薄壳。这需要轴子和膨胀子对标量荷的贡献经过精细调谐而相互抵消。这与未钉扎情形形成对比：在未钉扎情形下，膨胀子会在致密天体表面调整其取值，并使场构型的能量最小化。相反，当轴子与膨胀子之间的动能耦合为正时，最小化过程会失效，轴子在薄壳机制中几乎不起作用。

本文其余部分安排如下。第二节介绍一般的球对称多场设定，以及控制第五力的标量荷。第三节定义轴子–膨胀子系统及其二阶导数场空间相互作用。第四节介绍弦膨胀子及其模型特征，随后回顾单场膨胀子，并解释为什么常数耦合下薄壳屏蔽会失效。第五节研究多场薄壳，并表明轴子驱动的局域化通常不会抑制外部标量荷；换言之，屏蔽需要对膨胀子和轴子对标量荷的贡献进行精细调谐，使二者相互抵消。第六节介绍通过能量极小化实现的梯度抑制（BBQ机制），并指出其在何种情况下能够带来稳健的电荷抑制，包括失控/无极小值情形。第七节重新探讨其对天体物理尺度上可行膨胀子模型的意义，最后在第八节总结。

II. 球对称系统

一般设定与动机

我们从爱因斯坦框架中的一般标量–张量理论开始（与里奇标量 R最小耦合），其中包含 N 标量场 ϕ^I，其目标空间度量为$G_{IJ}(\phi^K)$，势为 $V(\phi^I)$，并通过共形耦合$A(\phi^I)$与物质耦合，

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x\,\sqrt{-g}\,\Big[M_{\rm pl}^2 R - G_{IJ}(\phi^K)\,\partial_\mu\phi^I\partial^\mu\phi^J - 2V(\phi^I)\Big] + S_m\big[A^2(\phi^I)\,g_{\mu\nu},\psi_m\big], \quad (2)$$

其中， ψ_m 表示物质场， $M_{\rm pl}$ 是约化普朗克质量。

关于标量–张量屏蔽的大量文献都聚焦于单场模型，但从有效场论的角度来看，这种关注事实证明过于受限。正如文献 [70–73], 所强调的那样，在低能下保留下来的主导相互作用（危险的零导数势能项受到对称性抑制之后对称性 [70, 74, 75]）是双导数 σ-模型相互作用

$$\mathcal{L}_{\rm 2deriv} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,\Big[M_{\rm pl}^2 R - G_{IJ}(\phi^K)\,\partial_\mu\phi^I\partial^\mu\phi^J\Big]. \quad (3)$$

一般而言，预计这些相互作用会在天体物理学和宇宙学能标下，与广义相对论的二阶导数部分相竞争。

至关重要的是，当目标空间为一维时，这些动能度量相互作用没有物理效应：每个一维流形在局部都是平坦的，因此对于单个标量场，总能通过场重定义移除该度量。这意味着，单场屏蔽模型会意外地排除整个二阶导数 σ-模型相互作用类别。在这类模型中，所有非平凡动力学都必须来自势或物质耦合，而动能部分不起任何作用。从有效场论的角度看，这高度不具一般性。具有内置对称性的基本紫外理论预言，动能几何是红外区域中标量相互作用的主导来源。

对于多场，情况会发生本质变化。弯曲靶空间必然会引入克里斯托费尔符号 $\Gamma^I{}_{JK}(\phi)$，它们会在场方程中作为真正的二阶导数力出现。将式 (2) 特化到静态球对称构型 $\phi^I = \phi^I(r)$，并对 $\phi^I(r)$ 变分，得到

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\big(r^2 G_{IJ}\phi^{J\prime}\big) - \frac{1}{2}\,\partial_I G_{JK}\,\phi^{J\prime}\phi^{K\prime} = \partial_I V + \partial_I A\,\rho_m(r), \quad (4)$$

其中，撇号表示 d/dr，而 $\rho_m(r)$ 表示守恒的物质密度。几何项

$$\frac{1}{2}\,\partial_I G_{JK}\,\phi^{J\prime}\phi^{K\prime}, \quad (5)$$

只要另一个场存在空间梯度，它就会作为 ϕ^I 的有效源。即使第二个场具有精确的平移对称性，这一贡献仍是纯粹的二阶导数项，且不会消失。因此，多场系统可能呈现出任何单场约化都无法比拟的低能行为。

由于紫外完备理论通常包含多个轻标量场，且它们的低能相互作用受 $G_{IJ}(\phi^K)$ 的弯曲几何支配，因此在实际中，任何一个场的动力学几乎都不会彼此孤立 [76, 77]。场空间相互作用和转向轨迹会耦合绝热方向与熵方向，因此一个标量场的梯度或涨落通常会成为另一个标量场的源、牵引它，或阻碍其滚动 [78–80]。因此，单场屏蔽模型恰恰忽略了基础理论所预示必然存在的这类相互作用，因而很可能无法对有充分理论依据的标量—张量物理作出定性上准确的描述。[3]

[3]除非额外的场能够在受控的有效理论中被一致地解耦或积分掉 [81, 82]

下一节将以轴子—膨胀子系统为案例，明确阐释这一点；但首先，我们将介绍在天体物理环境中研究这些效应所需的适当方法。

标量荷

我们聚焦于单个轻场 ϕ，其对致密天体的标量力将在下文计算。该标量通过克莱因-戈尔登方程（4）中出现的动能耦合与其他标量相互作用。对于近似均匀环境中的这一轻标量场 $\phi = \phi(r)$ 的静态球对称构型，在半径为 R_s、质量为 M 的致密物体外部、半径 $r \gtrsim R_s$ 处，其解具有通常的汤川/拉普拉斯形式

$$\phi(r) = \phi_{\rm env} - \frac{L_\phi}{r}\, e^{-m_{\rm env}(r-R_s)}, \qquad (r \gtrsim R_s), \tag{6}$$

其中，$\phi_{\rm env}$ 是远离源处的场的环境值，它可简化为

$$\phi \simeq \phi_{\rm env} - \frac{L_\phi}{r}, \tag{7}$$

当 $m_{\rm env}(r-R_s) \ll 1$ 时，其中 $m_{\rm env}$ 是该标量的环境质量。常数 L_ϕ称为标量荷，在物体外部守恒

$$L_\phi \equiv r^2\phi'|_{r>R_s}. \tag{8}$$

它是外部尾部的振幅，因此控制着长程第五力。只要在致密天体附近可以忽略标量势，这个解就有效。例如，当标量场充当暗能量时，便是如此。

为将 L_ϕ 与内部动力学联系起来，我们将式（4）专门化为爱因斯坦框架中针对 ϕ 的正则归一化单场运动方程，

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\big(r^2\phi'\big) = \partial_\phi V(\phi^I) \;+\; \partial_\phi A(\phi^I)\,\rho_m(r) \;+\; \frac{1}{2}\,\partial_\phi G_{JK}(\phi^I)\,\phi^{J\prime}\phi^{K\prime}. \tag{9}$$

将式（9）从 0 积分到 ∞，并利用原点处的正则性（当 $r\to 0$ 时，$r^2\phi'\to 0$），再结合外部尾部式（8），可得通量/荷关系

$$L_\phi = \int_0^\infty dr\, r^2\big[V_{,\phi}\,(\phi^I) + A_{,\phi}\,(\phi^I)\,\rho_m(r) + \frac{1}{2}\,\partial_\phi G_{JK}(\phi^I)\,\phi^{J\prime}(r)\phi^{K\prime}(r)\big]. \tag{10}$$

因此，外部荷是对整个构型中所有 ϕ 源的综合度量。势梯度和物质耦合会产生贡献，σ 模型相互作用（编码在 $\partial_\phi G_{JK}\,\phi^{J\prime}\phi^{K\prime}$ 中）也会产生贡献。这些项之间的抵消可以抑制 L_ϕ，即使场在天体内部/外部存在非平凡变化。

如果 ϕ 是唯一与物质种类耦合的标量，那么物质沿着 $\tilde g_{\mu\nu} = A^2(\phi) g_{\mu\nu}$ 的测地线运动，因此试验物体会受到由标量 ϕ 导致的加速度，其表达式为

$$a_\phi = -\nabla \ln A(\phi) = -\frac{\beta_{\rm env}}{M_{\rm pl}}\,\nabla\phi, \quad \frac{\beta_{\rm env}(\phi_{\rm env})}{M_{\rm pl}} \equiv \left.\frac{d\ln A}{d\phi}\right|_{\phi_{\rm env}}. \tag{11}$$

例如，当除 ϕ 以外的所有场都是不与物质发生非导数相互作用的赝戈德斯通玻色子时，便是这种情况。对于太阳系尺度上的轻场，外部尾部式（7）意味着

$$|a_\phi| \simeq \frac{\beta_{\rm env}}{M_{\rm pl}}\,\frac{L_\phi}{r^2}, \qquad (r \gtrsim R_s), \tag{12}$$

因此，标量力随 $1/r^2$ 衰减，与牛顿引力一样，

$$|a_N| = \frac{G_N M}{r^2} = \frac{\Phi_N(R_s)\,R_s}{r^2}, \qquad \Phi_N(R_s) \equiv \frac{GM}{R_s}. \tag{13}$$

因此，方便的做法是通过引入有效耦合 $\beta_{\rm eff}$ 来表征外部标量场尾部的振幅：

$$\frac{|a_\phi|}{|a_N|} \;\equiv\; 2\,\beta_{\rm env}\,\beta_{\rm eff} \qquad (m_{\rm env} r \ll 1), \tag{14}$$

将上述表达式代入后，这等价于荷定义

$$L_\phi \equiv 2\,\beta_{\rm eff}\,M_{\rm pl}\,\Phi_N(R_s)\,R_s. \tag{15}$$

按此定义，未屏蔽极限对应于 $\beta_{\rm eff} \simeq \beta_{\rm env} \simeq \beta$，从而得到熟悉的力比 $|a_\phi|/|a_N| \simeq 2\beta^2$。

因此，对于给定的源，标量的外部荷与其对物质的有效耦合强度之间存在直接对应关系

$$\frac{L_\phi}{L_0} = \frac{\beta_{\rm eff}}{\beta_{\rm env}}, \tag{16}$$

其中 L_0 是未屏蔽标量荷。因此，屏蔽标量相当于减小其净外部荷。现在我们介绍两种在实践中抑制 L_ϕ 的方法。

值得关注的屏蔽机制

1. 薄壳

薄壳屏蔽是物质耦合标量场在其有效势.....时规避局域第五种力限制的标准方式。

$$V_{\rm eff}(\phi;\rho_m) = V(\phi) + A(\phi)\rho_m, \tag{17}$$

存在依赖于密度的驻点 [50, 83–85] 时，薄壳屏蔽是与物质耦合的标量场规避局部第五种力界限的标准方式。对于内部密度为 ρ_c 、外部环境密度为 $\rho_{\rm env}$的球形物体，场在大部分体积内保持在内部值 $\phi_c \simeq \phi_{\rm min}(\rho_c)$ 附近，直到滚动半径 $R_{\rm roll}$ 处，并且仅在厚度为$\Delta R = R_s - R_{\rm roll}$的表面层中转变为环境值 $\phi_{\rm env} \simeq \phi_{\rm min}(\rho_{\rm env})$。当标量场在引力检验所探测的外部尺度上较轻时，其场分布会与公式（7）中的汤川尾部衔接，因此可观测的第五种力由公式（8）中的外部荷控制。

在薄壳区域，荷仅由位于滚动层中的那一小部分质量产生，从而得到熟知的标度关系

$$\beta_{\rm eff} \simeq 3\,\beta_{\rm env}\,\frac{\Delta R}{R_s}, \qquad \frac{L}{L_0} \simeq 3\,\frac{\Delta R}{R_s}. \tag{18}$$

因此，通常的薄壳条件相当于$\Delta R/R_s \ll 1$；第四节B节回顾了这一条件，并指出它对单场膨胀子并不成立。本文的一个核心主题是，几何上薄壳与外部荷之间的这种关系，只在理想化的单场模型中成立。一旦二阶导数的场空间相互作用对式（10）有所贡献，壳层局域化与第五种力的抑制便成为彼此独立的量（见第五节）。

2. BBQ屏蔽

当壳层图像本身无法明确定义时，也可以通过另一种途径实现屏蔽：这可能是因为 $V_{\rm eff}$ 没有相关的依赖密度的极小值，也可能是因为标量场太轻，无法在源的尺度上弛豫至这些极小值（$m_{\rm eff}$（ρ_c）$R_s \ll 1$）。在此区域，ϕ（r）可以在整个内部滚动，因此应当预期 $\Delta R/R_s \sim 1$。尽管如此，如果静态构型会动态地选取一个使总能量最小化的表面值，而该表面值恰好也会降低外部梯度能 $\sim L_\phi^2/R_s$ ，进而减小守恒荷，那么第五种力仍可能受到抑制。我们将这种由能量选择导致的电荷抑制称为BBQ机制（遵循 [68]的最小化逻辑）。

在多场系统中，这种情况之所以可能，是因为一个场的梯度能可以通过目标空间度规 $G_{IJ}(\phi)$ 依赖于另一个场，而同一曲率场空间结构也通过式（10）中的 σ 模型项直接贡献于荷积分。对于某些符号选择，若这两导数相互作用能够抵消物质诱导的、作用于所关注场的源项，那么最低能量构型就能动态抑制外部荷 L_ϕ ，即使没有形成薄壳 [86]。这正是第六节中失控／未钉扎分析的核心原理。

现在，我们将说明本文所关注的系统，并开始应用本节介绍的天体物理工具集。

III. 多场轴子–膨胀子系统

上述考量表明，在分析第五力的屏蔽时，至少应研究两个标量场。最简单且最有理论依据的例子包括轴子–膨胀子系统，由轴子 $\mathfrak{a}$ 和膨胀子χ组成，用协变语言表示为

$$\phi^I = (\chi, \mathfrak{a}), \qquad G_{IJ} = \mathrm{diag}\big(1, W^2(\chi)\big)\,. \tag{19}$$

这意味着我们所设定系统的完整作用量具有如下形式[4]

$$S = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\Bigg\{\frac{M_{\rm pl}^2}{2}\Big[R - \partial_\mu\chi\,\partial^\mu\chi - W^2(\chi)\,\partial_\mu\mathfrak{a}\,\partial^\mu\mathfrak{a}\Big] - V(\chi,\mathfrak{a})\Bigg\} + S_m(A^2(\chi)\,g_{\mu\nu}, \Psi_m)\,, \tag{20}$$

因此， χ 是一个规范归一化的膨胀子，它与能动张量的迹存在普适耦合（通过 $A(\chi)$）；而轴子 $\mathfrak{a}$ 是一个具有平移对称性的赝标量，其两导数项乘有依赖于膨胀子的前因子 $W^2(\chi)$。在 χ 和 $\mathfrak{a}$ 构成超对称对的紫外完备理论中， $W(\chi)$ 并非任意函数，而是由标量流形的几何性质决定，即由从 Kähler 势 [87, 88] 继承而来的场空间度规决定。一种广泛使用且理论依据充分的参数化形式是指数形式[5]

$$W(\chi) = W_0 e^{\zeta\chi}, \tag{21}$$

其中 ζ 表示二维目标空间 [89–91]的（常数）曲率尺度。这种弯曲场空间带来的物理后果是，轴子梯度会通过协变运动方程中的联络项反作用于膨胀子，从而为 χ产生一个有效源。

对于球对称静态构型，场方程可化简为

$$\mathfrak{a}'' + \frac{2}{r}\mathfrak{a}' = -2\,\frac{W_{,\chi}}{W}\,\chi'\mathfrak{a}' + \frac{1}{W^2(\chi)}\Big[\partial_{\mathfrak{a}}V(\chi,\mathfrak{a}) + \partial_{\mathfrak{a}}U(\mathfrak{a})A(\chi)\,\rho_m(r)\Big], \tag{22}$$

$$\chi'' + \frac{2}{r}\chi' = W(\chi)W_{,\chi}(\chi)\,\mathfrak{a}'^2 + \partial_\chi V(\chi,\mathfrak{a}) + \partial_\chi A(\chi)\,[1 + U(\mathfrak{a})]\rho_m(r). \tag{23}$$

---

[4] 除非另有明确说明，全文均采用自然单位制 $c = \hbar = 1$ ，并将约化普朗克质量定义为牛顿常数的函数： $M_{\rm pl}^{-2} = 8\pi G_{\rm N}$。 [5] 我们还在 A 节中考察了 $W^2(\chi)$的二次函数形式，以表明即使存在不同的动能耦合函数形式，系统的行为和我们的结论仍然稳健。

这些方程明确展现了弯曲场空间所诱导的双导数相互作用，其中轴子仅在 $\mathfrak{a}'(r) \neq 0$ 时才是 χ 的源，而该源的强度由几何通过 $WW_{,\chi}$ 控制。

该系统中控制膨胀子与物质耦合强度的式（10）的膨胀子荷类比形式为

$$L = \left[r^2\chi'(r)\right]_0^\infty = \int_0^\infty dr\, r^2\Big[WW_{,\chi}\,\mathfrak{a}'(r)^2 + V_{,\chi} + A_{,\chi}\rho_m\Big], \tag{24}$$

其中 ρ_m 为物质密度。本文旨在寻找抑制该荷的方法：要么抑制相关贡献，要么找出这些贡献大幅抵消的自然情形。

文献中的膨胀子

为了将该模型置于其背景中，有必要回顾一下，“膨胀子”一词最初指的是破缺的尺度不变性的（赝）戈德斯通玻色子 [59, 92–95]，；而在许多标量–张量和弦模场文献中，该词的使用范围更广，通常作为轻模量的统称，这些轻模量的变化会引起物质扇区近似普适的共形重标度 [40– 42, 96–98]。纵观这类文献，其定性行为主要由三个相互关联的结构要素决定：物质耦合 $\beta \equiv \partial \ln A/\partial\chi$ 的符号和大小、 χ 所对应的底层失控势的斜率（在爱因斯坦框架中通常近似呈指数形式），以及在多场情形下轴子–膨胀子动能耦合 ζ 的符号，该符号决定 $W_{,\chi}$ 的符号。这些符号选择决定了依赖密度的 χ 有效势是否存在局部极小值（从而使该场在不同环境中被钉扎），还是保持失控状态。基于这一动机，我们在表 I 中总结迄今研究的主要膨胀子类别，以及各类构造中最常见的符号选择，包括膨胀子的势

$$V = V_0 e^{\lambda\chi/M_{\rm Pl}}, \tag{25}$$

以及物质耦合函数

$$A(\chi) = e^{\beta\chi/M_{\rm Pl}}. \tag{26}$$

这为本文其余部分所分析的各个机制区间提供了路线图。

弦膨胀子对应于 [47, 50, 96, 99] 中研究的引力–膨胀子作用量。相比之下，瑜伽模型 [59, 63, 68] 出现于轴子是体积模量 χ的虚部伙伴时。这两种情形通常都预言与物质存在 $\beta \sim \mathcal{O}(0.1)$ 量级的耦合。在瑜伽模型中，膨胀子势经过精心设计，在暗能量尺度处具有一个浅真空极小值，因此该场在宇宙学尺度上渐近稳定。加入物质后，这个极小值仅发生微弱偏移，因此密度依赖有效势仍保留一个邻近的极小值，但其曲率仍由暗能量尺度决定，因此小得多，无法在天体物理环境中将该场固定下来。因此，尽管膨胀子在宇宙学尺度上稳定，在致密天体周围却实际上不受约束，其渐近值也仅由宇宙学因素微弱地确定。

文献中的轴子

轴子扇区包含两项贡献：联合势 $V(\chi,\ \mathfrak{a})$，通常沿轴子方向[100] 呈周期性（如普通轴子模型中那样）[6], ；以及由与爱因斯坦框架物质能量密度耦合而产生的物质诱导耦合函数 $U(\mathfrak{a})$

$$\rho_{m\,E} = A(\chi)(1 + U(\mathfrak{a}))\rho_m(r), \tag{27}$$

其中 ρ_m 是守恒质量密度。下文中我们假设 $U(\mathfrak{a}) \ll 1$。两个场分别沿有效势的各自方向演化

$$V_{\rm eff}(\chi, \mathfrak{a}; \rho_m) = V(\chi, \mathfrak{a}) + [1 + U(\mathfrak{a})]\,\rho_m(r)A(\chi), \tag{28}$$

其依赖于密度的驻点决定了近似恒定密度区域中 $\mathfrak{a}$的内部和外部渐近值。内部和外部平衡值

$$\mathfrak{a}_- \equiv \mathfrak{a}(r=0), \qquad \mathfrak{a}_+ \equiv \mathfrak{a}(r \gg R_s), \tag{29}$$

由在内部密度 ρ_c 和外部密度 $\rho_{\rm env}$下求得的局部力平衡关系$\partial_{\mathfrak{a}} V_{\rm eff} = 0$ 确定。这些定义仅依赖于局部驻点的存在，并不假设 V 或 U具有任何特定的微观物理形式。一般而言，轴子的力平衡条件在场空间中定义了一条依赖密度的谷底 $\mathfrak{a}_\star(\chi;\rho)$。

以下薄壳估算假设轴子跃迁的局域程度远高于膨胀子跃迁。这意味着轴子在天体尺度上应当很重，因此它只会在狭窄的表面带内发生插值，

$$\ell_{\mathfrak{a}} \sim m_{\mathfrak{a},\rm sh}^{-1} \ll \Delta R \lesssim R_s\,, \tag{30}$$

其中$m_{\mathfrak{a},\rm sh}$ 是表面/跃迁区域内轴子的有效质量。在此情况下， $\mathfrak{a}'(r)$仅在非常接近 $r \simeq R_s$处有支撑，因此轴子反作用项在膨胀子方程中表现为近表面冲击，而非延展源。

图 1 展示了这一尺度层级。在中间面板中，源内部轴子较重的情形（橙色）显示，轴子插值局限在表面附近的一层薄层内，而对于

[6] 尽管对偶轴子框架中可以找到具有严格二次势的轴子 [101]

模型	β	λ	薄壳 ($W,\chi>0$)	BBQ，未钉扎 ($W,\chi<0$, $m_{\rm eff}R_s\ll1$)	BBQ，已钉扎 ($W,\chi<0$, $m_{\rm eff}R_s\gg1$)
弦膨胀子	>0	<0	No	Yes	环境精细调节
Yoga	<0	<0	No	Yes	–

表 I：不同膨胀子模型及其与标准模型粒子的耦合符号 β 和势斜率 λ 的总结，相关定义见式 (25) 和 (26)。符号相反的膨胀子 β 和 λ 的有效势存在极小值，而符号相同的膨胀子则没有。我们将 BBQ 区域 ($W,\chi<0$) 区分为未钉扎 情形 ($m_{\rm eff}R_s\ll1$) 和钉扎 情形 ($m_{\rm eff}R_s\gg1$)。

较轻的轴子（蓝色），轴子会在 $\mathcal{O}(R_s)$ 上发生变化，其梯度即使远离 $r\simeq R_s$ 仍然存在。顶部面板展示了这对膨胀子的影响：当轴子梯度局域化时，χ 会一直保持接近其内部值，直到接近表面；但当轴子较轻时（$m_{a,\,\rm sh}R_s\lesssim1$，蓝色），相同的二阶导数耦合会在远早于 $r\simeq R_s$ 之前将 χ 推离其内部平台。因此，在这一状态下，通常认为 χ 会一直近似保持不变，直到接近表面的某个半径处才发生变化的薄壳假设，并不自洽。[7]

当轴子在宏观尺度上很重时，可以将其积分掉。对于固定的 (χ，ρ_m)，轴子会迅速弛豫至 $\mathfrak{a}_\star(\chi;\rho_m)$，其定义为

$$\partial_{\mathfrak{a}}V_{\rm eff}(\chi,\mathfrak{a};\rho_m)\big|_{\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_\star}=0, \tag{31}$$

由此得到一个约化的单场有效势

$$V_{\rm eff}^{\rm red}(\chi;\rho_m)\equiv V_{\rm eff}(\chi,\mathfrak{a}_\star(\chi;\rho_m);\rho_m)\,, \tag{32}$$

供轻膨胀子演化。这构成了第五节和第六节中开展解析研究的基础

分段线性轴子剖面

为确定轴子梯度如何改变下文解析近似中通常的膨胀子分布，我们采用一种典型的分段线性轴子剖面。可以将其视为轴子梯度在天体表面附近一个非常陡峭的相变周围所作的泰勒展开的首阶项。轴子必须在由密度依赖有效势方程（28）确定的内部和外部平衡值之间插值；要理解它对其他轻标量场的影响，关键只在于总跃变量 $\Delta\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_+-\mathfrak{a}_-$以及 $\mathfrak{a}'(r)$不为零区域的宽度 $\ell_{\mathfrak{a}}$。

[7] 我们在第五节的完全耦合数值解中，明确处理了轴子与膨胀子之间质量层级的失效。

这促成了有效斜坡

$$\mathfrak{a}(r)=\begin{cases}\mathfrak{a}_-, & r<\alpha R_s,\\ \mathfrak{a}_-+(\Delta\mathfrak{a}/\ell_{\mathfrak{a}})(r-\alpha R_s), & \alpha R_s<r<R_s,\\ \mathfrak{a}_+, & r>R_s,\end{cases} \tag{33}$$

其中 $\ell_{\mathfrak{a}}=(1-\alpha)R_s$ 以及 $\alpha\in[0,1]$。此处，$\ell_{\mathfrak{a}}$是斜坡的特征宽度，对应于天体内部与外部之间相变区域内轴子的康普顿波长 $\lambda_{\mathfrak{a}}\sim1/m_{\mathfrak{a}\,\rm in}$ 的倒数，其中 $m_{\mathfrak{a}\,\rm in}(r)$是轴子的内部质量。

实际上，这类轴子剖面可以利用相对简单的微观物理势来实现。在下文给出的完整双场数值分析中，我们对标量势采用可分离形式，

$$V(\chi,\mathfrak{a})=V_\chi(\chi)+V_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}), \tag{34}$$

其中轴子真空势为

$$V_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a})=\frac{1}{2}m_{\mathfrak{a}}^2\left(\mathfrak{a}-\mathfrak{a}_+\right)^2, \tag{35}$$

以及一个由物质诱导的耦合函数

$$U(\mathfrak{a})=\frac{1}{2}\frac{\left(\mathfrak{a}-\mathfrak{a}_-\right)^2}{\Lambda_{\mathfrak{a}}^2}. \tag{36}$$

在这一设定中，真空贡献使极小值趋向于 $\mathfrak{a}_+$，而在密度足够高的区域，物质耦合会使有效极小值移向 $\mathfrak{a}_-$。因此，轴子会在 $\mathfrak{a}_+$ 和$\mathfrak{a}_-$ 之间插值，具体取决于真空贡献还是物质贡献在有效势中占主导地位。这一相变的具体形状和宽度由微观真空质量 $m_{\mathfrak{a}}$ 和物质耦合尺度 $\Lambda_{\mathfrak{a}}$ 控制。这些函数可视为势极小值附近的泰勒展开的首阶近似。

在介绍了通用的轴子-膨胀子模型及相应场的唯象学之后，我们现在深入探讨弦膨胀子的参数选择和模型细节。

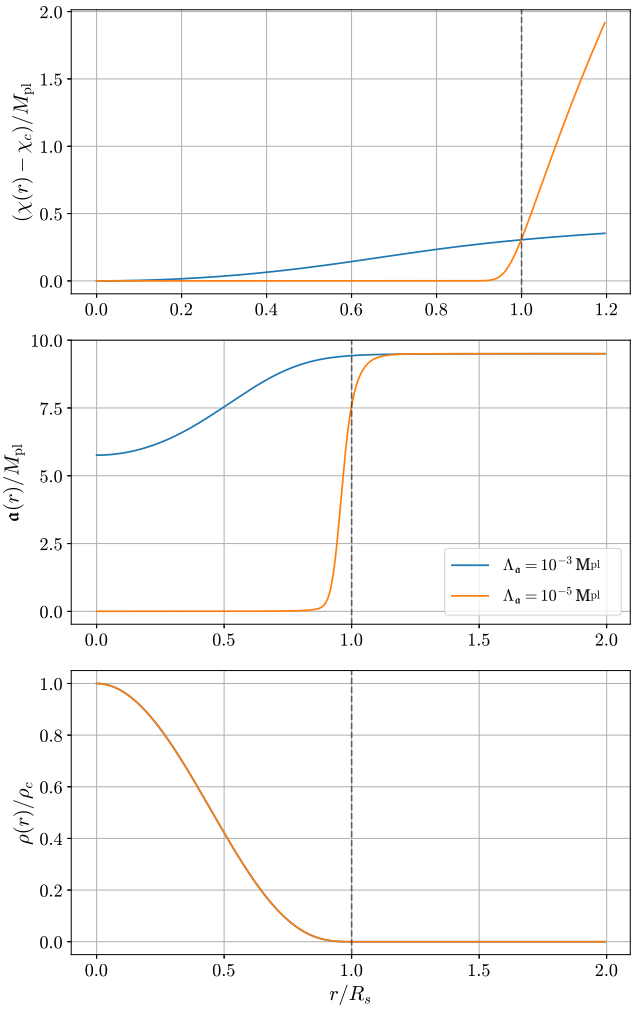


图 1：轴子–膨胀子剖面，展示薄壳近似所依据的尺度层级。**顶部：** 膨胀子位移；**中部：** 轴子；**底部：** 守恒密度剖面。虚线标示表面 $r=R_s$。两条曲线分别对应式 (36) 中的截断尺度为 $\Lambda_\mathfrak{a}=10^{-3}M_{\rm pl}$ （宽广的轴子跃迁）和 $\Lambda_\mathfrak{a}=10^{-5}M_{\rm pl}$ （局域于表面的轴子跃迁），展示了宏观轴子梯度如何驱动天体内部的 χ。在两种情况下，$W_0=1$、$\zeta=\sqrt{2}$，并且真空轴子质量取为 $m_\mathfrak{a}=5\times10^{-17}$eV。

IV. 弦膨胀子

A. 模型

本节旨在分析弦膨胀子的情形；这里所说的弦膨胀子，是指 [46, 50] 的环境依赖型（逃逸型）膨胀子情景（另请参见屏蔽综述 [102]）。在爱因斯坦框架中，引入了一个共形耦合 $\tilde{g}_{\mu\nu}=A^2(\chi)g_{\mu\nu}$ 式 (20) 意味着非相对论物质充当依赖于 χ 的源，因此静态构型可以按有效势进行组织，该有效势由物质贡献和真空贡献共同组成 [102], ，如式 (17) 所示。对于玩具模型中的常耦合选择

$$A(\chi)=e^{\beta\chi/M_{\rm pl}},\qquad \beta=\text{const},\tag{37}$$

对于 [50] 中所用形式的逃逸膨胀子势，$V(\chi)\propto A^4(\chi)\,e^{-\chi/M_{\rm pl}}$，爱因斯坦框架中的自相互作用会化为指数形式，

$$V_\chi(\chi)=V_0\,e^{(4\beta-1)\chi/M_{\rm pl}},\tag{38}$$

因此

$$V_{{\rm eff}\,\chi}(\chi;\rho_m)=V_\chi(\chi)+A(\chi)\,\rho_m(r),\tag{39}$$

其中 ρ_m 是守恒的爱因斯坦框架物质密度。作为参考，在 [50] 中，如今的宇宙学耦合值为 $\beta_{\rm cos}\simeq0.23$，因此在考虑屏蔽效应之前，我们始终取 $\beta=0.2$ 作为代表性耦合。

由于 $\beta=0.2$ 意味着 $A(\chi)$ 正在增大，而 $V(\chi)$ 正在减小，对 $V_{{\rm eff}\,\chi}$ 求极小值可得两个平衡值，χ_c 和 $\chi_{\rm env}$，分别对应核心和外部的密度。一个关键的微妙之处在于，膨胀子的内部值并非 必然会在所有致密天体中达到致密物质极小值 χ_c。场能否在有限物体内弛豫至 χ_c ，取决于有效势的局部曲率。

钉扎区间要求有效质量的定义为

$$m_{\rm eff}(\rho_m)\equiv\frac{\partial^2V_{{\rm eff}\,\chi}}{\partial\chi^2},\tag{40}$$

满足

$$\text{Pinned}:\qquad m_{\rm eff}(\rho_c)R_s\gtrsim1.\tag{41}$$

对于满足以下条件的超轻膨胀子

$$\text{Unpinned}:\qquad m_{\rm eff}(\rho_c)R_s\ll1,\tag{42}$$

该场无法追踪 χ_c ，在内部的大部分区域始终接近 $\chi_{\rm env}$，仅受到 $\mathcal{O}(\Phi_N)$ 扰动。数值上，$m_{\rm eff}(\rho_c)\,R_s\gtrsim1$ 对应于太阳（$R_\odot=7.0\times10^8$ m）的 $m_{\rm eff}\gtrsim2.8\times10^{-16}$ eV，以及地球（$R_\oplus=6.4\times10^6$ m）的 $m_{\rm eff}\gtrsim3.1\times10^{-14}$ eV，这表明如果膨胀子在宇宙学尺度上很轻，它们就不会钉扎膨胀子。[8] 相比之下，暗能量型质量 $m_{\rm eff}\sim H_0\sim10^{-33}$ eV 给出 $m_{\rm eff}R_\odot\sim10^{-17}\ll1$。

[8] 中子星是一个重要的例外：这些恒星的密度高出许多个数量级，使膨胀子的有效势变得更加陡峭，因此即使真空质量处于宇宙学尺度，也可以有 $m_{\rm eff}(\rho_{\rm NS})R_{\rm NS}\gtrsim1$。此时，场会在内部被钉扎，并在相对论性恒星背景中形成薄壳型剖面；例如参见 [103, 104]。

不过，在某些模型中，如果有效势在高密度区域足够陡峭，使得局部极小值在真空与物质之间发生显著偏移，且曲率 $m_{\rm eff}^2(\rho) = \partial_\chi^2 V_{\rm eff}$ 随密度迅速增大，那么仍可实现对宇宙学尺度上的轻质量膨胀子的钉扎。在这类情景中，膨胀子在宇宙学尺度上仍可保持轻质，而在高密度环境中则变得相对较重；此时，适当的屏蔽机制由 $m_{\rm eff}(\rho)$ 的局部值动态决定。

一种有用的量化方式是考察依赖密度的极小值处曲率 $m_{\rm eff}(\rho) \propto \rho^p$ 如何标度，从而衡量高密度区域所需的势陡峭程度。在长度尺度 λ 上实现钉扎需要 $m_{\rm eff}(\rho) \gtrsim \lambda^{-1}$，而两个环境之间有 $m_{\rm eff}(\rho_2)/m_{\rm eff}(\rho_1) = (\rho_2/\rho_1)^p$。鉴于宇宙学环境与恒星/行星环境之间存在巨大的密度对比，即使是中等程度的 p，也能使 $m_{\rm eff}$ 增加许多个数量级。例如，$\rho_\star/\rho_{\rm cos} \sim 10^{29}$ 意味着对于 $p = 1/3$ 有 $m_\star/m_{\rm cos} \sim 10^{10}$，而 $p \simeq 1/2$–$2/3$ 则给出 $m_\star/m_{\rm cos} \sim 10^{15}$–$10^{20}$。在标准变色龙势 $V \propto \chi^{-n}$ 中，可以得到 $m_{\rm eff}(\rho) \propto \rho^{(n+2)/[2(n+1)]}$ [102]。对于标准变色龙情形 $n = 1$，当势能标度固定为暗能量值时，近期的实验室搜索（例如 [105]）和第五种力搜索施加了极强的约束，在很大范围的 β 内，几乎排除了整个具有宇宙学可行性的参数空间。较大的 n 值通常仍然可行，但仅限于 $(\beta,\ n)$ 参数空间的受限区域内 [106, 107]。这意味着，要在太阳系尺度上钉扎一个宇宙学尺度的轻标量场，就要求 $m_{\rm eff}$ 随密度极快增长，因此变色龙类参数空间仅剩少数狭小区域可行（尽管增大 n 确实能重新开启一些可行区域）。

关于接下来的分析，还有一点值得注意：前文通过单一背景值 $\chi_{\rm env}$ 来描述环境，因此隐含地假设致密天体与较大尺度的宿主势之间存在尺度分离。在存在强非线性效应时，这一假设未必可靠。非线性区域重叠并导致多源边界条件，以及屏蔽效率随空间变化，都可能改变有效环境值及由此产生的外部荷。因此，要对星系/太阳环境作出确切评估，就需要采用专门的多体处理，或能够解析耦合标量场动力学的宇宙学/星系 N 体模拟。[9] 我们不在此尝试进行这类计算，而是将 $\chi_{\rm env}$ 作为表征局部环境的有效参数。

考虑到所有这些复杂因素和注意事项，本文余下部分将考察现有屏蔽机制在这些类型的标量场中，哪些情景在实际中行得通。

B. 单场膨胀子的薄壳失效

在分析完整的轴子–膨胀子系统之前，回顾与物质耦合的单一膨胀子场的标准行为很有帮助。

为了模拟太阳系中单场膨胀子的动力学，例如行星周围的情形，我们考虑这一双场系统在一个均匀密度、半径为 R_s、密度为 $\rho_m\ (r < R_s) = \rho_c$ 的球对称源存在时的动力学；该源嵌入在密度为 $\rho_m\ (r > R_s) = \rho_{\rm env}$ 的外部环境中。若膨胀子被固定，它将在源的表面内外分别取方程（39）中的内部和外部平衡值 χ_c 和 $\chi_{\rm env}$。要形成薄壳，场必须在源表面附近于这两个值之间平滑过渡，如第二节 1 所述。按照 [50]，中针对表面牛顿势为 $\Phi_N(R_s)$ 的球形物体所给出的处方，可将标准薄壳条件写为

$$\frac{\Delta R}{R_s} = \frac{|\chi_{\rm env} - \chi_c|/M_{\rm pl}}{3\,\beta\,\Phi_N(R_s)} \ll 1, \tag{43}$$

其中，$\Delta R = R_s - R_{\rm roll}$ 是场偏离内部值的那一层的厚度。

对于指数耦合，场变化幅度可写为众所周知的形式：

$$|\chi_{\rm env} - \chi_c| \simeq \frac{M_{\rm pl}}{1-3\beta}\left|\ln\frac{\rho_{\rm env}}{\rho_c}\right|. \tag{44}$$

对于任何现实的密度对比，这种场变化幅度都极其巨大。由于式（43）的分母对于天体物理天体而言极小（对于太阳，$\Phi_N \sim 10^{-6}$），式（43）中的比值满足

$$\frac{\Delta R}{R_s} \gg \mathcal{O}(1), \tag{45}$$

因此不会形成薄壳。

根据式（18），χ 所媒介的标量力未被屏蔽，其强度为引力的 $\sim \beta^2$。因此，要满足太阳系检验的要求，必须有 $\beta \lesssim 10^{-3}$，这使得单场膨胀子实际上不起作用。这构成了常数耦合 [114]下膨胀子屏蔽的稳健不可能性定理。

单场膨胀子的失效并不令人意外。正如第二节所强调的，单场模型移除了几何 σ-模型相互作用，而这些相互作用通常主导多场低能动力学。现在我们将明确展示，第二个重场（具有场依赖动能前因子的轴子）的存在如何改变壳层平衡，并从根本上改变屏蔽行为。

[9] 标量–张量理论中的非线性屏蔽，已广泛通过修正引力的 N 体模拟进行研究；这类模拟会同时演化标量场和物质分布，相关示例见 [108–113]。这些模拟主要聚焦于宇宙学尺度上的大尺度结构和暗物质晕的形成，而针对嵌入真实星系环境中的恒星尺度致密天体、解析其标量场分布的模拟，仍鲜有探索。

V. 多场薄壳（含 $W_{,\chi}>0$）

A. 轴子及其效应

现在我们来说明，在存在与膨胀子配对的轴子场时，薄壳剖面和电荷—薄壳半径关系为何会发生偏差。在这种情况下，膨胀子在内部和外部的取值 χ_c 和 $\chi_{\rm env}$ 是约化有效势（式 (32)）的极小值；该有效势取决于平衡值 $\mathfrak{a}_+$ 和 $\mathfrak{a}_-$，其中 $\mathfrak{a}_\pm$由力平衡条件（式 (31)）和完整有效势（式 (28)）确定。

如第二节所述，在本文所关注的解析参数区域中，宏观尺度上的轴子比膨胀子更重，因此斜坡局域在表面附近的狭窄区域内，

$$\ell_{\mathfrak{a}} \ll \Delta R\,. \tag{46}$$

因此，轴子梯度仅通过局域在斜坡内的近表面源对膨胀子的运动方程产生贡献，其效应由过渡区数据控制（$\Delta\mathfrak{a}$, $\ell_{\mathfrak{a}}$）。在该区域，轴子梯度会在χ' 中给予膨胀子一个近表面冲击，其方向由 $WW_{,\chi}$决定，如式（23）所示。我们首先关注$W_{,\chi}\chi'(r)>0$这一情形，此时轴子的驱动方向与膨胀子的速度方向相同，从而进一步加速膨胀子，使其在各极小值之间更有效地运动，进而减小膨胀子的壳层宽度。

此处的多场薄壳分析可归结为计算式 (23) 在$[R_{\rm roll},R_s]$上的积分形式。将式 (23) 乘以 r^2 ，并仅在 χ 发生滚动的区域上积分，左端是一个全导数，等价于膨胀子荷，

$$L=\int_{R_{\rm roll}}^{R_s} dr\,\frac{d}{dr}\big[r^2\chi'(r)\big]=\big[r^2\chi'(r)\big]_{R_{\rm roll}}^{R_s}\simeq\frac{R_s^2}{\Delta R}\,\Delta\chi, \tag{47}$$

其中，我们在整个层内采用薄壳近似 $r\simeq R_s$，并使用壳层外的无滚动条件 $\chi'(R_{\rm roll})=0$。积分后的方程给出全局薄壳平衡关系

$$\int_{R_{\rm roll}}^{R_s} r^2 V_{,\chi}\,dr+\int_{R_{\rm roll}}^{R_s} r^2 A_{,\chi}\rho_m\,dr+\int_{R_{\rm roll}}^{R_s} r^2 WW_{,\chi}\,\mathfrak{a}'^2\,dr = L. \tag{48}$$

现在，我们在薄壳区域内计算各项；此时，所有非零支撑都局限在 $r\simeq R_s$附近的狭窄区间内。

a. 轴子梯度（重叠）积分。由于重轴子的场分布相较于 R_s很薄，我们在其整个支撑范围内令$r\simeq R_s$ ，而 χ 的任何缓变函数都可以取其表面值$\chi_s\equiv\chi(R_s)$，仅产生 $\mathcal{O}(\ell_{\mathfrak{a}}/R_s)$量级的分数修正。这给出

$$\begin{aligned}\int_{R_{\rm roll}}^{R_s} r^2 WW_{,\chi}\,\mathfrak{a}'^2\,dr &\simeq R_s^2\left(\frac{\Delta\mathfrak{a}}{\ell_{\mathfrak{a}}}\right)^2\int_{\alpha R_s}^{R_s} dr\,WW_{,\chi}(\chi(r))\\ &\simeq R_s^2\left(\frac{\Delta\mathfrak{a}}{\ell_{\mathfrak{a}}}\right)^2 WW_{,\chi}(\chi_s)\,\ell_{\mathfrak{a}}.\end{aligned} \tag{49}$$

$WW_{,\chi}(\chi_s)\propto\zeta$ 的符号因此直接决定重叠项表现为有效刚度（$W_{,\chi}(\chi_s)<0$）还是辅助驱动（$W_{,\chi}(\chi_s)>0$）。

b. 势斜率积分。我们将势斜率积分分解为通常的单场驱动项和真正的多场修正，

$$V_{,\chi}(\chi,\mathfrak{a})=V_{,\chi}(\chi_c,\mathfrak{a}_-)+\big[V_{,\chi}(\chi,\mathfrak{a})-V_{,\chi}(\chi_c,\mathfrak{a}_-)\big]. \tag{50}$$

第一项是标准的单场贡献，它驱动膨胀子穿过宽度为 ΔR 的壳层；第二项则衡量偏离单场情形的程度，只有在与轴子梯度重叠的区域内才不可忽略，此处两个场都偏离其内部值。

在两处支撑区域内近似取 $r\simeq R_s$ ，并在表面值 $\chi_s\equiv\chi(R_s^-)$ 和 $\mathfrak{a}_+$ 处对缓变函数求值，可得

$$\begin{aligned}\int_{R_{\rm roll}}^{R_s} r^2 V_{,\chi}(\chi,\mathfrak{a})\,dr &\simeq R_s^2\,V_{,\chi}(\chi_c,\mathfrak{a}_-)\,\Delta R\\ &\quad+R_s^2\int_{\alpha R_s}^{R_s} dr\,\big[V_{,\chi}(\chi,\mathfrak{a})-V_{,\chi}(\chi_c,\mathfrak{a}_-)\big]\\ &\simeq R_s^2\Big(V_{,\chi}(\chi_c,\mathfrak{a}_-)\,\Delta R+\big[V_{,\chi}\big]_{\chi_c,\mathfrak{a}_-}^{\chi_s,\mathfrak{a}_+}\ell_{\mathfrak{a}}\Big).\end{aligned} \tag{51}$$

这清晰地区分了通常的单场驱动项与轴子斜坡所引起的梯度重叠修正。

c. 物质耦合积分。在薄层内，密度可视为常数， $\rho_m(r)\simeq\rho_c$。由此可得

$$\begin{aligned}\int_{R_{\rm roll}}^{R_s} dr\,r^2\,A_{,\chi}(\chi)\rho_m(r)&\simeq R_s^2\,A_{,\chi}(\chi_s)\,\rho_c\,\Delta R\\ &=6\,A_{,\chi}(\chi_s)M_{\rm pl}^2\Phi_N(R_s)\,R_s\,\frac{\Delta R}{R_s},\end{aligned} \tag{52}$$

这里我们利用 $\rho_c R_s^2\simeq 6M_{\rm pl}^2\Phi_N(R_s)$ 将结果表示为致密天体的表面牛顿势。

我们在此指出，方程（49）和（51）表明，多场修正受轴子的斜坡剖面（$\Delta\mathfrak{a}/\ell_{\mathfrak{a}}$）控制，而该剖面因天体而异。这意味着轴子对膨胀子动力学的修正普遍依赖于天体的大小和类型。由于轴子扇区与物质密度相关，且通常不像膨胀子那样通过引力普遍耦合（并且

因此，组成可以通过间接改变 $\Delta\mathfrak{a}$ 和有效斜坡的局域化位置而产生影响，从而即使在 $A(\chi)$ 具有普适性的情况下，也会引发依赖天体的环境动力学。

荷与壳层剖面关系

将式 (49)、(51) 和 (52) 的显式计算结果代入式 (48)，即可得到壳层宽度：

$$\frac{\Delta R}{R_s} \simeq \frac{2\Delta\chi - R_s \ell_{\mathfrak{a}} \left[\Delta V_{,\chi} + W(\chi_s) W_{,\chi}(\chi_s) \left(\frac{\Delta\mathfrak{a}}{\ell_{\mathfrak{a}}} \right)^2 \right]}{6\beta M_{\rm pl}\, \Phi_N(R_s) + R_s^2 V_{,\chi}(\chi_c, \mathfrak{a}_-)}, \tag{53}$$

其中

$$\Delta V_{,\chi} = V_{,\chi}(\chi_s, \mathfrak{a}_+) - V_{,\chi}(\chi_c, \mathfrak{a}_-).$$

方程（53）有一个直观的物理解释。当 χ_c 和 $\chi_{\rm env}$ 是密度依赖有效势的明确极小值时，总偏移量$\Delta\chi$ 便已确定。此时，轴子贡献只会改变膨胀子在表面附近于这些值之间插值的陡峭程度。如果轴子诱导的贡献与膨胀子的滚降方向相同，

$$\left(W W_{,\chi}\right)(\chi_s)\, \Delta\chi > 0, \tag{54}$$

那么斜坡就会起到助推源的作用，使壳层变窄，从而减小 $\Delta R/R_s$。如果符号相反，轴子贡献就会阻碍滚降，壳层必须加宽，才能将 χ_c 连接到 $\chi_{\rm env}$。因此，在基于极小值的钉扎区间内，轴子通过两导数相互作用 $WW_{,\chi}(\mathfrak{a}')^2$对表面附近的演化施加偏置，从而重整化壳层厚度。

图2展示了这一效应：可以看到，轴子梯度不断推动膨胀子趋向其渐近值 $\chi_{\rm env}$。在某种情况下，轴子可能使膨胀子越过渐近值，导致该场与$\chi_{\rm env}$ 在大半径处之间存在较大的残余偏移。

现在我们转而考察这与屏蔽的关系。假设利用公式（47）采用薄壳，并且膨胀子在源外部趋近于公式（1）中的拉普拉斯尾部，则有

$$\frac{R_s}{\Delta R}\left(\chi_s - \chi_c\right) = \chi_{\rm env} - \chi_s\,, \tag{55}$$

因此，外部荷可计算为

$$L = R_s\left(\chi_s - \chi_{\rm env}\right) = R_s \frac{\chi_c - \chi_{\rm env}}{1 + \frac{\Delta R}{R}}, \tag{56}$$

它与任何显式的轴子修正无关；又由于 χ_c 和 $\chi_{\rm env}$ 是方程（39）的固定极小值，这意味着外部荷仅受

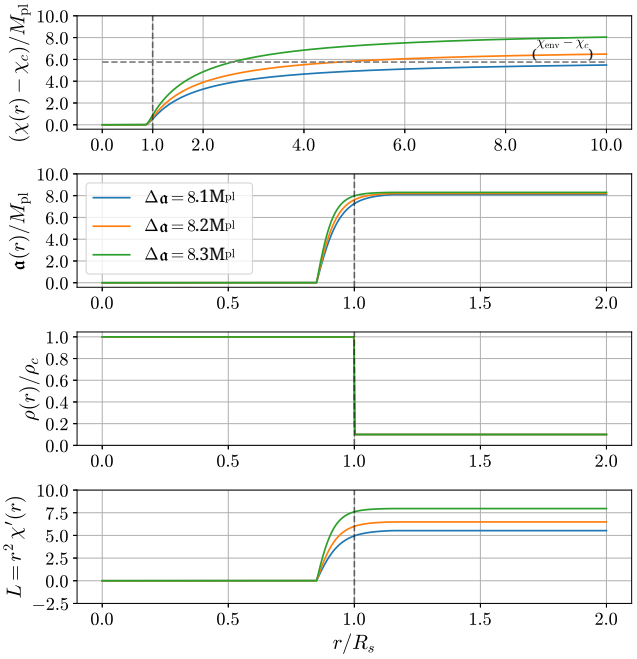


图 2：使用附录 B 中所述的轴子守通量处理，而非求解完整的运动方程，在不同轴子边界跃变 $\Delta\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_+-\mathfrak{a}_-$ 和宽轴子梯度下得到的径向分布（**第一：** 膨胀子、**第二：** 轴子、**第三：** 密度、**第四：** 膨胀子荷），其中 $\ell_{\mathfrak{a}}=0.15$。这里我们取了$\beta=0.2$、 $\zeta=\sqrt{2}$ 和 $W_0=1$。对于膨胀子场，我们还取了边界条件 $\chi'(0)=0$、 $\chi(0)=\chi_c$，这对应于钉扎区间。值得注意的是，为了确保存在膨胀子场指数因子时的数值稳定性，我们选择了类地密度 $\rho_c\simeq 10^{-9}M_{\rm pl}^2/R_s^2$，其中 $V_0=0.5\,\rho_c$和 $\rho_{\rm env}=0.1\,\rho_c$ （一个不现实的微小层级）。

轴子通过影响壳层宽度 $\Delta R/R$而产生影响，而壳层宽度按构造本来就很小。这意味着，即使轴子驱使膨胀子进入其单独作用时无法实现的薄壳构型，轴子源对外部荷的影响仍可忽略不计。这是因为，尽管轴子在定性上会使单独作用的膨胀子趋向于荷抑制程度更高的构型，但这种外部轴子梯度也会通过方程（48）中的耦合项在膨胀子上产生自身的荷源，从而使净荷无法受到抑制。

对于解析近似无法涵盖的较宽轴子斜坡，图2也通过数值计算证实了这一点（这表明即使放宽这一假设，结果也不会改变）；从底部面板可以看出，将膨胀子驱动至其渐近值，只会使标量荷发生 $\mathcal{O}(1)$ 量级的变化。事实上，正如式（56）所预测的那样，壳层宽度越薄，标量荷反而越大。图 3 显示，类星体密度分布也会出现同样的效应，

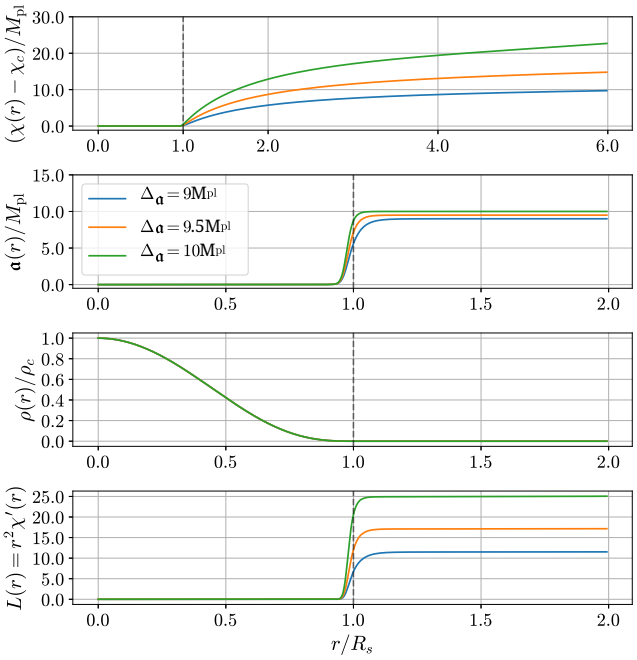


图3：除 $\rho_{\rm env}=10^{-8}\rho_c$ 外，采用与图2相同的参数，以及附录 B 所述的类恒星天体密度分布所得到的径向分布。在此情况下，我们使用微观物理参数 $\Lambda_{\mathfrak{a}}=3\times10^{-6}M_{\rm pl}$ 和 $m_{\mathfrak{a}}=3\times10^{-16}$ eV 求解完整的多场方程。

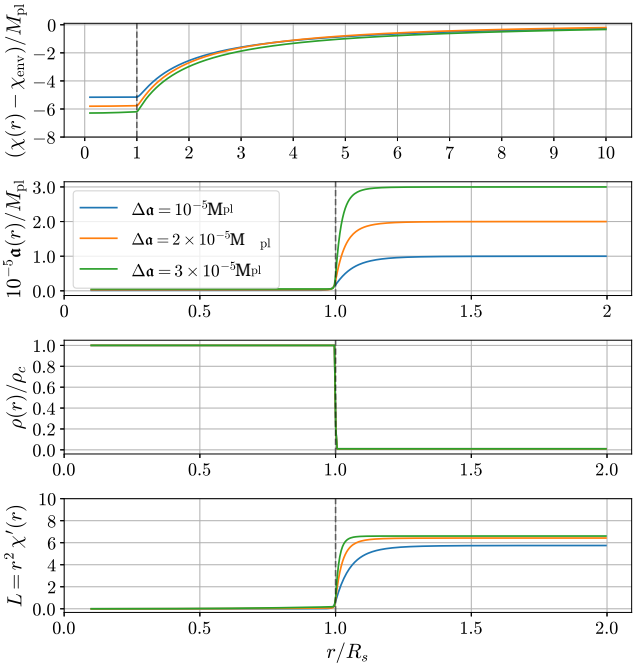


图4：具有轴子边界跃变 $\Delta\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_+-\mathfrak{a}_-$ 的未钉扎膨胀子的径向分布。我们采用与图2相同的参数，但将 $\chi(0)=\chi_c$ 处的边界条件替换为渐近边界条件 $\chi(r_{\rm max})=\chi_{\rm env}$。不会形成参数意义下很薄的滚动层，这与 $m_\chi R_s\ll1$ 一致。轴子梯度会改变整体场分布，而不是抑制外部标量荷。

这表明该结果对于不同的密度分布和轴子斜坡效应都具有稳健性。因此，通过源项使膨胀子在接近表面处发生相变，可以形成更薄的壳层，但无助于降低其外部荷。

B. 超轻、未钉扎膨胀子的薄壳

薄壳机制依赖于膨胀子有效势中两个随密度变化的平衡态：内部值 χ_c 和外部值 $\chi_{\rm env}$，场在这两个值之间于参数意义下很薄的表面层内平滑过渡。当膨胀子在天体物理尺度上超轻时，这一图景便会失效。

对于 $m_\chi R_s\ll1$，膨胀子无法在有限天体内部弛豫至高密度物质平衡态。相反，它在整个内部始终接近环境值 $\chi_{\rm env}$，偏差仅为 $\mathcal{O}(\Phi_N)$，因此即使在单场理论中，也不存在内部平台或参数上很薄的滚动层。第三节引入的瑜伽膨胀子预计也会表现出相同的有效行为，因为尽管它们的势具有一个浅的暗能量极小值，能在宇宙学尺度上确定渐近值，但其曲率仍远小于在天体物理环境中将场钉定所需的程度，因此实际上有 $m_{\rm eff}R_s\ll1$，而薄壳图景并未得到很好的定义。

图4展示了这种行为。在这一未钉扎区间，局域化的轴子梯度不会压缩膨胀子相变的径向宽度。相反，它们会改变整体膨胀子场分布，通常会增大总场变化幅度，并使外部标量荷相较于单场情形增大 L，如公式（1）所述。

因此，即使存在轴子诱导的近表面动力学，超轻膨胀子的薄壳屏蔽仍会失效。在此区间，屏蔽必须直接抑制净标量荷，而不能依赖场分布的几何局域化。

在下一节中，我们将说明 BBQ机制如何实现这一点：轴子反作用会动态地选择一种使总能量最小化并降低外部荷的构型。

VI. BBQ屏蔽：膨胀子自由滚动时的梯度抑制（且 $W_{,\chi}(\chi_s)<0$）

既然已经确立，轻膨胀子的薄壳屏蔽似乎无法通过太阳系引力检验

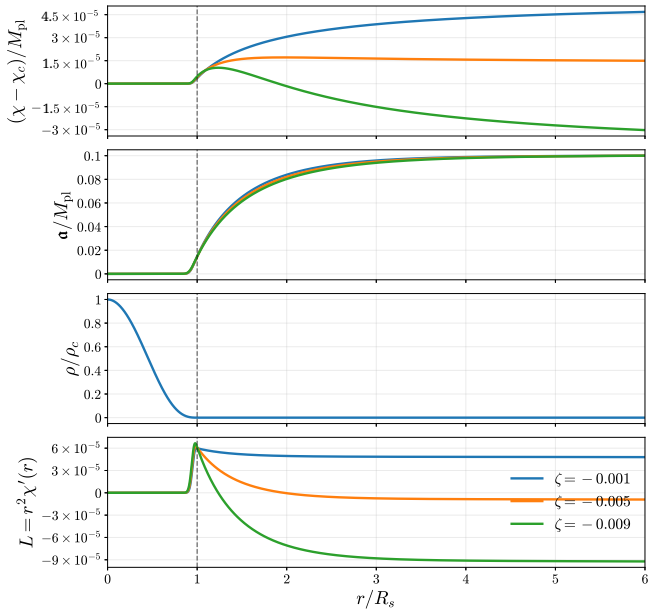


图 5：在附录 B 概述的恒星密度分布中，存在抑制轴子耦合时，钉扎标量场的场分布及膨胀子荷。这里我们取 $W_0 = 1$、$V_0 = 10^{-5}\rho_c$ 和 $\rho_{\rm env} = 10^{-15}\rho_c$。我们使用微观物理轴子势方程 (36) 和方程 (35) 求解完整的耦合双场系统，其中 $\Lambda_{\mathfrak{a}} = 3 \times 10^{-7} M_{\rm pl}$ 和 $m_{\mathfrak{a}} = 3 \times 10^{-16}$ eV。

无论多场背景下钉扎机制有多复杂，我们现在都将注意力转向另一种可能的方向。接下来要问的是：如果轴子所做的并非产生额外的膨胀子分布呢？如果轴子直接抑制膨胀子的梯度，使其更难在物体外部达到环境极小值，又会怎样？

A. 钉扎梯度抑制

图 5 展示了当轴子–膨胀子动能耦合满足 $W_{,\chi} \propto \zeta < 0$ 时，具有质量的钉扎膨胀子系统的行为；这会在膨胀子的克莱因–戈登方程 (23) 中产生负的源项。在这种情况下，轴子梯度不会助力膨胀子向其环境极小值 $\chi_{\rm env}$ 滚动，而是表现为一种抵抗其运动的有效刚度。由此产生的反作用将膨胀子推回其指数势上方，并使外部场分布相较于单场预期更加平坦。

如图 5 底行所示，可以调节轴子耦合，使这一效应部分抵消膨胀子标量荷，从而减弱相关的第五种力。然而，图中已经清楚表明，这种抵消极其微妙。稍微增强的耦合会反转这一效应，反而增强$|L|$，因为轴子开始驱动膨胀子，使其逆着自身固有的滚动方向演化。

从膨胀子荷的全局表达式（式（24））可以直接理解这种行为。该表达式表明，外部荷由势的斜率、物质耦合以及轴子诱导的动能项共同贡献。对于 $\zeta < 0$，动能贡献可以抵消势项和物质项在表面附近产生的通量。因此，要满足太阳系界限，就必须使这些贡献至少以三个数量级的精度相互抵消，从而

$$\frac{L}{L_0} = \frac{\beta_{eff}}{\beta} \sim 10^{-3}. \tag{57}$$

在当前设定中，这种抵消之所以需要如此精细的调节，是因为膨胀子具有质量，并且在天体内部始终被钉扎在其有效势极小值附近。尽管膨胀子梯度在能量上代价高昂，但将重场从该极小值移开，会在整个体积内招致巨大的势能惩罚。因此，平衡构型必然包含一个内禀表面梯度，其大小由内部与外部极小值之间的不匹配决定。随后，任何额外的相互作用（例如轴子动能耦合）都必须独立调节，以抵消贯穿整个构型的这一预存通量，而不是通过能量最小化动态地选定。

换言之，轴子梯度被用来抵消由钉扎本身所强制产生的表面梯度。因此，抑制荷所需的抵消是偶然的，而非结构性的，留给成功屏蔽的参数空间也微乎其微。因此，使膨胀子变得沉重并受到钉扎的机制，同时也阻碍了稳健的梯度抑制。

至于这与上文讨论以及表面上的不一致之处有何关系——方程（24）表明轴子能够影响外部荷，而方程（56）却暗示 L 基本上与轴子无关——关键在于，薄壳推导隐含地假设膨胀子在整个内部区域直至非常接近表面的半径范围内，始终保持在其依赖密度的有效势极小值附近。在钉扎薄壳状态下，内禀表面梯度由内部极小值与环境极小值之间的不匹配所决定，而轴子在壳层分析中仅作为对近表面动力学的微扰性修正出现，实际上对壳层宽度 $\Delta R/R_s$ 进行重整化，同时使外部荷主要由固定的偏移量 $\chi_c - \chi_{\rm env}$ 控制。相比之下，在 $W_{,\chi} < 0$ 抑制电荷的状态下，方程（24）中的轴子贡献必须与由势和物质项产生的内禀通量相当。一旦出现这种情况，轴子反作用必然会使膨胀子偏离有效极小值，处于

近表面区域，因此该场不再跟踪推导方程（56）时所假设的钉扎解。因此，解析的薄壳／极小值展开在这一状态下不再具有自洽性。此时只有通过全局电荷关系中不同贡献之间的抵消，才可能实现电荷抑制；而这种抵消本质上十分微妙，并且对轴子耦合的精确取值非常敏感。

环境依赖性屏蔽

一旦要求对多个天体实现屏蔽，这种调参问题就会更加严重。针对给定密度分布调节的轴子梯度，虽可抵消膨胀子表面产生的通量，但对于具有不同 $\rho_m(r)$ 的另一个天体，通常无法以同样的效率抵消，因为式（24）中各项的相对权重会随内部场分布而变化。图6和图7展示了这一点：图中选择轴子耦合 ζ，使蓝色所示的太阳密度源的外部荷大幅降低（在源外很远处为 $L/L_0 \sim 10^{-3}$ ）；随后又表明，对于具有 $\rho_c = 0.1\,\rho_\odot$ 、其他方面完全相同的恒星（橙色所示），这并不能带来同等程度的抑制，因为它仍保有大得多的剩余电荷。

在太阳系环境中，这种缺乏普适性的情况是致命的：满足探测太阳有效耦合的太阳约束（例如日合期间的夏皮罗时延界限），并不意味着其他天体也得到屏蔽。例如，如果地球和月球仍保有显著的标量荷，那么无论太阳本身是否经过调参而实现屏蔽，月球激光测距 [115, 116]和行星历表检验 [117, 118], 都会对差分加速度和等效原理破坏施加严格限制。

因此，在钉扎区间内，轴子诱导的膨胀子荷抑制通常并不自然。在下一节中，我们将转而考察轻的非钉扎膨胀子；对于这类膨胀子，场的表面值并非由局部极小值固定。在这种情况下，轴子反作用可以直接参与构型的全局能量极小化（因为从能量角度而言，如今改变膨胀子的内部值不再那么代价高昂），从而使电荷抑制能够动态地产生，而非依靠逐个天体进行精细调节。

B. 非钉扎梯度抑制

上一节的结果令人鼓舞，而且其中只有一个假设既不适用于现实的
暗能量尺度膨胀子，也无助于屏蔽：膨胀子在天体物理尺度上被钉定。放宽这一假设会彻底改变屏蔽图景。

这样做需要不再通过极值化式（28）的有效势来定义平衡构型，而是允许表面和渐近……

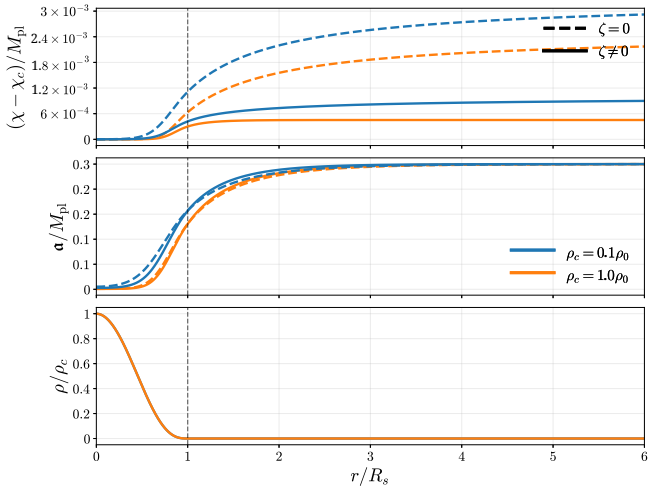


图 6：固定膨胀子系统中各组成场的场分布。对于蓝色所示的太阳密度分布，我们已调节轴子-膨胀子耦合 ζ，使膨胀子梯度充分抵消，从而满足太阳系检验。橙色曲线表示密度分布完全相同、但核心密度为其 10% 时的场分布。虚线表示对应的 $\zeta = 0$ 情形。 ρ_c 为太阳核心密度；这里取 $V_0 = 10^{-3}\rho_c$、 $\rho_{\rm env} = 10^{-15}\rho_c$ 和 $W_0 = 1$ ，并使用轴子微观物理参数 $\Lambda_{\mathfrak{a}} = 3\times10^{-6}M_{\rm pl}$ 和 $m_{\mathfrak{a}} = 3\times10^{-16}$ eV 对双场系统进行了精确求解。

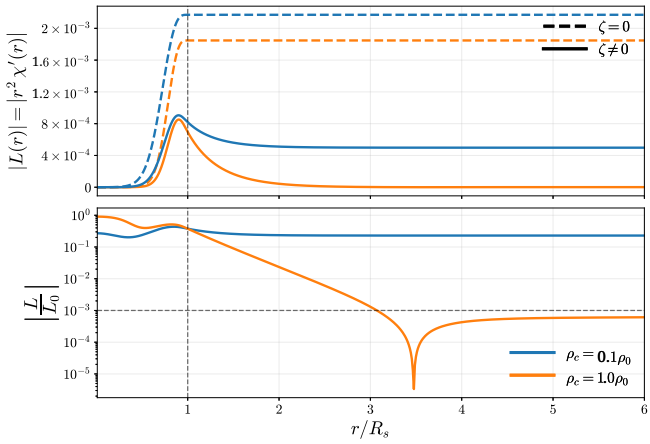


图 7：**上图：** 图 6 中相关场分布对应的膨胀子荷。**下图：** 通过使用 $\zeta = 0$ 运行模拟得到的荷相对于未屏蔽荷 L_0 的比值。

使渐近值可以浮动。正如参考文献 [50], 所强调的，即使不存在这样的平衡态，屏蔽仍然可能发生；相关构型则通过在满足场及其径向通量连续性的条件下，使总静态能量最小来确定。这正是此前已确认适用于瑜伽膨胀子的机制，而在此我们将其推广——

到有限宽度（但相对于膨胀子而言仍然很薄）的线性斜坡，并将无限尖锐的轴子梯度处理推广至有限宽度情形，同时采用完全耦合的数值解，与上述各个区域进行比较。

C. 全局标量荷

在源外，膨胀子满足拉普拉斯方程，其形式如公式（1）所示，其中标量荷由径向通量按公式（24）求得。假设轴子梯度近似局域于表面附近，且膨胀子在物体内部相对于其表面值没有明显偏离，则有

$$L \simeq \frac{R_{\rm roll}^3}{3} V_{,\chi}(\chi_c, \mathfrak{a}_-) + 2\beta M_{\rm pl}\, \Phi_N(R_s)\, R_s + R_s^2 \Big(\frac{\Delta\mathfrak{a}}{\ell_{\mathfrak{a}}}\Big)^2 W(\chi_s) W_{,\chi}(\chi_s)\, \ell_{\mathfrak{a}}, \tag{58}$$

其中，第二项定义了公式（15）中的单场荷，最后一项则是轴子诱导的表面贡献，完全源自双导数σ模型结构。标量荷取决于边界值 χ_s 和中心值 χ_c。二者并非独立变量。事实上，这是由动力学方程解的求法所决定的，即指定 χ_c 的值，并要求 $\chi' = 0$ 在原点成立。这意味着存在依赖关系$\chi_s(\chi_c)$。因此，在选择平衡构型时，改变 χ_s 可以准确地作为改变 χ_c 的替代指标。

D. 能量分解

球对称构型的总静态能量为

$$E = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \Big[\tfrac{1}{2}\chi'^2 + \tfrac{1}{2} W^2 \mathfrak{a}'^2 + V(\chi, \mathfrak{a}) + A(\chi)\rho_m(r)\Big] = E_{\rm in} + E_{\rm sh} + E_{\rm out}, \tag{59}$$

这里我们按能量来源区域将其分解为内部（$E_{\rm in}$）、轴子壳层（$E_{\rm sh}$）和外部（$E_{\rm out}$）。在内部区域，场的变化很小，因此

$$E_{\rm in} = \frac{4\pi}{3} R_s^3 \Big[V(\chi_c, \mathfrak{a}_-) + A(\chi_c)\rho_c\Big], \tag{60}$$

它与 χ_s 无关。

在壳层区域 $\alpha R_s < r < R_s$，由于轴子在表面附近发生快速相变，因此它主导了能量预算。

壳层能量为

$$E_{\rm sh} = 4\pi \int_{\alpha R_s}^{R_s} dr\, r^2 \Big[\tfrac{1}{2}(\chi')^2 + \tfrac{1}{2} W^2(\chi)(\mathfrak{a}')^2 + V(\chi, \mathfrak{a}) + A(\chi)\rho_c\Big]. \tag{61}$$

若轴子主导该层中变化的能量密度，且 $W(\chi)$ 在壳层内缓慢变化，则在领先阶有

$$E_{\rm sh}(\chi_s) \simeq 2\pi R_s^2\, W^2(\chi_s) \frac{(\Delta\mathfrak{a})^2}{\ell_{\mathfrak{a}}^2}\, \ell_{\mathfrak{a}} + E_0, \tag{62}$$

其中，E_0 包含与 χ_s 无关、且依赖于中心值 χ_c 的膨胀子贡献。

在外部，其中 $\chi' = L/r^2$，梯度能为

$$E_{\rm out}^{(\nabla\chi)} = 2\pi \frac{L^2}{R_s}, \tag{63}$$

而势能项只贡献一个常数偏移。因此，总能量中显式依赖于 χ_s 的部分为

$$E_{\rm tot}(\chi_s) = 2\pi R_s^2\, W^2(\chi_s) \frac{(\Delta\mathfrak{a})^2}{\ell_{\mathfrak{a}}^2}\, \ell_{\mathfrak{a}} + 2\pi \frac{L^2}{R_s}. \tag{64}$$

推导式 (64) 时，需要忽略显式的内部贡献式 (60)，该项主要取决于中心值 χ_c。然而，如前所述，表面值与中心值密切相关，如图 8 所示。原则上，为了达到完全精确，这些项应予以保留；但这样一来，要使能量极值化，就需要知道 $V(\chi,\ \mathfrak{a})$ 和 $A(\chi)$ 的显式函数形式，而本推导并不依赖这些形式。因此，我们舍去这些项，并在下文关注的各个区间内验证它们可以忽略不计。

E. 能量极小化与膨胀子荷的抑制

能量取决于单个变量，即中心值 χ_c，因为边界值 χ_s 是通过求解运动动力学方程得到的 χ_c 的函数。实际上，屏蔽会使轴子贡献中正比于 $\left(\frac{\Delta\mathfrak{a}}{\ell_{\mathfrak{a}}}\right)^2$ 的项变得很大，这意味着可以忽略涉及膨胀子内部值—χ_c 的项的变化，并直接通过改变表面值 χ_s 来求极小值。现在，我们通过对总能量式 (64) 求极小值，推导表面值 χ_s。为了使极小化过程可以代数求解，并与第五节中的示例保持一致，我们对 $W(\chi)$ 采用式 (21) 中的指数形式（这也代表了与轴子斜坡相关的任意单调动能前因子）。附录 A 展示了二次形式 $W(\chi)$ 对应的计算，表明

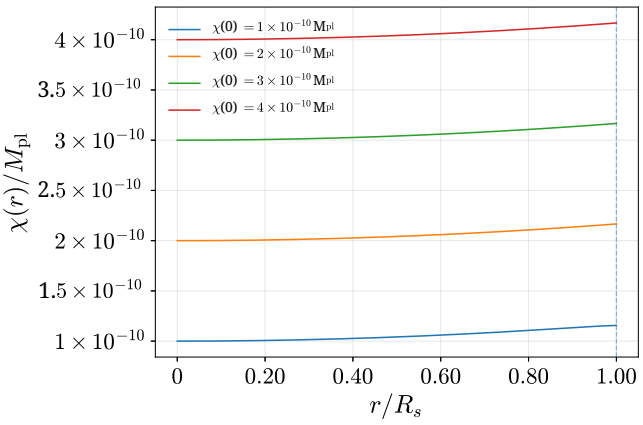


图 8：在无轴子的情况下，不同膨胀子中心值 χ_c对应的理想化恒密度物体内部膨胀子场的径向演化，显示表面值与中心值几乎完全一致。这里我们取 ρ_c 对应于地球的表面密度，其中 $V_0 = 0.5\rho_c$ 和$\rho_{\rm env} = 0.1\rho_c$ ，且 $W_0 = 1$。

结果的结构具有普适性。关键在于，L 本身通过轴子诱导的表面贡献，依赖于 χ_s ，该贡献进入式 (58) 的通量平衡；在此机制下，它由双导数相互作用 $W(\chi)W_{,\chi}(\chi)(\mathfrak{a}')^2$ 控制。

对 χ_s 最小化式（64），得到代数条件

$$\frac{R_s\ell_{\mathfrak{a}}}{\ell_{\mathfrak{a}}^2}\,\frac{(\Delta\mathfrak{a})^2}{M_{\rm pl}^2}\,W^2(\chi_s) = -\,\frac{1}{2\zeta^2}\,(4\zeta\beta\,\Phi_N(R_s)+1)\,. \quad (65)$$

由于左侧显然为正，式子只有在以下条件下才有解：(65)

$$4\zeta\beta\,\Phi_N(R_s)+1<0\,, \qquad \text{i.e.} \quad \zeta\beta<0 \ \text{ and } \ |4\zeta\beta\Phi_N|\gtrsim 1\,. \quad (66)$$

从物理上讲，这意味着 $W(\chi)W_{,\chi}(\chi)$必须抵消通量平衡中物质引起的拉曳，这样系统才能通过降低外部梯度能 L^2/R_s来降低总能量；而且它必须大幅抵消物质引起的拉曳，因此轴子与膨胀子之间需要强耦合。

对于指数形式的 W，式（65）明确给出了膨胀子 χ_s 的表面值：

$$\chi_s = \frac{M_{\rm pl}}{2\zeta}\,\ln\!\left[-\,\frac{\ell_{\mathfrak{a}}}{R_s}\,\frac{M_{\rm pl}^2}{(\Delta\mathfrak{a})^2}\,\frac{1}{2\zeta^2}\,\frac{4\zeta\beta\,\Phi_N(R_s)+1}{W_0^2}\right], \quad (67)$$

其中，仅当满足符号条件（66）时，对数才是实数。

方程（67）的推导假设，总能量对χ_s 的主要依赖来自轴子驱动的表面贡献，而通过内部值 χ_c 引入的隐式依赖则处于次要地位。可以通过直接对耦合系统进行完整的数值能量最小化来检验这一近似，其方法见附录 B。图 9 展示了这一点，其中方程（59）中的总能量作为 χ_s的函数进行数值计算。在所考察的轴子斜坡宽度范围内，解析预测方程（67）给出的数值最小值位置误差不超过 $\lesssim 10^{-11}\,M_{\rm pl}$。可以看到，对于较窄的轴子梯度，该近似效果最佳；而随着所考虑的轴子斜坡变得更加平缓，超出解析推导中采用的快速跃迁窗口近似，其准确性会降低。这是因为主要能量贡献不再局限于表面处的一个狭小壳层内，而方程（62）正是基于这一假设；随着轴子梯度变宽，还需要纳入来自该壳层宽度之外区域的额外修正。我们进一步验证了，这一残余偏移不会对推断出的电荷抑制产生可观测的影响，所得的 L/L_0 （以及因此的 $\beta_{\rm eff}$）在与本文屏蔽结论相关的精度范围内保持不变。

将式（65）代入通量表达式（58）（并对指数前因子使用 $W_{,\chi} = (\zeta/M_{\rm pl})W$ ）可得

$$\frac{L}{L_0} = \frac{-\frac{M_{\rm pl}}{2\zeta} + \frac{R_{\rm roll}^3}{3R_s}\,V_{,\chi}(\chi_{\rm c},\mathfrak{a}_-)}{2\beta M_{\rm pl}\,\Phi_N(R_s)}\,, \quad (68)$$

这明确表明，轴子诱导的表面项如何抑制通常的单场荷贡献，剩余部分则由 $1/\zeta$ 和来自 $V_{,\chi}$的（依赖于模型的）势能贡献控制。这说明，即使不存在参数意义上很薄的滚动层，也可能发生屏蔽：被削弱的是外部 $1/r$ 尾部的振幅，而不一定是 χ 发生变化的径向宽度。

因此，要实现成功的屏蔽，ζ 必须取极大的负值；鉴于对于宇宙学尺度的轻膨胀子，V，χ 本身也应较小，这证明当 $W_{,\chi}$ <0时屏蔽能够奏效。若 $\Phi_N \sim 10^{-6}$对应于太阳表面牛顿势，并要求将有效耦合降低约 10^3 倍以通过太阳系引力检验，那么对于 $\beta \sim \mathcal{O}(1)$，要抑制外部荷就需要 $|\zeta| \gtrsim 10^9$ 。我们将在下一节讨论在一个成功的模型中实现这一点所涉及的所有问题。

对于恒定密度天体，图 10 和图 11 所示的数值解清晰地展现了这一行为。膨胀子分布在天体整个内部持续演化，这与在表面深处 $R_{\rm roll}$ ly- 处于 $\Delta R = \mathcal{O}(R_s)$一致，这意味着我们远离了环境质量很大的钉扎膨胀子区间；然而，一旦存在轴子斜坡，外部荷仍会受到强烈抑制。因此，BBQ/能量最小化机制在与暗能量类似的宇宙学尺度的轻膨胀子最相关的区间内实现了屏蔽，其中 $m_{\rm eff}R_s \ll 1$。

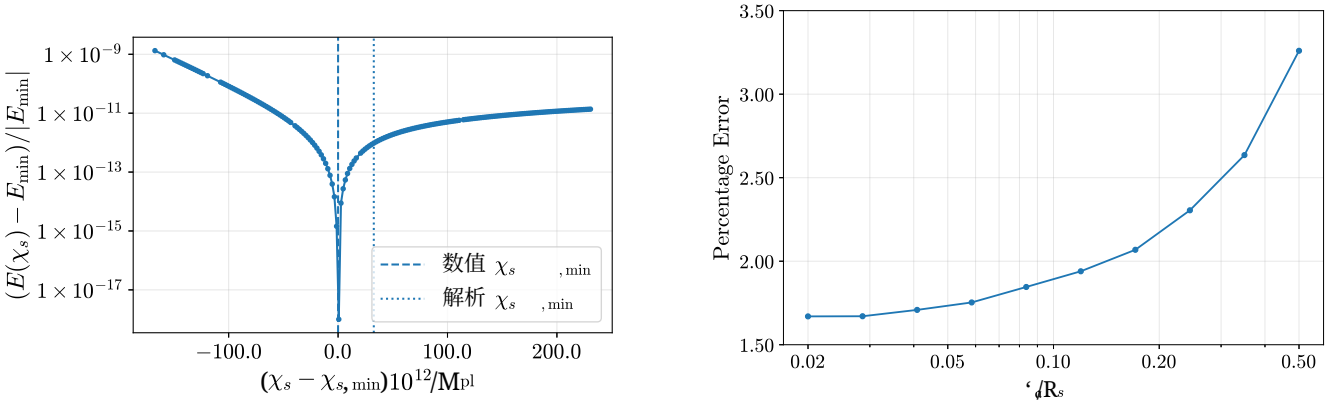


图 9：**左图：**图 10 中绿色曲线对应的系统总能量 $E(\chi_s)$ 与求得的最小能量 $E_{\min}$ 之间的相对差值，作为 χ_s 的函数；该曲线对应于宽轴子梯度，且 $\ell_{\mathfrak{a}} = 0.4$。我们还将式 (67) 给出的能量最小化 χ_s 的解析预测绘为点线，并与虚线表示的数值求得的最小值进行比较。**右图：**对于不同的轴子斜坡宽度，式 (67) 的解析估计与数值求得的最小能量 χ_s 之间的百分比误差。

这些图还表明，即使超越推导公式（68）时所采用的薄轴子梯度近似，屏蔽效率仍得以保持。从物理上看，即使轴子梯度是渐变的，屏蔽仍能成功，直接源于膨胀子外部尾部所伴随的巨大能量代价。在源外部，$\chi' = L/r^2$，因此外部梯度能按 $E^{(\nabla\chi)}{}_{\rm out} \propto L^2/R_s$缩放。因此，最低能量构型倾向于选择具有较小 $L \propto \chi'(R_s)$的解。

在 BBQ 区域，系统通过轴子反作用实现这一点。由于轴子梯度取决于 $W(\chi)$ 的局部值，耦合方程产生了自调节反馈：改变 χ 会重塑膨胀子方程中的轴子贡献。当源内外轴子质量之间的层级足够大时（此时轴子会绝热地跟随其有效势；见附录 B），可得 $\mathfrak{a}'(r) \propto 1/W^2(\chi)$。在相关场值范围内，BBQ 区域中的 $W(\chi)$ 随 $W,_\chi < 0$ 单调变化，因此将膨胀子驱动至更小的 χ 会增大 $W(\chi)$。在绝热区域中，轴子梯度随后会受到动态抑制。这可防止轴子贡献超过式 (23) 中的物质项和势项。如果它开始占据主导并推动 χ 向下变化，由此导致的 W 增大会降低 $\mathfrak{a}'$，从而削弱轴子反作用，并使系统稳定在滚动区域净源项最小化时对应的 χ_s 值附近。这就是为什么图 10 和图 11 中膨胀子分布被大幅压平，而荷也受到显著抑制。

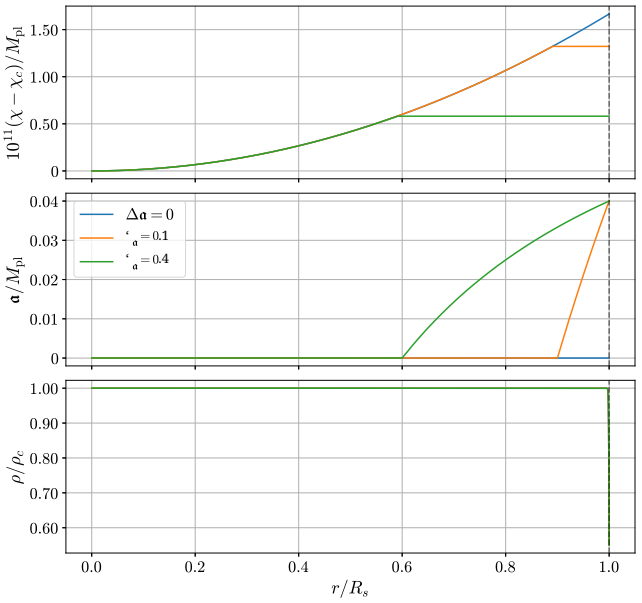


图 10：不同轴子边界跃变 $\Delta\mathfrak{a} = 0.04$ 下，能量极小化（BBQ）区间的径向分布（以 r/R_s 为单位）。这里取 $W_0 = 1$、$\beta = 0.2$、$\zeta = -2 \times 10^{10}$。我们使用附录 B 中概述的数值能量极小化方案来确定 χ_s。

图 12 显示，对于恒星密度分布，同一机制也会发挥作用；人们或许会天真地认为屏蔽效率会因此降低。然而，膨胀子梯度和膨胀子荷会一直存在，直至轴子开始发生相变的半径处。因此，屏蔽效率取决于轴子细节动力学中，更广泛的轴子梯度会带来更全面的屏蔽。因此，与表面存在尖锐密度不连续处的构型相比，这些系统可能表现出更高的屏蔽效率。物理上，平滑的密度分布使轴子跃迁在恒星内部更为渐进，进而使膨胀子在天体内部更深处受到屏蔽。

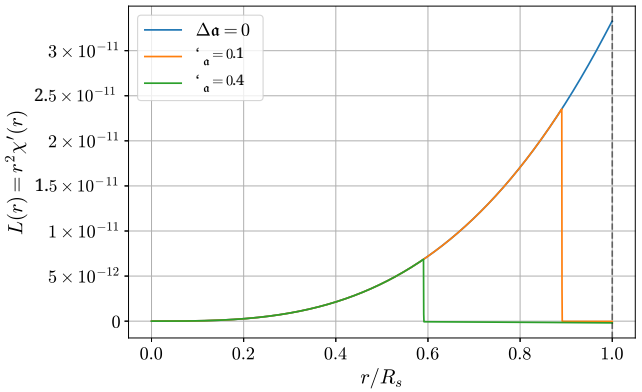


图 11：对于 BBQ 通量解，膨胀子荷 $L(r) \equiv r^2\chi'(r)$ 随半径 r/R_s 变化的场分布，展示了不同轴子渐变宽度 $\ell_{\mathfrak{a}}$下的情况。 $\Delta\mathfrak{a} = 0$ 曲线重现了单场基准的单场结果。

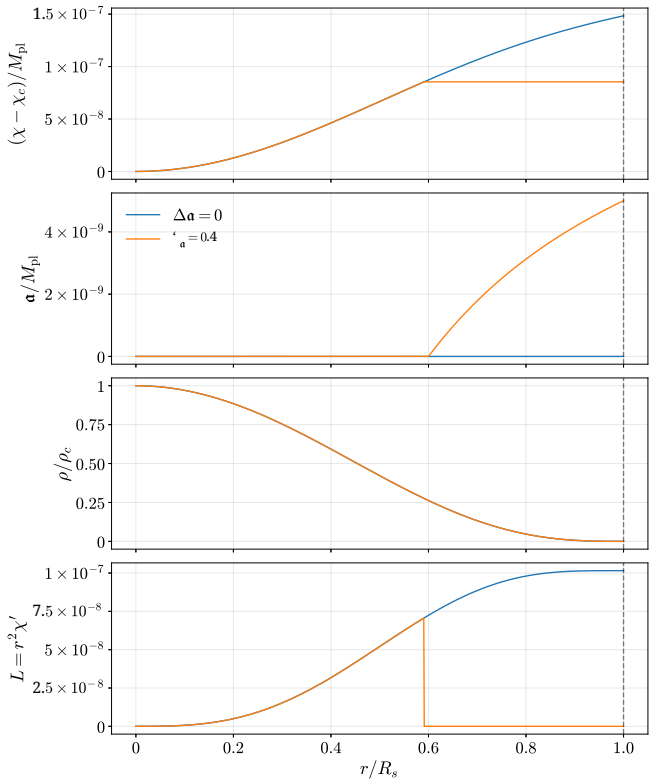


图 12：存在恒星质量密度时的径向分布（详情见附录 B），展示了轴子边界跃变为 $\Delta\mathfrak{a} = 4 \times 10^{-9}$时的能量极小化（BBQ）区间。这里我们取 $W_0 = 1$、$\beta = 0.2$、$\zeta = -2 \times 10^{10}$。这里使用数值能量极小化方案来确定 χ_s，相关说明也见附录 B。

VII. 重新审视膨胀子

前文各节表明，在多场系统中，场分布的几何局域化与可观测第五种力的抑制未必相一致。在钉扎的双极小值区域内，轴子反作用可以使膨胀子跃迁越来越集中于近表面的薄层，但守恒的外部荷仍由全局通量平衡决定。因此，滚动区域变薄既非屏蔽的必要条件，也非充分条件：即使长程 $1/r$ 尾部未减弱，也能实现这种变薄；计入轴子导致的通量贡献后，荷甚至可能增大。不过，局域化本身仍具有现象学意义。许多实验室和太阳系检验会探测源内部的详细场梯度，例如通过恒星燃烧和地球化学约束；因此，即使渐近力仍由未改变的外部荷决定，将较大的梯度限制在狭窄的表面层内，也能缩小这些效应发挥作用的时空体积。

相比之下，当膨胀子在天体物理尺度上极轻，或其有效势不存在相关的密度依赖极小值时，薄壳图景便不再具有明确的参数定义。在这一非钉扎区间，膨胀子通常会在整个内部滚动，因此，可行的屏蔽必须直接通过抑制净标量荷来实现。在轴子—膨胀子系统中，这一过程通过能量极小化（BBQ）机制发生。在此区间，耦合构型会动态地选择一个表面值，通过降低外部梯度能来降低总静态能量（借助轴子—膨胀子动能耦合，并取适当的符号和大小以抑制膨胀子的梯度），进而降低守恒荷，而无需有几何上很薄的滚动层，也无需针对每个天体调节彼此无关的贡献。

一个尚待解决的模型构建问题是，实现有效电荷抑制所需的动能斜率有多大。在指数型设定式（21）中，只有当 ζ取较大的负值时，才会出现最强抑制，这对应于场空间度规快速变化。因此，有效电荷抑制所需的大 $|\zeta|$ 区间应被视为一种有效的双场描述。在弦紧化中，函数 $W(\chi)$由模场空间度规确定，因此 $|\zeta|$ 较大是场空间的一种几何属性。这要求轴子动能度规 $K_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}}(\phi^I)$沿轻规范归一化方向 χ快速变化，即

$$|\zeta| \sim \frac{1}{2}\left|\frac{d\ln K_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}}}{d\chi}\right| \gg 1, \tag{69}$$

而非一个任意参数。因此，要在紫外完备化中实现这一点，就需要构造一种紧化，使轴子衰变常数沿着χ 方向在模空间中变化时发生剧烈改变，例如，轻方向可能是多个模场的对齐/混合组合，因此

在 χ 中，微小的移动对应于控制轴子度规的底层几何模量发生较大的相对变化。因此，构造能够实现这种有效的大$|\zeta|$、同时保持参数控制（避免轻态塔和 α' 修正等常见问题）的具体紧化，仍是一个尚待解决的模型构建问题。

最后，即使膨胀子耦合 $A(\chi)$具有普适性，多场动力学仍可能引入新的非普适性来源。只要轴子扇区与依赖组成的量（例如重子数）发生耦合（即便耦合很弱），就会如此；这种耦合是为了在天体内部产生所需的坡道状结构，而我们已经证明这些结构会带来屏蔽效应。决定轴子跃变、进而决定进入膨胀子反作用的有效斜坡的密度依赖平衡数据，会通过 $\mathfrak{a}_{\pm}$而依赖于天体。因此，轻标量场的屏蔽本质上取决于天体及其组成，因为相同的微观参数在物质含量不同的环境中未必产生相同的轴子斜坡（甚至可能完全不产生斜坡）；例如在主导成分并非重子物质的星系晕中就是如此。

VIII. 结论

本文表明，一旦将轴子伴侣纳入考虑，恒定耦合的膨胀子并非通常注定无法通过第五种力的约束。在轴子—膨胀子系统中，动能耦合使轴子梯度直接馈入膨胀子方程。这一贡献进入决定守恒的外部荷 $L = r^2\chi'$的通量平衡，因此也决定了长程第五种力的强度。在 $W,\ \chi < 0$ 轴子反作用能够抵消物质诱发的膨胀子源项，并使 L 降低，从而为屏蔽提供了一条具体途径，尤其适用于单场薄壳图景失效的那些情形。

该机制在实际中奏效的关键在于，系统并非试图将膨胀子精确地设计成在表面跃迁至渐近平衡。在非钉扎区间中——这与宇宙学尺度的轻膨胀子相关，也适用于在恒星和行星尺度上无法达到高密度物质极小值的模型——构型由静态能量最小化决定。最主要的调节因素是外部尾部；在源外有 $\chi' = L/r^2$，因此外部梯度能按 $E^{(\nabla\chi)}{}_{\rm out} \propto L^2/R_s$ 标度变化。降低 $|L|$ 因而是有效降低能量的方式，而轴子提供了系统实际实现这一点的途径。由于轴子梯度本身取决于 $W(\chi)$，膨胀子的移动会重塑轴子对通量的贡献，进而改变膨胀子分布。因此，耦合方程会形成一种反馈，自然地将解引向低荷区间。其结果是，即使轴子斜坡并非无限薄，屏蔽仍然存在；有限宽度的跃迁仍会参与同一通量平衡，也仍参与同一能量选择过程。我们的数值解表明，对于宽斜坡以及平滑的恒星密度分布， L 的抑制依然存在；在这种情况下，轴子跃迁可以延伸至内部。

钉扎区间则展现了互补的情形。当膨胀子足够重，能够跟踪依赖于密度的极小值时，内部与外部之间的不匹配已经确定了相当一部分通量预算。轴子仍可发挥相反符号的作用，部分抵消该荷，但此时它抵消的是由钉扎强制产生的部分，而不是系统可以自由弛豫消除的部分。因此，这种抵消通常较为微妙，并且取决于天体。能够抑制某一密度分布对应荷的轴子梯度振幅和形状，不一定也能对另一种密度分布产生同样效果。这正是轴子梯度能够显著重塑近表面场分布，却无法保证第五种力相应变小的原因。

这些结果指向了若干自然的扩展方向。首先是真正的多物体构型。在现实的太阳系或星系环境中，没有理由认为每个天体周围都能彼此独立地达到同一个环境值；而且，对多个天体的外部尾部进行匹配，应当会在它们之间的区域诱导出额外的梯度。要确定这种情形下有效荷如何重整化，需要在正确的集体边界条件下求解耦合系统。相关工作目前正在进行中。

第二个方向涉及环境与组成依赖性。即使膨胀子耦合 $A(\chi)$ 是普适的，轴子扇区仍可能通过诱导自身梯度以抑制膨胀子梯度的机制引入对天体的依赖性，因为这些效应取决于决定轴子如何感受物质的微观物理。屏蔽并不要求表面跃变趋于无穷小，这一点在此至关重要；它也表明，相对温和的轴子梯度就可能已经具有相关性。因此，使屏蔽机制稳健的同一物理机制，也可能使对等效原理敏感的特征信号变得可信，具体取决于哪些物质种类为轴子提供源，以及它们如何提供源。

第三，与前述论点相辅相成的是，众所周知，一旦将球对称性假设推广，天体物理系统中的屏蔽行为就会大不相同 [119]。太阳系引力检验中最敏感的天体大致都满足这一球对称性，因此，分析不满足该假设的测试体，无论是在实验室还是在天体物理系统中，都能为探测那些原本受到屏蔽的引力修正提供途径 [120–123]。理解这些效应如何通过额外的非线性效应改变多场系统，或可提供单场修正引力测试所不具备的探测机制。

第四个问题是：在指数型设定中，为实现强抑制而要求的较大负动能斜率具有怎样的模型构建含义——

在指数型设定 $W(\chi) = W_0 e^{\zeta\chi}$ 中。在紫外完备化中，ζ 是标量流形的一种性质，而非可以自由调节的参数，因此问题变成：受控的紧化是否能够实现有效上较大的负 ζ，同时不使双场描述失效。

最后，中子星处于参数空间中一个性质截然不同的区域。其密度和相对论性结构能够固定一个在宇宙学尺度上质量很轻的膨胀子，而轴子动力学可能对内部组成和强引力极为敏感。因此，要将当前分析拓展至这一领域，需要在真实的恒星背景下对耦合场进行相对论处理；但这也有望揭示独特的特征信号，并对多场屏蔽进行严格检验。

更一般地说，研究多场系统中的屏蔽，其动机并不局限于本文所考虑的特定轴子–膨胀子模型。许多宇宙学情景都引入额外的引力耦合或新的传播自由度，以获得非平凡的晚期动力学，包括能够产生幽灵分界线穿越或其他暗部门现象学的标量–张量理论和修正引力模型 [124–138]。由于相同的相互作用通常会传递长程标量力，或改变小尺度上的引力，要与实验室和太阳系检验相容，就必须在高密度环境中抑制这些效应。因此，屏蔽是许多此类宇宙学构造的结构性要素，而非可有可无的附加项。

我们希望这些考量能够促使人们重新关注多场天体物理建模这一鲜少探索的领域。

致谢

我们感谢 Cliff Burgess、Sergio Sevillano Muñoz 和 Maria Mylova 富有启发性的讨论。本文的研究源于在伦敦国王学院举行的 UK Cosmo 2024 会议期间的讨论。AS、CvdB 和 ACD 感谢伦敦国王学院在活动期间提供的热情接待。AS 还感谢周界理论物理研究所和 Kavli IPMU 的热情接待，本研究的大部分工作正是在那里完成的。AS 获得 W.D. Collins奖学金资助。CvdB 获得 STFC（科学技术设施委员会）Lancaster–Sheffield 基础物理联盟项目资助，项目编号为 ST/X000621/1。ACD 部分获得科学技术设施委员会（STFC）通过 STFC 综合资助项目 ST/T000694/1 的支持。

[1] C. van de Bruck、G. Poulot 和 E. M. Teixeira，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》07，019，arXiv:2211.13653 [高能物理—理论]。[2] M. Archidiacono、E. Castorina、D. Redigolo 和 E. Salvioni，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》10，074，arXiv:2204.08484 [天体物理学与宇宙学]。[3] M. Baryakhtar、O. Simon 和 Z. J. Weiner，《物理评论D》110，083505（2024年），arXiv:2405.10358 [天体物理学与宇宙学]。[4] M. Baryakhtar、O. Simon 和 Z. J. Weiner，《物理评论D》111，115026（2025年），arXiv:2502.04432 [高能物理—唯象学]。[5] M. Costa、C. Creque-Sarbinowski、O. Simon 和 Z. J. Weiner，arXiv:2510.00098 [天体物理学与宇宙学]（2025年）。[6] S. Castello、Z. Wang、L. Dam、C. Bonvin 和 L. Pogosian，《物理评论D》110，103523（2024年），arXiv:2404.09379 [天体物理学与宇宙学]。[7] X. Gan、D. Liu、D. Liu、X. Luo 和 B. Yu，arXiv:2504.11522 [高能物理—唯象学]（2025年）。[8] S. Ghosh、K. K. Boddy 和 T.-T. Yu，arXiv: 2511 14532 。天体物理学与宇宙学（） [ ] 2025 。[9] N. Frusciante 等（Euclid），arXiv:2512.09748 [天体物理学与宇宙学]（2025年）。[10] C. Zheng、W. Liu、Z. Zhan 和 W. Fang，Res. Astron. Astrophys. 25，125015（2025年），arXiv:2509.13804 [天体物理学与宇宙学]。[11] M. van der Westhuizen、A. Abebe 和 E. Di Valentino，《暗宇宙物理学》 **50**, 102121 2025 2509 04496 （），arXiv: . [ ] gr-qc . [12] S. Bhattacharya、G. Borghetto、A. Malhotra、S. Parameswaran、G. Tasinato 和 I. Zavala，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》09，073，arXiv:2405.17396 [天体物理学与宇宙学]。[13] Y. Olguin-Trejo、S. L. Parameswaran、G. Tasinato 和 I. Zavala，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》01，031，arXiv:1810.08634 [高能物理—理论]。[14] E. M. Teixeira, W. Giarè, N. B. Hogg, T. Montandon, A. Poudou, 和 V. Poulin，《物理评论D》112, 023515 (2025年), arXiv:2504.10464 [天体物理学与宇宙学]. [15] W. J. Wolf, C. García-García, T. Anton, 和 P. G. Ferreira，《物理评论快报》135, 081001 (2025年), arXiv:2504.07679 [天体物理学与宇宙学]. [16] R. Shah, P. Mukherjee, 和 S. Pal，《皇家天文学会月报》542, 2936 (2025年), arXiv:2503.21652 [天体物理学与宇宙学]. [17] Y. Tiwari, U. Upadhyay, 和 R. K. Jain，《物理评论D》111, 043530 (2025年), arXiv:2412.00931 [天体物理学与宇宙学]. [18] E. M. Teixeira, G. Poulot, C. van de Bruck, E. Di Valentino, 和 V. Poulin，《物理评论D》113, 023514 2026 2412 ( ), arXiv: .14139 [天体物理学与宇宙学]. [19] T. Simon, T. Adi, J. L. Bernal, E. D. Kovetz, V. Poulin, 和 T. L. Smith，《物理评论D》111, 023523 (2025年), arXiv:2410.21459 [天体物理学与宇宙学]. [20] Y.-M. Zhang, T.-N. Li, G.-H. Du, S.-H. Zhou, L.-Y. Gao, J.-F. Zhang, 和 X. Zhang, arXiv: 2510 12627 . 天体物理学与宇宙学 ( ). [21] E. Bellini 和 I. Sawicki，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》07, 050, arXiv:1404.3713 [天体物理学与宇宙学]. [22] G. Gubitosi, F. Piazza, 和 F. Vernizzi，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》02, 032, arXiv:1210.0201 [高能物理—理论]. [23] N. Frusciante 和 L. Perenon，《物理学报告》857, 1 (2020年), arXiv:1907.03150 [天体物理学与宇宙学]. [24] G. Efstathiou，伦敦皇家学会哲学汇刊 A 辑 383, 20240022 2025 2406 ( ), arXiv: .12106 [天体物理学与宇宙学]. [25] G. Efstathiou，《皇家天文学会月报》538, 875 (2025年), arXiv:2408.07175 [天体物理学与宇宙学]. [ ] 2025

[26] A. Bedroya, G. Obied, C. Vafa, 和 D. H. Wu, arXiv:2507.03090 [天体物理学与宇宙学] (2025年). [27] M. Hong, K. Mukaida, 和 T. T. Yanagida, 《无标度布兰斯-迪克引力 – 超轻标量玻色子与重暴胀子》(2025年), arXiv:2503.18648 [高能物理—唯象学]. [28] J. Bagger 和 E. Witten, 《物理快报B》118, 103 (1982). [29] J. P. Conlon, 《物理进展》55, 287 (2007年), arXiv:hep-th/0611039. [30] M. Cicoli, 《物理进展》58, 115 (2010年), arXiv:0907.0665 [高能物理—理论]. [31] U. H. Danielsson 和 T. Van Riet, 《国际现代物理学杂志D》27, 1830007 (2018年), arXiv:1804.01120 [高能物理—理论]. [32] D. Andriot, M. Rajaguru, 和 G. Tringas, 《高能物理学杂志》 **05**, 046, 2501 17775 [ ] arXiv: . 高能物理—理论 . [33] D. Andriot, 《暗宇宙物理学》49, 102000 (2025年), arXiv:2505.10410 [高能物理—理论]. [34] D. J. Kapner, T. S. Cook, E. G. Adelberger, J. H. Gundlach, B. R. Heckel, C. D. Hoyle, 和 H. E. Swanson, 《物理评论快报》98, 021101 (2007年), arXiv:hep- ph/0611184. [35] B. Bertotti, L. Iess, 和 P. Tortora, 《自然》425, 374 (2003). [36] B. Jain, V. Vikram, 和 J. Sakstein, 《天体物理学杂志》779, 39 2013 1204 ( ), arXiv: .6044 [天体物理学与宇宙学]. [37] P. Touboul 等 (MICROSCOPE), 《物理评论快报》129, 121102 (2022), arXiv:2209.15487 [gr-qc]. [38] H. Desmond, P. G. Ferreira, G. Lavaux, 和 J. Jasche, 《物理评论D》 **98**, 083010 2018 1807 11742 ( ), arXiv: . [ ] 天体物理学与宇宙学 . [39] A. P. Naik, E. Puchwein, A.-C. Davis, D. Sijacki, 和 H. Desmond, 《皇家天文学会月报》489, 771 (2019), arXiv:1905.13330 [天体物理学与宇宙学]. [40] J. Scherk 和 J. H. Schwarz, 《核物理B》81, 118 (1974). [41] C. G. Callan, Jr., E. J. Martinec, M. J. Perry, 和 D. Friedan, 《核物理B》262, 593 (1985). [42] E. S. Fradkin 和 A. A. Tseytlin, 《物理快报B》158, 316 1985( ). [43] M. Gasperini 和 G. Veneziano, 《天体粒子物理学》1, 317 (1993), arXiv:hep-th/9211021. [44] C. Brans 和 R. H. Dicke, 《物理评论》124, 925 (1961). [45] R. V. Wagoner, 《物理评论D》1, 3209 (1970). [46] T. Damour 和 A. M. Polyakov, 《核物理B》423, 532 (1994), arXiv:hep-th/9401069. [47] T. Damour, F. Piazza, 和 G. Veneziano, 《物理评论D》66, 046007 (2002), arXiv:hep-th/0205111. [48] T. Damour, F. Piazza, 和 G. Veneziano, 《物理评论快报》89, 081601 (2002), arXiv:gr-qc/0204094. [49] T. Damour 和 J. F. Donoghue, 《物理评论D》82, 084033 2010 1007 ( ), arXiv: .2792 [gr-qc]. [50] P. Brax, C. van de Bruck, A.-C. Davis, 和 D. Shaw, 《物理评论D》82, 063519 (2010), arXiv:1005.3735 [天体物理学与宇宙学]. [51] P. Brax, C. van de Bruck, A.-C. Davis, B. Li, 和 D. J. Shaw, 《物理评论D》 **83**, 104026 2011 1102 3692 ( ), [ ] arXiv: . 天体物理学与宇宙学 . [52] P. Brax, A.-C. Davis, B. Li, 和 H. A. Winther, 《物理评论D》86, 044015 (2012), arXiv:1203.4812 [天体物理学与宇宙学]. [53] P. Brax, 《物理评论D》112, 083544 (2025年), arXiv:2507.16723 [天体物理学与宇宙学]. [54] E. Di Valentino, A. Melchiorri, 和 O. Mena, 《物理评论D》96, 043503 (2017), arXiv:1704.08342 [天体物理学与宇宙学]. [55] W. Giarè、Y. Zhai、S. Pan、E. Di Valentino、R. C. Nunes 和 C. van de Bruck, 《物理评论D》110，063527（2024年），arXiv:2404.02110 [天体物理学与宇宙学]。[56] A. Smith、M. Mylova、C. van de Bruck、C. P. Burgess 和 E. Di Valentino, arXiv:2512.13544 [天体物理学与宇宙学] （2025年）。[57] N. Schöneberg 和 L. Vacher, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》03，004，arXiv:2407.16845 [天体物理学与宇宙学]。[58] R. Catena 和 J. Moller, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》03，012，arXiv:0709.1931 [高能物理—唯象学]。[59] C. P. Burgess、D. Dineen 和 F. Quevedo, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》03 (03)，064，arXiv:2111.07286 [高能物理—理论]。[60] R. Kallosh 和 A. Linde, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》08 (08)，037，arXiv:2203.10437 [高能物理—理论]。[61] S. Alexander、H. Bernardo 和 M. W. Toomey, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》03，037，arXiv:2207.13086 [天体物理学与宇宙学]。[62] H. Bernardo、R. Brandenberger 和 J. Fröhlich, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》09，040，arXiv:2201.04668 [高能物理—理论]。[63] A. Smith、M. Mylova、P. Brax、C. van de Bruck、C. P. Burgess 和 A.-C. Davis, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》12，058，arXiv:2408.10820 [高能物理—理论]。[64] S. Rahimy、E. M. Teixeira 和 I. Zavala, arXiv:2503.01961 [高能物理—理论] （2025年）。[65] A. Smith、P. Brax、C. van de Bruck、C. P. Burgess 和 A.-C. Davis, 《欧洲物理学杂志C辑》85，1062（2025年），arXiv:2505.05450 [高能物理—理论]。[66] A. Smith、M. Mylova、P. Brax、C. van de Bruck、C. Burgess 和 A.-C. Davis, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》2025 (07)，023。[67] M. W. Toomey、E. Hughes、M. M. Ivanov 和 J. M. Sullivan，arXiv:2511.23463 [天体物理学与宇宙学] （2025年）。[68] P. Brax、C. P. Burgess 和 F. Quevedo, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》03，015，arXiv:2310.02092 [高能物理—理论]。[69] A. Smith，https://github.com/Adam-Smith-2001/Multi-field-astrophysical-profiles-and-Screening（2026年）。[70] S. R. Coleman、J. Wess 和 B. Zumino, 《物理评论》177，2239（1969年）。[71] C. P. Burgess, 《核与粒子科学年评》57，329（2007年），arXiv:hep-th/0701053。[72] C. P. Burgess、H. M. Lee 和 M. Trott, 《高能物理学杂志》09，103，arXiv:0902.4465 [高能物理—唯象学]。[73] R. Penco，arXiv:2006.16285 [高能物理—理论] （2020年）。[74] S. Weinberg, 《物理学A辑》96，327（1979年）。[75] A. Pich，arXiv:1804.05664 [高能物理—唯象学] （2018年）。[76] M. R. Douglas 和 S. Kachru, 《现代物理学评论》79，733（2007年），arXiv:hep-th/0610102。[77] D. Baumann 和 L. McAllister, 《暴胀与弦理论》, 《剑桥数学物理专著》（剑桥大学出版社，2015年）arXiv:1404.2601 [高能物理—理论]。[78] C. Gordon、D. Wands、B. A. Bassett 和 R. Maartens, 《物理评论D》63，023506（2000年），arXiv:astro-物理学/0009131。[79] S. Groot Nibbelink 和 B. J. W. van Tent, 《经典与量子引力》19，613（2002年），arXiv:hep-ph/0107272。[80] L. Senatore 和 M. Zaldarriaga, 《高能物理学杂志》04，024，arXiv:1009.2093 [高能物理—理论]。[81] A. Achucarro、J.-O. Gong、S. Hardeman、G. A. Palma 和 S. P. Patil, 《高能物理学杂志》05，066，arXiv:1201.6342 [高能物理—理论]。[82] G. Shiu 和 J. Xu, 《物理评论D》84，103509（2011），arXiv:1108.0981 [高能物理—理论]。[83] J. Khoury 和 A. Weltman, 《物理评论快报》93，171104（2004年）

, arXiv:天体物理学/0309300。

[84] J. Khoury 和 A. Weltman，《物理评论D》69，044026（2004），arXiv:天体物理学/0309411。[85] K. Hinterbichler 和 J. Khoury，《物理评论快报》104，231301 2010 1001（），arXiv:。4525 [高能物理—理论]。[86] C. P. Burgess 和 F. Quevedo，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》04（04），007，arXiv:2110。10352 [高能物理—理论]。[87] J. Polchinski，《弦理论》卷2：超弦理论及其他，剑桥数学物理专著（剑桥大学出版社，2007年）。[88] T. W. Grimm 和 J. Louis，《核物理B》699，387（2004），arXiv:高能物理—理论/0403067。[89] J. J. M. Carrasco、R. Kallosh、A. Linde 和 D. Roest，《物理评论D》92，041301（2015年），arXiv:1504。05557 [高能物理—理论]。[90] M. Cicoli、J. P. Conlon、A. Maharana、S. Parameswaran、F. Quevedo 和 I. Zavala，《物理学报告》1059，1（2024年），arXiv:2303。04819 [高能物理—理论]。[91] F. Apers、J. P. Conlon、E. J. Copeland、M. Mosny 和 F. Revello，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》08，018，arXiv:2401。04064 [高能物理—理论]。[92] C. Wetterich，《核物理B》302，668（1988），arXiv:1711。03844 [高能物理—理论]。[93] C. Wetterich，《物理评论D》81，103508（2010），arXiv:1003。3809 [高能物理—理论]。[94] T. Henz、J. M. Pawlowski 和 C. Wetterich，《物理快报B》769，105（2017），arXiv:1605。01858 [高能物理—理论]。[95] C. Wetterich，《核物理B》964，115326（2021），arXiv:2007。08805 [高能物理—理论]。[96] M. Gasperini、F. Piazza 和 G. Veneziano，《物理评论D》65，023508（2002），arXiv:gr-qc/0108016。[97] E. E. Flanagan，《经典与量子引力》21，3817（2004），arXiv:gr-qc/0403063。[98] C. M. Will，《相对论综述》17，4（2014），arXiv:1403。7377 [gr-qc]。[99] M. B. Green、J. H. Schwarz 和 E. Witten，《超弦理论》卷1：25周年纪念版，剑桥数学物理专著（剑桥大学出版社，2012）。[100] D. J. E. Marsh，《物理学报告》643，1（2016），arXiv:1510。07633 [天体物理学与宇宙学]。[101] C. P. Burgess 和 F. Quevedo，arXiv:2509。11340 [高能物理—理论]（2025年）。[102] C. Burrage 和 J. Sakstein，《相对论综述》21，1（2018年），arXiv:1709。09071 [天体物理学与宇宙学]。[103] S. Tsujikawa、T. Tamaki 和 R. Tavakol，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》**05**，020，0901 3226 [ ]，arXiv:。gr-qc。[104] P. Brax、A.-C. Davis 和 R. Jha，《物理评论D》95，083514 2017 1702（），arXiv:。02983 [gr-qc]。[105] P. Yin、R. Li、C. Yin、X. Xu、X. Bian、H. Xie、C.-K. Duan、P. Huang、J.-h. He 和 J. Du，《自然·物理》18，1181 2022 2405（），arXiv:。09791 [gr-qc]。[106] C. Burrage 和 J. Sakstein，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》11，045，arXiv:1609。01192 [天体物理学与宇宙学]。[107] H. Fischer、C. Käding 和 M. Pitschmann，《宇宙》10，297（2024年），arXiv:2405。14638 [gr-qc]。[108] H. Oyaizu，《物理评论D》78，123523（2008），arXiv:0807。2449 [天体物理学]。[109] H. Oyaizu、M. Lima 和 W. Hu，《物理评论D》78，123524 2008 0807（），arXiv:。2462 [天体物理学]。[110] B. Li、W. A. Hellwing、K. Koyama、G.-B. Zhao、E. Jennings 和 C. M. Baugh，《皇家天文学会月刊》428，743–755（2012）。[111] P. Brax、A.-C. Davis、B. Li、H. A. Winther 和 G.-B. Zhao，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》2012（10），002–002。[112] H. A. Winther 和 P. G. Ferreira，《物理评论D》91，123507 2015 1403（），arXiv: .6492 [天体物理学与宇宙学]。[113] H. A. Winther 等，《皇家天文学会月报》454，4208 2015 1506（），arXiv: .06384 [天体物理学与宇宙学]。[114] P. Brax、C. van de Bruck、D. F. Mota、N. J. Nunes 和 H. A. Winther，《物理评论D》82，083503 (2010)，arXiv:1006.2796 [天体物理学与宇宙学]。[115] J. G. Williams、S. G. Turyshev 和 D. H. Boggs，《物理评论快报》93，261101 (2004)，arXiv:gr-qc/0411113。[116] J. G. Williams、S. G. Turyshev 和 D. Boggs，《经典与量子引力》29，184004 (2012)，arXiv:1203.2150 [gr- qc]。[117] A. Fienga、J. Laskar、P. Kuchynka、H. Manche、M. Gastineau 和 C. Leponcin-Lafitte，国际天文学联合会研讨会261，159 (2010)，arXiv:0906.3962 [gr-qc]。[118] A. Fienga 和 O. Minazzoli，《相对论综述》27，1 (2024)，arXiv:2303.01821 [gr-qc]。[119] C. Burrage、E. J. Copeland 和 J. Stevenson，《物理评论D》91，065030 (2015)，arXiv:1412.6373 [高能物理—理论]。[120] C. Burrage、B. March 和 A. P. Naik，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》04，004，arXiv:2310.19955 [天体物理学与宇宙学]。[121] A. Almasi、P. Brax、D. Iannuzzi 和 R. I. P. Sed-mik，《物理评论D》**91**，102002 2015 1505 01763（），arXiv: .[ ]physics.ins-det .[122] P. Brax、C. van de Bruck、A.-C. Davis、D. F. Mota 和 D. J. Shaw，《物理评论D》76，124034 (2007)，arXiv:0709.2075 [高能物理—唯象学]。[123] T. Anson 和 E. Babichev，《物理评论D》102，044046 (2020)，arXiv:2005.05990 [gr-qc]。[124] F. Perrotta、C. Baccigalupi 和 S. Matarrese，《物理评论D》61，023507 (1999)，arXiv:astro-ph/9906066。[125] B. Boisseau、G. Esposito-Farese、D. Polarski 和 A. A. Starobinsky，《物理评论快报》85，2236 (2000)，arXiv:gr-qc/0001066。[126] A. De Felice 和 S. Tsujikawa，《物理评论D》80，063516 (2009)，arXiv:0907.1830 [高能物理—理论]。[127] C. de Rham、G. Gabadadze 和 A. J. Tolley，《物理评论快报》106，231101 (2011)，arXiv:1011.1232 [高能物理—理论]。[128] R. Kimura、T. Kobayashi 和 K. Yamamoto，《物理评论D》85，123503 (2012)，arXiv:1110.3598 [astro- ph.CO]。[129] A. Banijamali 和 B. Fazlpour，《广义相对论与引力》44，2051 2012 1206（），arXiv: .3299 [physics.gen-ph]。[130] C. de Rham、A. J. Tolley 和 D. H. Wesley，《物理评论D》87，044025 (2013)，arXiv:1208.0580 [gr-qc]。[131] H. Y. Ip、J. Sakstein 和 F. Sc hmidt，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》10，051，arXiv:1507.00568 [gr-qc]。[132] M. Crisostomi、M. Lewandowski 和 F. Vernizzi，《物理评论D》100，024025 (2019)，arXiv:1903.11591 [gr-qc]。[133] J. T. Deskins，《大质量引力约束：伽利略子的数值研究》，博士论文，凯斯西储大学 (2019)。[134] A. Iyonaga 和 T. Kobayashi，《物理评论D》104，124020 (2021)，arXiv:2109.10615 [gr-qc]。[135] T. Kobayashi 和 T. Hiramatsu，《物理评论D》109，064091 2024 2310（），arXiv: .11041 [gr-qc]。[136] M. Mylova 和 N. Afshordi，《高能物理学杂志》04，144，arXiv:2312.06066 [高能物理—理论]。[137] S. Tsujikawa，《物理评论D》113，L041301 (2026)，arXiv:2508.17231 [天体物理学与宇宙学]。[138] Z. Yao、G. Ye 和 A. Silvestri，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》10，078，arXiv:2508.01378 [gr-qc]。[139] S. Chandrasekhar，《恒星结构研究导论》（多佛出版社，1939年）。

[140] R. Kippenhahn、A. Weigert 和 A. Weiss，恒星结构与演化，第2版（Springer，2012年）。

附录 A：二次动能前因子

为补充正文中使用的指数动能前因子，我们简要考察轴子动能函数的二次增长情形。这提供了一个简单示例，其中 $W(\chi)$ 随膨胀子仅呈多项式增长，并说明轴子反作用的效率和空间局域性如何取决于场空间度规的增长速率。

我们取

$$W^2(\chi) = 1 + \frac{(\chi - \chi_*)^2}{2\Lambda_\chi^2}, \tag{A1}$$

其中，χ_* 表示动能部分中极小值的位置，Λ_χ 控制增长速率。

二次形式–W 解的定性行为如图 13 所示；采用附录 B 所述数值方法中使用的通量守恒表述，可以最直观地理解这一行为。假设源内部和外部的轴子质量存在很大的层级（并且轴子在这两种环境中都很重），使其能够跟踪有效势的极小值，则在球对称性下，轴子方程意味着存在守恒的径向通量 J，因此

$$\mathfrak{a}'(r) = \frac{J}{r^2\, W^2(\chi)}\,. \tag{A2}$$

对于轴子辅助的相变，需要 $W,_\chi > 0$。随着膨胀子在物质外部演化至更大的取值，且 $W(\chi)$ 增大，轴子梯度因此会按照 $\mathfrak{a}' \propto W^{-2}$ 被动态抑制，从而减小膨胀子方程公式 (23) 中轴子反作用项的大小。因此，轴子驱动的强弱取决于 $W(\chi)$ 沿场分布增大的速度。

对于指数前因子，$W(\chi) \propto e^{\zeta\chi/M_{\rm pl}}$，即使膨胀子 χ 在表面附近只有适度变化，也会使 W 迅速增大，从而有效抑制轴子通量。因此，一旦膨胀子开始演化，轴子梯度便会在狭窄的径向区间内迅速消失，将外部驱动效应限制在靠近 $r \simeq R_s$ 的薄层区域，并限制轴子对膨胀子场分布的累积影响。

相比之下，对于公式 (A1) 的二次形式，$W(\chi)$ 仅呈多项式式增长。因此，抑制作用 $\mathfrak{a}' \propto W^{-2}$ 较为温和；当 χ 演化时，较大的轴子梯度可以在更广阔的表面区域内持续存在。这使二阶导数驱动效应在更大的径向区间内持续，并且在其他参数相当的情况下，相比指数形式，对 $\chi(r)$ 产生更强的整体响应，这与图 13 中的场分布一致。其结果是高度-
轴子产生膨胀子薄壳的效率降低。

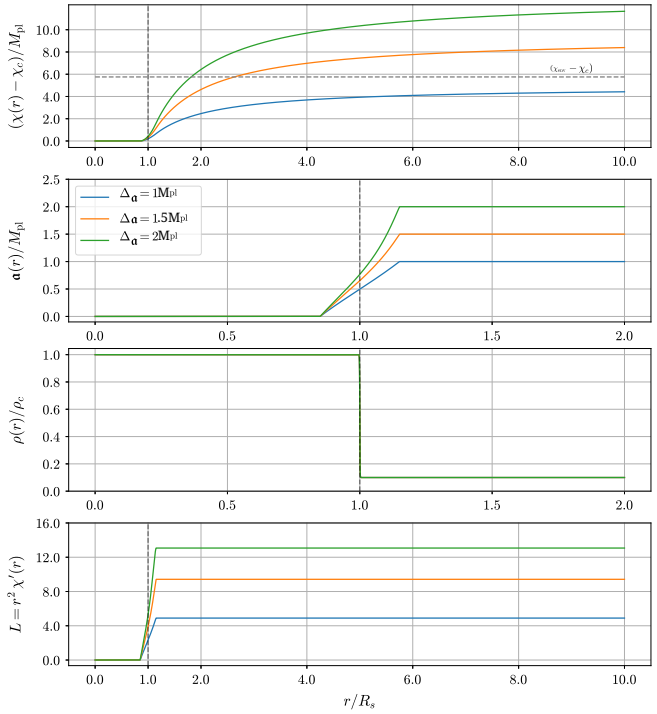


图13：二次动能前因子公式 (A1) 下，场随 r/R_s 的径向分布：不同轴子边界跃变 $\Delta\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_+ - \mathfrak{a}_-$对应的膨胀子 $\chi(r)$（上）、轴子 $\mathfrak{a}(r)$（中）和密度 $\rho(r)$（下）。我们取$\Lambda_\chi = M_{\rm pl}$，并为数值演示选取类地密度 $\rho_c \simeq 10^{-9} M_{\rm pl}^2/R_s^2$，其中 $V_0 = 0.5\,\rho_c$且 $\rho_{\rm env} = 0.1\,\rho_c$（层级极小，在现实中并不可能，仅为使效果更加直观）。

BBQ屏蔽（$W,_\chi < 0$）

为求完整，我们记录一下轴子动能前因子为二次形式而非指数形式时，BBQ 能量极小化结果的对应形式。这说明了单调动能部分中荷抑制机制的普适性：其中 $W,_\chi$ 不改变符号，而 $W(\chi)$ 的增长在参数上远弱于指数增长。

重复对式 (64) 中表面能和外部梯度能进行最小化，得到表面值

$$\chi_s - \chi_* = \frac{2\beta\,\Phi_N(R_s)\,M_{\rm pl}}{1 + \frac{R_s}{\ell_\mathfrak{a}}\left(\frac{\Delta\mathfrak{a}}{\Lambda_\chi}\right)^2}\,. \tag{A3}$$

因此，当 $\frac{R_s}{\ell_\mathfrak{a}}\left(\frac{\Delta\mathfrak{a}}{\Lambda_\chi}\right)^2 \gg 1$ 时，表面值会趋向于 χ_*。这表明轴子跃迁振幅 $\Delta\mathfrak{a}$ 必须远大于动能耦合尺度 Λ_χ。这与指数形式的情况形成对比，在后一种情况下，表面值的偏移现在直接受到轴子梯度 $\Delta\mathfrak{a}$ 大小的抑制。

相应的动能源项在

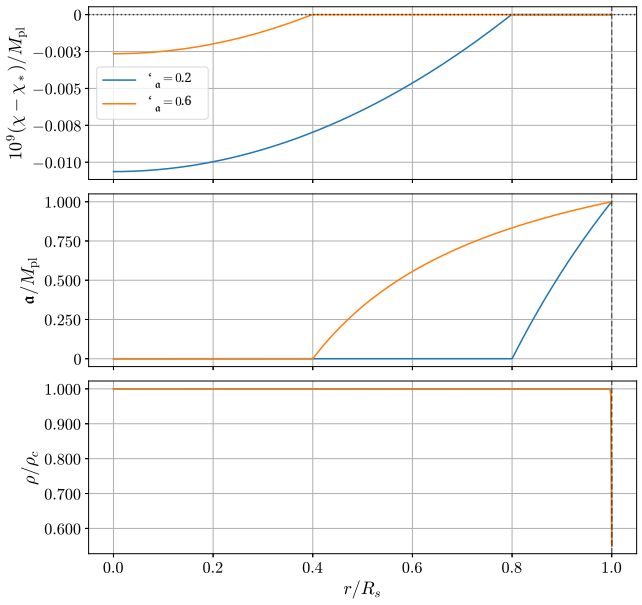


图14：轴子与膨胀子之间采用公式 (A1) 所示二次动能耦合时，恒定密度天体内部的场分布； ρ_c 对应地球的表面密度， $V_0 = 0.5\rho_c$ 和$\rho_{\rm env} = 0.1\rho_c$。这里我们采用了二次动能$\Lambda_\chi = 10^{-5}M_{\rm pl}$，并对轴子使用守通量处理 $\chi_* = 10^{-9}$ 。

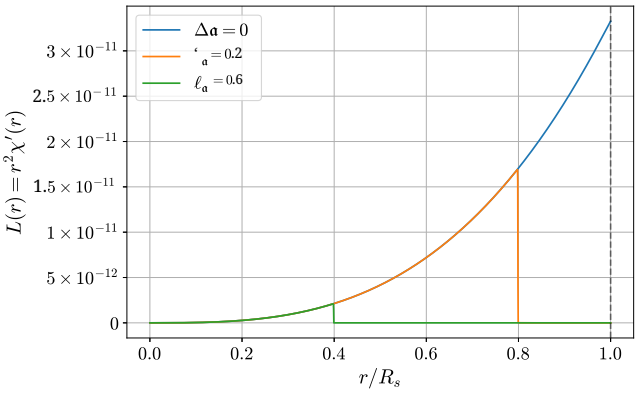


图15：图 14 中相应情形下的荷，其中轴子与膨胀子之间采用公式 (A1) 所示的二次动能耦合。

表面处的取值为

$$W(\chi_s)\,W_{,\chi}(\chi_s) = -\frac{2\beta\,\Phi_N(R_s)\,M_{\rm pl}}{\Lambda_\chi^2 + R_s\ell_{\mathfrak{a}}\left(\frac{\Delta\mathfrak{a}}{\ell_{\mathfrak{a}}}\right)^2}\,, \tag{A4}$$

因此，外部标量荷受到抑制，其大小遵循

$$\frac{L}{L_0} = \frac{1}{1 + \frac{R_s\ell_{\mathfrak{a}}}{\Lambda_\chi^2}\left(\frac{\Delta\mathfrak{a}}{\ell_{\mathfrak{a}}}\right)^2}\,, \tag{A5}$$

这明确表明，对于二次形式的动能前因子，增大轴子梯度会使第五种力单调减小。

综合来看，公式 (A3) 和 (A5) 突显了多项式动能耦合与指数动能耦合之间一个重要的定性差异。对于二次形式 $W(\chi)$，电荷抑制直接取决于轴子梯度，并且会随着 $\Delta\mathfrak{a}/\ell_{\mathfrak{a}}$ 增大而平滑增强。图 14 和图 15 证实了这一点：我们可以看到，开启轴子梯度后，膨胀子会迅速被驱至 χ_* ，并持续保持在那里直至表面，从而抑制膨胀子的表面电荷及其与物质的有效耦合。

附录 B：数值方法

为检验解析薄壳估算，并探索超越第 III–V 节解析近似的完全耦合轴子–膨胀子系统，我们对球对称场方程进行直接数值积分。数值计算保留了薄壳机制的基本物理，同时引入受控近似，使问题能够在一维径向网格上得到处理。实现本文所述方法的代码已在 [69] 公开。

数值方案概述

对于耦合的轴子–膨胀子场分布，我们采用两种互补的数值策略，主要取决于物质分布在表面处的正则性以及膨胀子场的渐近值。

对于平滑的恒星密度分布 $\rho_m(r)$，我们直接求解完整的耦合双场克莱因–戈登方程，并在原点施加正则性条件，同时施加一个取决于所研究情形的适当边界条件。这种直接的双场解用于图 3 至图 7。

相比之下，对于理想化的近乎不连续的顶部帽形密度跃迁，耦合的克莱因–戈登系统在表面处会变得数值刚性，并在跃变处产生局域的虚假大梯度。若没有渐近边界条件加以调节，这可能因数值不稳定性而导致失控行为。此外，对于 BBQ 能量最小化这类计算量大的模拟，数值求解完整的双场系统会变得不可行。在这些情况下，我们不再求解跨越不连续面的轴子二阶方程，而是从守恒的正则通量重构轴子梯度，将表面层视为一个

局域源项，并与膨胀子分布进行自洽迭代。图 2、10 和 11 使用的正是这一通量重构方案，下面我们将概述通量表述的细节。

轴子通量重构

完整的径向轴子方程为

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\big(r^2W^2(\chi)\,\mathfrak{a}'(r)\big) = \mathcal{J}(r), \tag{B1}$$

其中， $\mathcal{J}(r)$ 表示驱动 $\mathfrak{a}_- \to \mathfrak{a}_+$ 的微观源。在该区域之外，由于不存在外力，守恒定律严格成立：

$$J \equiv r^2W^2(\chi)\mathfrak{a}'(r) = \text{constant}. \tag{B2}$$

为避免对 $\mathcal{J}(r)$ 的微观物理形式作出假设，我们将源区域近似为归一化剖面 $S(r)$，因此

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\big(r^2W^2(\chi)\mathfrak{a}'\big) = J\,S(r). \tag{B3}$$

归一化条件确保轴子变化量固定为 $\mathfrak{a}_+ - \mathfrak{a}_-$，而在实际计算中，通过将 J 取为以下形式来实现通量守恒：

$$(\mathfrak{a}_+ - \mathfrak{a}_-)\int dr\,\frac{S(r)}{r^2W^2(\chi)} = J^{-1}. \tag{B4}$$

本文始终采用矩形窗口函数

$$S(r) = \begin{cases} 1, & \alpha R_s < r < R_s, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{B5}$$

因此，插值发生在表面附近的薄层中，而内部和外部分别固定在$\mathfrak{a}_-$ 和 $\mathfrak{a}_+$。膨胀子–轴子反作用通过式 (B2) 中的通量定律得到精确处理，因此，凡是 $W(\chi)$ 在壳层内增大的地方，轴子梯度 $\mathfrak{a}'$ 都会受到抑制，从而使有效斜坡变得更陡，并再现完整运动方程所决定的行为。

与完整解的一致性

图 15 提供了直接的数值检验，表明轴子的通量守恒处理能够复现完整耦合边值问题所得到的场分布，同时不改变底层轴子的微观物理扇区。完整的参考解（实线）由附录 B 中描述的恒星剖面求解器得出，其中轴子动力学由与正文方程 (35) 和 (36) 相同的微观物理势和物质耦合所支配。

为评估通量表述，我们随后进行了另一次计算，其中轴子方程被替换为一个局域于表面附近窄窗口内的守恒通量设定，并通过支撑于 $r \in (R_c - \ell_a/2,\ R_c + \ell_a/2)$ 上的窗口函数 $S(r)$ 实现。关键的是，代码并未改变方程 (35) 和 (36) 中出现的微观物理参数 $\mathfrak{a}_\pm$。特别是， $\mathfrak{a}_-$ 保持不变，因此完整计算和通量计算均采用相同的 $U(\mathfrak{a})$。相反，通量归一化 J 仅通过匹配完整轴子解的端点值来确定，

$$\mathfrak{a}_{\rm flux}(r_{\rm min}) = \mathfrak{a}_{\rm full}(r_{\rm min}), \qquad \mathfrak{a}_{\rm flux}(r_{\rm max}) = \mathfrak{a}_{\rm full}(r_{\rm max}). \tag{B6}$$

在实际操作中，这通过窗口函数通量所隐含的积分约束确定 J ，同时保持 $\mathfrak{a}_\pm$（因此式 (35) 和式 (36)）不变。

在这一设定下，图 16 中实线（完整解）与虚线（通量）之间的任何差异，都可归因于通量设定本身，而非重新调整轴子微观物理。因此，观察到的高度吻合验证了通量守恒近似在所考虑的区域内能够忠实地表征完整耦合解。

物质密度分布

本文在数值计算中使用的密度分布的显式函数形式如下。

理想化行星质量分布

将源建模为半径为 R_s 、中心密度为 ρ_c 的球体，并将其置于密度为 $\rho_{\rm env}$ 的环境中。为作说明，中心密度取为地球的中心密度，因此 $\Phi_N(R_s) \sim 10^{-9}$。为避免表面处的力出现不符合物理的间断，我们引入一个平滑相变

$$\rho_m(r) = \tfrac{1}{2}\rho_c\left[1 - \tanh\left(\frac{r-R_s}{\ell_\rho}\right)\right] + \tfrac{1}{2}\rho_{\rm env}\left[1 + \tanh\left(\frac{r-R_s}{\ell_\rho}\right)\right], \tag{B7}$$

其中 $\ell_\rho \ll R_s$ 是表面密度梯度的特征宽度。这既保留了基本的密度对比，同时也确保函数可微。

恒星质量密度分布

对于恒星应用，我们采用平滑截断的多方场分布（将其作为一种简单的解析近似）

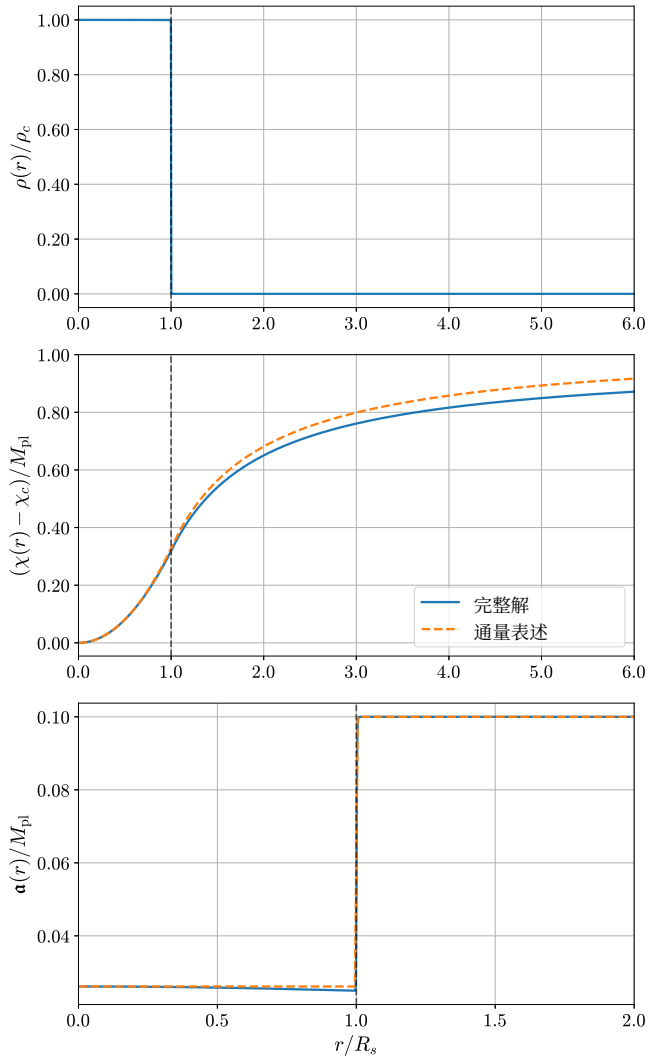


图 16：平滑顶帽晕中耦合轴子–膨胀子系统的径向分布。**顶部：** 密度对比 $\rho(r)/\rho_c$。**中部：** 完整耦合解（实线）与通量守恒轴子表述（虚线）的膨胀子位移 $(\chi(r)-\chi_c)/M_{\rm pl}$，其中通量边界值与完整解端点相匹配。**底部：** 这两次计算对应的轴子场 $\mathfrak{a}(r)/M_{\rm pl}$。

朗缪尔–埃姆登解）[139, 140]。恒星的密度场分布近似按以下规律递减

$$\rho_{\rm poly}(r)=\rho_c\left[1-\left(\frac{r}{R_s}\right)^2\right]^{n_{\rm poly}},\qquad r\le R_s, \tag{B8}$$

而在外部，我们为 $r>R_s$ 添加额外的环境密度$\rho_{\rm env}$。指数 $n_{\rm poly}$ 控制恒星分层的陡峭程度（在我们的数值计算中，$n_{\rm poly}=3$ 被用作代表性选择）。核心密度的取值确保表面牛顿势为 $\Phi_N(R_s)\sim 10^{-6}$，即太阳的表面牛顿势。

多场求解器表述

鉴于本文考虑了不同的案例研究，且每种案例适用的数值方案各不相同，我们在此概述本文数值模拟所用的三类求解器，以及各类求解器生成的相应图表。

失控情形下的初值问题表述

对于表面特征高度局域化的情形（尤其是方程 (B7) 中使用的近似顶帽分布），耦合系统在 $r\simeq R_s$ 附近可能变得数值刚性，并且很容易进入非物理的失控状态。在这些计算中，膨胀子无法可靠地弛豫至定义良好的外部极小值（位于数值计算域内），因此不存在能够为 χ 选出唯一边界解的稳定渐近条件。因此，我们将膨胀子方程作为初值问题 (IVP) 演化，并在一个较小的内半径 $r_{\rm in}\ll R_s$处施加正则性，

$$\chi'(0)=0,\qquad \chi(0)=\chi_c, \tag{B9}$$

并使用龙格–库塔求解器向外积分至 $r_{\rm out}\gg R_s$。当核心密度处存在 $V_{\rm eff}$ 的局部极小值时，我们取 χ_c 为该极小值。

在此情形下，轴子不会作为二阶初值问题进行演化。相反，我们固定净变化量 $\Delta\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_+-\mathfrak{a}_-$，并根据守恒通量关系（式（B2））以及所选的源窗口函数 $S(r)$，重构 $\mathfrak{a}'(r)$，具体如式（B5）所述。由于重构得到的 $\mathfrak{a}'(r)$ 通过 $W(\chi)$依赖于 $\chi(r)$，而膨胀子方程则通过反作用项依赖于 $\mathfrak{a}'(r)$，因此通过皮卡迭代获得场分布：给定当前的轴子剖面（等价于当前的 J），我们对膨胀子初值问题进行积分，得到 $\chi(r)$；使用归一化条件（式（B4））更新 J，重构 $\mathfrak{a}'(r)$，并重复此过程，直到 J 和 $\chi(r)$ 的变化均小于固定容差。
这是图2所用的积分方案。

混合轴子–边值问题、膨胀子–初值问题求解器

上述纯初值问题方法适用于表面特征近乎不连续的情况，因为在有限数值计算区域内无法可靠地进行渐近选择。对于式（B8）中所考虑的平滑恒星剖面，外部演化表现良好，而轴子场在物理上相关的支最适合通过大半径处的边界条件来确定。因此，在此情况下我们采用混合方案。我们将膨胀子视为初值问题，从规则内部区域开始演化；同时将轴子作为边值问题（BVP）求解，以确保其满足所需的渐近行为。两个场通过皮卡迭代耦合。

在给定的一次迭代中，我们首先固定 $\chi(r)$，并将完整的二阶轴子方程作为边值问题求解；系数对 χ的依赖关系通过对当前膨胀子迭代值进行插值来提供（必要时包括 χ'）。我们在原点施加正则性条件，并通过渐近值确定外部支

$$\mathfrak{a}'(0) = 0, \qquad \mathfrak{a}(r_{\max}) = \mathfrak{a}_+, \tag{B10}$$

其中，$r_{\max} \gg R_s$ 取足够大的值，使解达到渐近区间。在固定更新后的轴子剖面后，我们将膨胀子方程作为初值问题，从内部初始条件出发向外积分

$$\chi(0) = \chi_c, \qquad \chi'(0) = 0, \tag{B11}$$

其中，χ_c 由 $V_{\rm eff}$ 在核心密度处的局部极小条件确定。为高效解析表面区域，在 $r \simeq R_s$附近的一段区域内，以较小的最大步长推进初值问题。

从（χ，$\mathfrak{a}$）的平滑初始猜测出发，我们交替进行轴子边值问题更新和膨胀子初值问题更新，直至两种场分布均趋于稳定。轴子更新采用高斯–赛德尔方式，从而在每次迭代中都满足轴子边界条件。膨胀子更新则采用阻尼处理，

$$\chi^{(n+1)} = \chi^{(n)} + \omega_\chi \left[\chi^{(n)}_{\rm IVP} - \chi^{(n)}\right], \tag{B12}$$

其中，ω_χ 的取值用于控制较大的变化并提高稳定性。当 χ 和 $\mathfrak{a}$ 在迭代中的最大变化均低于固定容差时，即判定为收敛。

对于较大的偏移量 $\Delta\mathfrak{a}$，耦合迭代可能会对初始猜测变得敏感。在这种情况下，我们通过求解一系列外边界值 $\mathfrak{a}_+$ 逐步增大的问题，对其进行同伦延续；每次计算都以上一次收敛解作为初始值 $\mathfrak{a}_+$（轴子边值问题以及用于插值的 χ，χ' 均如此，后者用于构造系数）。图3和图5采用的就是这一方案。图6和图7中的环境剖面则是将同一过程嵌套在对 ζ进行的有界扫描中得到的，同时固定其他所有参数。

$V_{\rm eff}$ 有极小值时的边值问题表述

如果 $V_{\rm eff}(\chi)$ 在物质分布之外存在一个依赖于密度的渐近极小值，那么可将求解带有两个边界条件的二阶径向方程视为一个边值问题，从而得到膨胀子分布。原点处的正则性始终要求

$$\chi'(0) = 0. \tag{B13}$$

第二个边界条件通过施加渐近条件

$$\chi(r_{\max}) = \chi_{\rm env}, \tag{B14}$$

在较大的半径 $r_{\max} \gg R_s$处，其中 $\chi_{\rm env}$ 是 $V_{\rm eff}$的外部极小值，并据此选择向内或向外积分。

在此情形下，同样可以将轴子作为边值问题求解：取 $\mathfrak{a}'(0) = 0$以确保原点处的正则性，同时施加渐近边界条件 $\mathfrak{a}(r_{\max}) = \mathfrak{a}_+$，从而选出正确的物理跃迁。该过程得到满足完整双场方程的唯一解对 $(\chi,\ \mathfrak{a})$，且积分方法能够可靠收敛。图4的建模采用了这一方法。

1. BBQ屏蔽

对于图 10 至图 12 中未钉扎的 BBQ 构型，我们不将轴子作为二阶边值问题进行求解。相反，我们采用上文介绍的通量重构设置。之所以作此选择，是因为选取物理构型需要对表面值 χ_s进行外层极小化，这意味着必须多次重新运行求解器。在每次目标函数评估时求解完整的耦合双场问题，计算成本要高得多；相比之下，采用守恒通量处理轴子的单场膨胀子边值问题，能够以大幅降低的成本捕捉相关的反作用。因此，在本文的研究范围内，我们在 BBQ 参数扫描中采用这一约化描述。

对于给定的试探表面值 $\chi_s \equiv \chi(R_s)$，我们在 $[r_{\min}, R_s]$上将天体内部的膨胀子场分布作为边值问题求解，并通过施加以下条件来确保正则性：

$$\chi'(0) = 0, \qquad \chi(R_s) = \chi_s. \tag{B15}$$

轴子梯度通过守恒通量，结合式 (B2) 和窗口函数式 (B5) 进行重构，其中通量 J 由归一化条件式 (B4) 自洽确定。由于 J 通过式 (B4) 依赖于 χ，而 χ 又通过反作用依赖于 J，因此在固定 χ_s 下的耦合解通过与前一小节中所述相同的阻尼不动点迭代获得。

随后，通过最小化总能量关于表面值 χ_s 的函数来选定物理构型。对于每个 χ_s，我们评估

$$E_{\rm full}(\chi_s) = 4\pi \int_0^{R_s} dr\, r^2 \Big[\tfrac{1}{2}(\chi')^2 + \tfrac{1}{2}W^2(\chi)(\mathfrak{a}')^2 + V(\chi) + A(\chi)\rho(r)\Big] + \frac{2\pi}{R_s} L^2, \tag{B16}$$

其中，最后一项计入了常数为 L 的外部尾部。我们先在固定区间内对 χ_s 进行粗略扫描，再围绕最佳扫描候选点进行有界局部细化，以此确定极小值，并记录完整的目标函数评估结果，用于绘制 $E_{\rm full}(\chi_s)$的诊断图。