arXiv:2603.13989v1 [physics.class-ph] 14 Mar 2026

关于耗散牛顿方程

P. V ´AN[1,2,3]

Abstract. 本文阐述了经典力学的热力学基础。在这一框架中，理想的牛顿力学是更一般的耗散理论在耗散为零时的极限。热力学方法预言，动量中存在一种新颖的耗散贡献，它取决于外加力，并由此导出一个阻尼系数；该系数对惯性质量和弹簧常数具有特定且可通过实验检验的依赖关系。我们设计了一项转动惯量可变的扭秤实验，以测量这一效应。若干已知方程也可由此作为特例得到，其中包括 Eliezer-Ford-O'Connell 辐射反作用方程的热力学版本。

1. 引言

什么是耗散？唯一明确的答案只能在热力学框架内给出；该框架用于判定物理系统演化过程中是否产生熵。热力学框架将外部熵输运与内部熵产生区分开来，并阐明系统的演化方程——场方程和运动方程——是否以及如何促成熵产生。要将系统纳入这样的框架，基本物理量，即决定系统演化的变量，也必须同时是热力学状态变量。只有这样，熵产生才是衡量耗散的唯一真正基本的尺度。

然而，只有少数理论具有热力学相容性；其中大多数是理想理论，建立在变分原理之上，而耗散仅作为其演化方程的一种特殊且实用的物理扩展出现。可以区分三类扩展：理想扩展、耗散扩展和不可能的扩展。不可能的修改大多不符合物理规律，并且经常导致不稳定的初值问题。将耗散扩展与稳定性联系起来是很常见的。热力学相容性与稳定性之间存在某种关系 [1, 2], , 但这种关系并不直接 [3, 4]。

无论如何，热力学相容性是一种保守的方法，可用于定义耗散过程并寻找演化方程可行的物理扩展。同样值得注意的是，检验已有演化方程的相容性并非唯一可能性：热力学框架也可以用于构造性地推导方程，即可以推导出演化方程。在《扩展热力学》中，人们认识到了热力学方法 [5, 6, 7]。在那里，与动理学的相容性是一种验证方法。

构建演化方程的方法，其适用范围已远远超出微观理论的有效范围。扩展热力学的拓展形式是内变量方法。引入内变量，是为了刻画相互作用复杂的复杂材料；对于这类材料，若想从

Date: 2026年3月17日。

详细的微观动力学中得出结论，复杂程度会令人绝望 [8, 9]。在这类情况下，无法从微观动力学或介观动力学中获得它们的演化方程；只有一般原理适用，而检验依据则是实验以及与扩展热力学的相容性 [10]。缺乏微观背景时，有两种看似不相容的一般方法：具有弛豫特征的热力学演化，以及具有惯性特征的力学演化。对于内变量而言，这两种演化类型都可以观测到，也都很重要。

需要指出的是：弛豫演化似乎纯粹是耗散的，而具有惯性效应的演化总是包含一个没有耗散的理想核心。例如，在理想世界中，若不存在耗散效应，质点就会永远运动下去。要统一这两种方法并不显而易见。力学建立在哈密顿变分原理之上，而这些原理若不加以进一步处理，就不适用于耗散过程 [11]。为耗散过程构建变分原理并非不可能，但所需的修改既不自然也不具有普遍性；此外，要找到一种既适用于理想演化又适用于耗散演化的变分原理，则更为棘手。因此，人们通常会将理论框架加以扩充，把理想力学的变分原理与热力学要求结合起来，例如 GENERIC 中所采用的方法 [12, 13, 14]。力学概念并不真正适用于耗散演化。

然而，反过来说，热力学方法可以很容易地推广到惯性系统：只需一步，就能从热力学第二定律构造出耗散演化和理想演化。其思路是在双内变量方法中，用第二个内变量来表示惯性效应 [15, 16]。在这里，理想力学演化是耗散演化的边界情形，其耗散为零。从热力学的角度来看，不禁会想，理想力学是否是某种更一般的耗散理论的边界理论。

乍看之下，将位置和动量引入为热力学状态变量，并建立与哈密顿方程相应的特定耗散类比，似乎顺理成章。再仔细考量，便会发现这一基本的亚里士多德式步骤存在若干问题 [17]。位置和动量适合作为热力学状态变量吗？运动学、时空嵌入和伽利略协变性与热力学相容吗？无论如何，最终得到的理想方程都是相同的。

本文旨在寻找具有实际意义且可通过实验检验的结果，论证第一性原理层面的耗散可能导致显著差异，而这些差异无法从理想力学的概念框架中直接看出，并且可以通过实验加以检验。首先，通过类比双内部变量，推导出牛顿方程最简单的耗散扩展。随后我将说明，动量不再与速度成正比；它可能包含耗散部分。最后，我论证这种定性差异会导致一种特殊的阻尼系数，该系数无法仅凭力学预测，却可以通过适当设计的实验加以测量。我还讨论了其他特殊情形、一些解释以及验证这一预测的其他可能性。

2. The logic of mechanics and thermodynamics

在非平衡热力学中，寻找内变量演化方程有两种不同的方法。一种假定惯性是首要效应；另一种假定内变量具有弛豫性质。实际上，这并不是一种假设，而是一种预设，是数学框架中固有的设定。观测到的演化通常介于两者之间；因此，必须同时考虑这两种机制。将两种方法统一起来存在困难，因为它们表面上彼此不相容。当然，也可以像处理相场那样混合并结合这两种方法 [18], ，同时考虑它们的相容性 [14],，但这要求分别为惯性部分和弛豫部分建立独立的公设与数学结构。然而，惯性以动量为基础，而这一简单观察可以统一这两种结构，正如双内变量方法所提出的那样 [15, 16]。这样便可以避免采用两套原则，并在耗散为零的极限下获得理想演化。热力学第二定律成为任何内变量演化背后的首要原则。

3. Thermo-Dynamics of two variables

对于双内部变量的情形，熵函数是演化的生成函数。为了更容易匹配概念，我们假设力学系统的总能量守恒，且内能是总能量与哈密顿量之差，因此 $S(E,\ x,\ p)\ =\ S(U\ =E\ -\ H(x,\ p))$。在非平衡热力学的内变量框架中，采用力学记号和术语。

现在，我们要通过以下动力学描述由两个物理量 x和 p 构成的系统的动力学:

$$\dot{x} \quad = \quad g_x(x,p), \tag{1}$$
$$\dot{p} \quad = \quad g_p(x,p). \tag{2}$$

此处右端项由热力学相容性要求确定。也就是说，首先，根据热力学稳定性，熵是凹函数；而哈密顿量 H 是凸函数。此外，熵产生率非负；熵沿微分方程递增，因此

$$\dot{S}(E,x,p) = \partial_E S(-\partial_x H)\dot{x} + \partial_E S(-\partial_p H)\dot{p} = -\partial_E S\left(\partial_x H g_x + \partial_p H g_p\right) \geq 0 \tag{3}$$

其中我们引入了记号 $\partial_x S\ =\ \frac{\partial S}{\partial x}\big|_{E,\ p}$，并对 S 和 H的其他偏导数作类似定义。我们还假设总能量 E为常数，并且 $\partial_E S = \frac{dS}{dU} =: \ \frac{1}{T}$ 是该框架中的温度倒数。复杂摩擦模型是开放离散热力学系统的例子，在这些系统中，能量并不守恒 [19]。

因此可知，沿着该微分方程，哈密顿量必定递减:

$$\dot{H}(x,p) = \partial_x H g_x(x,p) + \partial_p H g_p(x,p) \leq 0 \tag{4}$$

根据构造性热力学方法，我们要寻找满足演化方程（1）—（2）且不违反上述不等式的方程。式（4）的一般解根据拉格朗日中值定理确定未知函数 g_x 和 g_p ，如下:

拉格朗日中值定理如下:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{p}\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}l_1 & l_{12}\\ l_{21} & l_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_x H\\ \partial_p H\end{pmatrix}, \tag{5}$$

其中，矩阵 L 的对称部分是正定的。将其对称部分和反对称部分分开如下，较为方便:

$$L = \begin{pmatrix}l_1 & l_{12}\\ l_{21} & l_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}l_1 & l\\ l & l_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & k\\ -k & 0\end{pmatrix}. \tag{6}$$

一般而言，系数是状态空间的函数，但在下文中将其视为常数：这是一般解的线性近似。

不等式 **(4)** 对任意 g_x 和 g_p均成立，因此 L 矩阵并非任意，其系数满足以下不等式:

$$l_1 \geq 0, \qquad l_2 \geq 0, \qquad l_1 l_2 - l^2 \geq 0. \tag{7}$$

此外， L的行列式 det $L = l_1 l_2 - l^2 + k^2 \geq 0$也由此得出。矩阵的对称部分决定了动力学的耗散部分。若其为零，则不等式 **(4)** 成为等式，哈密顿量守恒，熵保持不变。将动力学的理想部分与耗散部分分开，可得以下微分方程:

$$\dot{x} = k\partial_p H - l_1 \partial_x H - l\partial_p H = k\partial_p H + f_x, \tag{8}$$

$$\dot{p} = -k\partial_x H - l\partial_x H - l_2 \partial_p H = -k\partial_x H + f_p, \tag{9}$$

这里，动力学的耗散部分记为 f_x 和 f_p。若 $k = 1$，则反对称部分定义了一个辛哈密顿演化方程。无量纲参数 k 使运动学与理想力学中的动力学相匹配。在我们的热力学框架中，我们保留 k 原样，以便轻松区分演化方程的耗散部分和理想部分。

3.1. 保守力学示例。前述讨论是双内部变量的一种简化但通用的方案，采用了力学术语，并尽可能简化了热力学框架。不过，也可以发现，这一方案对纯力学同样会带来一些有趣且不可避免的结果。因此，我们进一步明确该理论，并用以下哈密顿量重写上述系统:

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + V(x). \tag{10}$$

根据力学原理，其物理解释十分直观。V 是“机械”势能， m 是质量， p 是动量。因此，（8）和（9）为:

$$\dot{x} = \frac{k}{m}p - l_1 V' - \frac{l}{m}p, \tag{11}$$

$$\dot{p} = -kV' - lV' - \frac{l_2}{m}p. \tag{12}$$

这里， V' 是机械势能的导数， $F := -V'$ 是力。根据（11）可得到“动量” p :

$$p(\dot{x}, x) = m\frac{\dot{x} + l_1 V'}{k - l}. \tag{13}$$

消去动量 p 后，得到以下运动方程：

$$m\ddot{x} + (ml_1V'' + l_2)\dot{x} + (l_1l_2 - l^2 + k^2)V' = 0. \tag{14}$$

该方程看起来像一个普通的运动方程，即带阻尼的牛顿方程。然而，其中存在差异，也会带来额外的结果。如果 V 是凸的（由于热力学相容性），并且熵产生非负，则这些系数均为非负。因此，该方程的平衡态是渐近稳定的。与拉格朗日动力学的比较表明，第二项负责阻尼；然而，其具体形式与我们的预期不同： $\dot{x}$ 的系数取决于 V，也取决于质量。在力学中，典型的阻尼项不应依赖于运动的主要特征参数，例如弹簧常数。最后一项通常被认为源自非耗散部分，但其中包含耗散系数 l、 l_2、l_1；由于耗散，力得到增强。然而，这种差异是定量上的，从纯粹的力学观点来看，细微差别并不容易被察觉。在通过带阻尼的哈密顿动力学进行力学解释时，很容易将耗散项与非耗散项混淆。

请注意，在 $f_x = 0$ （即 $l = 0$ 和 $l_1 = 0$）这一特殊情形下，耗散部分与非耗散部分之间的区别很容易看出：第二项表示经典阻尼，它与速度成负比。意料之外的新项源自矩阵 L 的左上角，它改变了动量的定义：如果 $l_1 \neq 0$，那么动量就不再仅与速度成正比。

4. Dissipation and Hamiltonian mechanics

可以尝试用另一种方式分离上述动力学中的耗散部分与非耗散部分。我们考察（8）和（9），并构造一个哈密顿量重构。可以通过以下拉格朗日量来实现：

$$L(\dot{x}, x) = -H(x, p) + \frac{1}{k}\left(p\dot{x} - \int f_x dp\right). \tag{15}$$

这里的拉格朗日量与纯力学中的情形一样，通过勒让德变换给出。因此（参见附录中的（42）—（44））：

$$\partial_{\dot{x}} L = \frac{p}{k}, \tag{16}$$

$$\partial_p H + \frac{f_x}{k} = \frac{\dot{x}}{k}, \tag{17}$$

$$\partial_x L = -\partial_x H - \frac{1}{k}\int \partial_x f_x dp, \tag{18}$$

其中，(17) 定义了 $p(\dot{x}, x)$，且与 (8) 完全对应。(16) 和 (18) 可合并得到如下欧拉-拉格朗日方程：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\partial_{\dot{x}} L \quad - \quad \partial_x L &= \frac{\dot{p}}{k} + \partial_x H + \frac{1}{k}\int \partial_x f_x dp \\ &= \frac{1}{k}\left(\int \partial_x f_x dp + f_p\right) = F_{diss}. \end{aligned} \tag{19}$$

这里，在第二个等式中我们用到了（9）；与（45）不同，方程右端并不为零，而是耗散贡献，记作

DiF。这就是哈密顿结构识别力学耗散部分的方式。

4.1. 类保守耗散力学。让我们再来看一下上文定义的简单哈密顿量 (10)。在这种情况下，耗散拉格朗日量为:

$$L(\dot{x},x) = -H(x,p) + \frac{1}{k}\left(p\dot{x} + l_1V'p + \frac{l}{2m}p^2\right) \tag{20}$$

计算方程 (16)-(18)，可得动量如 (13) 所示，因此拉格朗日量为

$$L(\dot{x},x) = \frac{m}{2k(k-l)}(\dot{x} + l_1V'(x))^2 - V(x). \tag{21}$$

相应的欧拉-拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt}\partial_{\dot{x}}L \quad - \quad \partial_x L = \frac{m}{k(k-l)}\left(\ddot{x} - (l_1^2V'' + \frac{k^2-kl}{m})V'\right) = 0 \tag{22}$$

附加的"耗散"部分，在 (19) 中记为 F_{diss} ，为

$$F_{diss} = \frac{m}{k(k-l)}\left((\frac{l_2}{m} + l_1V'')\dot{x} + (l_1^2V'' + \frac{kl-l^2+l_1l_2}{m})V'\right) \tag{23}$$

将 (22) 和 (23) 相加，得到 (14)，这与我们的预期一致。然而，我们可以看到，与最初基于熵产生的识别相比，结构中的理想元件和耗散元件混杂在一起。另一个值得注意的是，一般而言， DiF 无法由耗散势导出。

5. Special cases: the role of force

将势能的负导数，即力 $F = -V'$，代入系统（11）—（12）进行改写，颇有启发性:

$$m\dot{x} \quad = \quad l_1mF + (k-l)p, \tag{24}$$

$$\dot{p} \quad = \quad (k+l)F - \frac{l_2}{m}p. \tag{25}$$

消去动量后可得:

$$m\ddot{x} - ml_1\dot{F} + l_2\dot{x} - \det L\ F = 0. \tag{26}$$

这里，$\det L = l_1l_2 - l^2 + k^2$ 是 L的行列式。值得注意的是，（26）中的有效系数彼此相互依赖；只有原始热力学系数可以独立选取，否则平衡稳定性很容易遭到破坏 [3]。

5.1. 牛顿力学： $l_1 = 0$ **和** $l_2 = 0$。那么，（7）的第三个不等式要求 $l = 0$ 也如此。方程组（24）—（25）揭示了
哈密顿力学:

$$m\dot{x} \quad = \quad kp, \tag{27}$$

$$\dot{p} \quad = \quad kF, \tag{28}$$

而当尺度因子$k = 1$时，牛顿运动方程便会出现:

$$m\ddot{x} = F. \tag{29}$$

5.2. 阻尼力学： $l_1 = 0$。然后，根据 (7) 的第三个不等式，$l = 0$ 再次成立。方程组 (24)-(25) 化简为阻尼哈密顿力学的结构：

$$m\dot{x} = kp, \tag{30}$$

$$\dot{p} = kF - \frac{l_2}{m}p. \tag{31}$$

消去动量并令 $k = 1$，可得：

$$m\ddot{x} + l_2\dot{x} - F = 0. \tag{32}$$

如果惯性项可以忽略不计，该方程就是过阻尼的。

5.3. Eliezer-Ford-O'Connell-Verh 方程： $l_2 = 0$。然后，根据（7），$l = 0$ 与前述情形相同。方程组（24）—（25）化为以下形式：

$$m\dot{x} = l_1 mF + kp, \tag{33}$$

$$\dot{p} = kF. \tag{34}$$

像之前一样消去动量并令 $k = 1$，可得：

$$m\ddot{x} - ml_1\dot{F} - F = 0. \tag{35}$$

这是 Eliezer-Ford-O'Connell 辐射反作用方程的热力学形式，预期可消除失控解 [20, 21, 22]。

5.4. 亚里士多德共振： $l = k$。最后，让我们将（26）式中的各项重新组合如下：

$$m(\ddot{x} - l_1\dot{F}) + l_2\left(\dot{x} - \frac{\det L}{l_2}F\right) = 0. \tag{36}$$

这是一个过阻尼弛豫方程与另一个具有不同阻尼系数的方程的时间导数之和。将二者合并后，由于存在二阶时间导数，所得解未必是弛豫型的。可以预期，只有在第一项的影响可以忽略时（例如 $m = 0$），才会出现弛豫动力学。然而，如果 $k = l$，这两项具有相同的结构，因此即使质量较大，也能得到过阻尼弛豫动力学。这种层级结构类似于 Guyer-Krumhansl 方程中的傅里叶共振 [24]。

6. Dissipative momentum: experimental prediction

前述示例表明，热力学框架揭示了牛顿力学的一些出人意料且新颖的方面。尤其是，速度–动量关系（方程（13））包含一个与阻尼有关且依赖于力的部分。

通过实验验证这一性质，将有力支持热力学方法。例如，考虑一个阻尼简谐振子，其中$V(x) = Dx^2/2$，D 是弹簧常数。那么，方程（14）可简化为：

$$m\ddot{x} + (ml_1 D + l_2)\dot{x} + \det L D x = 0. \tag{37}$$

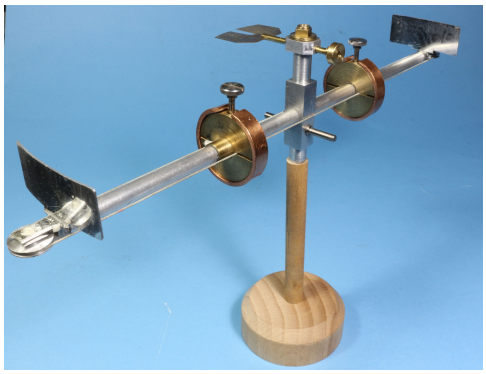


FIGURE 1. 扭秤臂。中央上部与光学读出装置相连。金属丝确保质量块能够平行移动。运行时，装置倒置悬挂。

ˆ 此外，进一步用有效弹簧常数 $D = (l_1 l_2 - l^2 + k^2)D$重新参数化，其中 $a :=$ l_1行列式L，并且 $b = l_2$，可得

$$m\ddot{x} + (m\hat{D}a + b)\dot{x} + \hat{D}x = 0. \tag{38}$$

ˆ ˆ 在这里，阻尼系数 $b = (mDa + b)$ 对惯性质量和弹簧常数呈线性依赖，这看起来是热力学框架的一项普适且可通过实验测量的预测。

在通常情况下，这种效应可能很微弱，因此需要灵敏的实验装置，其主要特点是惯性可变。我们构建了这样一种实验装置，它基于贝塞尔型扭秤；由于测试质量块可以沿扭秤臂移动，转动惯量也因此可变。图1展示了带有同步移动刻度盘的扭秤臂。

整个仪器如图2所示。扭丝位于上方的圆柱形部分，下方部分则是扭秤臂的真空室。下方是控制单元的箱体。

7. DISCUSSION

本文的核心结果是对牛顿力学进行热力学嵌入。理想的牛顿运动方程，是在受热力学第二定律支配的框架中，耗散趋于零时出现的极限。动量关系（13）中的 l_1 系数，是热力学方法所带来的原创结果：它是动量—速度关系中一个与耗散有关、依赖于力的部分。这一项在标准哈密顿力学中没有对应项，并得出了可通过实验检验的预测：如式（38）所示，阻尼系数同时与惯性质量和弹簧常数成线性关系。

给定一个耗散结构，可以很容易地确定哈密顿量的非耗散部分。然而，给定一个哈密顿结构后，如何加入正确的耗散项却远非显而易见。正如我们所见，纯粹的力学

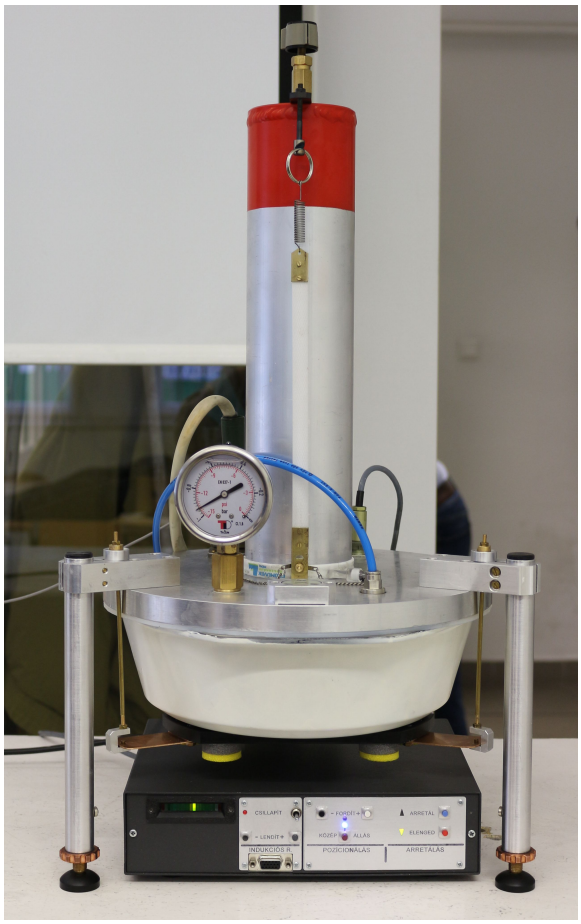


FIGURE 2. 真空室内转动惯量可变的扭秤。下方是电子控制单元。

分解很容易将理想贡献与耗散贡献混杂在一起，而热力学框架则从一开始就将二者分开。

7.1. 耗散的微观—宏观关系。 关于耗散的微观起源，人们普遍达成共识。人们广泛认为，基础理论是理想化的，而耗散则被解释为一种有效现象，归因于经过平均或粗粒化的微观动力学。尽管存在显而易见的数学和概念上的困难， [25], 只要知道微观组成部分及其动力学，就可以计算宏观耗散参数。然而，不能仅凭理想化的微观概念来解释耗散，因为首先必须对耗散本身有所定义。如果没有一种理论来界定这一概念，我们如何知道宏观演化方程确实具有耗散性？根据第二定律，哪个参数必须具有确定的符号?

微观耗散的具体性质和机制可能多种多样。动理学是微观解释最重要的候选理论，自玻尔兹曼以来，除“分子混沌假设”之外，还提出了若干超越

微观可逆性假设的思想。从实用角度看，此类解释的用途有限，因为所假定的微观结构（如碰撞粒子）仍然具有特殊性。

另一方面，根据我们的经验，宏观物理学的第二定律具有普遍有效性，不受具体微观结构的影响。例如，温度的普适性源于卡诺过程的效率具有普适性 [26, 27]。因此，理解宏观物理学而不依赖微观动力学和结构，是热力学研究中一个长久而重要的基本课题。分离出宏观物理学中具有普适性的部分——尤其是第二定律及相关热力学概念——是非平衡热力学的基本愿景 [28]。

本研究将非平衡热力学应用于最简单的力学情形。耗散型牛顿方程仅由第二定律推导得出，无须对微观机制作任何假设。由此得到的结构既包含熟悉的与速度成正比的阻尼（由 l_2 控制），也包含新颖的依赖于力的动量修正（由 l_1 控制）。前者通常被归因于碰撞或黏性微观过程，而后者没有标准的微观解释。它是真正的宏观热力学预测。各种微观机制可能是 l_1 项的根源——延迟效应、相互作用中的记忆效应，或非局域耦合——但热力学框架并不要求明确这些机制，无论哪种机制占主导地位，该框架都依然有效。

7.2. 展望。 这里将辐射反作用的 Eliezer-Ford-O'Connell 方程（35）还原为 $l_2 = 0$ 特例，其结构表明，热力学框架能够自然地涵盖通常由电动力学推导出的现象。Verh´as [23]首次分析了这一联系作为惯性效应的热力学背景。

关于耗散动量可能的微观起源，对 Ehrenfest 正则化和失配约简作出物理解释，或许能提供一些思路[29, 30]。

首次介绍这项工作时，只有实验装置可用。此后，测量工作已经开始。配有可变转动惯量的扭秤旨在检测方程（38）所预测的、依赖于质量和弹簧常数的阻尼。

热力学嵌入或许还会带来其他后果。与连续介质理论耦合的非局域扩展，可能是自然的下一步，可将当前的离散框架与场论描述联系起来。流变学、摩擦模型 [19], 以及辐射反作用的洛伦兹–亚伯拉罕–狄拉克方程，也值得进一步探索。

所提出的框架在若干方面也过于简化。例如，从以标量热力学内变量表示位置，过渡到三维欧几里得空间，这一步虽然直接明了，但远未构成恰当的伽利略协变理论。此外，耗散的广义速度–动量关系应结合力学中的几何概念来理解。

8. Acknowledgement

谨以此文纪念我的已故导师乔·维尔赫´斯，这一见解正是源自他。

作者感谢 NKFIH NKKP- Advanced 150038 项目和 COST Action FuSe CA24101 提供的交流支持。

本文所报告的研究是项目 TKP-6-6/PALY-2021 的一部分。该项目由匈牙利文化与创新部提供支持，资金来自国家研究、发展与创新基金，并依据 TKP2021-NVA资助计划实施。

9. Appendix: Pure mechanics

哈密顿力学由哈密顿量 $H(x,\ p)$ 生成。对于位于位置 x 且动量为 p 的单个质点，哈密顿方程为：

$$\dot{x} = \partial_p H, \tag{39}$$
$$\dot{p} = -\partial_x H, \tag{40}$$

其中，点表示时间导数，而 ∂_p 和 ∂_x 分别表示哈密顿量关于动量和位置的偏导数。拉格朗日量 $L(x,\ \dot{x})$ 通过勒让德变换得到：

$$L(x,\dot{x}) + H(x,p) = p\dot{x}. \tag{41}$$

因此

$$\partial_{\dot{x}} L = p, \tag{42}$$
$$\partial_p H = \dot{x}, \tag{43}$$
$$\partial_x L = -\partial_x H. \tag{44}$$

通过消去动量 p，得到欧拉-拉格朗日方程：

$$\frac{d}{dt}\partial_{\dot{x}} L - \partial_x L = \dot{p} + \partial_x H = 0. \tag{45}$$

让我们来观察这些方程的结构。(39) 即为 (43)，并利用它得到$p(\ \dot{x},\ \ x)$。(45) 中第一个等号处代入了 (42) 和 (44)，最后一个等号则用到了 (40)。请记住：哈密顿量是基本概念，而我们在 (41) 中通过勒让德变换定义了拉格朗日量。在哈密顿力学中，方程 (42)–(45) 是推论 [31]。

References

[1] T. Matolcsi. *Ordinary thermodynamics*. 匈牙利科学院出版社（Akad´emiai Kiad´o），布达佩斯，2005年。[2] W. M. Haddad. *A Dynamical Systems Theory of Thermodynamics*. 普林斯顿大学出版社，2019年。[3] Somogyfoki R.、A. Fam´a、L. Restuccia 和 V´an P. 热力学与动态稳定性：广义热传导理论。 *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*，50(1)：59–76，2025年。[4] C. Giorgi 和 F. Zullo. 连续介质热力学中热传导的非线性非局域模型。 *Continuum Mechanics and Thermodynamics*，38(2)：15，2026年。[5] I. Gyarmati. 热力学的波动方法与非线性理论中的若干问题。*Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*，2：233–260，1977年。[6] I. M

¨ *Rational Extended Thermodynamics* 37 *Springer Tracts in Natural Philosophy* 2 1998

uller 和 T. Ruggeri.，第 卷，。施普林格出版社，纽约等地，第 nd 版，。[7] D. Jou、J. Casas-V´azquez 和 G. Lebon. *Extended Irreversible Thermodynamics*. 施普林格出版社，柏林等地，1992年。第3版，修订版，2001年。[8] G. A. Maugin 和 W. Muschik. 含内变量的热力学。第一部分：一般概念。 *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*，19：217–249，1994年。

[9] G. A. Maugin 和 W. Muschik. 含内变量的热力学。第二部分：应用。 *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*，19：250–289，1994年。[10] R. Kov´acs、D. Madjarevic、S. Simic 和 P. V´an. 稀薄气体非平衡理论：内变量与扩展热力学。 *Continuum Mechanics and Thermodynamics*，32：307–325，2021年。arXiv:1812.10355 v2。[11] P. V´an 和 B. Nyíri. 哈密顿形式与变分原理的构造。，：–。[12] M. Grmela 和 H. C. ¨Ottinger. 复杂流体的动力学与热力学。第一部分：一般形式体系的发展。 *Physical Review E*，56(6)：6620–6632，1997年。[13] H. C. ¨Ottinger 和 M. Grmela. 复杂流体的动力学与热力学。第二部分：一般形式体系的示例。 *Physical Review E*，56(6)：6633–6655，1997年。[14] H. C. ¨Ottinger. *Beyond equilibrium thermodynamics*. Wiley-Interscience，2005年。[15] P. V´an、A. Berezovski 和 J. Engelbrecht. 内变量与动态自由度。 *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*，33(3)：235–254，2008年。cond-mat/0612491。[16] A. Berezovski 和 P. V´an. *Internal Variables in Thermoelasticity*. 施普林格，2017年。[17] K. Martin 和 L. Ropolyi. 类比：亚里士多德物理学与现代物理学。，( )：–。[18] M. Fabrizio、C. Giorgi 和 A. Morro. 连续介质物理学中非等温相场演化的热力学方法。 *Physica D: Nonlinear Phenomena* 214 2 144 156, ，( )：–。[19] N. Mitsui 和 P. V´an. 岩石摩擦的热力学方面。，：–。arXiv: . physics.geo-ph。[20] C. J. Eliezer. 氢原子与经典辐射理论。39(3)：173–180，1943年。[21] G.W. Ford 和 R.F. O'Connell. 电动力学中的辐射反作用及失控解的消除。 *Physics Letters A*，157(4-5)：217–220，1991年。[22] W. Price、M. Formanek 和 J. Rafelski. 辐射反作用与极限加速度。 *Physical Review D* 105 1 016024, 2022 ，( )：。[23] J. Verh´as. Gyarmati波动方法的一种应用。 *Acta Physica Hungarica*，66(1-4)：95–97，1989年。[24] V´an P.、A. Berezovski、F¨ul¨op T.、Gr´of Gy.、Kov´acs R.、Lovas ´A. 和 Verh´as J. 室温下的Guyer-Krumhansl型热传导。 *EPL*，118：50005，2017年。[25] M. C. Mackey. *Time's Arrow: The Origins of Thermodynamic Behaviour*. 施普林格出版社，纽约等地，1992年。[26] W. Thomson. 关于卡诺理论——热的动力——的论述；并给出了根据雷诺关于蒸汽的实验推导出的数值结果。 *Trans. Roy. Soc. Edinb.*，16 575，1849 541 113：–。重印于《数学与物理论文集》I(XLI)，第–155页，1882年。[27] P. V´an 和 B. Nyíri. 哈密顿形式与变分原理的构造。，：。[28] P. V´an 和 B. Nyíri. 迈向稳定演化的普适理论。，：。[28] P. V´an 和 B. Nyíri. 非平衡热力学：涌现与基本。，( )：。[29] K. Mlada、M. Pavelka 和 V. Klika. 路径积分形式中的失配约简。 *arXiv preprint arXiv:2506.20242*，2025年。[30] M. Pavelka、V. Klika 和 M. Grmela. 哈密顿系统的Ehrenfest正则化。*Physica D: Nonlinear Phenomena*，399：193–210，2019年。[31] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. 施普林格出版社，1978年。

[1]Department of Theoretical Physics, HUN-REN Wigner Research Centre for Physics, H-1525 Budapest, Konkoly Thege Miklós u. 29-33., Hungary;, and [2]Department of Energy Engineering Faculty of Mechanical Engineering Budapest University of , , , , „ Technology and Economics H-1111 Budapest Műegyetem rkp. 3. Hungary; [3]Montavid Thermodynamic Research Group, Hungary